数学基础第二次作业

10215501419 姚修齐

习题1

记$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

1. $\because B$是有向图的关联矩阵，$\therefore$ B的每一列中都且仅有一个元素为 -1，一个元素为 1，其余元素均为 0;
   又 $\because x$ 属于 B 的左零空间 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$，$b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + \cdots + b_{mi}x_m = 0$；
   令第 j 个元素为 1，第 k 个元素为 -1，此时必有 $x_j = x_k = c, c \in \mathbb{R}$。
   又 $\because$ 该有向图连通，$\therefore x = c(1,1,\cdots,1)^T$，$\therefore B$ 的左零空间维度为1，且有 $Null(B^T) = span1$，得证。
2. $dim(Col(B^T)) = rank(B) = rank(B^T) = m-1$，
   记$B^T_{n\times m} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，由1.知 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m = 0$，即 行向量中任一个均可以由其余 $m-1$ 个线性表示，$\therefore$ 任意 $m-1$ 个行向量线性无关，可张成行空间，即 $Col(B^T)$ 可由 B^T 中任意 $m-1$ 个列向量生成，得证。
3. 由2.知$dim(Col(B^T)) = dim(Col(B)) = m-1$，又 T 是 G 的生成树，$\therefore n = m-1$，B 满秩，$Col(B)$可由 T 的关联矩阵的 $m-1$ 个列向量生成，得证。
4. $\because dim(Col(B)) + dim(Null(B)) = n$，$dim(Col(B^T)) = m-1$，$\therefore dim(Null(B)) = n-m+1$；
   若 B 中的 $m-1$ 条边可以连通全图，那么其余 $n-m+1$ 条边可以去掉，生成 $n-m+1$ 个小圈，得证。

习题2

记 $x = (1,1,1)^T$，其投影目标子空间的基底 $b = (1,-1,1)^T$；

$\therefore x$ 的正交投影 $\pi_U(x) = b\dfrac{b^Tx}{\parallel b \parallel^2} = \dfrac{1}{3}(1,-1,1)^T$。

习题4

将原矩阵变换为上三角矩阵：

$$U=\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix},\therefore L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\therefore \text{有 } LU \text{ 分解}\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\-5&-3&4&-4\\0&1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}。$$

习题5

该 $Gauss$ 变换可表示为： $BA=$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-\frac{a_{21}}{a_{11}}&1&0&\cdots&0\\-\frac{a_{31}}{a_{11}}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{11}}&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix};$$

记 A_2 第 i 行第 j 列元素 $a'_{ij}=-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}+a_{ij},a'_{ji}=-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}+a_{ji}$ ；

又 $\because A$ 对称，$\therefore a_{ij}=a_{ji}$ ，$\therefore a'_{ji}=a'_{ij}$ ，$\therefore A_2$ 为对称矩阵，得证。

习题6

$\because A,B$ 为上三角矩阵，$\therefore \forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足 $i>j$ ，有 $a_{ij}=b_{ij}=0$；
记 $C=AB$ ，则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}bkj$， $c_{ij}\equiv 0$ ，即 C 为上三角矩阵，得证。

习题7

$\alpha_1=(1,2,2)^T,\therefore a_1=\|\alpha_1\|_2=3$;

$\therefore \omega_1=\dfrac{\alpha_1-a_1e_1}{\|\alpha_1-a_1e_1\|_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$ ，

$$\therefore H_1 = I - 2\omega_1\omega_1^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\alpha_2 = (0,1)^T, \therefore a_2 = \| \alpha_2 \|_2 = 1$;

$$\therefore \omega_2 = \frac{\alpha_2 - a_2 e_2}{\| \alpha_2 - a_2 e_2 \|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T,$$

$$\therefore \widetilde{H_2} = I - 2\omega_2\omega_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \therefore H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H_2(H_1 A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

;

$$Q = H_1 H_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

10