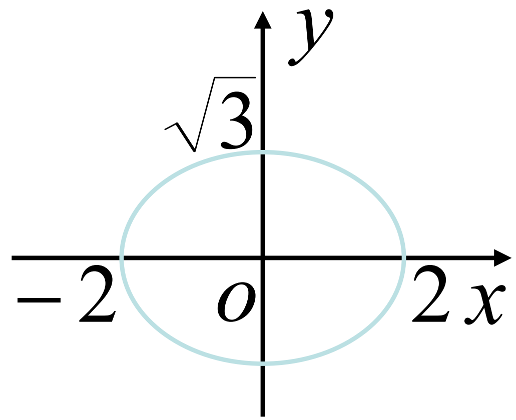
课前练习

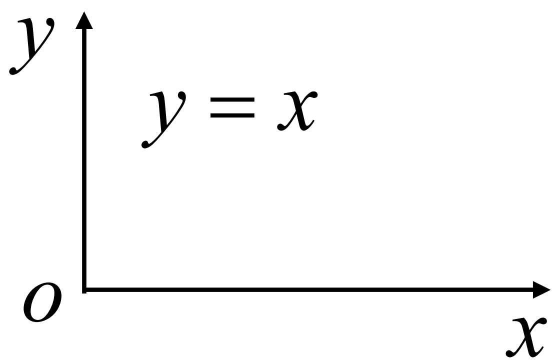
1. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 周长为 a , 求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$$



2. 设 C 是由极坐标系下曲线 $r=a, \theta=0$ 及 $\theta=\pi/4$ 所围区域的边界, 求

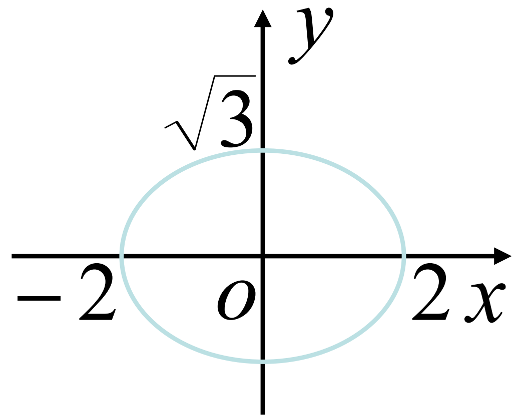
$$I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$



思考与练习

1. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 周长为 a，求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$$



提示: 利用对称性 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=0$

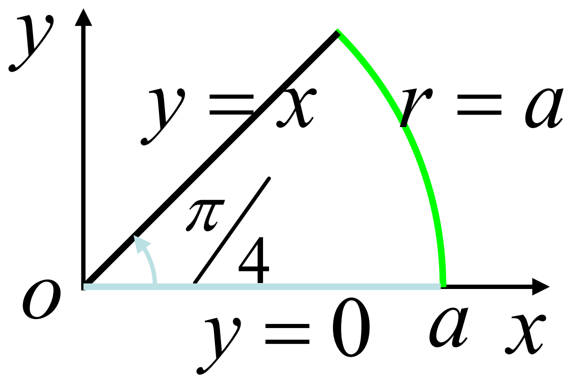
$$\text{原式}=12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a$$

分析: $$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=\int_{L_{上}} 2xy\,\mathrm{d}s+\int_{L_{下}} 2xy\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{-2}^{2} 2x\sqrt{\cdots}\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2} 2x(-\sqrt{\cdots})\,\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

2. 设 C 是由极坐标系下曲线 $r=a, \theta=0$ 及 $\theta=\pi/4$ 所围区域的边界, 求

$$I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$



提示: 分段积分

$$I=\int_0^a e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{x\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}a+2\right)e^a-2$$

