数据科学与工程数学基础 作业3 _

2021年4月12日 上午

10k 字 84 分钟

一

> 分别求下面向量的1-范数、2-范数和无穷范数
>
> $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ||a_1||_1 &= |1| + |2| + |1| = 4 \\ ||a_1||_2 &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ ||a_1||_\infty &= \max\{|1|, |2|, |1|\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||a_2||_1 &= |-1| + |0| + |1| = 2 \\ ||a_2||_2 &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ ||a_2||_\infty &= \max\{|-1|, |0|, |1|\} = 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||a_2||_1 &= |-2|+|1|+|1| = 4 \\
||a_2||_2 &= \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \\
||a_2||_\infty &= \max\{|-2|,|1|,|1|\} = 2
\end{aligned}
$$

二

> 证明函数 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, F(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是向量范数

非负性： 易见任取 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$

$$
F(\mathbf{x}) = \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq 0
$$

且 $F(\mathbf{x})=0 \leftrightarrow \forall i\in\{1,2,\dots,n\}, x_i=0$，即 $F(\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

齐次性： 任取 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
F(\lambda\mathbf{x}) &= \sqrt{\langle\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}\rangle} \\
&= \sqrt{(\lambda\mathbf{x})^T\lambda\mathbf{x}} \\
&= \sqrt{\lambda^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \\
&= |\lambda|\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \\
&= |\lambda|F(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

三角不等式： 任取 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
F^2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{x}^T+\mathbf{y}^T)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{x}+\mathbf{y}^T\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{y}+\mathbf{y}^T\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

由**Cauchy-Schwarz**不等式可知 $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n, |\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}||_2\cdot|||\mathbf{y}||_2$

故

$$
\begin{aligned}
F^2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &\leq \mathbf{x}^T\mathbf{x}+|\mathbf{y}^T\mathbf{x}|+|\mathbf{x}^T\mathbf{y}|+\mathbf{y}^T\mathbf{y} \\
&\leq \mathbf{x}^T\mathbf{x}+2\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{y}}+\mathbf{y}^T\mathbf{y} \\
&= \left(\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}+\sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\right)^2 \\
&= (F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y}))^2
\end{aligned}
$$

于是由非负性可知

$$
F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})
$$

因此 $F(\mathbf{x})=\sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ 是向量范数

三

> 对任给的 $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{C}^3$，试问如下实值函数是否构成向量范数？
>
> $$
> \begin{aligned}
> f_1(x) &= |x_1|^4+|x_2|^4+|x_3|^4 \\
> f_2(x) &= |x_1|+3|x_2|+2|x_3|
> \end{aligned}
> $$

(1) 任取 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{C}^3, \lambda\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda\mathbf{x}) &= |\lambda x_1|^4+|\lambda x_2|^4+|\lambda x_3|^4 \\
&= |\lambda|^4|x_1|^4+|\lambda|^4|x_2|^4+|\lambda|^4|x_3|^4
\end{aligned}
$$

故 f_1 不满足齐次性，因此 f_1 **不构成向量范数**

(2) 任取 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^3, \lambda\in\mathbb{R}$

易见

$$f_2(\mathbf{x}) = |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3| \geq 0$$

且 $f_2(\mathbf{x}) = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda\mathbf{x}) &= |\lambda x_1| + 3|\lambda x_2| + 2|\lambda x_3| \\ &= |\lambda|(|x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|) \\ &= |\lambda| f_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= |x_1+y_1| + 3|x_2+y_2| + 2|x_3+y_3| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + 3|x_2| + 3|y_2| + 2|x_3| + 2|y_3| \\ &= f_2(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

因此 f_2 **构成向量范数**

四

> 证明如下定义的函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是内积：
>
> $$\langle x, y\rangle := x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$

非负性：

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle &= x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

对称性： $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 = y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + 2y_2x_2 = \langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$

齐次性：

$$\begin{aligned} \langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle &= \lambda x_1y_1 - (\lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_1) + 2\lambda x_2y_2 \\ &= \lambda(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) \\ &= \lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \end{aligned}$$

线性性：

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle &= (x_1+y_1)z_1 - [(x_1+y_1)z_2 + (x_2+y_2)z_1] + 2(x_2+y_2)z_2 \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 - x_1z_2 - y_1z_2 + x_2z_1 + y_2z_1 + 2x_2z_2 + 2y_2z_2 \\ &= \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle \end{aligned}$$

因此 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$ 是一个内积

五

> 分别求下面矩阵1-范数、2-范数和无穷范数
>
> $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$||A_1||_1 = \max\{|1| + |1|, |2| + |0|\} = 2$$

$$||A_1||_2 = \sqrt{\max\{3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$||A_1||_\infty = \max\{|1| + |2|, |1| + |0|\} = 3$$

$$||A_2||_1 = \max\{|-1| + |1|, |0| + |2|\} = 2$$

$$||A_2||_2 = \sqrt{\max\{3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$||A_2||_\infty = \max\{|-1| + |0|, |1| + |2|\} = 3$$

