数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 4 次作业

教师：黄定江
助教：刘文辉、徐艺玮

2023 年 11 月 9 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 4 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

第 4 次作业

提交截至时间：**2023/11/07 下周二 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 利用 QR 分解求解下述线性方程组的解（最终结果可只需写出具体矩阵与向量的乘积形式即可）:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = QR$$

因此,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

习题 2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的 *SVD* 分解。

解. $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

特征值为 *1* 对应的特征向量为 $(1, -1)^T$

特征值为 *3* 对应的特征向量为 $(1, 1)^T$

所以 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$U = A\Sigma^{\dagger} V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

所以

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

习题 3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 在 F 范数下秩为 *1* 的最优近似。(注: 根据 *Eckart-Young-Mirsky* 定理，即为只保留最大的秩所对应的矩阵)

解. 最佳秩 *1* 近似:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

习题 4. 假设 D 是一个 $n\times d$ 的矩阵，矩阵 B 是 $(n+d)\times(n+d)$ 定义为

$$B=\begin{pmatrix}0 & D^{\mathrm{T}}\\ D & 0\end{pmatrix}$$

显然 B 是对称矩阵。请证明矩阵 B 的对角化会产生 D 的奇异值分解所需要的所有信息。

解. D 的奇异值分解所需要的信息为 D^TD 的特征向量和 DD^T 的特征向量，以及对应的特征值。现假设对应于特征值为 $\lambda^2(\lambda>0)$ 的 D^TD 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1(\|\boldsymbol{x}_1\|_2=1)$,$DD^T$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_2(\|\boldsymbol{x}_2\|_2=1)$. 因此，$D^TD\boldsymbol{x}_1=\lambda^2\boldsymbol{x}_1$ 以及 $DD^T\boldsymbol{x}_2=\lambda^2\boldsymbol{x}_2$。故

$$(DD^T)D\boldsymbol{x}_1=\lambda^2D\boldsymbol{x}_1$$

所以存在 k 使得 $D\boldsymbol{x}_1=k\boldsymbol{x}_2$。由于 $\|\boldsymbol{x}_1\|_2=\|\boldsymbol{x}_2\|_2=1$，可得 $k=\lambda$，即 $D\boldsymbol{x}_1=\lambda\boldsymbol{x}_2$。同理有 $D^T\boldsymbol{x}_2=\lambda\boldsymbol{x}_1$。

下面证明 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}$ 是矩阵 B 的特征值为 λ 的特征向量。易计算

$$B\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0 & D^{\mathrm{T}}\\ D & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^T\boldsymbol{x}_2\\ D\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}$$

因此，D 的奇异值分解信息包含在 B 的对角化过程中。

实践部分

习题 5. 任选一张图片，使用 *SVD* 分解对图片进行压缩，分别展示取 *1%*、*2%*、*10%*、*50%* 奇异值的结果。提示：可在 *numpy* 包中可以使用 *‘np.linalg.svd‘* 对一个 *‘np.matrix‘* 对象进行 *SVD* 分解。需要上传代码和结果。