# 数据科学与工程数学基础

## 作业提交规范及第 5 次作业

教师：黄定江
助教：刘文辉、徐艺玮

2023 年 11 月 17 日

### 作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号_姓名**"。命名示例：52200000000_刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 5 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

### 第 5 次作业

提交截至时间：**2023/11/21 下周二 12:00（中午）**

## 理论部分

**习题 1.** 利用等式

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{w})-\boldsymbol{b}\|_2^2=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2+2\alpha\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})+\alpha^2\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\|_2^2$$

证明：如果 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_{LS}$, 那么 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$

**习题 2.**

$$A:=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

记 $\Lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}\subseteq\mathbb{C}$ *with* $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq|\lambda_3|$.

*(i)* 使用 *Gerschgorin* 圆盘定理, 证明 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}\leq 7$.（注：由于 $A$ 为对称矩阵，$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}$ 为 $A$ 的条件数）

*(ii)*（编程题，提交代码）使用幂法与反幂法计算 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}$

**习题 3.** 构建模型使得预测值与真实值的误差最小常用向量 2-范数度量，求解模型过程中需要计算梯度，求梯度：

- $f(A)=\frac{1}{2}\|Ax+b-y\|_2^2$，求 $\frac{\partial f}{\partial A}$
- $f(x)=\frac{1}{2}\|Ax+b-y\|_2^2$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$

其中 $A\in R^{m\times n}$，$x\in R^n$，$b,y\in R^m$

**习题 4.** 二次型是数据分析中常用函数，求 $\frac{\partial x^TAx}{\partial x}$，$\frac{\partial x^TAx}{\partial A}$，其中 $A\in R^{m\times m}$，$x\in R^m$

**习题 5.** 利用迹微分法求解 $\frac{\partial Tr(W^{-1})}{\partial W}$，其中 $W\in R^{m\times m}$

**习题 6.** $(\exp(\boldsymbol{z}))_i=\exp(\boldsymbol{z}_i)$，$(\log(\boldsymbol{z}))_i=\log(\boldsymbol{z}_i)$ $f(\boldsymbol{z})=\frac{\exp(\boldsymbol{z})}{\mathbf{1}^T\exp(\boldsymbol{z})}$ 称为 *softmax* 函数，，如果 $\boldsymbol{q}=f(\boldsymbol{z}),J=-\boldsymbol{p}^Tlog(\boldsymbol{q})$，其中 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，并且 $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=1$，

- 证：$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{z}}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$
- 若 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^{n\times m}$,$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$，$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}=(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}^T$ 是否成立。