六

> 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的行空间、列空间、零空间和左零空间。

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

设 $\alpha_1 = (1,2,4)^T, \alpha_2 = (-1,4,2)^T, \alpha_3 = (0,1,1)^T$

故

$$\textbf{Col}(A) = \textbf{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$$

设 $r_1 = (1,-1,0)^T, r_2 = (2,4,1)^T, r_3 = (4,2,1)^T$

故

$$\textbf{Row}(A) = \textbf{span}\{r_1, r_2, r_3\} = \{k_1r_1 + k_2r_2 + k_3r_3 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$$

对 A 作行初等变换

$$A \xrightarrow[r_3-4_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故令 $\alpha = (-1,-1,6)^T$，则

$$\textbf{Null}(A) = \textbf{span}(\alpha) = \{k\alpha : k \in \mathbb{R}\}$$

对 A^T 作行初等变换

$$A^T \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故令 $\beta = (-2,-1,1)^T$，则

$$\textbf{Null}(A^T) = \textbf{span}(\beta) = \{k\beta : k \in \mathbb{R}\}$$

七

> 求由向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 张成的子空间的正交补空间。

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

可知

$$\textbf{span}^{\perp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \textbf{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

八

> 写出一个与子空间 $\text{span}\left\{(1,2,1)^T\right\}$ 正交的子空间。

由于

$$(-1,0,1)\cdot(1,2,1)^T=0$$

故

$$\mathbf{span}\left\{(-1,0,1)^T\right\}\perp\mathbf{span}\left\{(1,2,1)^T\right\}$$

九

> 求向量 $(1,1,1)^T$ 投影到一维子空间 $\operatorname{span}\left\{(1,-1,1)^T\right\}$ 的正交投影。

设 $\alpha=(1,-1,1)^T, x=(1,1,1)^T$

则 $\mathbf{span}\left\{(1,-1,1)^T\right\}$ 的投影矩阵为

$$P_\pi=\frac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\alpha}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

于是 x 在 $\mathbf{span}\left\{(1,-1,1)^T\right\}$ 中的正交投影为

$$\pi(x)=P_\pi\cdot x=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)^T$$

十

> 求向量 $(1,1,1)^T$ 投影到仿射空间 $\operatorname{span}\left\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\right\}+(1,2,1)^T$ 的正交投影。

设 $\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\beta=(1,2,1)^T,x=(1,1,1)^T,x_0=x-\beta=(0,-1,0)^T$

于是令 $B=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

因此

$$B^TB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},B^Tx_0=(1,-1)^T$$

故由 $B^TB\lambda=B^Tx_0$ 可知，$\lambda=(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})^T$

故

$$\pi(x_0)=B\lambda=(-\frac{1}{6},-\frac{5}{6},\frac{1}{3})^T$$

于是

$$\pi(x)=\pi(x_0)+\beta=(\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{4}{3})^T$$

十一

> 设
>
> $$a_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$
>
> ，试将向量组 (a_1,a_2,a_3) 标准正交化。

令

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1,2,-1)^T \\
b_2 &= a_2 - \frac{\langle b_1, a_2\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 = \frac{5}{3}(-1,1,1)^T \\
b_3 &= a_3 - \frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 = 2(1,0,1)^T
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \mathbf{e}_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T \\
e_2 &= \mathbf{e}_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T \\
e_3 &= \mathbf{e}_{b_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T
\end{aligned}
$$

因此 (a_1, a_2, a_3) 标准正交化后的向量组为 (e_1, e_2, e_3)

