第六次作业

习题一、解：利用正规化方法求LS问题，即求解方程 $A^TAX=A^Tb$

$$A^TA=\begin{bmatrix}35&44\\44&56\end{bmatrix}\quad A^Tb=\begin{bmatrix}9\\12\end{bmatrix}\quad \text{易得 } X=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

习题二、解：利用正规化方法，求 $A^TAX=A^Tb$

$$A^TA=\begin{bmatrix}6&3&1&1\\3&9&3&3\\1&3&1&1\\1&3&1&1\end{bmatrix}\quad A^Tb=\begin{bmatrix}4\\3\\1\\1\end{bmatrix}\quad \cancel{\text{可得 } X=}$$

对A^TA初等行变化，$A^TA\to\begin{bmatrix}1&3&1&1\\0&3&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

齐次方程通解 $k_1\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{bmatrix}$

非齐次方程特解 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{15}\\0\end{bmatrix}$

故 $A^TAX=A^Tb$ 通解

$$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{1}{3}k_1-\frac{1}{3}k_2+\frac{2}{15}\\k_1\\k_2\end{bmatrix}\quad k_1,k_2\in R$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{1}{3}k_1-\frac{1}{3}k_2+\frac{2}{15}\\k_1\\k_2\end{bmatrix}$$

习题三、证明：取A的列向量为 $\alpha_1\cdots\alpha_n$

$x=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ $\quad Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

要证 $AXA=A$ 只需证 $AX\alpha_k=\alpha_k\ (k=1,\cdots n)$ ①

若 $b=\alpha_k$，那么存在 $X\in R^{n\times m}$ 使得 $x=Xb=X\alpha_k$

此时要证①式，只需证 $Ax=\alpha_k$ ② 而 x是 $\|Ax-b\|_2=\|Ax-\alpha_k\|_2$ 最小二乘解

$$Ax-\alpha_k=x_1\alpha_1+\cdots+x_{k-1}\alpha_{k-1}+(x_k-1)\alpha_k+\cdots+x_n\alpha_n$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{21}+\cdots+x_{k-1}\alpha_{k-1,1}+(x_k-1)\alpha_{k,1}+\cdots+x_n\alpha_{n1}\\x_1\alpha_{12}+\cdots+x_{k-1}\alpha_{k-1,2}+(x_k-1)\alpha_{k,2}+\cdots+x_n\alpha_{n2}\\\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

根据范数的非负性，要使 $\|Ax-\alpha_k\|_2$ 最小，只需使 $x_1=\cancel{x_{k-1}}=\cdots=x_{k-1}=x_{k+1}=\cdots=x_n=0$

而 $x_k-1=0\quad x_k=1$

即 $x=[\underbrace{0\ 0\cdots0}_{k-1个}\ 1\ 0\ 0\cdots0]^T$

此时 $Ax = \alpha_k$ ②式得证，可得 $AXA = A$.

根据LS的正规法方法 $A^TAx = A^Tb$ 而 $A^TAx = A^TAXb$

$I_n = (e_1 \cdots e_n)$ 取将 $b = e_k$ $(k = 1 \cdots n)$ 代入，可得

$A^TAXe_1 = A^Te_1$ $A^TAXe_2 = A^Te_2$ $\cdots$ 即

$A^TAX(e_1 \cdots e_n) = A^T(e_1 \cdots e_n) \Rightarrow A^TAX = A^T$

等式两边左乘 X^T 有 $X^TA^TAX = X^TA^T$

$(AX)^T(AX) = (AX)^T$ $AX = ((AX)^T)^T = (AX)^T(AX) = (AX)^T$

习题四，证明：$\|A(x+\alpha w) - b\|_2^2 = (\|Aw\|_2^2 \cdot)\alpha^2 + (2w^TA^T(Ax-b))\cdot\alpha$

$+ \|Ax-b\|_2^2$

设 w 为常向量，α 为变量。该式为与 α 相关的二次方程或一次方程

在方程为二次方程时 由于 $x \in X_{LS}$ ~~可得~~，$\|Aw\|_2^2 \geq 0$.

可得 α 为0时 该方程取得最小值，即

$\alpha = 0 = \dfrac{2w^TA^T(Ax-b)}{-2\alpha^2\|Aw\|_2^2}$ 由于 $\|Aw\|_2 \neq 0$ 可得

$w^TA^TAx = w^TA^Tb$

$w^TA^T(Ax-b) = 0$

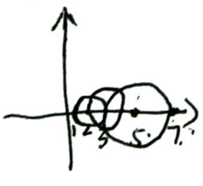
分别取 ~~$w = e$~~ $w = e_k$ $k = 1 \cdots n$ 易得 $A^TAx = A^Tb$

在方程为一次方程时 $w \in Null(A)$ $Aw = 0$ $w^TA^T = 0$

$\|A(x+\alpha w) - b\|_2^2 = \|Ax-b\|_2^2$ 无讨论意义

习题五，(i) 证明：$A^T = A$. A的特征值均为实数

运用圆盘定理 $D_1: |\lambda - 5| \leq 2$. $D_2: |\lambda - 2| \leq 1$ $D_3: |\lambda - 3| \leq 1$



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为实数 可得 $\lambda_1 \leq 7$

而 $\lambda_3 \geq 1$ 故 $\dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|} \leq \dfrac{7}{|\lambda_3|} \leq 7$

(ii) 附件提交。

```
#你可以把我的代码复制粘贴再运行
#使用幂法和反幂法
#使用瑞利商加速对幂法进行优化
#运行结果
#lv1l/lv3l约等于 3.4823165803506173
#优化前迭代次数分别为:33 和 41
#lv1l/lv3l约等于 3.4823165806525163
#优化后迭代次数分别为:19 和 23

import numpy as np
def powermethod(A,v0,eps):
    u=v0
    flag=1
    last_val=0
    n=0
    while flag:
        n=n+1
        v=A*u
        val=v[np.argmax(np.abs(v))]
        u=v/val
        if (np.abs(val-last_val)<eps):
            flag=0
        last_val=val
        #print(np.asarray(u).flatten(),val)
    #print('主特征值:',val)
    #print('主特征值对应的特征向量:',np.asarray(u).flatten())
    #print('迭代次数:',n)
    return float(val),n

def raypower(A,v0,eps):
    u=v0
    flag=1
    last_val=0
    n=0
    while flag:
        n=n+1
        v=A*u
        t=((A*u).T*u)/(u.T*u)
        val=t[0,0]
        u=v/val
        if (np.abs(val-last_val)<eps):
            flag=0
        last_val=val
        #print(np.asarray(u).flatten(),val)
    #print('主特征值:',val)
    #print('主特征值对应的特征向量:',np.asarray(u).flatten())
    #print('迭代次数:',n)
    return float(val),n
```

```
if __name__ == '__main__':
    A=np.matrix([[5,-1,1],[-1,2,0],[1,0,3]], dtype='float')
    v0=np.matrix([[1],[1],[1]], dtype='float') #v0 随机取
    eps=1e-10
    v1,n1=powermethod(A,v0,eps) #主特征值
    v3,n2=powermethod(A.I,v0,eps)
    v3=1/v3
    #print(v1,v3)
    print("|v1|/|v3|约等于",v1/v3)
    print("优化前迭代次数分别为:{}和{}".format(n1,n2))
    v11,n3=raypower(A,v0,eps)
    v31,n4=raypower(A.I,v0,eps)
    v31=1/v31
    print("|v1|/|v3|约等于",v11/v31)
    print("优化后迭代次数分别为:{}和{}".format(n3,n4))
```