第一章　函数、极限、连续

第三节　函数极限

有关知识及方法：

（1）最常用方法：洛必塔法则和泰勒公式 ，要注意和其它方法相结合，比如等价无穷小代换，变量代换，恒等变形，因子分离，重要极限及微分学和积分学的各种知识。

（2）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$（或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$）

（3）常用的等价无穷小和泰勒公式：$x\to 0$时，有

（a）$\sin x=x+o(x),\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(b) $1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

(c) $e^x-1=x+o(x)$，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(d) $\ln(1+x)=x+o(x),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$

(e)

$$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(x),(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

(f) $\tan x=x+o(x),\arctan x=x+o(x),\arcsin x=x+o(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在$\Leftrightarrow$ $f(a^-),f(a^+)$都存在且相等

例 1：设求$\lim\limits_{x\to 1^-}(\sqrt{\frac{1}{1-x}+1}-\sqrt{\frac{1}{1-x}-1})$

分析：初一看该函数不简便,但作一变换 $y=\frac{1}{1-x}$,就简单了。

例 2：求（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$，（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}$ （$a>0,b>0$）

分析：（1）属于1^{∞}型的问题，一般可利用重要极限或利用指数、对数去解决，（2）属于∞^0型的问题，可利用利用指数、对数或其它方法去解决。

解：（1） $(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{a^x+b^x-2}{2})^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\times\frac{a^x+b^x-2}{2x}}$

而$\dfrac{a^x+b^x-2}{2x}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x})\to\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}\ (x\to 0)$

故　原式＝$\sqrt{ab}$

或　$(\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}(\ln(a^x+b^x)-\ln 2)}\to e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=\sqrt{ab}\ (x\to 0)$

（２）$(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(a^x+b^x)}$

　若　$a\ge b$，则　$\dfrac{\ln(a^x+b^x)}{x}=\ln a+\dfrac{1}{x}\ln(1+(\dfrac{b}{a})^x)\to\ln a\ (x\to+\infty)$

从而　原式＝a

若　$a<b$，同样可得　原式＝b

总之　$\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=\max(a,b)$

注：题（２）用夹逼定理更简便.

例２：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

解:（用洛必塔法则）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{1}{2}$$

或（用泰勒公式）

$$\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)=x-x^2+o(x^2)-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

注：1^0：用洛必塔法则时　（Ｉ）要符合洛必塔法则的条件　（ＩＩ）注意与等价无穷小代换，变量代换，恒等变形，因子分离等方法相结合。

2^0：用泰勒公式时　（Ｉ）当求$x\to x_0$的极限时，一定是在x_0处展开成泰勒公式；当求$x\to\infty$的极限时，可作变换$t=\dfrac{1}{x}$，化为$t\to 0$时的极限。（ＩＩ）带皮亚诺余项。

（3）下面解法错在哪里？

由于当$x\to 0,\ln(1+x)\sim x$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-x}{x^2}=-1$

例 3：求（1）$\lim\limits_{x\to\infty} x(e-(1+\frac{1}{x})^x)$，（2）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{1-x})\ln x}{\sin(1-x)\sqrt[3]{1-x^2}}$

解：（1）令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x(e-(1+\frac{1}{x})^x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}$

（用洛必塔法则）$\lim\limits_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}(-(1+t)^{\frac{1}{t}}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2})$

$$=-\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{e}{2}$$

或（用泰勒公式）

$$e-(1+t)^{\frac{1}{t}}=e-e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e-e^{1-\frac{t}{2}+o(t)}=e(1-e^{-\frac{t}{2}+o(t)})=\frac{e}{2}t+o(t)$$

（2）令 $t=1-x$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{1-x})\ln x}{\sin(1-x)\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})\ln(1-t)}{\sqrt[3]{2-t}\sqrt[3]{t}\sin t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{2-t}}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{\sqrt[3]{t}}\times\frac{\ln(1-t)}{\sin t}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

另外，涉及两侧极限及无穷小与有界量之积是无穷小的问题也是要熟悉的。例如：

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\ln\cos x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}=-2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\cos x-1}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan\frac{1}{x}}{\ln\cos x}=0 \qquad (4)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-x^3\arctan\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln\cos x}=-2$

求极限 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]$

分析：这里出现了绝对值函数（绝对值函数实际上是分段函数）以及 $e^{\frac{1}{x}}$（$\lim\limits_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0-}e^{\frac{1}{x}}=0$），容易想到考虑左、右极限。

解：$\lim\limits_{x\to0+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim\limits_{x\to0+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}]=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to0-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim\limits_{x\to0-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}]=2-1=1$

所以 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=1$

例 4：设 a,b,c 满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)}{\sin^3 x}=1$，求 a,b,c。

分析：由于分母 $\sin^3 x$ 与 x^3 为等价无穷小，故分母可用 x^3 代替，从而分子一定等于 $x^3+o(x^3)$，由此也可以看出这种问题用泰勒公式去解决是方便的

解：依题意知 $\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)=x^3+o(x^3)$

而 $\ln(1+2x)-(ax+bx^2+cx^3)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-(ax+bx^2+cx^3)+o(x^3)$

$=(2-a)x-(2+b)x^2+(\frac{8}{3}-c)x^3+o(x^3)$

比较可得 $a=2,b=-2,c=\frac{5}{3}$

例 5：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内 $f(x)\neq0$，且 $f''(0)$ 存在，并且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,\ f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$。

分析：由题设可推出 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=2x^2+o(x^2)$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}=e^2$

习题

1．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\tan^3 x}$ （ 2 ） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6})$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$ (5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}e^{-x}$

(答案: $\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6},1,e^{-\frac{1}{2}}$．（5）用拉氏中值定理很简便)

2．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{1-\cos x})}{2^x-1}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=$ ________．（答案：$2\ln 2$）

3．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})}=2$，则 $a=$ ________．(答案：-4)

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{a+t^2}\,dt}{x^2}, x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(e^x-1)x}, x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 $a=$ ________．（答案：$\frac{1}{4}$)

5．已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=2$，求 $f(0), f'(0)$．

（答案：$-1,2$）

6．设 $y(x)$ 满足方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x, y'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}=$ ________．

（答案： 1 ）

7．已知 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，求：

$f(0), f'(0), f''(0), \lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$．（答案： 0 ， 0 ， 4 ， e^2 ）