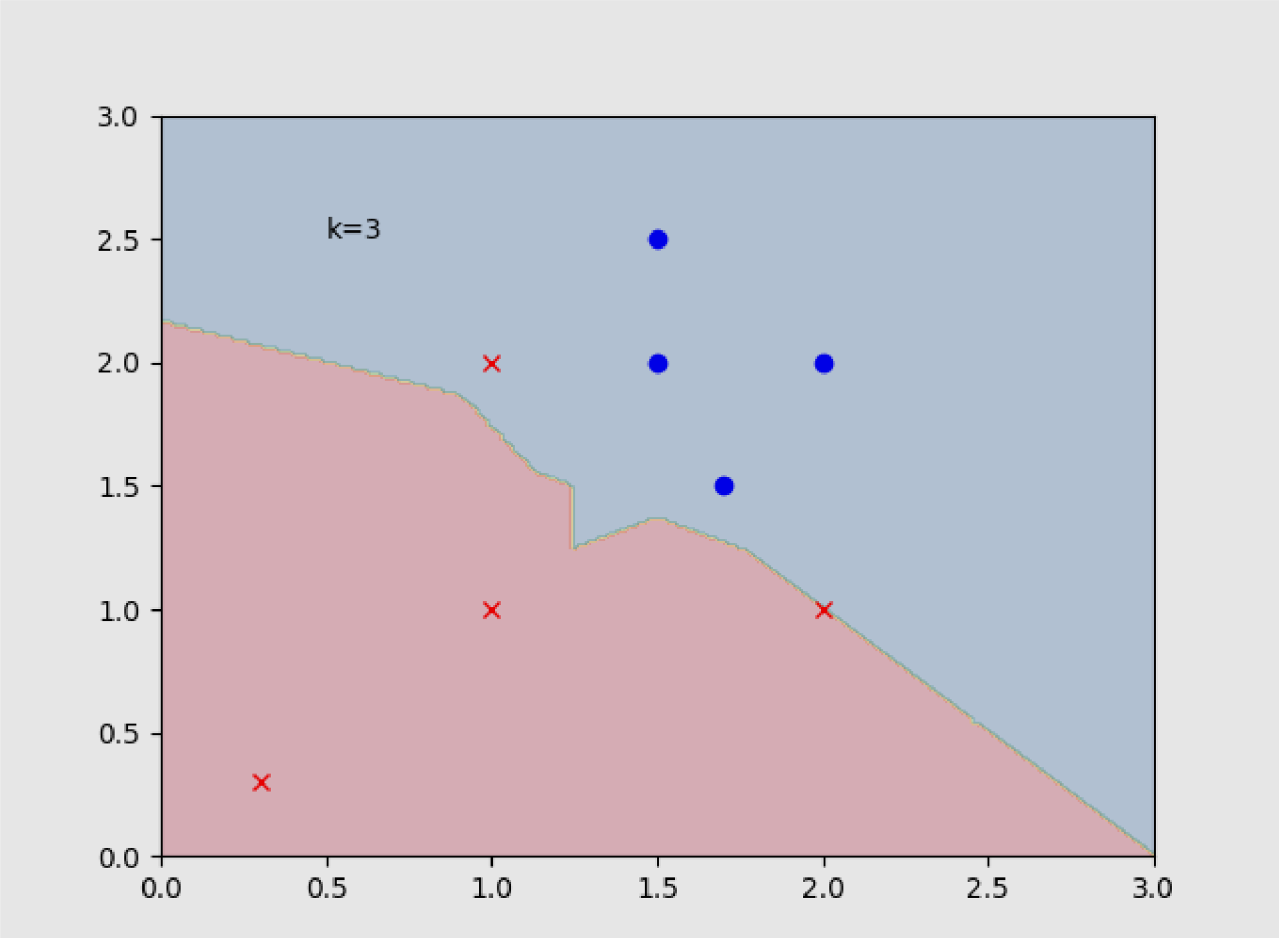
十二

> 复现Lec6例13的结果。其中负例为 $(1.5,2),(1.7,1.5),(2,2),(1.5,2.5)$，正例为 $(1,2),(0.3,0.3),(2,1),(1,1)$，分别采用了欧式距离和曼哈顿距离两种距离度量方式。

