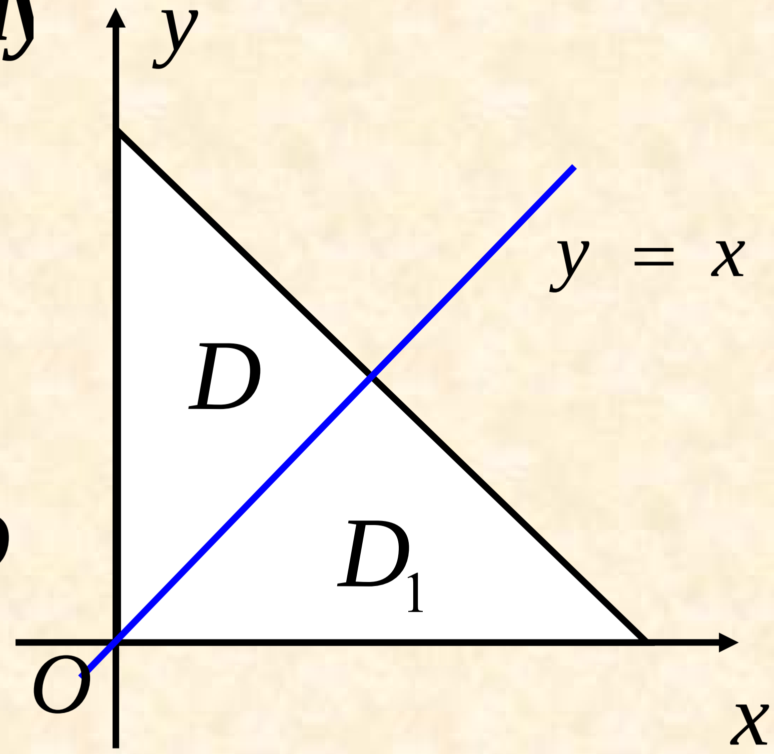
④若 D 关于直线 $y = x$ 对称

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$$



定理

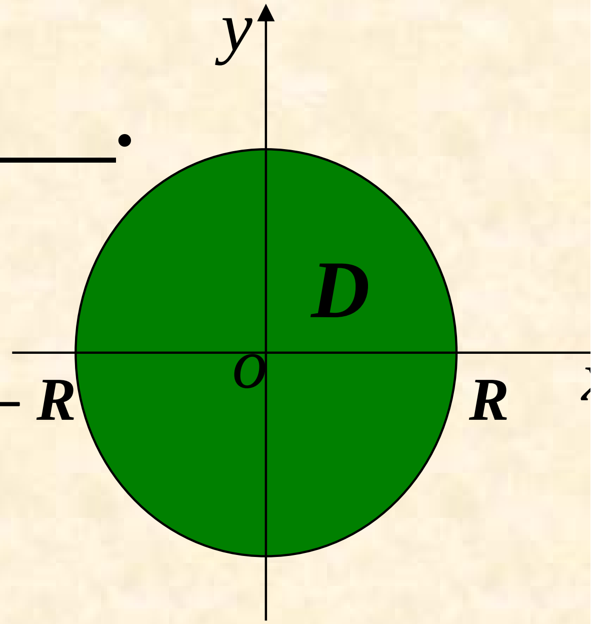
若有界闭区域 D 与区域 D_1 关于直线 $y = x$ 对称，$f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1 设 $f(x)$ 为取值恒大于0的连续函数，区域

$D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2(R>0)\}$ a 与 b 是两个非零常数，

则二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.



解：由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称根据推论2.1可得

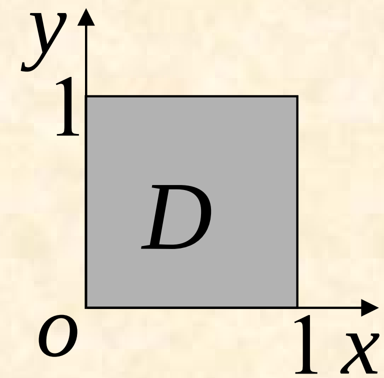
$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy = \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy,$$

从而 $$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}+\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\right]dxdy$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D dxdy = \frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

例2. 证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}$, 其中 D 为 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



解: 利用题中 x , y 位置的对称性, 有

$$\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma\right]$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \sin(x^2 + \tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{d}\sigma$$

$\because\ 0 \le x^2 \le 1$, $\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \le 1$, 又 D 的面积为 1 , 故结论成立 .

