数据科学与工程数学基础

- 第四次作业

习题1

- 左零空间

关联矩阵的性质就是每一列的元素有且只有一个1，一个-1，剩下全是0，也就是说解空间当且仅当所有元素相等 需要关联联通性

$$A^T=(a_1,a_2,\dots,a_m)^T, \text{其中} a_i \text{为列向量, 且} a_i^T x=0, x\in span\{(1,1,\dots,1)^T\} \tag{26}$$

因此左零空间的维数为1

- 列空间

由$dim(Col(B))+dim(Null(B^T))=m$可知，$B$的列空间的维数是$m-1$

当T是B的一个生成树的时候，用数学归纳法证明：（由于没有学过离散数学，只能尽可能用文字讲清楚了）

生成树是在无向图当中定义的，因此所有列向量满足只有两个元素是1，剩下的元素为0

1.图只有两个点的时候，很显然满足性质，而且只需要T的一条边就可以生成该列向量（二者相等），满足性质，

2.假设n=k的时候成立，当n=k+1的时候，由于前者n=k的时候已经是一棵生成树，要让这个k+1的点**加入**生成树，必须要引入一条包含该点的边（这个点由于不在之前的生成树内，因此无法用前面k-1条边（T的列向量））线性表示，而且由于图**不能出现环路**，所以只能引入这一条边，所以这个时候需要k条边来表示

综合1，2可知，当T是B的一棵生成树的时候，B的列空间可以由T的关联矩阵的m-1个列向量表示

- 行空间

1.先证明任取m-1个行向量是线性无关的,$A=(a_1,\dots,a_m)^T$

证明：（反证法），假设这m-1行是线性相关的，那么存在一组不是全0的系数c_i，满足$\sum_i^{m-1}c_ia_i=\mathbf{0}$

这个时候在等式的左右两边补上$0a_m$项，即构成了左右两边都是行空间，之后再把这一项右移，得到

$\sum_i^{m-1}c_ia_i=\mathbf{0}a_m$，但是$a_m$并不再$span\{(a_1,\dots,a_{m-1})^T\}$当中，所以$c_i=0$，和假设矛盾

因此任取m-1行都是线性无关的

2.接下来对于$\sum_i^{m-1}c_ia_i=a_m$的证明

从定义出发，对于1～m-1个行向量进行分类(取关联矩阵值的相反数)

如果第i个点对于第m个点没有连通的边，$c_i=0$

如果第i个点对于第m个点是连通的边的终点，$c_i=1$

如果第i个点对于第m个点是连通的边的终点，$c_i=-1$

即可证明$a_m\in\{(a_1,\dots,a_{m-1})\}$，即B的行空间可以由任意m-1个行向量表示

- 零空间

由$dim(Col(B^T))+dim(Null(B))=n$可知，$Null(B)$的列空间的维数是$n-m+1$

（圈真的不会证明，没学过） 理解

习题2

由一维正交投影矩阵可知:

$$P_\pi = \frac{bb^T}{\|b\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

那么向量$(1,1,1)^T$在一维子空间$span(1,-1,1)^T$上的正交投影为:

$$\pi_{\mathbb{U}}x = P_\pi x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,-1,1)^T \tag{28}$$

习题4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$E_{31}A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$E_{42}E_{31}A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \tag{31}$$

$$L = E_{31}^{-1}E_{42}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = LU \tag{32}$$

习题5

$$\text{证明：} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}, \text{其中} a_1 = (a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^T \tag{33}$$

$$\text{由} A = A^T, \text{可以得到} \tilde{A}_2 = \tilde{A}_2{}^T \tag{34}$$

$$\text{由于第一步高斯消元把第一列置零，可以得到消元矩阵} E_{n1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & I_{n-1} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\text{那么} E_{n1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \text{可以得到} A_2 = \tilde{A}_2 - a_1a_1^T, \text{是对称矩阵} \tag{36}$$

习题6

$$
\begin{aligned}
&\text{证明：(数学归纳法)} \qquad (37)\\
&1.\text{对于}n=1\text{的情况来说，}U_1U_2=U_3\text{显然成立} \qquad (38)\\
&2.\text{假设结论对于}n=k\text{的情况成立，其中}k\in\mathbb{N}^+\text{，那么当}n=k+1\text{的时候：} \qquad (39)\\
&U_{k+1}=\begin{pmatrix} a_{11} & A_{k1}\\ 0 & U_k\end{pmatrix}\text{，其中}A_{k1}=(a_{12},\ldots,a_{1k+1}) \qquad (40)\\
&U_{k+1}U'_{k+1}=\begin{pmatrix} a_{11} & A_{k1}\\ 0 & U_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & B_{k1}\\ 0 & U'_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}B_{k1}+A_{k1}U'_k\\ 0 & U_kU'_k\end{pmatrix}=U\text{，是上三角矩阵} \qquad (41)\\
&\text{综合}1,2\text{可知，上三角矩阵与上三角矩阵的乘积还是上三角矩阵} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

习题7

先把列向量$\alpha 1=(1,2,2)^T$通过Householder变换反射到e_1上：

$$
\alpha_1=(1,2,2)^T, a1=\|\alpha_1\|_2=3 \tag{43}
$$

$$
\omega_1=\frac{\alpha_1-a_1e_1}{\|\alpha_1-a_1e_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T \tag{44}
$$

$$
H_1=I-2\omega\omega^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} \tag{45}
$$

$$
H_1A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{46}
$$

再对$\beta_2=(0,1)^T$反射到e_2上，由于是e_3反射到e_2，可以通过行互换得到Householder变换

$$
H_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{47}
$$

$$
H_2H_1A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\\ 0\end{pmatrix} \tag{48}
$$

由此可以得到A的Householder QR分解

$$
Q=H_1H_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \tag{49}
$$

$$
A=Q\begin{pmatrix}R\\ 0\end{pmatrix} \tag{50}
$$

10