第二节

第二型曲线积分

一、第二型曲线积分的概念与性质

二、第二型曲线积分的计算法

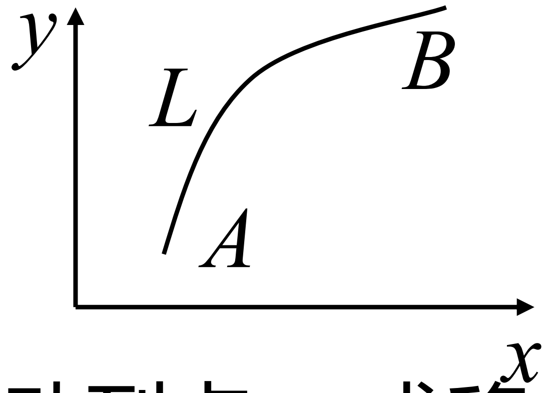
三、两类曲线积分之间的联系

一、 第二型曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

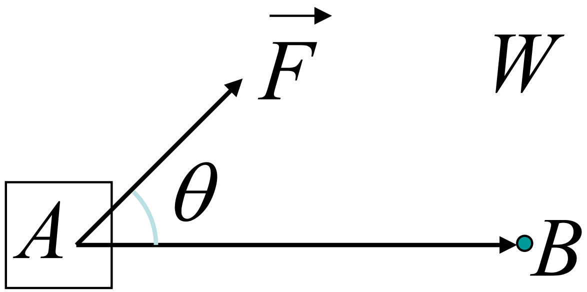
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xoy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功 W.

力沿直线所作的功



$$W=F\left|AB\right|\cos\theta$$
$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解决办法:

"大化小"

"常代变"

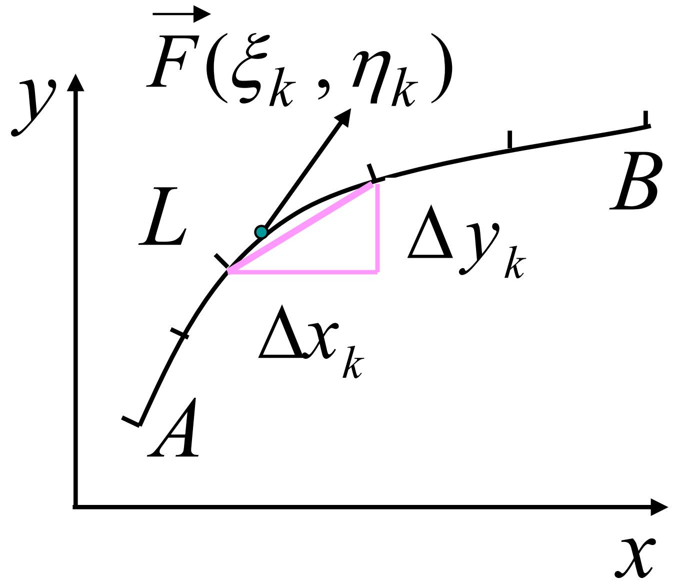
"近似和"

"取极限"

1) “**大化小**” .

把L分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$

所做的功为 ΔW_k, 则 $\quad W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$



2) “**常代变**”

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$

近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

$$\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_{\mathbf{k}},\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=P(\xi_{\mathrm{k}},\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_{\mathrm{k}},\eta_k)\Delta y_k$$

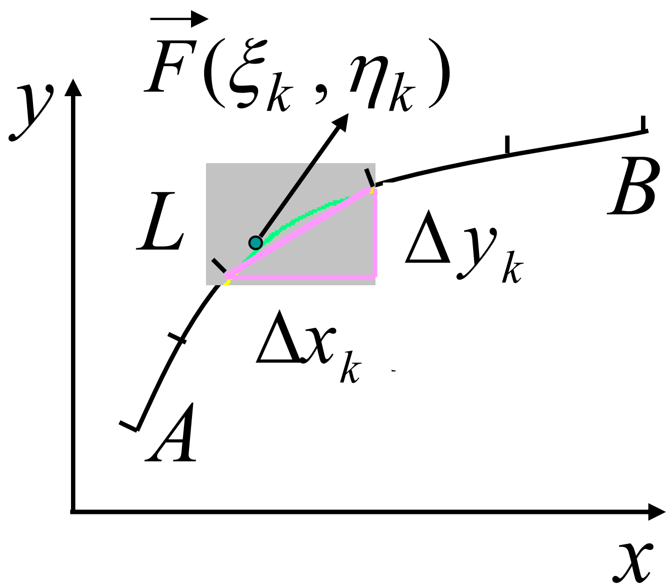
3) “**近似和**”

