

一、函数的极值

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $x_0 \in (a,b)$, 若存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 对任意 $x \in U(x_0)$ 都有,

(1) $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点**,

称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**;

(2) $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极小值点**,

称 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

极大点与极小点统称为**极值点**.

费马(fermat)引理

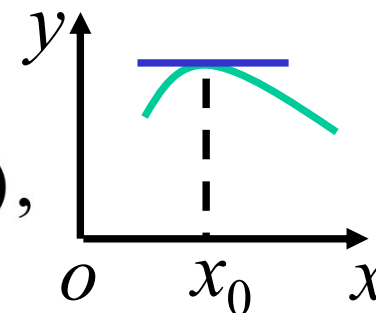


$y = f(x)$ 在 x_0 的邻域里有定义,
且 $f(x) \leq f(x_0)$, $f'(x_0)$ 存在
(或 \geq) $\implies f'(x_0) = 0$

证: 设 $\forall x_0 + \Delta x \in \cup(x_0), f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$,

则
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} f'_-(x_0) \geq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^-) \\ f'_+(x_0) \leq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^+) \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$



一、罗尔(Rolle)定理

罗尔 (Rolle) 定理 如果函数 $f(x)$ ⁽¹⁾在闭区间 $[a,b]$ 上连续,⁽²⁾ 在开区间 (a,b) 内可导,⁽³⁾ 且在区间端点的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$, 那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$, 使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零, 即 $f'(\xi) = 0$

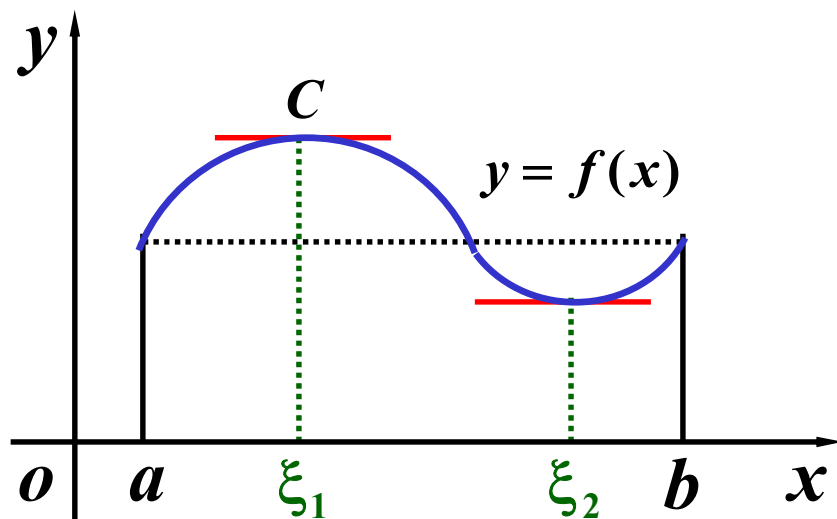
例如, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.

在 $[-1,3]$ 上连续, 在 $(-1,3)$ 上可导, 且 $f(-1) = f(3) = 0$,

$\because f'(x) = 2(x-1)$, 取 $\xi = 1, (1 \in (-1,3))$ $f'(\xi) = 0$.

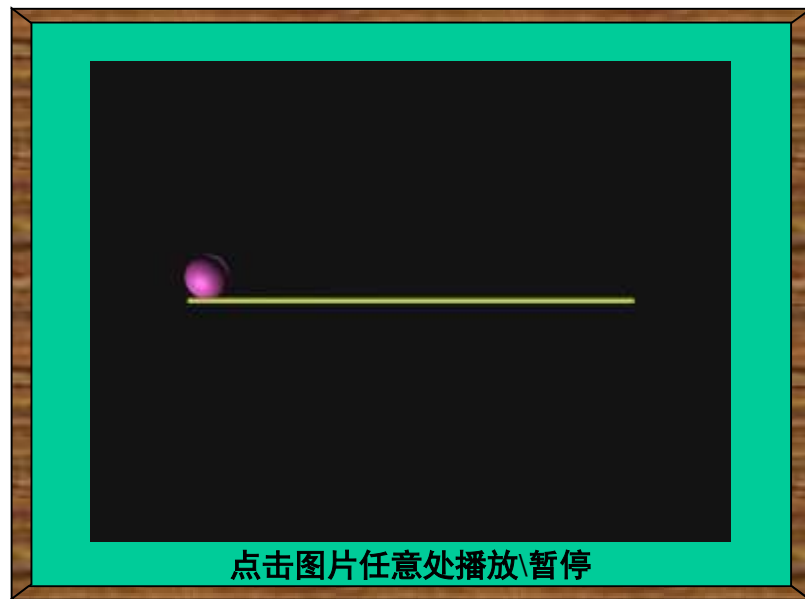
几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C ,在该点处的切线是水平的.



