10215501406_ 钱凯恒 _ 作业 1

钱凯恒

September 2022

1 习题 1

(1)$|a_{ij}| \geq 0(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n), ||\mathbf{A}||_{m_\infty} \geq 0, (||\mathbf{A}||_{m_\infty} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O})$；
(2)$||c\mathbf{A}||_{m_\infty} = \underset{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}{max} |ca_{ij}| = |c| \underset{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}{max} |a_{ij}| = |c|||\mathbf{A}||_{m_\infty}$；
(3)$||\mathbf{A}+\mathbf{B}||_{m_\infty} = \underset{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}{max} |a_{ij}+b_{ij}| \leq \underset{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}{max} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) = ||\mathbf{A}||_{m_\infty} + ||\mathbf{B}||_{m_\infty}$。
综上，可得 $||\mathbf{A}||_{m_\infty} = \underset{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}{max} |a_{ij}|$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的矩阵范数。

2 习题 2

$||\mathbf{A}_1||_1 = max\{1+1, 2+0\} = 2$

$||\mathbf{A}_1||_\infty = max\{1+2, 1+0\} = 3$

因为 $\mathbf{A}_1{}^T\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由 $|\mathbf{I}\lambda - \mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$ 解得 $\lambda_1 = 5.236, \lambda_2 = 0.763$，故 $||\mathbf{A}_1||_2 = \sqrt{5.236} = 2.288$。

$||\mathbf{A}_2||_1 = max\{-1+1, 0+2\} = 2$

$||\mathbf{A}_2||_\infty = max\{-1+0, 1+2\} = 3$

因为 $\mathbf{A}_2{}^T\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由 $|\mathbf{I}\lambda - \mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$ 解得 $\lambda_1 = 5.236, \lambda_2 = 0.763$，故 $||\mathbf{A}_2||_2 = \sqrt{5.236} = 2.288$。

3 习题 4

(1) 当 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 时，$||\mathbf{A}||_1=\underset{1\le j\le n}{max}\sum_{i=1}^{m}|a_ij|$ 显然成立；

当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，将 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n]$，并记 $\delta=||\mathbf{a}_{j_0}||_1=\underset{1\le j\le n}{max}||\mathbf{a}_j||_1$，则对任意满足 $||\mathbf{x}||_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 的 $x\in\mathbf{C}^n$，有

$||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1=\left|\left|\sum_{j=1}^{n}x_j\mathbf{a}_j\right|\right|\le\sum_{j=1}^{n}|x_j|||\mathbf{a}_j||_1\le\sum_{j=1}^{n}|x_j|\underset{1\le j\le n}{max}||\mathbf{a}_j||_1=||\mathbf{a}_{j_0}||_1=\delta$，

所以 $||\mathbf{A}||_1=\underset{||\mathbf{x}||_1=1}{max}||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1\le\delta$。

令 $\mathbf{x}$ 为第 j_0 个元素为 1，其余分量为 0 的向量 $\mathbf{e}_{j_0}$，则有 $||\mathbf{e}_{j_0}||_1=1$，而且 $||\mathbf{A}\mathbf{e}_{j_0}||_1=||\mathbf{a}_{j_0}||_1=\delta$，

所以存在满足 $||\mathbf{x}||_1=1$ 的 $\mathbf{x}$，使得 $||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1=\delta$。

综上，可得 $||\mathbf{A}||_1=\underset{||\mathbf{x}||_1=1}{max}||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1=\delta=\underset{1\le j\le n}{max}||\mathbf{a}_j||_1=\underset{1\le j\le n}{max}\sum_{i=1}^{m}|a_ij|$。

当 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 时，$||\mathbf{A}||_\infty=\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ 显然成立；

当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，记 $\eta=\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，则对任意满足 $||\mathbf{x}||_\infty=1$ 的 $x\in\mathbf{C}^n$，有

$||\mathbf{A}\mathbf{x}||_\infty=\underset{1\le i\le m}{max}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|\le\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\le\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\eta$，

所以 $||\mathbf{A}||_\infty=\underset{||\mathbf{x}||_\infty=1}{max}||\mathbf{A}\mathbf{x}||_\infty\le\eta$。

令 $\tilde{\mathbf{x}}=(1,\cdots,1)^T$，则 $||\tilde{\mathbf{x}}||_\infty=1$，有 $||\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}||_\infty=\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\eta$，

所以存在满足 $||\mathbf{x}||_\infty=1$ 的 $\mathbf{x}$，使得 $||\mathbf{A}\mathbf{x}||_\infty=\eta$。

综上，可得 $||\mathbf{A}||_\infty=\eta=\underset{1\le i\le m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

(2) 对于给定的矩阵 $\mathbf{A}$，$||\mathbf{A}||_1\le||\mathbf{A}||_1(l_1)\le m||\mathbf{A}||_1$，$||\mathbf{A}||_\infty\le||\mathbf{A}||_1(l_1)\le n||\mathbf{A}||_\infty$。