数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 7 次作业

教师：黄定江

助教：刘文辉、徐艺玮

2024 年 1 月 5 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：建议使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。若使用手写拍照的方式，请务必规整好各题解答的图片，并整合在一个 PDF 文档中，只发图片格式的作业概不批改！
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门地址：**第 7 次作业提交传送门**，无需注册和登录，按要求输入个人学号和姓名，然后上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分；若发现存在抄袭的作业时，相似的两份作业均会被记为 0 分。

第 7 次作业

提交截至时间：**2024/01/08 下周一 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 写出下述非线性规划的 *KKT* 条件并求解

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \mathtt{maximize} \quad f(x) = (x-3)^2 \\
& \mathtt{suject\ to} \quad 1 \le x \le 5 \\
(2)\quad & \mathtt{minimize} \quad f(x) = (x-3)^2 \\
& \mathtt{suject\ to} \quad 1 \le x \le 5
\end{aligned}
$$

习题 2. 考虑等式约束的最小二乘问题

$$
\begin{aligned}
\mathtt{minimize} \quad & \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2 \\
\mathtt{suject\ to} \quad & \mathbf{Gx} = \mathbf{h}
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \operatorname{rank}(\mathbf{G}) = p$. 给出 *KKT* 条件, 推导原问题最优解 x^* 以及对偶问题最优解 v^* 的表达式.

习题 3. 用 *Lagrange* 乘子法证明：矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的 *2* 范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax}\|_2$$

的平方是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

习题 4. 用 *Lagrange* 乘子法求欠定方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二范数解，其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \le n, \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$

习题 5. 用最速下降法和精确线搜索计算 $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ，初始点 $x^{(0)} = (2,2,1)^T$. 当 $(f(x^{(n+1)}) - f(x^{(n)})) < 0.001$ 时迭代终止.

习题 6. 使用梯度下降法和固定步长 $\lambda = 0.01$ 计算 $\min f(x) = (x_1-1)^2 + 16(x_2-2)^2$ ，初始点 $x^{(0)} = (2,3)^T$，迭代两步后终止.

习题 7. 考虑问题

$$\min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

从初始点 $x^{(0)} = (1.5, 1.5)^{\mathrm{T}}$ 出发, 用 *Newton* 方法求迭代两步后该问题的解（可用编写程序辅助计算）.