第四章　级数

第三节 傅里叶级数

本节内容主要就是傅里叶级数的收敛定理：设 $f(x)$ 为周期为 $2l$ 的周期函数，且满足狄氏条件，则 $f(x)$ 的三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{n})$ 一定收敛且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{n})=\begin{cases} f(x), x为f(x)的连续点 \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, x为f(x)的间断点 \end{cases}$$

其中 $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$。

特别若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a_n=0\,(n=0,1,\cdots), b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots), a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=0,1,\cdots)$

注：（1）若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上有定义，且满足狄氏条件，那么 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开为周期为 $2l$ 的三角级数。（先要对 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期作周期开拓）

（2）若 $f(x)$ 在 $[0,l]$（或 $[-l,0]$）上有定义，且满足狄氏条件，那么 $f(x)$ 可在 $[0,l]$（或 $[-l,0]$）上展开为周期为 $2l$ 的余弦级数或正弦级数。（若展开为余弦级数，先要作偶开拓；若展开为正弦级数，先要作奇开拓）

本节内容不多，重点是掌握两点（1）傅里叶系数 a_n, b_n 的计算，（2）确定傅里叶级数的和。

例 1．设 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$，将 $f(x)$ 展开为周期为 2π 的傅氏级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_2=$ _____, $b_3=$ _____ 。

解：$a_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x(2\pi-x)}{4}\cos 2xdx=\frac{1}{8\pi}[x(2\pi-x)]_0^{2\pi}-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin 2xdx=-\frac{1}{4}$

$b_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x(2\pi-x)}{4}\sin 2xdx=\frac{1}{4\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x(2\pi-x)[\sin 2x+\sin 2(2\pi-x)]dx=0$

例 2．设 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx$，则 $s(-\frac{1}{2})=$ ____, $s(-1)=$ _____ .

答案：$\frac{1}{4},0$

例 3．设 $f(x)$ 为周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}2,-1<x\le 0\\ x^2,0<x<1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅氏级数在 $x=-1$ 处收敛于 ______，在 $x=0$ 处收敛于 ______．（答案：$\frac{3}{2},1$）

例 4．设 $f(x)=\begin{cases}x,0\le x\le 1\\ 2,1<x\le 2\end{cases}$，$f(x)$ 的余弦级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$ 的和函数记为 $s(x)$，则 $s(-1)=$ ____, $s(4)=$ _____．（答案：$\frac{3}{2},0$）

例 4．设 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积，令 $T_n=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$，

问 $\alpha_0,\alpha_k,\beta_k(k=1,2,\cdots n)$ 取何值时，$\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n)^2dx$ 最小.

解：$f(x)$ 的傅里叶系数为

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=0,1,2,\cdots$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\cdots$

$$\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}{T_n}^2(x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\pi[\frac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)]+\pi[\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-b_k)^2+\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2\}$$

$$-\pi(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2))$$

可见　$\alpha_0=a_0,\alpha_k=a_k,\beta_k=b_k,k=1,2,\cdots,n$ 时 $\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n)^2dx$ 最小.

例 5．（1）设 $f(x)$ 以 2π 为周期且可积，并且在 $[0,2\pi]$ 上单调减少，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，证明：$b_n\ge 0$。

（2）设 $f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 上可导，并且 $f'(x)$ 可积且单调减少，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，证明：$a_n\le 0$。

证明：（1）$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}f(x)\sin nxdx$

而$\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}f(x)\sin nxdx=\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2(k-\frac{1}{2})\pi}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\sin nxdx\ge 0$

故$b_n\ge 0$。

（2）$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)d\sin nx$

$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin nxdx$，由（1）知$a_n\le 0$。