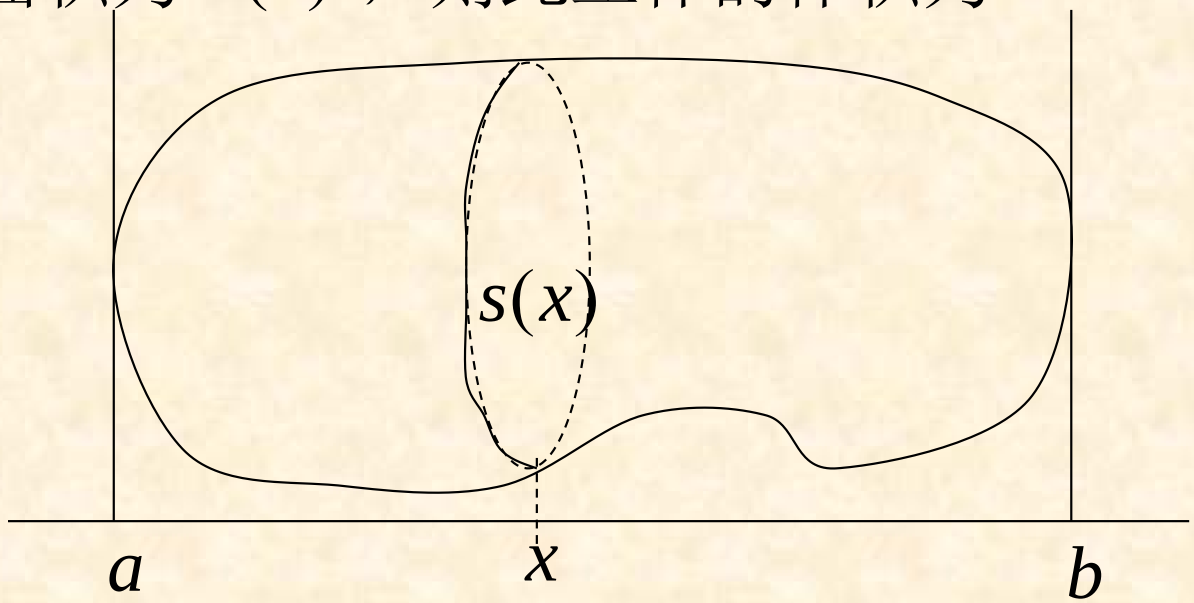
§2 直角坐标系下二重积分的计算

化二重积分为二次积分

由于此曲顶柱体的底面是一矩形，所以此曲顶柱体的体积还可以用另一种方法来计算。

先复习定积分应用中的一个结果：设空间立体位于平面 $x=a$ 与平面 $x=b$ 之间，用与 x 轴垂直的平面截立体，截得截面的截面面积为 $s(x)$，则此立体的体积为

