华东师范大学期末试卷 (A 卷) 答案

2024－2025 学年第一学期

考试科目：数据科学与工程数学基础　任课教师：树扬

姓　　名：＿＿＿＿＿＿　学　　号：＿＿＿＿＿＿

专　　业：＿＿＿＿＿＿　班　　级：＿＿＿＿＿＿

题目	一（选择题）	二	三	四	五	六	总分	阅卷人签名
得分								

题 1　(20 分) 选择题

单选题一道 3 分，多选题一道 5 分，总计 20 分。单选题不选、错选均不得分；多选题不选、错选不得分，少选得 3 分。

(1) 若 $\boldsymbol{A} = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ，列空间为 $Col(\boldsymbol{A})$，行空间为 $Col(\boldsymbol{A}^T)$，零空间为 $Null(\boldsymbol{A})$，左零空间为 $Null(\boldsymbol{A}^T)$。下列说法错误的是（D）

(A) $Col(\boldsymbol{A}^T) \perp Null(\boldsymbol{A})$，$Col(\boldsymbol{A}) \perp Null(\boldsymbol{A}^T)$

(B) $dim(Col(\boldsymbol{A}^T)) = dim(Col(\boldsymbol{A})) = rank(\boldsymbol{A})$

(C) 若 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 在 $Col(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影为 $\pi(\mathbf{x})$，则对 $\forall i = 1, ..., n$ 有 $\mathbf{a_i^T}(\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})) = 0$

(D) $dim(Null(\boldsymbol{A}^T)) = n - rank(\boldsymbol{A})$，$dim(Null(\boldsymbol{A})) = m - rank(\boldsymbol{A})$

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆是（B）

(A) $\begin{bmatrix} 2/3 & -1/9 \\ 1/3 & 4/9 \\ -1/3 & -1/9 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 2/9 & 4/9 \\ -5/9 & -1/9 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4/9 & -1/3 \\ 2/9 & 1/3 \\ -5/9 & -1/3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 2/9 & 4/9 \\ -5/9 & 1/9 \end{bmatrix}$

(3) 下面的集合不是凸集的是（B）

(A) 一条射线，即 $\{\mathbf{x_0} + \theta\mathbf{v} \mid \theta \geq 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}$

(B) 若 $0 < r_1 < r_2$，$\{(x, y) \mid r_1^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r_2^2\}$

(C) 设 $||\cdot||$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数，$r > 0$，$\{\mathbf{x} \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| \leq r\}$

(D) 多面体 $\{\mathbf{x}|\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Cx} = \mathbf{d}\}$. 其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$，$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的每个分量均小于等于 $\mathbf{y}$ 的对应分量。

(4) 下列关于向量范数说法错误的是（C）

(A) 设 $\boldsymbol{u}$ 为 n 维单位列向量，I_n 为 n 维单位矩阵，$\boldsymbol{A} = I_n - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$。若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$，则 $||\boldsymbol{x}||_2 = ||\boldsymbol{y}||_2$

(B) 若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，则 $||\boldsymbol{x}||_2 \leq ||\boldsymbol{x}||_1 \leq n||\boldsymbol{x}||_\infty$

(C) 若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$p > 0$，则 $(\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ 是向量的 l_p 范数

(D) $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，则对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$||\boldsymbol{Px}||_1 \leq \underset{1\leq j\leq n}{max}||\boldsymbol{p}_j||_1 \cdot ||\boldsymbol{x}||_1$

(5) 考虑一个线性映射 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，其在标准基（基矩阵为单位阵）下的变换矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 我们寻找一组新的基下的 Φ 的变换矩阵。令新的基分别为：

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \tilde{\boldsymbol{C}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

通过计算可得：

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{C}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

请问下面哪项为新的基下的变换矩阵（A）

$$(A)\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (D) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(6)【多选】设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，它的完全奇异值分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \sum \boldsymbol{V}^T$，紧奇异值分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_r \sum_r \boldsymbol{V}_r^T$，$r = rank(\boldsymbol{A})$，下列关于 SVD(奇异值分解) 的说法错误的是（ADE）

(A) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解中，$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 矩阵是唯一的