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

4) “**取极限**”

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

(其中λ为 n 个小弧段的最大长度)



2. 定义. 设 L 为xoy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**, 在L 上定义了一个向量函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对**坐标的曲线积分**, 或**第二型曲线积分**. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为**被积函数** , L 称为**积分弧段** 或 **积分曲线** .

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k ,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k ,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地, 若 Γ为空间曲线弧 , 记 $\overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 L_i $(i=1,\cdots,k)$,

则 $$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 用L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

说明:

- 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的**方向**！
- 定积分是第二类曲线积分的特例.

二、第二型曲线积分的计算法

定理: 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 则曲线积分存在, 且有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

证明: 下面先证

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点 (ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为L 为光滑弧，所以$\varphi'(t)$连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\phi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\ \mathrm{d}\,t$

特别是, 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x:a\to b$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\,\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \quad t:\alpha\to\beta, \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 类似有

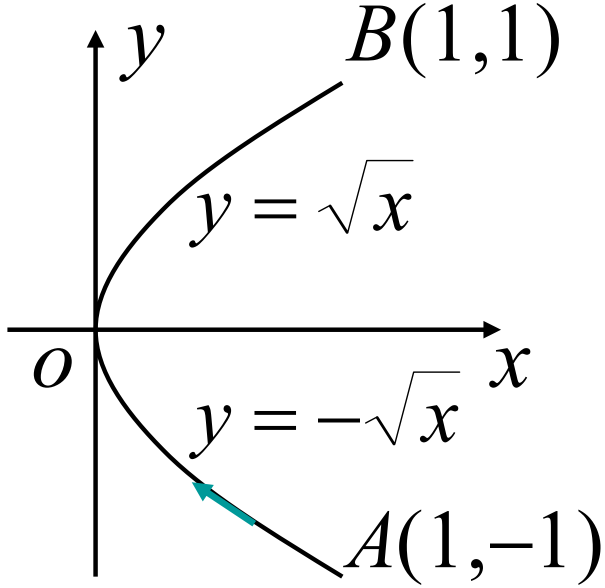
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\ \omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

例1. 计算$\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L为沿抛物线 $y^2=x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.



解法1 取 x 为参数, 则 $L:\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}:\ y=-\sqrt{x},\ \ x:1\to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y=\sqrt{x},\quad x:0\to 1$$

$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x=\int_{\overset{\frown}{AO}} xy\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{OB}} xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

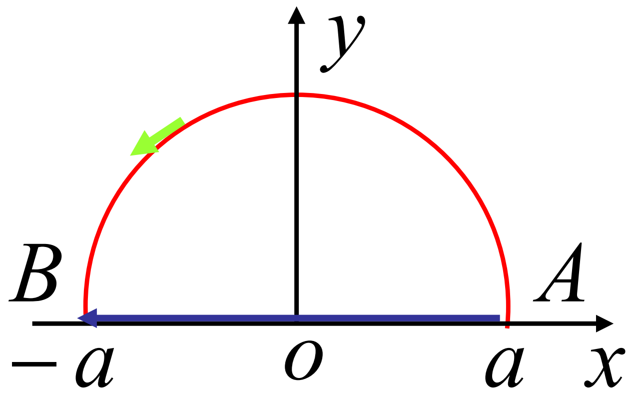
解法2 取 y 为参数, 则 $L:x=y^2$, $y:-1\to 1$

$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^2 y(y^2)'\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$

例2. 计算$\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A\,(\,a\,,0\,)$沿 x 轴到点 $B\,(-\,a\,,0\,)$.



