数据科学与工程数学基础 作业2 _

2021年3月16日 上午

15k 字 124 分钟

一

> 1. 设 A, B 为两可逆矩阵，令 $X=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 求 X^{-1}。

由 A, B 为两可逆矩阵可知 A, B 均为方阵

设 $A \in M^{m\times m}, B \in M_{n\times n}$

故由

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = I_{(m+n)\times(m+n)}$$

可知

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

二

求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对原方程组的增广矩阵做行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & -7 & -10 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+6r_2]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

三

证明：$\mathbb{R}^{m\times m}$ 中的对称矩阵按照矩阵的加法与数乘在数域 $\mathbb{R}$ 上构成一个线性空间。(如果矩阵 A 是对称矩阵，则有 $A^T = A$。)

记 $R^{m\times m}$ 上对称矩阵的全体为 $S^{m\times m}$

由 $(R^{m\times m}, +, \cdot)$ 为一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间可知

任取 $M, N, P \in R^{m\times m}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，有

- $M + N = N + M$
- $(M+N)+P = M+(N+P)$
- 存在 $\mathbf{0} \in R^{m\times m}$ 使得 $M + \mathbf{0} = M$
- 对于任一个 M，存在 $Q \in R^{m\times m}$ 使得 $M + Q = \mathbf{0}$
- 存在 $1 \in \mathbb{R}$，使得 $1 \cdot M = M$
- $(k_1 \cdot k_2) \cdot M = k_1 \cdot (k_2 \cdot M)$
- $(k_1 + k_2) \cdot M = k_1 \cdot M + k_2 \cdot M$
- $k_1 \cdot (M+N) = k_1 \cdot M + k_1 \cdot N$

由于 $S^{m\times m} \subset R^{m\times m}$，故 $S^{m\times m}$ 对于矩阵加法及 $\mathbb{R}$ 上的数乘运算同样满足以上性质

又 $\mathbf{0} \in S^{m\times m}$，且任取 $A = (a_{ij})_{m\times m} \in S^{m\times m}$，显然 $-A = (-a_{ij})_{m\times m} \in S^{m\times m}$

因此我们仅需证明 $S^{m\times m}$ 对矩阵加法和数乘封闭即可

任取 $A, B \in S^{m\times m}, k \in \mathbb{R}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & b_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{1n}+b_{2n} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{12} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{1n} & ka_{2n} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}$$

易见 $A + B, kA \in S^{m\times m}$

故 $R^{m\times m}$ 中的对称矩阵按照矩阵的加法和数乘在数域 $\mathbb{R}$ 上构成一个线性空间

四

令
$\beta=(1,2,1,1)^T,\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$
，试将向量 β 表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+2\cdot r_4\\r_2+2\cdot r_4}]{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{5}{4}\\0&-2&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&-2&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{5}{4}\\0&-2&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&-2&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

故

$$\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$$

五

设 $\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\epsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\epsilon_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},a=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$，试求 a 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ 下的坐标。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&-2\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&-2\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_4-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&-2\\0&0&-2&-2&1\\0&0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&-2\\0&0&-2&-2&1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+2\cdot r_4\\r_3+2\cdot r_4}]{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{1}{2}\\0&-2&0&0&-1\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&\frac{1}{2}\\0&-2&0&0&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&-2&0&0&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故

$$a=\epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2-\epsilon_3+\frac{1}{2}\epsilon_4$$

即 a 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ 下的坐标为

$$(1,\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$$

六

记数域 $\mathbb{R}$ 上的对称矩阵按照矩阵的加法与数乘构成的线性空间为 V。证明：映射
$\sigma_Q:V\to V,\sigma_Q(A)=Q^TAQ$ 为线性映射。其中 Q 为正交矩阵，即 $Q^TQ=I$。

任取 $A,B\in V,k_1,k_2\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\sigma_Q(k_1\cdot A+k_2\cdot B) &= Q^T(k_1\cdot A+K_2\cdot B)Q \\
&= k_1\cdot Q^TAQ+k_2\cdot Q^TBQ \\
&= k_1\cdot\sigma_Q(A)+k_2\cdot\sigma_Q(B)
\end{aligned}
$$

故映射 σ_Q 对 V 中的两种运算保持不变

由此可知，$\sigma_Q:V\to V,\sigma_Q(A)=Q^TAQ$ 为线性映射

七

> 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$ 对应二次型的标准型。

矩阵 A 对应的二次型为 $f=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

下用配方法将其化为标准型

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2-x_3)^2-4x_2x_3-x_2^2-x_3^2 \\
&= (x_1+x_2-x_3)^2-(x_2+2x_3)^2+3x_3^2
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases}
y_1=x_1+x_2-x_3 \\
y_2=x_2+2x_3 \\
y_3=x_3
\end{cases}
$$