(B) $rank(\boldsymbol{A}) = rank(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = rank(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解可以表示为：$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^\top$。在 $r \geq 2$ 时，令 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ 为一个向量且满足：$\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \alpha\sigma_1\boldsymbol{u}_1 + \beta\sigma_2\boldsymbol{u}_2$

(D) $\forall i = r+1, ...m, j = 1, ...n$，$\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_j \neq 0$

(E) 利用截断 SVD 方法，寻找秩为 k（$k < r$）的矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使得 $||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}||_F$ 最小。寻找得到的最优矩阵就是在紧奇异值分解中对 $\sum_r$ 任意地选择 k 个奇异值 σ_i 和其对应的 $\boldsymbol{U}_r$、$\boldsymbol{V}_r$ 中的向量 $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i$，再将选择到的 $\sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^\top$ 累加求和即可。

题 2 (12 分) 完成以下问题：

(1) (4 分) $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\0&-3\end{bmatrix}$ 分别求 A 的 l_1 范数，1 范数，l_∞ 范数，∞ 范数

(2) (5 分) 求向量 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 在矩阵 $M=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\\4&2\end{bmatrix}$ 的列空间上的正交投影。

【已知：$(M^TM)^{-1}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix}7&-5\\-5&7\end{bmatrix}$ 】

(3) (3 分) 设 $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$I$ 是 n 阶单位矩阵，$||\mathbf{B}||$ 是关于 $\mathbf{B}$ 的矩阵 l_2 范数。已知 $||\mathbf{B}||<1$，$I-\mathbf{B}$ 可逆，证明：$(1-||\mathbf{B}||)\cdot||(I-\mathbf{B})^{-1}||\le n$。

【提示：$I=(I-\mathbf{B})^{-1}\cdot(I-\mathbf{B})=(I-\mathbf{B})^{-1}-(I-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$，

则 $(I-\mathbf{B})^{-1}=I+(I-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ 】

解 (1) l_1 范数：$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|=15$，1 范数：$max\{1+4,2+5+|-3|\}=10$

l_∞ 范数：$max\{1,2,4,5,0,|-3|\}=5$，∞ 范数：$max\{1+2,4+5,0+|-3|\}=9$

（各 1 分）

(2) 可得 $rank(M)=2$，列空间 $span\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}\}$，故 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\\4&2\end{bmatrix}$

投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

（列出投影矩阵式子 1 分，算出投影矩阵 2 分）

则 $\mathbf{x}$ 在 M 的列空间上的正交投影为 $P\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{11}{6}\\\frac{19}{6}\end{bmatrix}$ **（求出最后的结果 2 分）**

(3) 证明：$(I-\mathbf{B})^{-1}=I+(I-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$

根据三角不等式和矩阵 l_2 范数的相容性，有

$||(I-\mathbf{B})^{-1}||=||I+(I-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}||\leq ||I||+||(I-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}||\leq ||I||+||(I-\mathbf{B})^{-1}||\cdot||\mathbf{B}||$ **（利用三角不等式 1 分，利用相容性 1 分）**

移项，可得 $(1-||\mathbf{B}||)\cdot||(I-\mathbf{B})^{-1}||\leq ||I||=\sqrt{n}\leq n$

（最终结果不等式 1 分）

题 3　(17 分)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}17\\6\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}$$

(1) (2 分) 矩阵 **A** 能否进行 QR 分解，为什么？直接写出结论及原因即可。

(2) (6 分) 求矩阵 **B** 的 QR 分解。

(3) (5 分) 利用 (2) 中的分解结果来求解方程组 $\mathbf{Bx}=\mathbf{c}$

(4) (4 分) 利用正规化方程组，求解 **A** 和 **d** 所对应的最小二乘问题 $\min\limits_{\mathbf{x}}||\mathbf{Ax}-\mathbf{d}||_2$ 的全部解。【对正规化方程组的求解方法不限】

解　(1) 因为 **A** 列满秩，所以它能进行 QR 分解。

（写出能进行 QR 分解给 1 分，写出列满秩给 1 分）

(2) 利用施密特正交化方法进行 QR 分解

$$b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\quad b_2=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\quad b_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$$c_1=b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$c_2 = b_2 - \frac{<c_1,b_2>}{<c_1,c_1>}c_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}$$

$$c_3 = b_3 - \frac{<c_2,b_3>}{<c_2,c_2>}c_2 - \frac{<c_1,b_3>}{<c_1,c_1>}c_1 == \begin{bmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{6}{5}\\0\end{bmatrix}$$

