2021 级华东师范大学本科生期末考试

《数据科学与工程数学基础》笔试试卷　　2023.2

学院：数据科学与工程学院　　考试形式：闭卷　　所需时间：120 分钟

考生姓名：______　　学号：______　　专业：______　　任课教师：黄定江

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	13	12	12	13	13	12	13	12	100
得分									
阅卷人									

题 1　(13') 假设 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}\backslash\{0\}$ 是一个投影矩阵.

(1) 证明：$Qz = z,\ \forall z \in \mathcal{R}(Q)$ 以及 $Qy - y \in \mathcal{N}(Q),\ \forall y \in \mathbb{R}^n$.

(2) 证明：Q 的特征值 $\lambda \in \Lambda(Q) \subseteq \{0, 1\}$。

(3) 假设 $\mathcal{R}(Q) = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_r)$，$\mathcal{N}(Q) = \operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ 这里 r 表示投影矩阵的秩，请据此写出 Q 的特征分解 $Q = XDX^{-1}$ 的具体形式。

(4) 证明：当 $Q \neq I_n$，$\det(Q) = 0$。

题 2 (12’) 已知矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(1) 先求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 QR 分解，然后根据 QR 分解求解方程组 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{b}=[6,4,1]^\top$；

(2) 请根据你对 LU 分解、Cholesky 分解和 QR 分解的理解，谈谈它们之间的联系与差异。

题 3 (12’) 完成下列矩阵函数求梯度：

(1) 求行列式函数 $f(\boldsymbol{X})=|\boldsymbol{X}^3|$ 的梯度矩阵，其中变量 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异；

(2) 求迹函数 $f(\boldsymbol{X})=Tr(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A})$ 的梯度矩阵，其中变量 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异。

题 4 (13’) 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7/5 & -1/5\\ 1/5 & 7/5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(1) 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 SVD 分解；

(2) 假设 $\boldsymbol{M}$ 是任意一个非奇异 $n\times d$ 的矩阵，已知其奇异值分解为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^\top$，其中 $\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]$，$\Sigma=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\boldsymbol{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$。请分别写出矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵的 SVD 分解；

(3) 请写出 (2) 中 $\boldsymbol{M}$ 的转置矩阵的 SVD 分解。

题 5 (13’) 已知矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

(1) 计算矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 1 范数和 ∞ 范数;

(2) 计算矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 F 范数和 2 范数。

(3) 试比较任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 F 范数和 2 范数的大小，并给出理由。

题 6 (12’) 求解以下问题:

(1) 证明: Gauss 概率密度函数的累积分布函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$$

是对数-凹函数. 即 $\log(\Phi(x))$ 是凹函数。

(2) 设总体 $X\sim E(\theta),X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, θ 的先验分布为指数分布 $E(\lambda)$ (λ 已知), 求 θ 的最大后验估计。

题 7 (13’) 求解下述问题:

(1) 写出下述非线性规划的 KKT 条件，并求解

$$\begin{aligned}\texttt{maximize}\quad & f(x)=(x-4)^2\\ \texttt{suject to}\quad & 1\le x\le 5\end{aligned}$$

(2) 用 Lagrange 乘子法证明：矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的 2 范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2$$

的平方是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

题 8 (12’) 求解如下优化问题

(1) 考虑问题

$$\min f(\boldsymbol{x})=3x_1^2+3x_2^2-2x_1^2x_2.$$

从初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,1)^{\mathrm{T}}$ 出发, 写出用最速下降法迭代两步的求解过程，并说明迭代是否可以终止。

(2) 尽管牛顿法在求解无约束优化问题时，具有更高阶的收敛速度，但在处理大规模问题时，该方法涉及的 Hessian 矩阵及其逆矩阵的计算是非常耗时的。因此，研究者们探究了对 Hessian 矩阵逆近似的迭代方法，也就是拟牛顿法或变尺度法。通常这样近似 Hessian 矩阵或逆矩阵需要保持原有的性质，即满足割线方程:

$$\Delta x^{(k)} = \bar{H}^{(k+1)}\Delta g^{(k)},$$

其中 $\bar{H}^{(k)}$ 表示矩阵的 Hessian 矩阵逆的近似。如果已经得到上一轮迭代时的近似 $\bar{H}^{(k)}$，则一般地做法是通过秩一修正或秩二修正得到下一轮的近似矩阵 $\bar{H}^{(k+1)}$。当采用秩二修正时，便得到著名的 DFP 法。现已知第 k 次迭代时的 $\Delta x^{(k)}, \bar{H}^{(k)}, \Delta g^{(k)}$，请给出下一轮迭代的 Hessian 矩阵逆的近似的推导过程。