解得

$$
\begin{cases}
x_1=y_1-y_2+3y_3 \\
x_2=y_2-2y_3 \\
x_3=y_3
\end{cases}
$$

由此可得标准型为 $f=y_1^2-y_2^2+3y_3^2$，所用变换矩阵为

$$
C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

八

> 试判断下列哪些矩阵是正定矩阵。
>
> $$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

由

$$
D_{11}=2>0,D_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0
$$

可知 $A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ 的顺序主子式均大于0，因此 A_1 是正定矩阵

由

$$
D_{21}=5>0,D_{22}=\begin{vmatrix}5&1\\1&4\end{vmatrix}=19>0,D_{23}=\begin{vmatrix}5&1&0\\1&4&0\\0&0&7\end{vmatrix}=133>0,D_{24}=\begin{vmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{vmatrix}=456>0
$$

可知 $A_2=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}$ 的顺序主子式均大于0，因此 A_2 是正定矩阵

由

$$D_{32}=\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7<0$$

可知 $A_3=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$ 的顺序主子式不全大于0，因此 A_3 不是正定矩阵

由

$$D_{42}=\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7<0$$

可知 $A_4=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ 的顺序主子式不全不大于0，因此 A_4 不是正定矩阵

九

> 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$ 的特征值与对应的特征向量。

由

$$\begin{aligned}|\lambda I-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda-3)-16(\lambda-1)\\&=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)=0\end{aligned}$$

解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$

对于 $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&4&-4\\0&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{6}\cdot r_2}\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2\cdot r_2}\begin{pmatrix}0&-4&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot r_1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，A 的属于 λ_1 的特征向量全体为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0\in\mathbb{R})$

对于 $\lambda_2=5$

$$\begin{pmatrix}4&-4&-2\\0&8&-4\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot r_2}\begin{pmatrix}4&-4&-2\\0&2&-1\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2\cdot r_2]{r_1+2\cdot r_2}\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot r_2]{\frac{1}{4}\cdot r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_2=(2,1,2)^T$，A 的属于 λ_2 的特征向量全体为 $k_2\alpha_2(k_2\neq 0\in\mathbb{R})$

对于 $\lambda_3=-5$

$$\begin{pmatrix}-6&-4&-2\\0&-2&-4\\0&-4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2\cdot r_2]{r_1-2\cdot r_2}\begin{pmatrix}-6&0&6\\0&-2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\cdot r_2]{-\frac{1}{6}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_3=(1,-2,1)^T$，A 的属于 λ_3 的特征向量全体为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0\in\mathbb{R})$

十

> 设已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，且 $x=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^{-1} 的一个特征向量，求 k。

设 $x=(1,k,1)^T$ 为 A^{-1} 属于 λ_0 的一个特征向量

则 x 为 A 属于 $\frac{1}{\lambda_0}$ 的一个特征向量

由

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

可知 $\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = 1$（二重根）

对于 $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\alpha_1 = (1,1,1)^T$，A 的属于 λ_1 的特征向量的全体构成的集合为 $E_1 = \{k_1\alpha_1 : k_1 \neq 0 \in \mathbb{R}\}$