（正交化正确得 **2** 分）

再单位化可得 $q_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$， $q_2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\\0\end{bmatrix}$， $q_3 = \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\\0\end{bmatrix}$

（单位化正确得 **1** 分）

$$R = \begin{bmatrix}|c_1| & < b_2, q_1 > & < b_3, q_1 >\\0 & |c_2| & < b_3, q_2 >\\0 & 0 & |c_3|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 5 & -1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

（正确写出 **R** 得 **3** 分）

故 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 5 & -1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得 $Q = \begin{bmatrix}0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 5 & -1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

求解 $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ 即求解 $QR\mathbf{x} = \mathbf{c}$

（列出该式子得 **1** 分）

令 $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ 先解 $Q\mathbf{y} = \mathbf{c}$，可得 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\15\\10\end{bmatrix}$ （正确解得 **y** 得 **2** 分）

再求解 $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$，可得 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}$ （正确解得 **x** 得 **2** 分）

(4) 求解 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{d}$ 所对应的最小二乘问题即求解方程 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{d}$

（列出该式子得 **2** 分）

$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$，$\mathbf{A}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

可以解得最小二乘问题的解为 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$　　（正确解得 **x** 得 **2** 分）

题 4　(15 分)

(1) (6 分) 给定矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$，分别求其完全 SVD 和紧 SVD。

【已知：$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & 9 & -9 \\ 9 & 17 & 8 \\ -9 & 8 & 17 \end{bmatrix}$，$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 27, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = 0$，

特征向量为 $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$】

(2) (4 分) 假设 $\boldsymbol{M}$ 是任意一个非奇异 $n \times n$ 的矩阵，已知其奇异值分解（SVD）为 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^\top$，其中 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$，$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$，$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$。请写出 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵的 SVD 分解。

(3) (5 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的元素非负，$r = rank(\boldsymbol{M})$，其奇异值分解为 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^\top$，其中 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r]$，$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r]$。求拼接矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} O & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M}^T & O \end{bmatrix}$ 的非零特征值和其对应的特征向量。【结果用 $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i, \sigma_i$ 相关形式表示】

解　(1) 通过 $\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}$ 的特征向量，可得：$v_1 = q_1, v_2 = q_2, v_3 = q_3$

$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T$

$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

（正确解得 **U** 的前两个向量得 **2** 分）

可得紧 SVD：$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$

（写出紧 SVD 得 2 分）

求解方程 $A^T x = 0$，可得基础解系向量为 $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 故完全 SVD：

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T$

（正确求得完全 SVD 得 2 分）

(2) 因为 $\boldsymbol{M}$ 的 SVD 分解为

$$\boldsymbol{M} = U\Sigma V^{\mathrm{T}} = (u_1|\cdots|u_n)\left[\operatorname{diag}_{n\times n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\right](v_1|\cdots|v_n)^{\mathrm{T}}$$

其中 $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正交, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$。因为 $\boldsymbol{M}$ 可逆，有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) = n$，故 $\lambda_i > 0, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$. 又由 $\boldsymbol{M} = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 有 $\boldsymbol{M}v_i = \lambda_i u_i\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$，因此

$$\boldsymbol{M}^{-1}u_i = \boldsymbol{M}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{M}v_i\right) = \frac{1}{\lambda_i}v_i$$

其中 $\frac{1}{\lambda_n} \geq \cdots \geq \frac{1}{\lambda_2} \geq \frac{1}{\lambda_1} > 0$。综上

$$\boldsymbol{M}^{-1} = (v_n|\cdots|v_2 \mid v_1)\left[\operatorname{diag}_{n\times n}\left(\frac{1}{\lambda_n},\ldots,\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_1}\right)\right](u_n|\cdots|u_2 \mid u_1)^{\mathrm{T}},$$

