No.

Date. . .

第1次作业

习题一、根据题意 $\|A\|_{m\infty} = \max\limits_{\substack{i\in[1,m]\\ j\in[1,n]}} |a_{ij}|$

对于 $x\in R$ $|x|\geq 0$ 当且仅当 $x=0$ 时等号成立

故 $\|A\|_{m\infty}\geq 0$ 当且仅当 A 的所有元素为0 即 $A=0$ 时等号成立 正定条件得证

对于 $c\in R$ $\|cA\|_{m\infty} = \max\limits_{\substack{i\in[1,m]\\ j\in[1,n]}} |ca_{ij}| = \max\limits_{\substack{i\in[1,m]\\ j\in[1,n]}} |c|\cdot|a_{ij}|$

$= |c|\,\|A\|_{m\infty}$ 齐次条件得证

设 $\|A\|_{m\infty} = \max|a_{ij}| = |a_{i1,j1}|$ $\|B\|_{m\infty} = |b_{i2,j2}|$

$\|C\|_{m\infty} = |a_{i3,j3}+b_{i3,j3}|$ (其中 $C=A+B$)

可得对 $\forall\, i\in[1,m]$ $j\in[1,n]$ 有 $|a_{ij}|\leq|a_{i1,j1}|$ $|b_{ij}|\leq|b_{i2,j2}|$

即 $a_{ij}\leq|a_{i1,j1}|$ $b_{ij}\leq|b_{i2,j2}|$ $a_{ij}\cdot b_{ij}\leq|a_{i1,j1}|\cdot|b_{i2,j2}|$

$\|A+B\|_{m\infty}^2 = a_{i3,j3}^2 + b_{i3,j3}^2 + 2a_{i3,j3}\cdot b_{i3,j3}$

$\leq a_{i1,j1}^2 + b_{i2,j2}^2 + 2|a_{i1,j1}|\cdot|b_{i2,j2}|$

$= \|A\|_{m\infty}^2 + \|B\|_{m\infty}^2 + 2\|A\|_{m\infty}\cdot\|B\|_{m\infty}$

由于 $\|\cdot\|_{m\infty}\geq 0$ 可得 $\|A+B\|_{m\infty}\leq\|A\|_{m\infty}+\|B\|_{m\infty}$ 三角不等式得证

综上 $\|\cdot\|_{m\infty}$ 为广义矩阵范数

习题二、是1-范数，不是L1范数！！！ $A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

1范数：

$$\|A_1\|_1=\max_{1\le j\le 2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}|=\max\{2,2\}=2.$$

$$\|A_2\|_1=\max_{1\le j\le 2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}|=\max\{2,2\}=2.$$

∞范数：

$$\|A_1\|_\infty=\max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|=\max\{3,1\}=3.$$

$$\|A_2\|_\infty=\max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|=\max\{1,3\}=3.$$

2范数：$A_1^T\cdot A_1=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ 特征值为 $3+\sqrt{5}$ 和 $3-\sqrt{5}$.

故 $\|A_1\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A_1^TA_1)}=\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$A_2^T\cdot A_2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ 特征值为 $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$.

故 $\|A_2\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A_2^TA_2)}=\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

习题三、已阅读.

习题四、PS, sup 的意思是"上确界"

(1), 首先, 对于 $\forall a, b \in R$ $a \leq |a|$ $b \leq |b|$. 易得 $ab \leq |a| \cdot |b|$.

Date.

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\(i\ne j)}} 2x_ix_j$$

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\(i\ne j)}} 2|x_i||x_j|$$

同时 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\ge 0$ $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\ge 0$

可得 $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

设A的列向量为 $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 则 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

取 $\vec{x}=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$ 由 $\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$ $A\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{21}+\cdots+x_n\alpha_{n1}\\ \vdots \\ x_1\alpha_{nm}+x_2\alpha_{2m}+\cdots+x_n\alpha_{nm}\end{pmatrix}$

可得 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$ 故 $|x_i|\le 1$ $i\in[1,n]$

在 $\|\vec{x}\|_1=1$ 时 $\|A\vec{x}\|_1=$

$$\sum_{i=1}^{m}|x_1\alpha_{1i}+x_2\alpha_{2i}+\cdots+x_n\alpha_{ni}|$$

$$\le |x_1\alpha_{11}|+|x_2\alpha_{21}|+\cdots+|x_n\alpha_{n1}|+\cdots\cdots+|x_1\alpha_{1m}|+\cdots+|x_n\alpha_{nm}|$$

~~由于 ∀c∈R t∈t~~ $=|x_1|\cdot|\alpha_{11}|+|x_2||\alpha_{21}|+\cdots+|x_n||\alpha_{n1}|+\cdots+|x_n||\alpha_{nm}|$

$$=|x_1|(|\alpha_{11}|+|\alpha_{12}|+\cdots+|\alpha_{1m}|)+|x_2|\cdot(|\alpha_{21}|+\cdots+|\alpha_{2m}|)+\cdots$$

$$=|x_1|\cdot\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{1i}|+|x_2|\cdot\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{2i}|+\cdots+|x_n|\cdot\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ni}|$$

由于 $|x_i|\le 1$ $i\in[1,n]$ 且 $\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ti}|\ge 0$ $t\in[1,n]$ 时 $\cancel{\|A\vec{x}\|_1\le |x_t|\cdot\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ti}|}$ ~~其中~~

另证一不等式 ∀ $i\in[1,n]$ 时 $x_i\ge 0$ $y_i\ge 0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=t & t\text{为常数}\\ x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\le ty_k & (y_k\text{为}\{y_n\}\text{最大值})\end{cases}$$

$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots x_ny_n)^2$

$=x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\cdots x_n^2y_n^2+\sum_{\substack{i,j\in[1,n]\\ i\ne j}}2(x_iy_i)\cdot(x_jy_j)$

$\le y_k^2(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)+\sum_{\substack{i,j\in[1,n]\\ i\ne j}}2(x_ix_j)\cdot y_k^2$

$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\sum_{\substack{i,j\in[1,n]\\ i\ne j}}2x_ix_j)\cdot y_k^2$

$=t^2y_k^2$ 由非负性

可得所证不等式成立.

