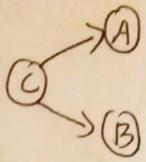
作业10、

习题1 (1)



证明：此处","表示的是交事件 比如 $A,B \Leftrightarrow AB \Leftrightarrow A\cap B$.

根据概率图可得 $P(A,B,C) = P(C)\cdot P(A|C)\cdot P(B|C)$ ①

要证 $A \perp B | C$. 只需证 $P(A|C)\cdot P(B|C) = P(A,B|C)$

由①式，$P(A|C)\cdot P(B|C) = \dfrac{P(A,B,C)}{P(C)} = \dfrac{P(ABC)}{P(C)} = P(AB|C) = P(A,B|C)$

原式得证.

(2). 证明：

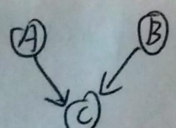
$A \to C \to B$ 由图可得 $P(A,B,C) = P(A)\cdot P(C|A)\cdot P(B|C) = P(ABC)$

要证 $A \perp B | C$ 只需证 $P(A|C)\cdot P(B|C) = P(A,B|C)$

$$P(A,B|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A)\cdot P(C|A)\cdot P(B|C)}{P(C)} = \frac{P(A)\cdot \frac{P(AC)}{P(A)}\cdot P(B|C)}{P(C)}$$

$= P(B|C)\cdot P(A|C)$ 原式得证.

(3)



证明：由图可知 $P(A,B,C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C|A,B)$

而 $P(C|A,B) = \dfrac{P(A,B,C)}{P(A,B)}$ 代入，可得 $P(A)\cdot P(B) = P(A,B)$

即A,B事件相互独立. 不用任何条件 即 $A \perp B | \emptyset$

*后来我查了一下，这里好像和C是否观测有关系。上面的所有论，即根据概率图 $P(A,B,C) = \cdots$ 是建立在C未被观测时的情形下的.

习题2、(1) $f'(x) = e^x$ $f''(x) = e^x > 0$ $(x \in R)$ 故 $f(x)$ 是凸函数

(2) 首先，逐点取最大值为保凸运算. 我们只需看max比较的函数凸性即可。~~$\|Ax+b\|_2 =$~~ $g(x) = \|x\|_2$ 为凸函数 故 $g(Ax+b)$ 也为凸函数

$\|x^Tx\|_1 = g^2(x)$ 也为凸函数 综上，$f(x)$ 为凸函数

(3). $f'(x) = \sin x$ $f''(x) = \cos x$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时 $f''(x) \geq 0$

故 $f(x)$ 为凸函数

习题3 证明：$\phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$　$\phi''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$　[本题中log取e为底]

$[\log(\phi(x))]''=\frac{\phi''(x)\phi(x)-[\phi'(x)]^2}{\phi^2(x)}$　取$g(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$\phi''(x)\phi(x)-[\phi'(x)]^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot g(x)-\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-x^2}$　$g(x)>0$

$=-\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\left(xg(x)+e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ ①

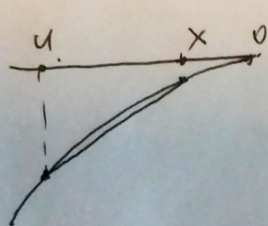
在$x\ge0$时. $xg(x)+e^{-\frac{x^2}{2}}>0$. ①式$<0$.

在$x<0$时. 我们主要研究$g(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ 看如何放缩

其实主要在研究$e^{-\frac{u^2}{2}}$ 换言之,主要研究 $-\frac{u^2}{2}$

对于$t(x)=-\frac{x^2}{2}$　$t'(x)=-x>0$.　$t''(x)=-1<0$.

$t(x)$为凹函数.　由于$t(x)$ ~~>0~~ <0　$t'(x)>0$.　$x\ge u$.



可得"割线斜率 $\ge$ 切线斜率" (在x处)

即 $\frac{t(x)-t(u)}{x-u}\ge t'(x)$

~~又"割线斜率$\le$切线斜率(在u处)"~~

~~可得 $\frac{t(x)-t(u)}{x-u}$~~

两边同时乘$x-u$,得.

$-\frac{x^2}{2}+\frac{u^2}{2}\ge(x-u)(-x)$

即　$-\frac{u^2}{2}\le-\frac{x^2}{2}+x(x-u)=\frac{1}{2}x^2-ux$

$g(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\le\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{1}{2}x^2-ux}du=-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}+\frac{1}{x}$

$\lim_{a\to-\infty}e^{\frac{1}{2}x^2-ax}$

$=-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

由于$x<0$. 故 $xg(x)\ge-e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$xg(x)+e^{-\frac{x^2}{2}}\ge0$.　$(x<0)$

综上 $x\in R$时 $\phi''(x)\phi(x)-[\phi'(x)]^2\le0$

即 $\phi(x)$为对数-凹函数

习题4.(i) 解：$\mathrm{dom} f = \{x \mid x>0\}$

$g(x,y) = xy + \log x$　　$y \ge 0$ 时，$\sup g(x,y) = +\infty$

$y<0$ 时，$\sup g(x,y) = -1 - \log(-y)$ 当且仅当 $y = -\frac{1}{x}$ 即 $x = -\frac{1}{y}$ 时等号成立

故共轭函数 $h(y) = -1 - \log(-y)$ $(y<0)$

(ii) 解：$\mathrm{dom} f = R$

$g(x,y) = xy - e^x$　　在 $y>0$ 时 $\sup g(x,y) = y\log y - y$

当且仅当 $y = e^x$ 即 $x = \log y$ 时等号成立

在 $y=0$ 时 $\sup g(x,y) = \sup(-e^x) = 0$

在 $y<0$ 时 $\sup g(x,y) = +\infty$

故共轭函数 $h(y) = \begin{cases} y\log y - y & y>0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$