（4 分）

(3) 根据特征值的定义，取 $y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n$，设 A 的非零特征值为 λ，有：
$A\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mz \\ M^T y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$
可得：$Mz = \lambda y$ 且 $M^T y = \lambda z$

（根据特征值定义得到该式子得 2 分）

由 $Mz = \lambda y$ 可得 $y = \frac{1}{\lambda}Mz$ 将其代入 $M^T y = \lambda z$ 可得 $\frac{1}{\lambda}M^T M z = \lambda z$，即 $M^T M z = \lambda^2 z$

可以看到 λ^2 为 M^TM 的特征值，z 为 M^TM 对应的特征向量

由于 $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$ 可得 M^TM 的特征值为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2$

1. 若 $\lambda_i = \sigma_i$，显然 λ^2 为 M^TM 的特征值，由于 M^TM 的特征向量为 v_i，故此时 $z = v_i$，再代入 $y = \frac{1}{\lambda}Mz$ 可得 $y = \frac{1}{\lambda_i}Mz = \frac{1}{\sigma_i}Mv_i$

根据奇异值分解的性质，$\frac{1}{\sigma_i}Mv_i = u_i$ 故此时 $y = u_i$，此时特征向量为 $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$

（1.5 分）

2. 若 $\lambda_i = -\sigma_i$，显然 λ^2 为 M^TM 的特征值，由于 M^TM 的特征向量为 v_i，故此时 $z = v_i$，再代入 $y = \frac{1}{\lambda}Mz$ 可得 $y = \frac{1}{\lambda_i}Mz = -\frac{1}{\sigma_i}Mv_i$

根据奇异值分解的性质，$-\frac{1}{\sigma_i}Mv_i = -u_i$ 故此时 $y = -u_i$，此时特征向量为 $\begin{bmatrix} -u_i \\ v_i \end{bmatrix}$

（1.5 分）

题 5　(19 分)

(1) (2 分) 已知 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异，求证：$d(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}$。

(2) (5 分) 利用迹微分法求函数 $f(\mathbf{X}) = Tr(\mathbf{X}^\top\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A})$ 关于变量 $\mathbf{X}$ 的梯度矩阵，其中 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是常数矩阵。

(3) (7 分) 考虑一个两层的全连接神经网络：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \text{ReLU}(\boldsymbol{A}_2(\text{ReLU}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1)) + \boldsymbol{b}_2)$$

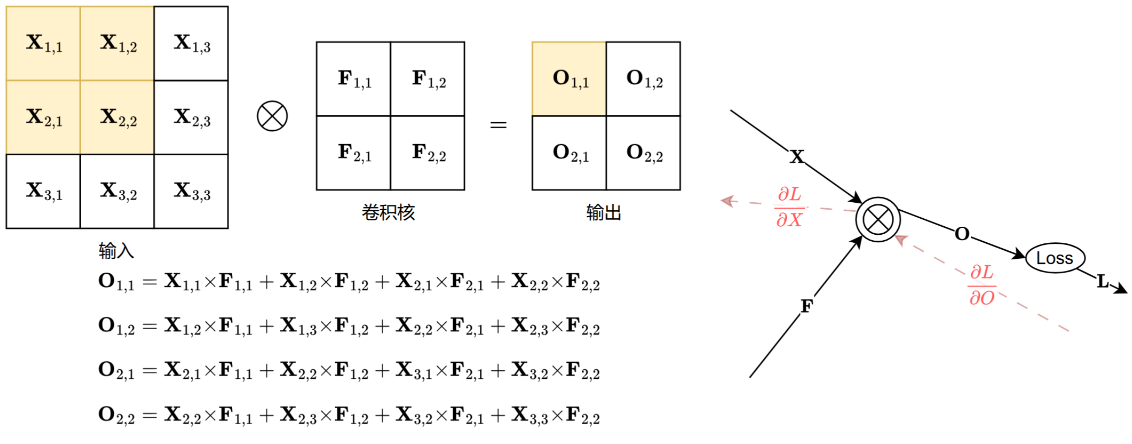
ReLU 的含义：若 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$，则 $\text{ReLU}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(x_1) \\ \vdots \\ \text{ReLU}(x_n) \end{bmatrix}$，其中

$$\text{ReLU}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_i < 0 \\ x_i, & \text{if } x_i \geq 0 \end{cases}$$

