数学科学与工程数学基础第3次作业

李睿恩 10215501434

习题1（关联矩阵的四个子空间性质）：

证明:

1. 由题意可知，矩阵B为规模为$m \times n$的矩阵。

   设方程$B^{\mathrm{T}}x = 0$的解为$x = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^{\mathrm{T}}$

   设第i个点与第j个点是连通的，则有$a_i = a_j$.

   由于图G是连通图，故每个点都与至少一个其他的点连通，以此类推可知，$a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

   所以，方程$B^{\mathrm{T}}x = 0$的解只能为$k(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$，$k$为任意常数。

   所以，$\dim(Null(B^{\mathrm{T}})) = 1$，且$Null(B^{\mathrm{T}}) = \mathbf{span}\{1\}$，原命题成立。

2. 由于$\dim(Null(B^{\mathrm{T}})) = 1$，故$\dim(Col(B)) = m - 1$，故$\dim(Col(B^{\mathrm{T}})) = m - 1$.

   设$B^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$，对于方程$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{b}_m = 0$，

   由第（1）小问的证明可知，有且仅有$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$一组解。

   所以，任意一个向量均可以被其余$m - 1$个向量线性表示。

   综上所述，原命题成立。

3. 由于$\dim(Null(B^{\mathrm{T}})) = 1$，故$\dim(Col(B)) = m - 1$.

   生成树即为包含连通图所有的顶点，且任意两顶点之间有且仅有一条通路的连通图。

   所以，如果T是图G的一颗生成树，其边的数量$n = m - 1$.

   所以，关联矩阵B为$m \times m - 1$的矩阵。

   所以，$Col(B)$可由T的关联矩阵的$m - 1$个列向量生成，原命题成立。

4. 由于$\dim(Null(B)) + \dim(Col(B^{\mathrm{T}})) = n$，故$\dim(Null(B)) = n - m + 1$.

   图G的每个小圈中，都存在一条边使得生成树的性质被破坏。

   故只要删除这些边，剩余的边可以使得该连通图变为生成树。

   故小圈的数量为$n - m + 1$，剩余的$m - 1$条边可以形成一个生成树。

   故原命题成立。

习题2：

设$x_1 = (1, 1, 1), x_2 = (1, -1, 1)$，则所求的正交投影为：

$x_3 = \frac{x_2 \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} x_1 = \frac{1}{3}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

故所求正交投影为$\frac{1}{3}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$

习题4：

记矩阵$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

对A先将第一行加到第三行，再用第四行减去第二行，得到

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\-5&-3&4&-4\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

所以，$U=\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

所以，$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

综上所述，$\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\-5&-3&4&-4\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

习题5:

记A中第i行第j列元素为a_{ij}，$Gauss$消去之后得到的矩阵为B，记B中第i行第j列元素为b_{ij}.

经过$Gauss$变换后，$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}, b_{ji}=a_{ji}-\frac{a_{1i}a_{j1}}{a_{11}}$.

当$i>1, j>1$时，$a_{ij}=a_{ji}, a_{1j}=a_{j1}, a_{1i}=a_{i1}$.

故$b_{ij}=b_{ji}$.

所以，A_2是对称阵。

习题6:

记一个上三角矩阵为A，另一个上三角矩阵为B，记A中第i行第j列元素为a_{ij}，记B中第i行第j列元素为b_{ij}，记乘积形成的矩阵为C，记C中第i行第j列元素为c_{ij}.

则当$j>i$时，$a_{ij}=b_{ij}=0$，其他情况下，a_{ij}与b_{ij}为任意取值。

由题意可知，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

在$j<i$的部分，

当$k<i$时，$a_{ik}=0$.

当$k\geq i$时，$k>j$，故$b_{kj}=0$.

故$c_{ij}=0$.

所以，矩阵C为上三角矩阵。

习题7:

取$x=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，

则存在$w=\frac{x-\alpha e_1}{||x-\alpha e1||_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，使得存在一个$Householder$矩阵

$H_1=I-2ww^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

使得$H_1A=\begin{pmatrix}3&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$

此时再取$x=(0,1)^{\mathrm{T}}$

则存在$w=\frac{x-\alpha e_1}{||x-\alpha e1||_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^{\mathrm{T}}$，使得存在一个$Householder$矩阵$H_2=I-2ww^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

使得$H_2(H_1A)=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

故$Q=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$,

$R=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

所以，$A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

10