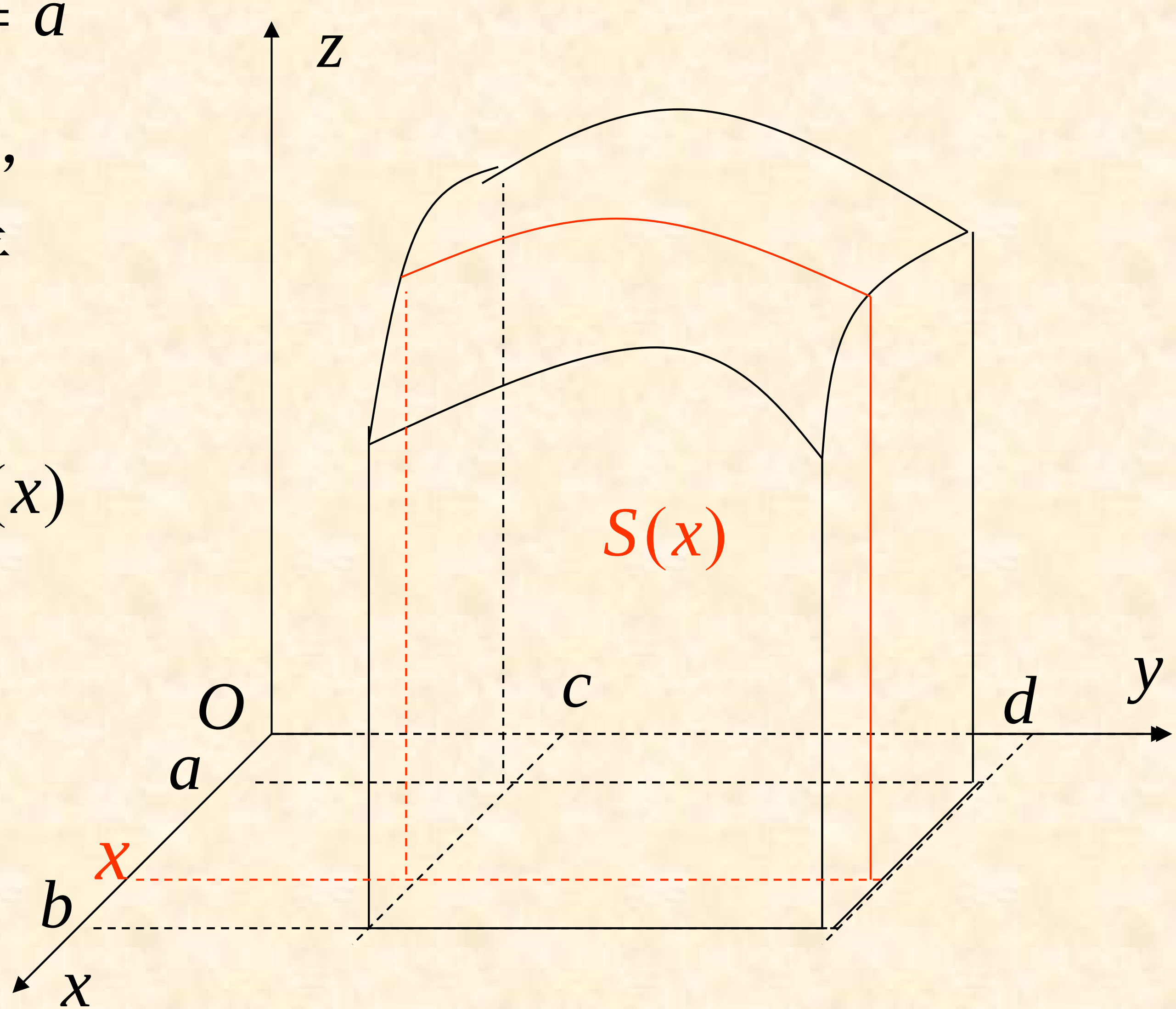
$$V=\int_a^b s(x)\,dx$$



立体位于平面 $x = a$ 与平面 $x = b$ 之间，作与 x 轴垂直的平面，设截得曲顶柱体截面的面积为 $S(x)$

则曲顶柱体体积为

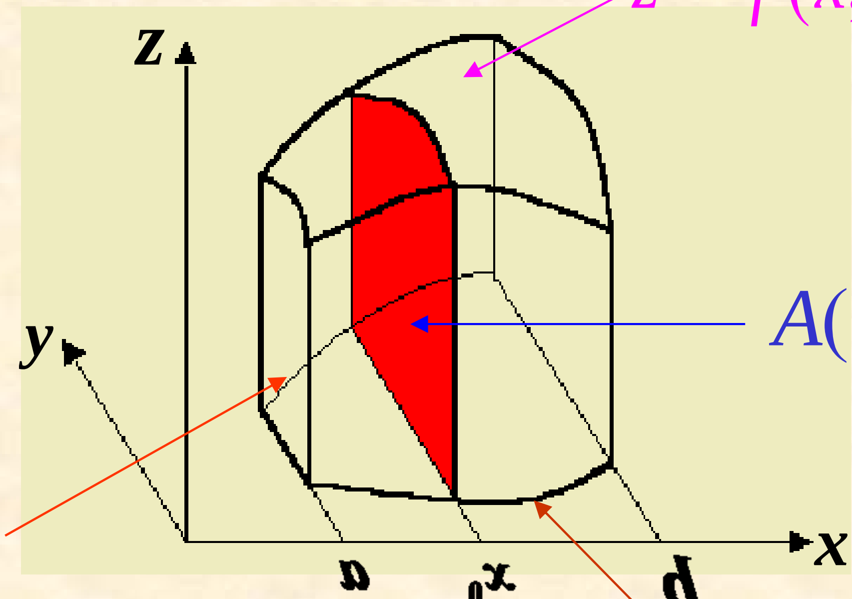
$$V = \int_a^b s(x)\,dx$$



$$V = \int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$\because \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶柱体的体积.