实现代码：

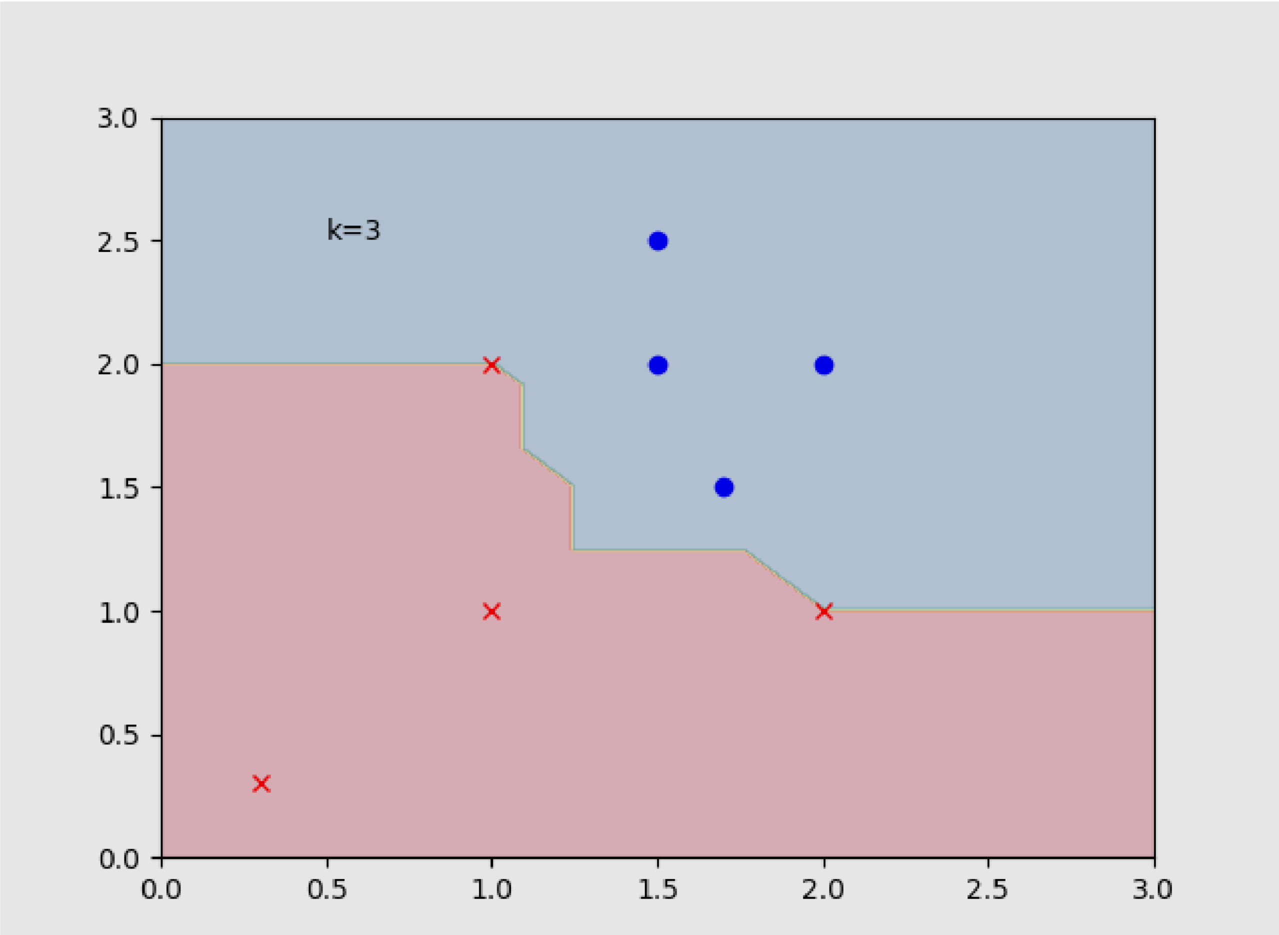
```python
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

# 数据集
p=[[1,0.3,2,1], [2,0.3,1,1]]
n=[[1.5,1.7,2,1.5], [2,1.5,2,2.5]]
p=np.array(p)
n=np.array(n)


def divide(dist,k,X,Y):  # dist为一距离函数，k为KNN的参数，(X,Y)为数据的坐标
    ans_p=[np.sort(dist(p[0]-X[i],p[1]-Y[i]))for i in range(len(X))]
    ans_n=[np.sort(dist(n[0]-X[i],n[1]-Y[i]))for i in range(len(X))]
    t=[ans_p[i][int((k-1)/2)]>ans_n[i][int((k-1)/2)]for i in range(len(ans_p))]
    return np.array(t) # 返回分类结果


def dist1(x,y):  # Euclid distance
    result = []
    for i in range(len(x)):
        result.append(math.sqrt(x[i] * x[i] + y[i] * y[i]))
    return np.array(result)


def dist2(x,y):  # Manhattan distance
    return np.abs(x) + np.abs(y)


def example_dist(x,y):  # Minkovski distance
    return np.max([np.abs(x),np.abs(y)],axis=0)


def plot(dist,k,ax):  # 画图
    N=200  # 在平面上生成 N x N个点
    X=np.linspace(-0,3,N)  # 生成横坐标
    Y=X # 生成纵坐标
    X,Y=np.meshgrid(X,Y)  # 生成 N x N个点
    X=X.reshape(1,N*N)[0]  # 将横坐标化为向量形式
    Y=Y.reshape(1,N*N)[0]  # 将纵坐标化为向量形式
    predict=divide(dist, k, X, Y)
    ax.contourf(X.reshape(N,N), Y.reshape(N,N), predict.reshape(N,N),
                cmap=plt.cm.Spectral,alpha=0.3)  # 此函数将根据预测值和对应坐标生成图像
    ax.plot(p[0],p[1],'rx')
    ax.plot(n[0],n[1],'bo')
    plt.text(0.5,2.5,"k="+str(k))
    plt.show()


fig, ax = plt.subplots()
plot(dist2, 3, ax)
```

输出结果：（欧几里得距离）



euclid

输出结果：（曼哈顿距离）



manhattan

数据科学数学基础　Mathematics　DataScience

新闻搜索网站构建记录　数据科学与工程数学基础 作业2