已知：

$$A_1=\begin{bmatrix}2&3\\-2&1\\3&-1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&-2&2\end{bmatrix},b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}$$

假设输入为 $\boldsymbol{x}=(-1,2)^T$，并且对应的真实输出为 $\hat{\boldsymbol{y}}=(0,1)^T$，采用平方损失 $L=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}\|_2^2$。试计算函数 L 关于 $\boldsymbol{b}_1$ 的梯度。



(a)卷积过程演示 (b)卷积的反向传播演示

(4) (5 分) 卷积是常用的数学运算，运算过程中，卷积核矩阵 $\mathbf{F}$ 在输入矩阵 $\mathbf{X}$ 上滑动，卷积核每滑动到与输入矩阵的某一子矩阵重叠时，卷积核与该子矩阵对应位置元素相乘再累加，得到输出结果在该位置的值。以步长（每次滑动的距离）等于 1 为例，其得到输出矩阵 $\mathbf{O}$ 的过程和公式如图所示。

已知，输入 $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3&1&2\\7&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=(x_{ij})_{3\times3}$，卷积核 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}=(f_{ij})_{2\times2}$

根据卷积过程易得输出 $\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0&4\\14&9\end{bmatrix}$，$L=Loss(\mathbf{O})$ 是关于 $\mathbf{O}$ 的某种损失

函数。现在假设 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{O}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$，请据此求解 $\frac{\partial L}{\partial x_{11}}$ 和 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}}$

解 (1)$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}$ 对两边同时作微分，有 $\mathbf{0} = d\mathbf{I} = d(\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}) = d\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}d(\mathbf{X}^{-1})$

整理可得 $d(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}$ **（2 分）**

(2)

$$\begin{aligned} dTr(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}) &= Tr(d(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A})) \\ &= Tr(d\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}d\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}) \\ &= Tr((\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{X}^{-1})^\top - \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1})d\boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial Tr(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{X}^{-1})^\top - \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1})^\top$$

（5 分）

(3) 先计算前项过程：

$$A_1x+b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \mathrm{ReLU}(A_1x+b_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2(\mathrm{ReLU}(A_1x+b_1))+b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$y = ReLU(A_2(\mathrm{ReLU}(A_1x+b_1)) + b_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L = 1$$

（前向过程计算正确得 3 分）

记：$k = \mathrm{ReLU}(A_1x + b_1)$

然后分别计算：$\frac{\partial L}{\partial y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$， $\frac{\partial y^T}{\partial k} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$， $\frac{\partial k^T}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

（三个矩阵各 1 分）

所以有：

$$\frac{\partial L}{\partial b_1}=\frac{\partial k^T}{\partial b_1}\frac{\partial y^T}{\partial k}\frac{\partial L}{\partial y}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\-1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

（写出最终结果 **1** 分）

(3) 根据链式法则，利用公式 $\frac{\partial L}{\partial X_{ij}}=\sum_{pq}\frac{\partial O_{pq}}{\partial X_{ij}}\frac{\partial L}{\partial O_{pq}}$ 其中输出 O_{pq} 和输入 X_{ij} 有关联，$\frac{\partial O_{pq}}{\partial X_{ij}}$ 由卷积核 **F** 具体的元素和 X_{ij} 在 **F** 中的相对位置决定

比如 $\frac{\partial L}{\partial X_{11}}=\frac{\partial O_{11}}{\partial X_{11}}\frac{\partial L}{\partial O_{11}}$，$\frac{\partial L}{\partial X_{12}}=\frac{\partial O_{11}}{\partial X_{12}}\frac{\partial L}{\partial O_{11}}+\frac{\partial O_{12}}{\partial X_{12}}\frac{\partial L}{\partial O_{12}}$

比如 $\frac{\partial O_{11}}{\partial X_{11}}=F_{11}=1$，$\frac{\partial O_{11}}{\partial X_{12}}=F_{12}=-2$，$\frac{\partial O_{12}}{\partial X_{12}}=F_{11}=1$

同理，代入，可得：$\frac{\partial L}{\partial X}=\begin{bmatrix}3&1&-14\\3&-2&5\\-6&10&24\end{bmatrix}$