应用计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法,

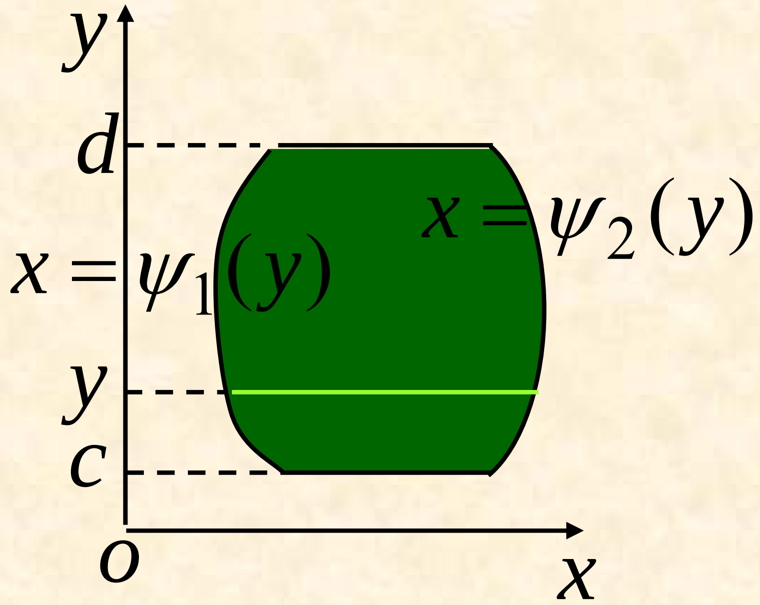


得 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

同样, 曲顶柱的底为

$$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$$

则其体积可按如下两次积分计算



$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

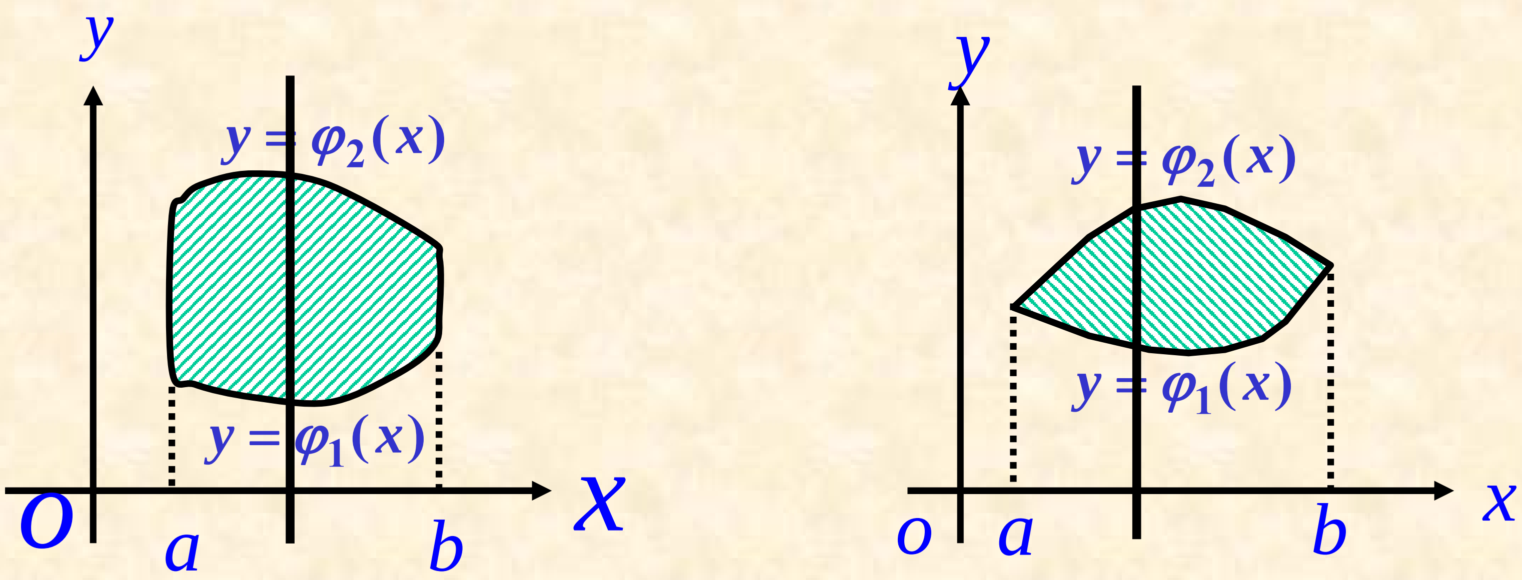
$$=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\triangleq\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