若 $x \in E_1$，则 $k = 1$

对于 $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

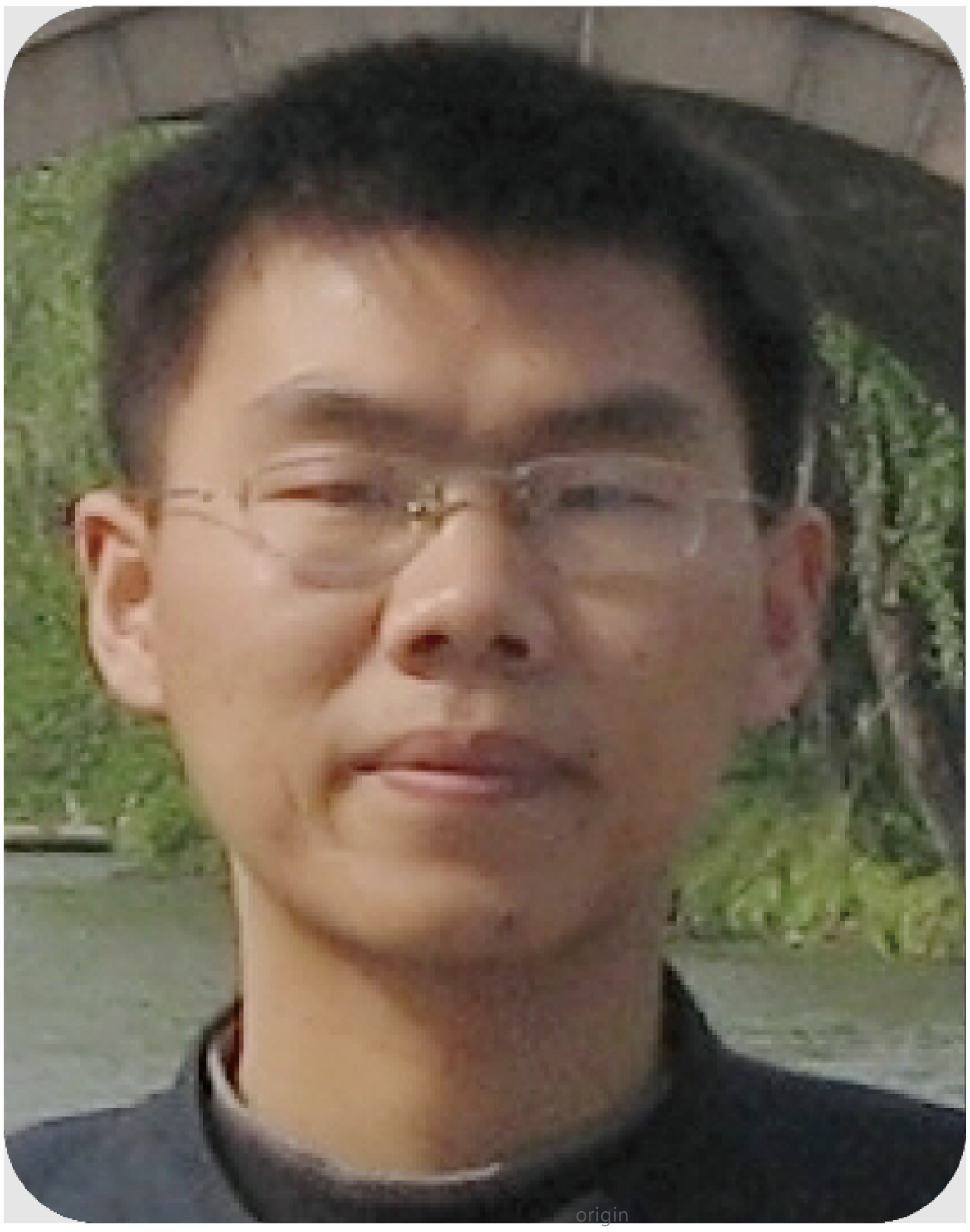
解得 $\alpha_2 = (-1,0,1)^T, \alpha_3 = (-1,1,0)^T$，$A$ 的属于 λ_2 的特征向量的全体构成的集合为
$E_2 = \{k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 : k_2, k_3 \in \mathbb{R} \wedge (k_2 \neq 0 \vee k_3 \neq 0)\}$

若 $x \in E_2$，则 $k = -2$

十一

> 使用Python将一张图片旋转一定角度。 提交时需要提交原来的图片和旋转后的图片以及补全的代码。

原图片：



逆时针旋转：

fig1

顺时针旋转：

fig2

实现代码：

```python
from PIL import Image
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
import numpy as np

matplotlib.use("TkAgg")
img_origin = Image.open('origin.jpg')
img_origin = img_origin.convert('RGB')
img = np.array(img_origin)
theta = 30/180*np.pi
cos_theta = np.cos(theta)
sin_theta = np.sin(theta)
center_i = len(img)/2
center_j = len(img[0])/2
imgr = np.zeros_like(img)
for i in range(len(img)):
    for j in range(len(img[0])):
        yi = int(cos_theta * (i - center_i) - sin_theta * (j - center_j) + center_i)
        yj = int(sin_theta * (i - center_i) + cos_theta * (j - center_j) + center_j)
        if yi < 0 or yj < 0 or yi >= len(img) or yj >= len(img[0]):
            continue
        for k in range(3):
            imgr[yi][yj][k] = img[i][j][k]
plt.imshow(imgr)
plt.axis('off')
plt.savefig('fig1.jpg')
plt.clf()
imgR = np.zeros_like(img)
for i in range(len(img)):
    for j in range(len(img[0])):
        xi = int(cos_theta * (i - center_i) + sin_theta * (j - center_j) + center_i)
        xj = int(-sin_theta * (i - center_i) + cos_theta * (j - center_j) + center_j)
        if xi < 0 or xj < 0 or xi >= len(img) or xj >= len(img[0]):
            continue
        for k in range(3):
            imgR[xi][xj][k] = img[i][j][k]
plt.imshow(imgR)
plt.axis('off')
plt.savefig('fig2.jpg')
```

数据科学数学基础 Mathematics DataScience

数据科学与工程数学基础 作业3

数据科学与工程数学基础 作业1