第2次作业

习题1. (i) 证明: $A^T=\begin{bmatrix} M^T & (MP)^T \\ (PM)^T & (PMP)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & PM \\ MP & PMP\end{bmatrix} = A$.

(ii) 证明: $U^{-1}=U^T$ $V^{-1}=V^T$ 取 $B=UDV$

$B^TB=V^TD^TU^TUDV=V^{-1}(D^TD)V$ 故 $B^TB\sim D^TD$

B^TB与D^TD特征值相同, $Tr(B^TB)=Tr(D^TD)$

$\|B\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(B^TB)}=\sqrt{\lambda_{max}(D^TD)}=\|D\|_2$

$\|B\|_F=\sqrt{Tr(B^TB)}=\sqrt{Tr(D^TD)}=\|D\|_F$

(iii) $A=\begin{bmatrix} MP^T & PMP^T \\ M & PM\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P&0\\0&P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P&0\\0&P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P^TMP^T & MP^T\\ P^TM & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P&0\\0&P\end{bmatrix}$

取 $B=\begin{bmatrix}P^TMP^T & MP^T\\P^TM & M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PMP & MP\\PM & M\end{bmatrix}$ $B^TB=\begin{bmatrix}P^{-1}M^2P+M^2 & PMPMP+MPM \\ PMPMP+MPM & P^{-1}M^2P+M^2\end{bmatrix}$

根据分块矩阵的性质和(ii)中结论

$\|A\|_F=\sqrt{Tr(B^TB)}=\sqrt{Tr(P^{-1}M^2P+M^2)+Tr(P^{-1}M^2P+M^2)}$

$=\|B\|_F$ $=\sqrt{2Tr(P^{-1}M^2P+M^2)}$

由于 $P^{-1}M^2P\sim M^2$

故 $Tr(P^{-1}M^2P+M^2)=2Tr(M^2)$

~~由于~~ 且 $M^T=M$

可得 $\|A\|_F=\sqrt{4Tr(M^2)}=\cancel{2|Tr(M)|}$ $2\sqrt{Tr(M^TM)}=2\|M\|_F$

~~(iv)~~ 根据矩阵范数的三角不等式 $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ 可得

$\|A\|_2\le\|M\|_2+\|PM\|_2+\|MP\|_2+\|PMP\|_2$ $PM^2P=P^{-1}M^2P\sim M^2$

$\|PM\|_2=\sqrt{\lambda_{max}((PM)^TPM)}=\sqrt{\lambda_{max}(M^2)}$

$\|MP\|_2=\sqrt{\lambda_{max}((MP)^TMP)}=\sqrt{\lambda_{max}(PM^2P)}=\sqrt{\lambda_{max}(M^2)}$

$\|PMP\|_2=\sqrt{\lambda_{max}((PMP)^TPMP)}=\sqrt{\lambda_{max}(PM^2P)}=\sqrt{\lambda_{max}(M^2)}$

故 $\|A\|_2\le 4\sqrt{\lambda_{max}(M^2)}=4\|M\|_2$ 故缩放太大了

再次尝试 $A=\begin{bmatrix}M&PM\\MP&PMP\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M&0\\0&PMP\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&PM\\MP&0\end{bmatrix}$

取 $A_1=\begin{bmatrix}M&0\\0&PMP\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}0&PM\\MP&0\end{bmatrix}$

$\|A\|_2\le\|A_1\|_2+\|A_2\|_2$ ①

$$A_1^TA_1 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & PMP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & PMP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & PM^2P \end{bmatrix}$$

$A_1^TA_1$的特征多项式为 $|\lambda E - A_1^TA_1| = 0$ 即 $\begin{vmatrix} \lambda E - M^2 & 0 \\ 0 & \lambda E - PM^2P \end{vmatrix} = 0$

$|\lambda E - M^2|\cdot|\lambda E - PM^2P| = 0$ ②

且解非负（M特征值λ为实数 M^2特征值λ^2非负）

对于 $|\lambda E - M^2| = 0$ 为求M^2的特征值之多项式. 由于$PM^2P = P^{-1}M^2P \sim M^2$,

对于 $|\lambda E - PM^2P| = 0$ 为求PM^2P的特征值之多项式.

故该多项式也是求M^2的特征值之多项式.

经上述分析, 多项式②的解 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 皆 M^2的特征值.
集 $\lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n}$ 合于

即 $\lambda_{max}(A_1^TA_1) = \lambda_{max}(M^2) = \lambda_{max}(M^TM)$ 即 $\|A_1\|_2 = \|M\|_2$.

$A_2^TA_2 = \begin{bmatrix} PM^2P & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix}$ 同理可得 $\lambda_{max}(A_2^TA_2) = \lambda_{max}(M^2) = \lambda_{max}(M^TM)$

即 $\|A_2\|_2 = \|M\|_2$.

再结合①. $\|A\|_2 \le \|A_1\|_2 + \|A_2\|_2 = 2\|M\|_2$.

