

# 机器学习理论作业1

10211900416 郭夏辉

## Q2.1: 证明感知机不能表示异或问题

感知机模型:  $f(x) = \text{sign}(w \cdot x + b)$

其中:  $x \in R^n$ 为输入的特征向量,  $w \in R^n$ 为权重,  $b \in R$ 为偏置

假设感知机模型可以表示异或问题, 设向量 $x$ 有维度为2,  $x = [x_1, x_2]^T$ 与之对应,  $w = [w_1, w_2]^T$

对异或函数来说, 先来列出其对应的输入和输出。

$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	-1
0	1	1
1	0	1
1	1	-1

1. 若 $x_1 = 0, x_2 = 0, f(x) = -1$ ,此时 $w \cdot x + b < 0$ ,可得 $b < 0$ ,即 $-b > 0$ ;
2. 若 $x_1 = 0, x_2 = 1, f(x) = 1$ ,此时 $w \cdot x + b > 0$ ,可得 $w_2 > -b > 0$ ,即 $w_2 + b > 0$ ;
3. 若 $x_1 = 1, x_2 = 0, f(x) = 1$ ,此时 $w \cdot x + b > 0$ ,可得 $w_1 > -b > 0$ ,即 $w_1 + b > 0$ ;
4. 若 $x_1 = 1, x_2 = 1, f(x) = -1$ ,此时 $w \cdot x + b < 0$ ,可得 $w_1 + w_2 + b < 0$

在1.、2.和3.中, 对所推出的条件做加法, 可得 $w_1 + w_2 + 2b - b = w_1 + w_2 + b > 0$ ,这与4.中所等价的条件矛盾, 故原假设不成立, 不存在任何感知机模型表示异或问题, 感知机不能表示异或问题, 原式得证。

当然这个题目还可以通过画图法直观地证明, 无法找到一条直线将相应的点分离, 此处就不赘述了。