物理解释:

变速直线运动在折返点处,瞬时速度等于零.



5. 关于罗尔定理的两点说明

- 罗尔定理中的 ξ 是 (a, b) 内的某一点，定理仅从理论上指出了它的存在性，而没有给出它的具体位置，但这并不影响定理的应用；
- 罗尔定理的条件是充分条件，只要三个条件均满足，就充分保证结论成立。但如果三个条件中有一个不满足，则定理的结论就不一定成立。看如下例子：

二、Rolle 定理的条件讨论

(1) 罗尔定理的条件缺一不可.

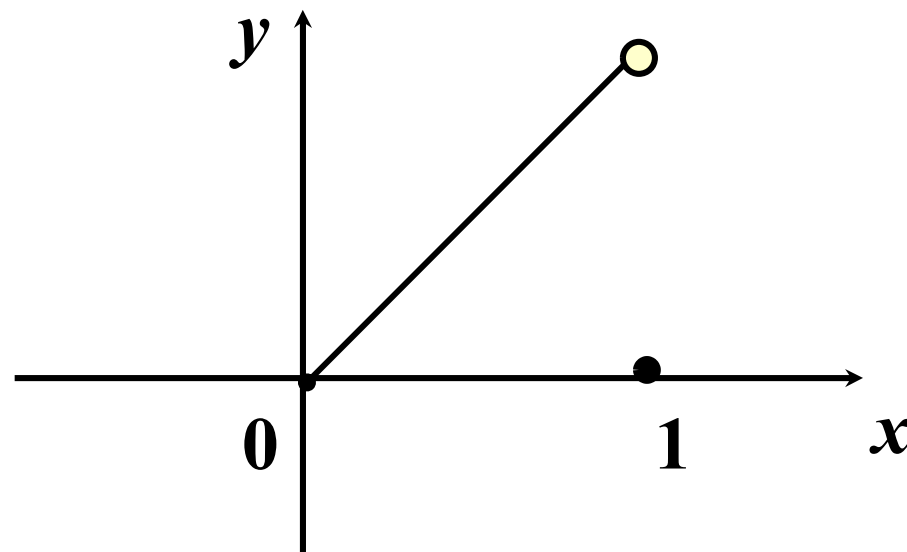
例1
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

~~(1)~~ $f(x) \in C[0,1];$

(2) $f(x) \in D(0,1);$

(3) $f(0) = f(1).$

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0$.



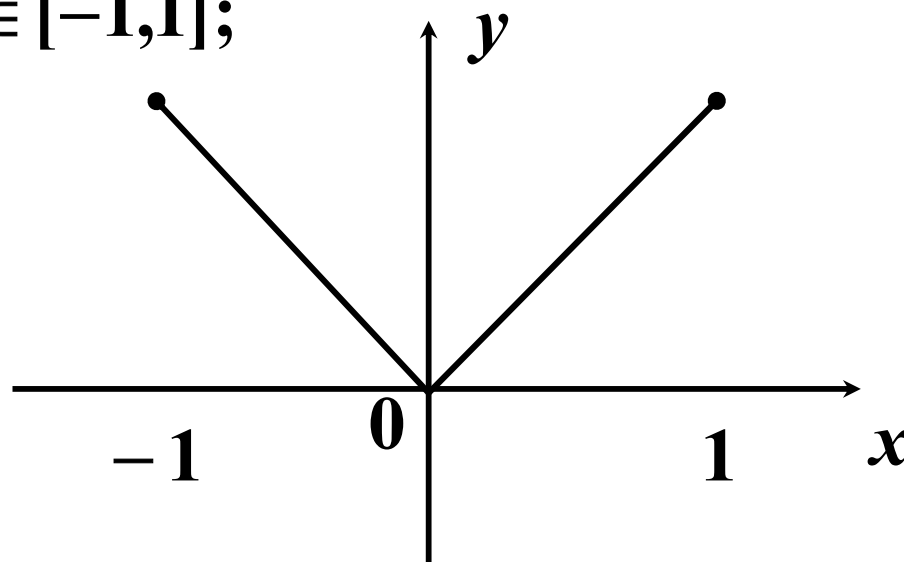
例2 $f(x) = |x|, x \in [-1, 1];$

(1) $f(x) \in C[-1, 1];$

~~(2)~~ $f(x) \in D(-1, 1);$

(3) $f(-1) = f(1).$

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0$.



