华东师范大学期末试卷 (A 卷)

2023－2024 学年第一学期

考试科目：数据科学与工程数学基础　任课教师：黄定江

姓　　名：＿＿＿＿＿＿＿＿　学　　号：＿＿＿＿＿＿

专　　业：＿＿＿＿＿＿＿＿　班　　级：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名
得分										

题 1　(13') 完成以下问题：

(1) 对矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 进行 LU 分解；

(2) 设 A 对称且 $a_{11} \neq 0$, 并假经过一步 Gauss 消去之后, A 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$$

证明：A_2 仍是对称矩阵。

题 2 (10') $\mathbb{R}^5$ 的欧氏空间。子空间 $U \subseteq \mathbb{R}^5$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ 如下：

$$U = \textbf{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

请确定 $\boldsymbol{x}$ 在子空间 $\mathbb{U}$ 上的正交投影 $\pi_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{x})$;

题 3 (13') 完成下列矩阵函数求梯度：

(1) 求函数 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 和 $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的 Hessian 矩阵；

(2) 考虑一个两层的全连接神经网络：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{ReLU}(\boldsymbol{A}_2(\mathrm{ReLU}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1)) + \boldsymbol{b}_2)$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

假设输入为 $\boldsymbol{x} = (1, -1)$，并且对应的真实输出为 $\hat{\boldsymbol{y}} = (0, 1)$，采用平方损失 $L = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\|_2^2$。试计算函数 L 关于 $\boldsymbol{b}_1$ 的梯度。

题 4 (13') 完成下列问题：

(1) 设已知矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的 SVD 分解为 $\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}$,请写出拼接矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{M} \quad \boldsymbol{M}]$ 的奇异值分解；

(2) 令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{P}$ 为 $m \times m$ 正交矩阵。证明：$\boldsymbol{PA}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值相同。并说明矩阵 $\boldsymbol{PA}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的左、右奇异向量有何关系？

题 5 (12') 已知矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 计算矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 1 范数和 ∞ 范数；

(2) 证明：如果矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ 是按列分块的，那么 $\|\boldsymbol{A}\|_F^2 = \|\boldsymbol{a}_1\|_2^2 + \|\boldsymbol{a}_2\|_2^2 + \cdots + \|\boldsymbol{a}_n\|_2^2$。

(3) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数，证明：由

$$\Omega(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义的函数 $\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个范数。

题 6 (12') 求解以下问题：

(1) 假设 $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \cdots \to X_n$ 是一个马尔科夫链，即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)\, p(x_2 \mid x_1) \cdots p(x_n \mid x_{n-1})$$

试化简 $I(X_1; X_2, \ldots, X_n)$。

(2) X 和 Y 是 $\{0, 1, 2, 3\}$ 上的独立、等概率分布的随机变量，求 $H(X+Y)$。

题 7 (13') 求解下述问题：

(1) 请计算负熵函数 $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$ 的共轭函数。

(2) 用 Lagrange 乘子法求欠定方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二范数解,其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \leq n, \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$。

题 8 (14') 求解如下优化问题

(1) 使用梯度下降法和固定步长 $\lambda = 0.1$ 计算 $\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + 16(x_2 - 2)^2$ ，初始点 $x^{(0)} = (3, 2)^T$，迭代至第三步后终止，请计算迭代过程中的解、梯度和函数值（第三步不用计算梯度和函数值，计算结果保留小数点后两位）。

(2) 请谈谈牛顿法与 BFGS 方法之间的区别与联系。