数据科学与工程数学基础第1次作业
李靖恩, 10215501434

1. 证明：先证其为矩阵范数

① 证明正则性：由于 $\|A\|_{m_\infty} := \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$

又由于 $|a_{ij}| \ge 0$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$

$\therefore \|A\|_{m_\infty} \ge 0$ 且当且仅当 $A=0$ 时，$\|A\|_{m_\infty}=0$ 故正则性成立.

② 证明齐次性：对于 $\forall c\in\mathbb{R}$

$$\|cA\|_{m_\infty} := \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |ca_{ij}|$$
$$= |c| \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$$
$$= |c|\cdot \|A\|_{m_\infty}$$ 故齐次性成立.

③ 证明三角不等式：对于 $\forall B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|A+B\|_{m_\infty} := \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}+b_{ij}|$$
$$\le \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|)$$
$$\le \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}| + \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |b_{ij}|$$
$$= \|A\|_{m_\infty} + \|B\|_{m_\infty}$$ 故三角不等式成立

故 $\|A\|_{m_\infty} := \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$ 是矩阵范数

再证其为广义矩阵范数

取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 则 $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$.

$\|A^2\|_{m_\infty} = 2 > \|A\|_{m_\infty}\|A\|_{m_\infty} = 1$

不符合 $\|A^2\|_{m_\infty} \le \|A\|_{m_\infty}\|A\|_{m_\infty}$

故 这不满足相容性条件

综上. $\|A\|_{m_\infty} = \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$ 是广义矩阵范数

2. $\|A_1\|_1 = \max\{1+1,\ 2+0\} = 2$

$$\|A_1\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A_1^TA_1)} = \sqrt{\lambda_{max}\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}} = \sqrt{3+\sqrt5} = \frac{\sqrt2+\sqrt{10}}{2}$$

$\|A_1\|_\infty = \max\{1+2,\ 1+0\} = 3$.

$\|A_2\|_1 = \max\{-1+1,\ 0+2\} = 2$

$$\|A_2\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A_2^TA_2)} = \sqrt{\lambda_{max}\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}} = \frac{\sqrt2+\sqrt{10}}{2}$$

$\|A_2\|_\infty = \max\{-1+0,\ 1+2\} = 3$.

4. (1) 证明1范数为列和范数：

将给定的 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 按列分块 $A=[a_1,\cdots,a_n]$

记 $\delta = \|a_{j_0}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \|a_j\|_1$，则对任意满足 $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i| = 1$ 的 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|Ax\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_ja_j\|_1 \le \sum_{j=1}^n |x_j|\,\|a_j\|_1 \text{（三角不等式）}$$
$$\le \sum_{j=1}^n |x_j|\cdot\|a_{j_0}\|_1$$
$$= \|a_{j_0}\|_1 = \delta$$

这说明 $\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \delta$

下证存在这样的 x 使得等号可取到

令 x 为第 j_0 个元素为1，其余分量为0的向量 e_{j_0}

则有 $\|e_{j_0}\|_1 = 1$. 且 $\|Ae_{j_0}\|_1 = \|a_{j_0}\|_1 = \delta$

故存在 x 使 $\|A\|_1 = \delta$ 成立.

综上. $\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \delta = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$

证明无穷范数为行和范数:

记 $\eta = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

则对任意满足 $\|x\|_\infty = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \eta$$

这说明 $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \le \eta$.

下证存在这样的 x 使得等号可被取到

设 A 的第 k 行元素的绝对值之和最大，即

$\eta = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$. 令 $\tilde{x} = (\mathrm{sgn}(a_{k1}), \cdots, \mathrm{sgn}(a_{kn}))^T$

则 $A \ne 0$ 蕴含 $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$，有 $\|A\tilde{x}\|_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \eta$

说明存在 x 使得 $\|Ax\|_\infty = \eta$.

综上，$\|A\|_\infty = \eta = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(2)

$$\|A\|_1 \le \|A\|_{m_1} \le n\|A\|_1$$

$$\|A\|_\infty \le \|A\|_{m_1} \le m\|A\|_\infty$$