解: (1) 取L的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t:0 \to \pi$

则 $$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为$y = 0,\ x : a \to -a$,则

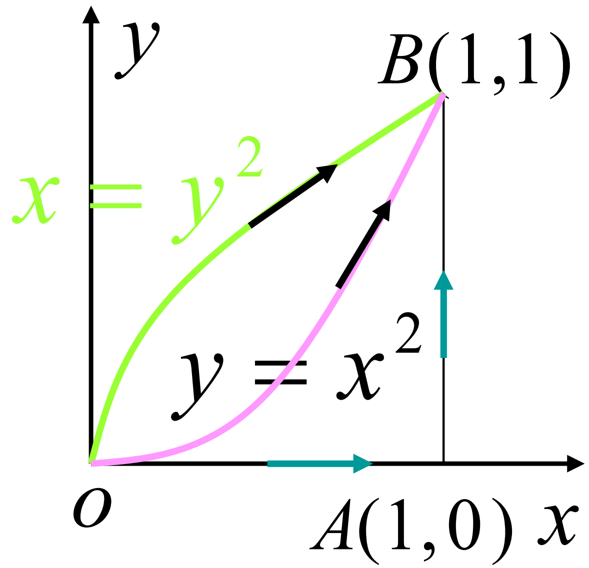
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

例2. 计算$\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$

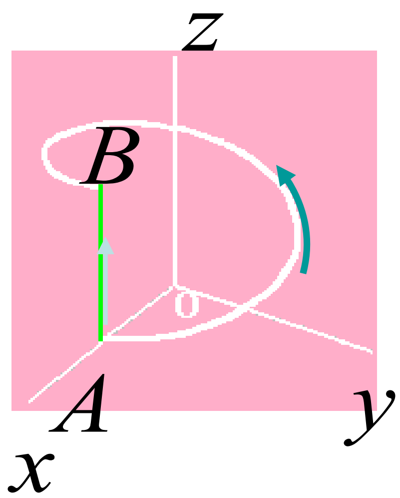
$$= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\mathrm{d}y = 1$$

例3. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿Γ移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中Γ为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解: (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

(2) Γ 的参数方程为 $x=R,\ y=0,\ z=t,\ \ t:0\to 2\pi k$

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi k} t\,\mathrm{d}t$$

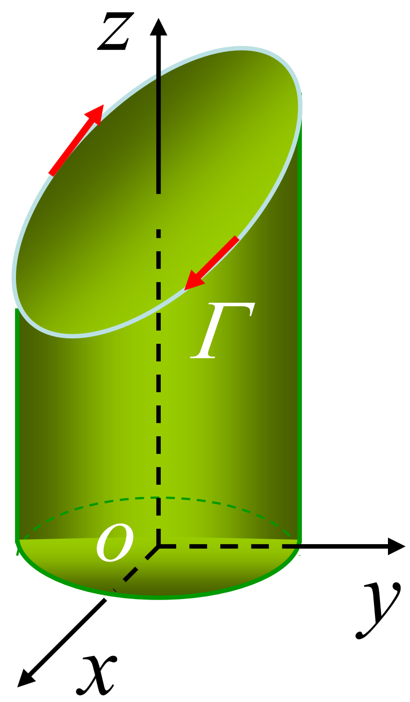
$$=2\pi^2k^2$$

例4. 求 $I=\int_\Gamma (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t \quad (t:2\pi\to 0)$$



$$\therefore \quad I=-\int_0^{2\pi}[\,(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\,]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-2\pi$$

