数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 2 次作业

教师：黄定江

助教：刘文辉、徐艺玮

2023 年 10 月 11 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 2 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

第 2 次作业

提交截至时间：**2023/10/17 下周二 12:00（中午）**

理论部分 (范数与二次型)

习题 1. 假设 $M, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称阵，P 为正交阵，

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & PM \\ \hline MP & PMP \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

(i) 证明 $A^{\mathrm{T}} = A$.

(ii) 假设 $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵,$D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 证明 $\|UDV\|_2 = \|D\|_2, \|UDV\|_F = \|D\|_F$.

(iii) 证明 $\|A\|_F = 2\|M\|_F$. $\|A\|_2 \leq 2\|M\|_2$. *(* 提示：将 A 分解，并利用 *(ii)* 结论*)*

(iv) 假设 $n = 4, M = \mathrm{diag}_{4\times 4}(-2, 1, 0, 0), P = (e_4|e_3|e_2|e_1)$. 证明 $\|A\|_p = 2\ \forall p \in [1, \infty)$.

习题 2. 假设 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}\backslash\{0\}$ 是一个投影矩阵.

(i) 证明 $Py = y\ \forall y \in \mathcal{R}(P)$. $Px - x \in \mathcal{N}(P)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(即证明投影 P 沿着零空间 $\mathcal{N}(P)$ 投影到列空间 $\mathcal{R}(P)$ *)*

(ii) 证明 P 的特征值 $\lambda \in \Lambda(P) \subseteq \{0, 1\}$. 假设 $\mathcal{R}(P) = \mathrm{span}\,(u_1, \ldots, u_r)$, $\mathcal{N}(P) = \mathrm{span}\,(v_{r+1}, \ldots, v_n)$，试找到 P 的特征分解 $P = XDX^{-1}$ 并证明 $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rank}(P)$. *(* 提示：利用 *(i)* 结论. *)*

(iii) 证明当 $P \neq I_n$，$\det(P) = 0$.

(iv) 证明当 P 是正交投影矩阵（$P^2 = P = P^{\mathrm{T}}$）时，$I_n - 2P$ 是正交矩阵.

(v) 假设 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$m \leq n$，$\mathrm{rank}(A) = m$. $P = A\left(A^{\mathrm{T}}A\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ 证明 P 是正交投影矩阵，$\mathrm{rank}(P) = m$. *(* 提示：利用 *(ii)* 结论. *)*

习题 3. 求向量 $(1, 1, 1)^T$ 投影到一维子空间 $span\{(1, -1, 1)^T\}$ 的正交投影。

习题 4. 证明：正交矩阵和范数有关的性质：如果矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$

(1) $\|\boldsymbol{U}\|_2 = 1$，$\|\boldsymbol{U}\|_F = \sqrt{m}$

(2) $\|\boldsymbol{Ux}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$

(3) $\|\boldsymbol{UMV}\|_2 = \|\boldsymbol{M}\|_2$，$\|\boldsymbol{UMV}\|_F = \|\boldsymbol{M}\|_F$