数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 6 次作业

教师：黄定江
助教：刘文辉、徐艺玮

2023 年 12 月 15 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 6 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

第 6 次作业

提交截至时间：**2023/12/19 下周二 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. *(互信息)* 假设 $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \cdots \to X_n$ 是一个马尔科夫链，即

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = p\left(x_1\right) p\left(x_2 \mid x_1\right) \cdots p\left(x_n \mid x_{n-1}\right)$$

试化简 $I\left(X_1; X_2, \ldots, X_n\right)$

习题 2. *(通过 KL 散度理解 MLE)* 假设 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ 来自密度为 $p(\mathbf{x})$ 的分布 P，试说明如果采用具有密度函数 $q_\theta(\mathbf{x})$ 的分布族 Q_θ 来计算 *MLE*，那么 *MLE* 将试图找到在 *KL* 散度意义上最接近真实分布 P 的分布 Q_θ 。
即证明

$$arg \max_\theta \prod_{i=1}^{n} q_\theta\left(\mathbf{x}_i\right) \Longleftrightarrow \arg\min_\theta D_{\mathrm{kl}}\left(P \| Q_\theta\right)$$

习题 3. 设某种电子器件的寿命（以 h 计）T 服从双参数的指数分布，其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(t-c)/\theta} & t \geq c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c, \theta (c, \theta > 0)$ 为未知参数．自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验．设它们的失效时间依次为 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$。

(1) 求 θ 与 c 的最大似然估计值.

(2) 求 θ 与 c 的矩估计量

习题 4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad 0 < \theta < +\infty$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本。

(1) 验证 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta} = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

(2) 证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

习题 5. 假设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ (σ^2 已知), $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 由过去的经验和知识, 我们可以确定 μ 的取值比较集中在 μ_0 附近, 离 μ_0 越远, μ 取值的可能性越小, 于是我们假定 μ 的先验分布为正态分布

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}\left(\mu - \mu_0\right)^2\right] \quad \left(\mu_0, \sigma_\mu \text{已知}\right)$$

求 μ 的后验概率分布。

习题 6. 假设总体 $X \sim P(\lambda), X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 假定 λ 的先验分布为伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 求 λ 的后验期望估计（平方损失下的贝叶斯估计）。