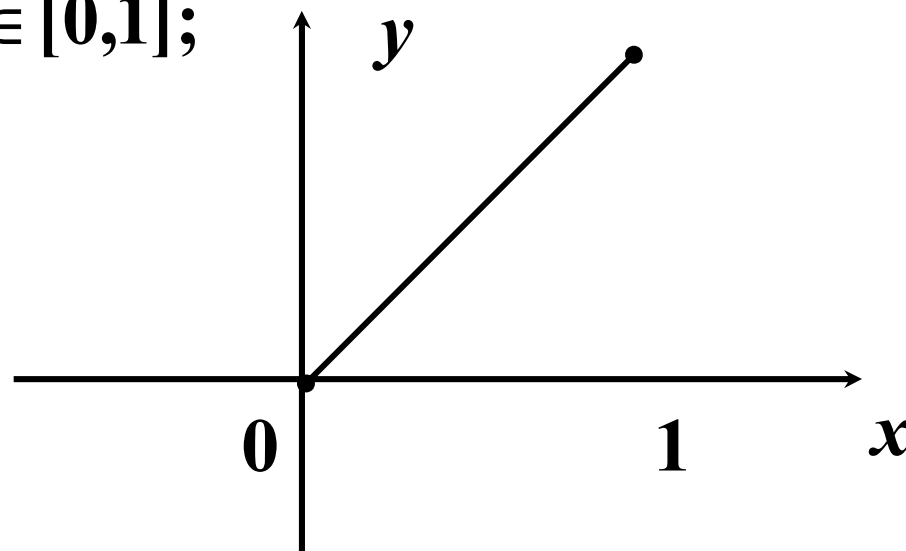
例3 $f(x) = x, x \in [0, 1];$

(1) $f(x) \in C[0, 1];$

(2) $f(x) \in D(0, 1);$

~~(3)~~ $f(0) = f(1).$

不 $\exists \xi$, 使 $f'(\xi) = 0$.



例1 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 设 $f(x) = x^5 - 5x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,

且 $f(0) = 1, f(1) = -3$. 由介值定理

$\exists x_0 \in (0,1)$, 使 $f(x_0) = 0$. 即为方程的小于1的正实根.

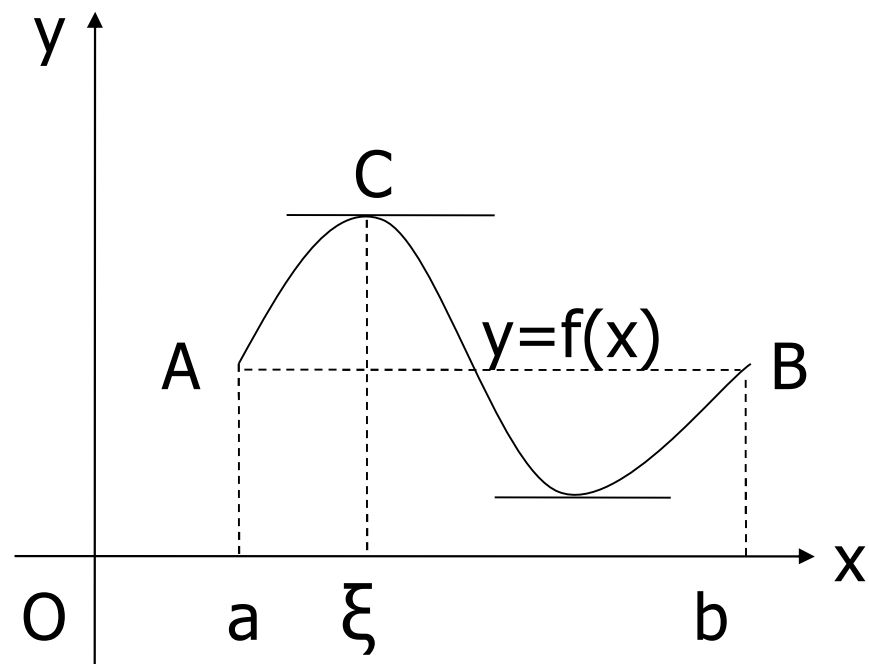
设另有 $x_1 \in (0,1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1) = 0$.

