第3次作业

习题1、证明：由于G是连通图，故不存在孤立的点，即不存在一行全为0 ①

对于B的行向量 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$ 由于B的每列分别有且仅有一个1和-1

故B的行向量 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$ 线性相关

基于① 去掉任意一行 在 $k_1\cdots k_{m-1}$ 不全为0的情况下

$\sum_{i=1}^{m-1} k_i\beta_{t_i}$ 无法等于0　故去掉该行后 B的剩余的行向量线性无关

$dim(col(B^T))=m-1$

$col(B^T)$ 可由 B^T 任意 $m-1$ 个列向量生成　结论(2)得证

$B^T\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=0$　设 $B^TX=0$　$X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}$　$B^TX=\begin{bmatrix}x_{11}-x_{12}\\ x_{21}-x_{22}\\ \vdots\\ x_{m1}-x_{m2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ ②

其中 $x_{11}\ x_{12}\cdots x_{m1}\ x_{m2}\in\{x_i \mid i\in[1,m]\}$

假设 $x_1,x_2\cdots x_m$ 代表每个点的点权，则由②可得

每个点与其连接的点的点权相同；由于G是连通图 故每一点的点权相同

$x_1=x_2=\cdots=x_m$　则 $X=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$　$dim(Null(B^T))=1$

$Null(B^T)=span[[1,1\cdots1]^T]$

结论(1)得证

$dim(col(B^T))=dim(col(B))$ （B的行秩=列秩）

故 $dim(col(B))=m-1=rank(B)$　B的列向量组线性相关

若列对应的边在图上组成了环，则一定线性无关，不予考虑

而要找最多的线性无关的列，即求在不出现环的前提下最多能找出多少边，这是生成树，结果为 $m-1$　$\cancel{rank(T)}$ $rank(col(T))=rank(col(B))=m-1$

故 $col(B)$ 可由T的关联矩阵的那 $m-1$ 个向量生成　结论(3)得证

$A\xrightarrow{1}B$　对这条边来说 A输出1 B输出-1　~~Bx=0~~　$BY=0$　$Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$　BY的第k项代表的是点k的输出量

BY=0的几何意义为每个点的输出值=0（输入=输出）

~~要使其~~ ~~满足~~ 在m点，n条边的情况下 有 $n-m+1$ 个小圈（没有子圈），此时的组合（边的组合）$\{y_1\ y_2\cdots y_n\}$ 符合所求

即 ~~rank(~~ $dim(Null(B))=n-m+1$　结论(4)得证

习题2. 解: $b=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 求$\pi(x)=?$ $\pi(x)=\lambda b$ $\lambda\in R$

$$b^T(x-\pi(x))=0$$

$$b^Tx-\lambda b^Tb=0 \qquad \lambda=\frac{b^Tx}{b^Tb}=\frac{1}{3}$$

$$\pi(x)=\lambda b=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

习题3. 已阅读

习题4. $A=\begin{bmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\-5&-3&4&-4\\0&1&1&0\end{bmatrix}$ $|A|_1=5$ $|A|_2=5\neq0$ $|A|_3=15\neq0$ $|A|_4=30\neq0$

$$A=A\xrightarrow{r_3+(1)r_1}\begin{bmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+(-1)r_2}\begin{bmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

取$U=\begin{bmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$ $L=L_1L_2$ $L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$

$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

习题5. 证明: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_1^T\\a_1&C\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_1^T\\\vec{0}&A_2\end{bmatrix}$ 其中$a_1=[a_{21}\cdots a_{n1}]^T$

由$A^T=A$ 得 $C=C^T$

$LA=B$. L为许多行初等变换矩阵累乘的积. 由于只进行了一次Gauss消去 故L的形式为 $L=\begin{bmatrix}1&\vec{0}^T\\b_1&E_{n-1}\end{bmatrix}$ E为单位矩阵

而 $b_1=[-\frac{a_{21}}{a_{11}}\ -\frac{a_{31}}{a_{11}}\ \cdots\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}}]^T$

$=-\frac{1}{a_{11}}a_1$ 由$LA=B$可得 $A_2=b_1a_1^T+E_{n-1}C$

$=-\frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T+C$

$A_2^T=(-\frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T+C)^T=(-\frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T)^T+C^T=-\frac{1}{a_{11}}a_1a_1^T+C=A_2$

故A_2仍是对称阵.

习题6、A, B为上三角矩阵. $AB=C$. $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ 　当 $i>j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$

当 $i>j$ 时 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1} 0\cdot b_{kj}+\sum_{k=j}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$=0+\sum_{k=j}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}=a_{ij}\cancel{b_{kj}}b_{jj}+\sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}\cdot 0=0$

故AB也为上三角矩阵.

习题7、取 $\alpha_1=[1\ \ 2\ \ 2]^T$ 　$w_1=\frac{\alpha_1-\|\alpha_1\|e_1}{\|\alpha_1-\|\alpha_1\|e_1\|_2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}[-2\ \ 2\ \ 2]^T$

$\|\alpha_1\|_2=3$.

$H_1=E-2w_1w_1^T=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&4&4\\4&2&-4\\4&-4&2\end{bmatrix}$ 　$H_1A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}9&3\\0&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$

取 $\alpha_2=[0\ \ 1]^T$ 　$w_2=\frac{\alpha_2-\|\alpha_2\|e_2}{\|\alpha_2-\|\alpha_2\|_2e_2\|_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ \ 1]^T$

$\hat{H}_2=E-2w_2w_2^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 　$H_2=\begin{bmatrix}1&0^T\\0&\hat{H}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$R=H_2(H_1A)=\begin{bmatrix}3&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 　故 $Q=H_1H_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix}$ 　$A=QR$

$A=QR=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$