（求得第一个元素得 **2** 分，求得完整的结果再得 **3** 分）

题 6　(17 分)

(1) (5 分) 判断函数 $f(\mathbf{x})=\max(\|\mathbf{Ax}+\mathbf{b}\|_2,\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}})+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Px}$（其中 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$，$\mathbf{P}$ 为 n 阶半正定矩阵）是否为凸函数，并说明理由。

(2) (4 分) 考虑优化问题 $min f(\mathbf{x})=x_1^2+4x_1x_2$，从初始点 $\mathbf{x}^{(0)}=(1,0)^T$ 出发，写出用梯度下降法迭代一步的过程，迭代时采用精确线搜索方法。

(3) (4 分) 利用二阶最优性条件找到问题 $min f(\mathbf{x})=x_1^2+4x_2^2+2x_1x_2$ 的全局最优解。

(4) (4 分) 证明 $f(\mathbf{x})=(\prod_{k=1}^{n}x_k)^{\frac{1}{n}}$，($\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 且 $x_i>0$) 是凹函数。

【提示，已知:

$$\nabla f(\mathbf{x})=\left(\frac{f(\mathbf{x})}{nx_1},\frac{f(\mathbf{x})}{nx_2},\dots,\frac{f(\mathbf{x})}{nx_n}\right)^\top,\quad \nabla^2 f(\mathbf{x})=-\frac{f(\mathbf{x})}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{n-1}{x_1^2}&-\frac{1}{x_1x_2}&\cdots&-\frac{1}{x_1x_n}\\-\frac{1}{x_2x_1}&\frac{n-1}{x_2^2}&\cdots&-\frac{1}{x_2x_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{x_nx_1}&-\frac{1}{x_nx_2}&\cdots&\frac{n-1}{x_n^2}\end{bmatrix}.】$$

解 (1) 由仿射函数的任意范数为凸函数可知 $\|Ax+b\|_2$ 为凸函数，另外 $\sqrt{x^Tx}$ 为 x 的 2 范数，显然为凸函数。根据逐点取最大值具有保凸性，可知 $\max(\|Ax+b\|_2, \sqrt{x^Tx})$ 为凸函数。 **（3 分）**

利用二阶条件，易得 $\frac{1}{2}x^TPx$ 也是凸函数 **（1 分）**

由于凸函数相加具有保凸性，$f(x)$ 是凸函数。 **（1 分）**

(2)$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_1+4x_2, 4x_1)^T$

$-\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = (-2,-4)^T$ 求解 λ：$\mathbf{x}^{(0)} - \lambda\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = (1-2\lambda, -4\lambda)^T$

$f(\mathbf{x}^{(0)} - \lambda\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})) = 36\lambda^2 - 20\lambda + 1$: $\lambda = \frac{-20}{-2\times 36} = \frac{5}{18}$ 时 $f(\mathbf{x}^{(0)} - \lambda\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}))$ 最小

代入 $\lambda = \frac{5}{18}$ 可得 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \lambda\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = (\frac{4}{9}, -\frac{10}{9})^T$

（4 分）

(3) 根据二阶最优性条件，我们需要使得下列式子同时成立，才能使得 $\mathbf{x_1}$ 为全局最优解：$\nabla f(\mathbf{x_1}) = \mathbf{0}, \nabla^2 f(\mathbf{x_1}) \succ \mathbf{0}$ **（两个式子各 1 分）**

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x},\quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x},\quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

（1 分）

则只需使 $\nabla f(\mathbf{x_1}) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x_1}$ 解得 $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 这便是问题的全局最优解。

（1 分）

(4) 要证 $f(\mathbf{x})$ 是凹函数，只需证 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 半负定。

（1 分）

根据提给条件

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = -\frac{f(\mathbf{x})}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} = nI_n - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ I_n 特征值为 1（n 重），nI_n 特征值为 n（n 重）

根据数学归纳法，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 特征值为 n 和 0($n-1$ 重)

（3 分）

故中间那个矩阵是实对称矩阵，且特征值为 n（$n-1$ 重）和 0，是半正定矩阵，因此 $\nabla^2 f(x)$ 是半负定矩阵。