$\because f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

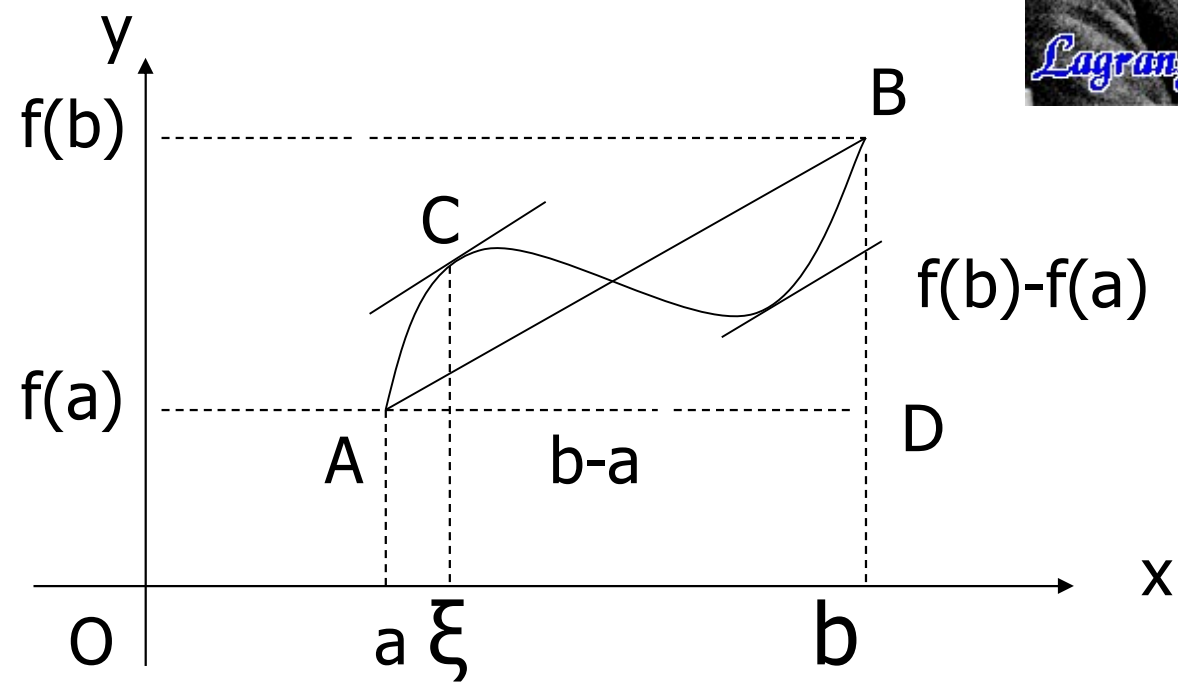
\therefore 至少存在一个 ξ (在 x_0, x_1 之间), 使得 $f'(\xi) = 0$.

但 $f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0, (x \in (0,1))$ 矛盾, \therefore 为唯一实根.

2. 图一



2. 图二



二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

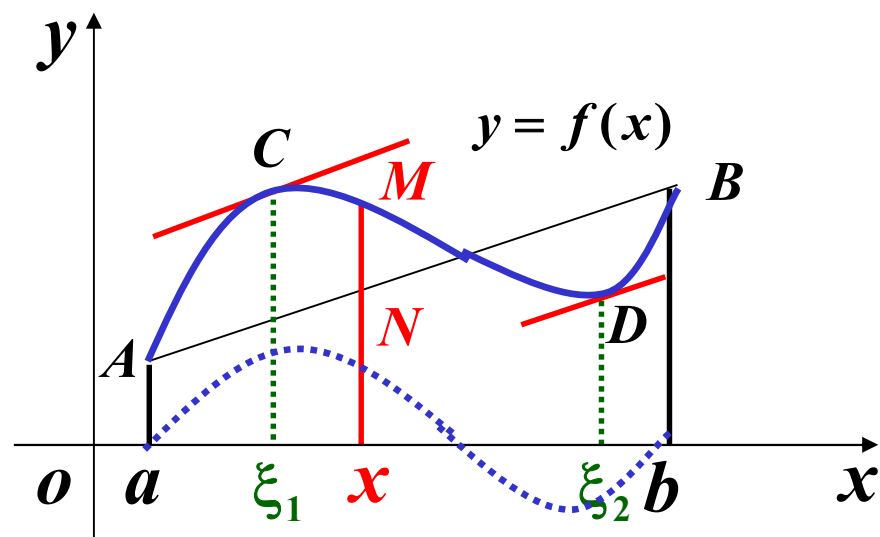
拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 ⁽¹⁾如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, ⁽²⁾在开区间 (a, b) 内可导, 那末在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立.

