

温兆和. 10205501432. 数学基础作业3.

1. 证: 考虑关联矩阵的秩.

由于在关联矩阵中每一列只有一个1, 一个-1, 其余全为0.  
故其所有行向量直接相加为零向量

故其秩小于  $m$ .

假设关联矩阵中线性相关的最小行数为  $l < m$ .

由行向量的线性相关性和这一行组成的矩阵的列向量要全为0. 要全为0, 必须有一个1, 一个-1, 其余都是0.

现对关联矩阵  $B$  进行行、列交换:

将这一行调整到  $B$  的前一行.

将这一行组成的矩阵中不为0的列调整到  $B$  的左边, 为0的列调整到  $B$  的右边.

由此得到新的矩阵  $B' = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

由关联矩阵的定义, 对关联矩阵进行行、列交换只是给图中的行、列重新编号, 故  $B, B'$  表示相同连通图. 设  $P$  尺寸为  $l \times r$ . 由  $B'$  知:

该图中前  $r$  条边只与前  $l$  个顶点有关, 后  $(n-r)$  条边只与后  $(m-l)$  个顶点有关, 与连通图前提矛盾, 故假设不真!

故在关联矩阵  $B$  中, 线性相关的最小行数为  $m$ .

综上,  $\text{rank}(B) = m - 1$ .

由于矩阵的行秩, 列秩相等, 均等于矩阵的秩.

由行空间, 列空间定义:  $\text{rank}(\text{Col}(B)) = \text{rank}(\text{Col}^T(B)) = m - 1$

由线性代数基本定理:  $\text{rank}(\text{Null}(B)) = n - \text{rank}(\text{Col}^T(B))$



$$= n - m + 1.$$

$$\text{rank}(\text{Null}^T(B^T)) = m - \text{rank}(\text{Col}(B)) = 1.$$

由于 $B$ 的列向量中只有一个 $1$ ，一个 $-1$ ，其余元素全为 $0$ 。

故 $1$ 必为 $Bx=0$ 的分，又。

$$\text{又: } \text{rank}(\text{Null}^T(B^T)) = 1. \text{ 故 } \text{Null}(B^T) = \text{span}\{f\}$$

由于图是连通的，从 $B$ 中每一行都会有一些 $1$ 或 $-1$ 。

从 $B$ 中随便去掉一行，剩下的矩阵的列中会有列只乘一个 $1$ （或 $-1$ ），其余全为 $0$ 。故剩下的 $(m-1)$ 行必线性无关。

故 $\text{Col}(B^T)$ 可由 $B^T$ 任意 $(m-1)$ 个列向量组成。

在生成树中，每个节点至多有一个父节点，故在其关联矩阵中，每行至多有一个 $-1$ ，其余全是 $0$ 或 $1$ 。

假设 $T$ 的第一个节点是根结点，它的关联矩阵是这样的：

$$A = \begin{matrix} & a_1 & \dots & a_i & \dots & a_k \\ \begin{matrix} k_j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & -1 & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

~~由于第一行除了 $0$ 全是 $1$ ，必有假设 $\exists l_1, \dots, l_k$ 不全为 $0$ 。~~

$$\text{s.t. } l_1 a_1 + \dots + l_k a_k = 0.$$

由于 $A$ 的第一行除了 $0$ 全是 $1$ ， $\exists l_i < 0$ 。

假设 $a_{ii} = 1$ ， $a_{ji} = -1$ 。由于第 $j$ 行中除了第 $i$ 列的 $-1$ ，其余全是 $0$ 或 $1$ 。又 $l_i \cdot (-1) > 0$ 。

$$\text{故 } l_1 a_{j1} + \dots + l_i a_{ji} + \dots + l_k a_{jk} > 0.$$

与 $l_1 a_1 + \dots + l_k a_k = 0$ 矛盾。





故假设不真!

故  $G$  的生成树  $T$  的关联矩阵的列向量线性无关  
故  $\text{Col}(B)$  可由  $T$  关联矩阵的  $(m-1)$  个列向量生成.

$$2.4) : P_n = \frac{bb^T}{b^T b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{ul}(x) = P_n x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4.4) : \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = U \text{ 故 } A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$



$$\text{又 } L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

证: 假设在高斯消去中, 从第2行起, ~~第i行~~ 都被加<sup>上</sup>  $k_i$  倍第1行.

对  $\forall i, j = 2, \dots, n$  都有.

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} + k_i a_{1j} \\ a_{ji}' = a_{ji} + k_j a_{1i} \\ k_i = -\frac{a_{1i}}{a_{11}} \\ k_j = -\frac{a_{1j}}{a_{11}} \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{ji}' = a_{ji} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{1i} \end{cases}$$

由  $A$  的对称性,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{1i} = a_{1i}$ ,  $a_{1j} = a_{1j}$ .

故对  $\forall i, j = 2, \dots, n$  都有  $a_{ij}' = a_{ji}'$ .



故: 左高斯消去之后,  $A_2$  仍是对称阵.

6. 证: 考虑上三角阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$

对  $\forall i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$  且  $i > j$ .

由于  $A$  的第  $i$  行前  $(i-1)$  个元素为 0.

$B$  的第  $j$  列后  $(n-j)$  个元素为 0.

设  $C = A \times B$ .

则  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \times 0 + \sum_{k=i+1}^n 0 \times 0 + \sum_{k=i}^n 0 \times a_{ik} = 0$ .

故对  $\forall i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$  且  $i > j$ , 有  $c_{ij} = 0$ .

故  $C = A \times B$  仍是上三角阵.

7. 证: 令  $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $a_1 = \|\alpha_1\|_2 = 3$

$w_1 = \frac{\alpha_1 - a_1 e_1}{\|\alpha_1 - a_1 e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1)^T$ .

$H_1 = I - 2 w_1 w_1^H = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

令  $\beta = (0, 1)^T$ ,  $b_2 = \|\beta\|_2 = 1$ .



$$w_2 = \frac{b_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1}{\|b_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1)^T$$

$$H_2 = I - 2w_2 w_2^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2(H_1 A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 H_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{RP: } A = QR$$

LO