根据另证的不等式,可得

该式 $\le 1\cdot\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|$

即 $\sup_{\|\vec{x}\|_1=1}\|A\vec{x}\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|$

1范数为列和范数

No.

Date.

在 $\|\vec{x}\|_\infty=1$ 时，即 $\max|x_i|=1$ 时

$\cancel{\|A\|_\infty \|\vec{x}\|_\infty = \max}\ \|A\vec{x}\|_\infty = \cancel{\max}\ \|x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n\|_\infty$

$= \max\limits_{i\in[1,m]} |x_1\alpha_{1i}+x_2\alpha_{2i}+\cdots+x_n\alpha_{ni}| \le \max\limits_{i\in[1,m]} \sum_{j=1}^n |x_j|\cdot|\alpha_{ji}|$

$\le \max\limits_{i\in[1,m]}\sum_{j=1}^n|\alpha_{ji}| = \max\limits_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$　∞范数为行和范数.

(2) 对于P范数(诱导范数)　$\|\vec{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac1p}=1$ 时 有.

$\sum_{i=1}^n|x_i|^p=1$

诱导范数 $\|A\vec{x}\|_p=\|x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\|_p=\left(\sum_{i=1}^m|t_i|^p\right)^{\frac1p}$

其中 $t_k=x_1\alpha_{1k}+x_2\alpha_{2k}+\cdots+x_n\alpha_{nk}$

诱导范数 $\|A\vec{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^m|x_1\alpha_{1i}+x_2\alpha_{2i}+\cdots+x_n\alpha_{ni}|^p\right)^{\frac1p}$

$\le \left(\sum_{i=1}^m|\alpha_{1i}+\alpha_{2i}+\cdots+\alpha_{ni}|^p\right)^{\frac1p}$

即 $\|A\|_p=\sup\|A\vec x\|\le\left(\sum_{i=1}^m|\alpha_{1i}+\alpha_{2i}+\cdots+\alpha_{ni}|^p\right)^{\frac1p}$

在 $x_i\ge0$ 时 $i\in R^*$　$x_1^p+x_2^p+\cdots x_n^p\le(x_1+x_2+\cdots+x_n)^p$

可得 L1范数 $\|A\|_1 \ge$ LP范数 $\|A\|_p$

而LP范数 $\|A\|_p=\left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^p\right)^{\frac1p}=\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_{i1}|^p+|\alpha_{i2}|^p+\cdots+|\alpha_{im}|^p\right)^{\frac1p}$

∵根据向量范数的三角不等式 $\|\vec x+\vec y\|_p\le\|\vec x\|_p+\|\vec y\|_p$

$\|A\vec x\|_p=\|x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\|_p\le\|x_1\alpha_1\|_p+\|x_2\alpha_2\|_p+\cdots+\|x_n\alpha_n\|_p$

根据齐次性,可得 该式 $=|x_1|\cdot\|\alpha_1\|_p+|x_2|\|\alpha_2\|_p+\cdots+|x_n|\|\alpha_n\|_p$ ①

而 $\|\alpha_i\|_p=\left(|\alpha_{i1}|^p+|\alpha_{i2}|^p+\cdots+|\alpha_{im}|^p\right)^{\frac1p}$

由于 $x_i\ge0$ 时　$x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p\le(x_1+x_2+\cdots+x_n)^p$

可得 $\|\alpha_i\|_p\le\left[(|\alpha_{i1}|+|\alpha_{i2}|+\cdots+|\alpha_{im}|)^p\right]^{\frac1p}=|\alpha_{i1}|+\cdots+|\alpha_{im}|$ ②

$=\|\alpha_i\|_1$

No.

Date.

由于$P\geq 1$ 可得$|x_i|^P \geq |x_i|$ 由①式和②式

故 $\|A\vec{x}\|_p \leq |x_1|^p\|\alpha_1\|_1 + |x_2|^p\|\alpha_2\|_1 + \cdots + |x_n|^p\|\alpha_n\|_1$

再结合上页另证的那个结论. 由 $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p = 1$

可得 $\|A\vec{x}\|_p \leq 1\cdot\|\alpha_k\|_1 = \|\alpha_k\|_1$ $\sup\|A\vec{x}\|_p \leq \|\alpha_k\|_1$

$\left(\|\alpha_k\|_1 = \max_{i\in[1,n]}\|\alpha_i\|_1 \right)$ 诱导范数 ~~HA~~ $\|A\|_p \leq \|\alpha_k\|_1$

$= |\alpha_{k1}| + \cdots |\alpha_{km}| \leq \cancel{\|\alpha_k\|_1 +}$

$\|\alpha_1\|_1 + \|\alpha_2\|_1 + \cdots + \|\alpha_n\|$

对于L1范数 ~~HAH~~ $\|A\|_1 =$

$|\alpha_{11}| + |\alpha_{12}| + \cdots |\alpha_{1m}| + \cdots + |\alpha_{nm}|$

$= \|\alpha_1\|_1 + \|\alpha_2\|_1 + \cdots + \|\alpha_n\|_1$

综上 L1范数 $\|A\|_1 \geq$ 诱导P范数 $\|A\|_p$