注意: 与罗尔定理相比条件中 去掉了 $f(a) = f(b)$.

$$\text{结论亦可写成 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C , 在该点处的切线平行于弦 AB .



$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

或 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

拉格朗日中值公式

注意: 拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $x_0, x_0 + \Delta x \in (a, b)$, 则有

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1).$

增量 Δy 的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称有限增量公式. 微分中值定理

拉格朗日中值定理又称有限增量定理.

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例2 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\therefore f(x) \equiv C, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\text{又} \because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } C = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例3 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证 设 $f(x) = \ln(1+x)$,

$f(x)$ 在 $[0, x]$ 上满足拉氏定理的条件 ,

$$\therefore f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), (0 < \xi < x)$$

$$\because f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{1+x}, \text{ 由上式得 } \ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi},$$

$$\text{又 } \because 0 < \xi < x \rightarrow 1 < 1+\xi < 1+x \rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1,$$

$$\therefore \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x, \quad \text{即 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

例5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,证明:
至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证 分析: 结论可变形为

$$\begin{aligned} 2\xi[f(1) - f(0)] - f'(\xi) \\ = 2x[f(1) - f(0)] - f'(x) \Big|_{x=\xi} \end{aligned}$$

$$\text{设 } F(x) = x^2[f(1) - f(0)] - f(x)$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 *Rolle* 中值定理的条件 ,

\therefore 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ,有

$$\begin{aligned} 2\xi[f(1) - f(0)] - f'(\xi) &= 0 \\ \text{即 } f'(\xi) &= 2\xi[f(1) - f(0)]. \end{aligned}$$

例1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 且 $f(0)=f(1)=0$ 证明存在 $\eta \in (0,1)$ 使

$$f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$$

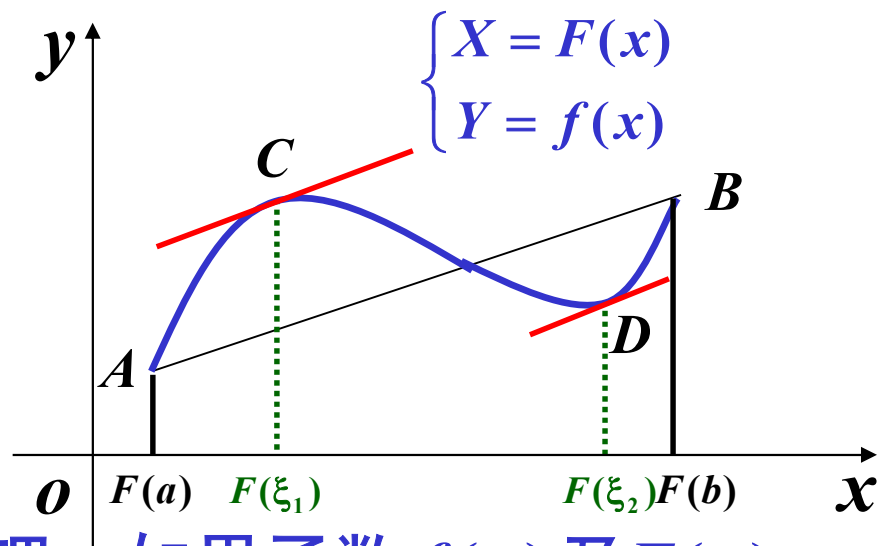
例2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 且 $f(0)=f(1)=0$ 证明存在 $\eta \in (0,1)$ 使

$$f(\eta) + f'(\eta) = 0$$

定理及关系	条 件	结 论
罗尔(Rolle)定理 $f(a)=f(b)$	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a)=f(b)$,	(a,b) 内至少存在 一点 ξ , $f'(\xi)=0$ ($a<\xi<b$)
拉格朗日定理 (Lagrange) $f(a)=f(b)$	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导	(a,b) 内至少存在 一点 ξ , $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 $C(F(\xi), f(\xi))$, 在该点处的切线平行于弦 AB .



柯西 (Cauchy) 中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $F'(x)$ 在 (a, b) 内每一点处均不为零, 那末在 (a, b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$, 使等式

$$\frac{f(a) - f(b)}{F(a) - F(b)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \text{ 成立.}$$

证: **作辅助函数** $\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F(x) - f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$\varphi(a) = \frac{f(b)F(a) - f(a)F(b)}{F(b) - F(a)} = \varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗?

$$\begin{aligned} \because f(b) - f(a) &= f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b) \\ F(b) - F(a) &= F'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \text{两个 } \xi \text{ 不} \\ \text{一定相同} \end{array}$$

上面两式相比即得结论. **错!**