(iv) 根据初等变换的性质 $M = diag(-2\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$ $PMP = diag(0\ \ 0\ \ 1\ \ -2)$

$PM = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & & & \\ & 1 & & \\ -2 & & & \end{bmatrix}$ $MP = \begin{bmatrix} & & & -2 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$

取 $\vec{x} = [x_1 \cdots x_8]^T$ 由 $\|\vec{x}\|_p = 1$ 可得 $\sum_{k=1}^{8} |x_k|^p = 1$

$A\vec{x} = [-2x_1, x_2, x_6, -2x_5, -2x_4, x_3, x_7, -2x_8]$

$\|A\vec{x}\|_p = (|-2x_1|^p + |x_2|^p + |x_6|^p + |-2x_5|^p + |-2x_4|^p + |x_3|^p + |x_7|^p + |-2x_8|^p)^{\frac{1}{p}}$

取 $|x_1|^p + |x_5|^p + |x_4|^p + |x_8|^p = t$, $t + k = 1$时 $t \in [0,1]$

$|x_2|^p + |x_3|^p + |x_6|^p + |x_7|^p = k$ 求$\max(2^pt + k)^{\frac{1}{p}} = ?$

$2^pt + k = 2^pt + 1 - t = (2^p - 1)t + 1 \le (2^p - 1)\cdot 1 + 1 = 2^p$ (当且仅当$t=1$时等号成立)

故 $\max\|A\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{2^p} = 2$

即 $p \in [1, +\infty)$ 时 $\|A\|_p = 2$ 恒成立.

习题2.(i)证明：根据 $\forall x\in R^n$ $Px-x\in N(P)$ 得 $\forall x\in R^n$ 有

$P(Px-x)=0$ 即 $P^2x=Px$ 对于 $y\in R(P)$ 由于 $\dim\{R(P)\}\le n$

故P的列向量 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ 可线性表示 $R(P)$ 中的元素

取y在 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ 下的坐标为 $k_1\cdots k_n$ $\vec{k}=(k_1\cdots k_n)^T$

$y\in R(P)$ 可表示为 $y=P\vec{k}$ 即 $Py=P^2\vec{k}$ 由于 $\vec{k}\in R^n$ 故 $P^2\vec{k}=P\vec{k}$ 成立

联立可得 $y=P\vec{k}=P^2\vec{k}=Py$ $y=Py$ 成立，原式得证

(ii)证明：设P的特征值为λ，特征向量为α $(\alpha\ne0)$ $(\alpha\in R^n\setminus\{0\})$

$P\alpha=\lambda\alpha$ $P^2\alpha=P\cdot P\alpha=\lambda^2\alpha$

~~由 $\forall\alpha\in R^n$ $P^2\alpha=P\alpha$ 得~~ 由于P为投影矩阵 $P^2=P$ $\forall\alpha\in R^n$ $P^2\alpha=P\alpha$ 成立

由 $\forall\alpha\in R^n$, $P^2\alpha=P\alpha$ 得 $(\lambda^2-\lambda)\alpha=0$ 由 $\alpha\ne0$ 得 $\lambda^2-\lambda=0$ $\lambda=0$ 或 1

$\lambda\in\{0,1\}$

$\lambda=0$ 时，对于方程 $(0E-P)x=0$ 即 $Px=0$ 来说，

基础解系为的秩为 $n-r(P)$ ~~解集为~~ 解空间为 $N(P)$

$\lambda=1$ 时，对于方程 $(E-P)x=0$ 即 $Px-x=0$ 同时左乘P 可得 $P(Px-x)=0$

即 $\forall x\in R^n$ $Px-x\in N(P)$ 由(i)结论 $\forall y\in R(P)$, $Py=y$

则方程 $(E-P)x=0$ 的基础解系的秩为 $r(P)$ 解空间为 $R(P)$

综上，由于矩阵不同特征值所对应的特征向量相互~~正交~~之间线性无关

且某基础解系中的解向量之间线性无关 故P有n个线性无关的特征向量

则P可以相似于对角矩阵

可取 $D=\mathrm{diag}(\underbrace{1,1\cdots1}_{r个},\underbrace{0\cdots0}_{n-r个})$ $X^{-1}=(u_1\ u_2\cdots u_r,\ v_{r+1},\cdots v_n)$

~~又~~ $tr(P)=1\cdot r+0\cdot(n-r)=r=r(P)$

(iii)证明：由于P是投影阵 $P^2=P$ 可得 $P(P-E)=0$ 两边求行列式

$|P|\cdot|P-E|=0$ 若 $|P-E|\ne0$ 则 $|P|=0$ $\det(P)=0$

若 $|P-E|=0$ 则 $r(P)<n$ 由(ii)中结论可得 $P=XDX^{-1}$ $|D|=0$

$|P|=|X|\cdot|D|\cdot|X^{-1}|=|X|\cdot0\cdot|X^{-1}|$ $\det(P)=0$ 综上 $\det(P)=0$

$(P\ne E_n)$

(iv)证明：由 $P^2=P$ 可得 $4P^2=4P$ $E^2+4P^2-4P=E$

即 $(E-2P)(E-2P)=E$ 而 $(E-2P)^T=E^T+(-2P)^T=E-2P$

故 $(E-2P)^T(E-2P)=E$ 同理 $(E-2P)(E-2P)^T=E$ 故 $E-2P$ 为正交矩阵

(v)证明：$P^2=A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T=A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$

故P为~~正交~~投影矩阵 $P^T=(A^T)^T((A^TA)^{-1})^TA^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$ 故P为正交投影矩阵

对于$P=A(A^TA)^{-1}A^T$ 同时右乘A 可得 $PA=A$. 取A的列向量为$\alpha_1 \cdots \alpha_m$

~~$\text{rank}(P)$~~ $r(A)=m$ 故$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关.

$PA=(P\alpha_1, P\alpha_2 \cdots P\alpha_m)$

由$PA=A$ 可得 $P\alpha_1=\alpha_1$ $P\alpha_2=\alpha_2$ $\cdots$ $P\alpha_m=\alpha_m$.

即 ~~$P-E$~~ $(E-P)\alpha_1=0$ $(E-P)\alpha_2=0$ $\cdots$ $(E-P)\alpha_m=0$

则方程$(E-P)X=0$ 中基础解系的维数为m.

根据(ii)的分析, 方程$(E-P)X=0$的基础解系的维数为$r(P)$

综上 $r(P)=m$