数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 8 次作业

教师：黄定江
助教：刘文辉、徐艺玮

2024 年 1 月 8 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 8 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

第 8 次作业

提交截至时间：**2024/01/10 下周三 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 试用 *DFP* 法计算下述二次函数的极小点

$$\min f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1.$$

解. 假设我们从 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-2, 4)^T$ 开始（没有规定时，可以随机选取一个初始点），并取

$$\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = [(6x_1 - 2x_2 - 4), (2x_2 - 2x_1)]^T$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = (-24, 12)^T$$

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = -\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} \nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

利用一维搜索，即 $\min_\lambda f(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}^{(0)})$，可算得

$$\lambda_0 = \frac{5}{34}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda_0 \boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{34}\begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \left(\frac{26}{17}, \frac{38}{17}\right)^T$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \left(\frac{12}{17}, \frac{24}{17}\right)^T$$

$$\Delta \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{26}{17}, \frac{38}{17}\right)^T - (-2, 4)^T = \left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T$$

$$\Delta \boldsymbol{g}^{(0)} = \nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) - \nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \left(\frac{6}{17}, \frac{12}{17}\right)^T - (-12, 6)^T = \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T$$

$$\overline{\boldsymbol{H}}^{(1)} = \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} + \frac{\Delta \boldsymbol{x}^{(0)} (\Delta \boldsymbol{x}^{(0)})^T}{(\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \Delta \boldsymbol{x}^{(0)}} - \frac{\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} \Delta \boldsymbol{g}^{(0)} (\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)}}{(\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} \Delta \boldsymbol{g}^{(0)}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T \left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)}{\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)\left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T}$$

$$= \frac{1}{986}\begin{pmatrix} 269 & 299 \\ 299 & 862 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = -\overline{\boldsymbol{H}}^{(1)} \nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\frac{1}{986}\begin{pmatrix} 269 & 299 \\ 299 & 862 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{24}{17} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{18}{29} \\ \frac{42}{29} \end{pmatrix}$$

再由一维搜索 $\min_{\lambda} f(\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda\boldsymbol{p}^{(1)})$，得

$$\lambda_1=\frac{29}{34}$$

从而

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda_1\boldsymbol{p}^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{26}{17}\\ \frac{38}{17}\end{pmatrix}+\frac{29}{34}\begin{pmatrix}-\frac{18}{29}\\ -\frac{42}{29}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(2)})=(0,0)^T$$

可知 $\boldsymbol{x}^{(2)}=(1,1)^T$ 为极小点。

习题 2. 试用二次罚函数法求解如下优化问题：

$$\min f_0(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$
$$s.t.\ f_1(\boldsymbol{x})=1-x_1\le 0$$
$$f_2(\boldsymbol{x})=-x_2\le 0$$

从初始点 $x^{(0)}=(2,0)^{\mathrm{T}}$ 开始，计算迭代两步后的解。

解. 我们不妨取 $M1=1,c=2$。由此，构造无约束优化问题：

$$\min p_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2+[\min(0,x_1-1)]^2+[\min(0,x_2)]^2$$

易求得在 $x^{(0)}$ 处的梯度（严格上是次梯度）为 $((x_1+1)^2,1)^T=(9,1)$。假设这里采用固定步长 $\lambda=0.1$，则 $x^{(1)}=(1.1-0.1)^T$。这里假定这是该无约束优化问题的最优解，实际上，需要迭代至收敛。

然后，进行第二轮迭代，此时 $M2=c*M1=2$。由此，构造无约束优化问题：

$$\min p_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2+2*[\min(0,x_1-1)]^2+2*[\min(0,x_2)]^2$$

易求得在 $x^{(1)}$ 处的梯度为 $((x_1+1)^2,1+4x_2)^T=(4.41,0.6)$。仍假设这里采用固定步长 $\lambda=0.1$，则 $x^{(2)}=(0.659-0.16)^T$。这样，便求得两次迭代的解。实际上，我们可以注意到罚函数法的解是可能会违背约束条件，通过不断地加大惩罚使得它收敛在可行域内。

习题 3. 试用内点法求解如下优化问题：

$$\min f_0(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$
$$s.t.\ f_1(\boldsymbol{x})=1-x_1\le 0$$
$$f_2(\boldsymbol{x})=-x_2\le 0$$

解. 参考讲义 *Lec35*，例 *3.*