例6. 已知 Γ 为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

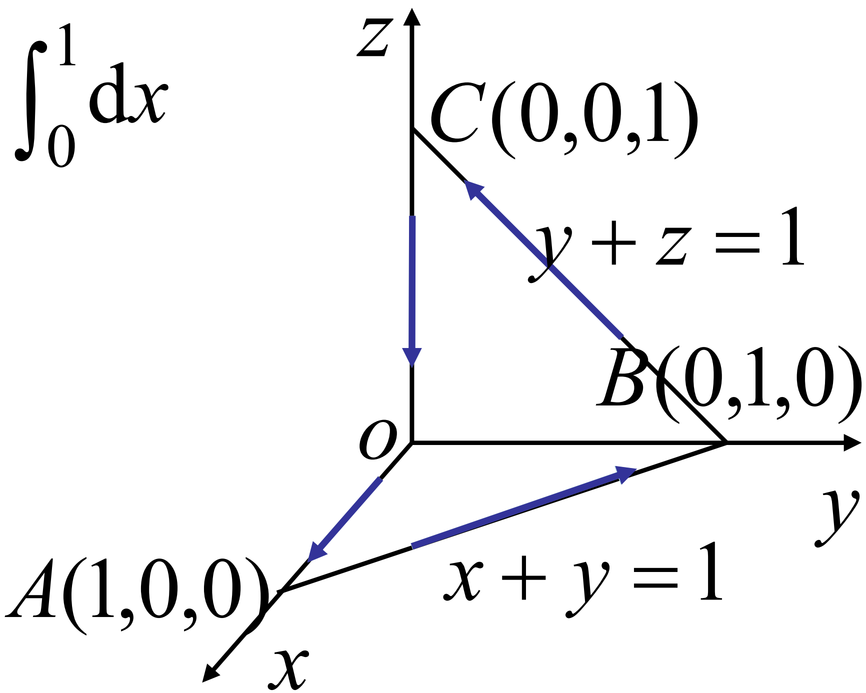
提示:

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-2+(1+\frac{1}{2})+1$$

$$=\frac{1}{2}$$



三、两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L 以弧长为参数 的参数方程为

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \le s \le l)$$

已知L切向量的方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$

则两类曲线积分有如下联系

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^l \left\{ P[x(s),y(s)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q[x(s),y(s)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^l \{P[x(s),y(s)]\cos\alpha + Q[x(s),y(s)]\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

类似地, 在空间曲线 Γ上的两类曲线积分的联系是

$$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R), \overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$\vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\int_{\Gamma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s$$

记 $\vec{A}$ 在 $\vec{t}$ 上的投影为 A_t

$$\int_{\Gamma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma} A_t\,\mathrm{d}s$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \mathrm{d}s\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$$

例7. 设 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续, 曲线段 L 的长度为s, 证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\le M\,s$$

证: $$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s\right|$$

$$\le\int_L\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

设 $\vec{A}=(P,Q)$, $\vec{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

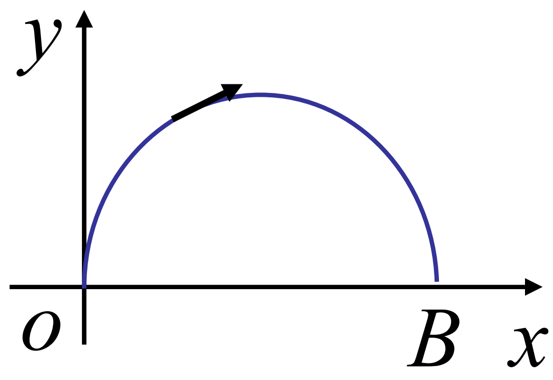
二者夹角为 θ

$$=\int_L\left|\vec{A}\cdot\vec{t}\right|\mathrm{d}s=\int_L\left|\vec{A}\right|\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}s\le M\,s$$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

例8.将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分, 其中L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到$B(2,0)$.

解： $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[\ P(\xi_{\mathrm{k}},\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_{\mathrm{k}},\eta_k)\Delta y_k]$$

2. 性质

(1) L可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (\ i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意**积分弧段的方向**!

3. 计算

- 对有向光滑弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}\,t$$

- 对有向光滑弧 $L: y=\psi(x)\ ,\ x: a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

• 对空间有向光滑弧Γ：$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:\alpha\to\beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

4. 两类曲线积分的联系

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$