总结：利用直角坐标系计算二重积分

先讨论积分区域为： $a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$

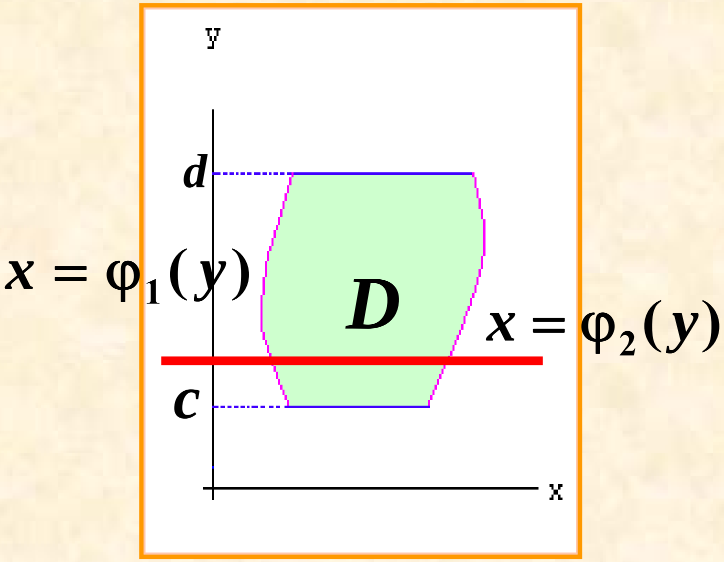
［X－型］

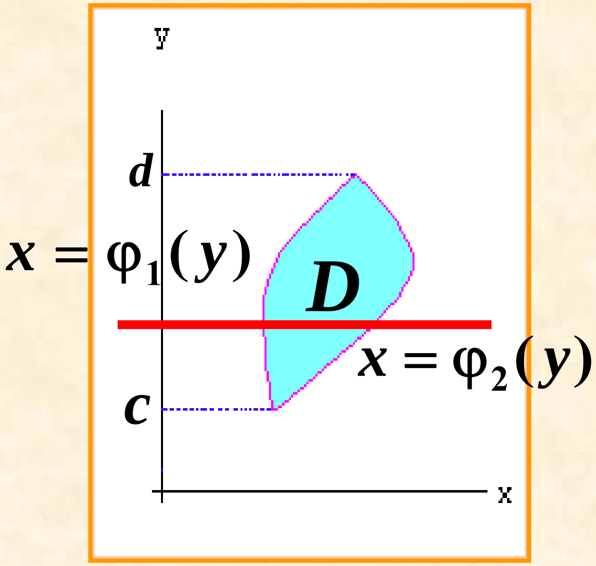


其中函数 $\varphi_1(x)$ 、$\varphi_2(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上连续.**

如果积分区域为：$c \le y \le d$，$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$.

［Y－型］



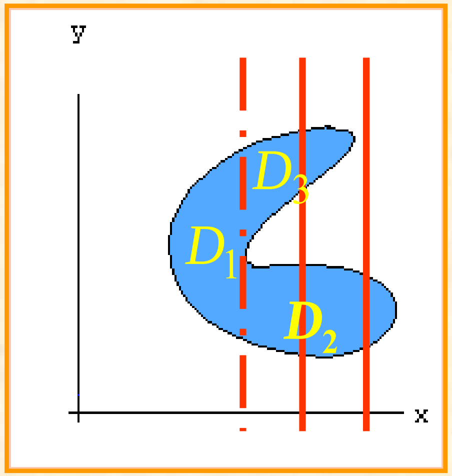


$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

X型区域的特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

Y型区域的特点： 穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

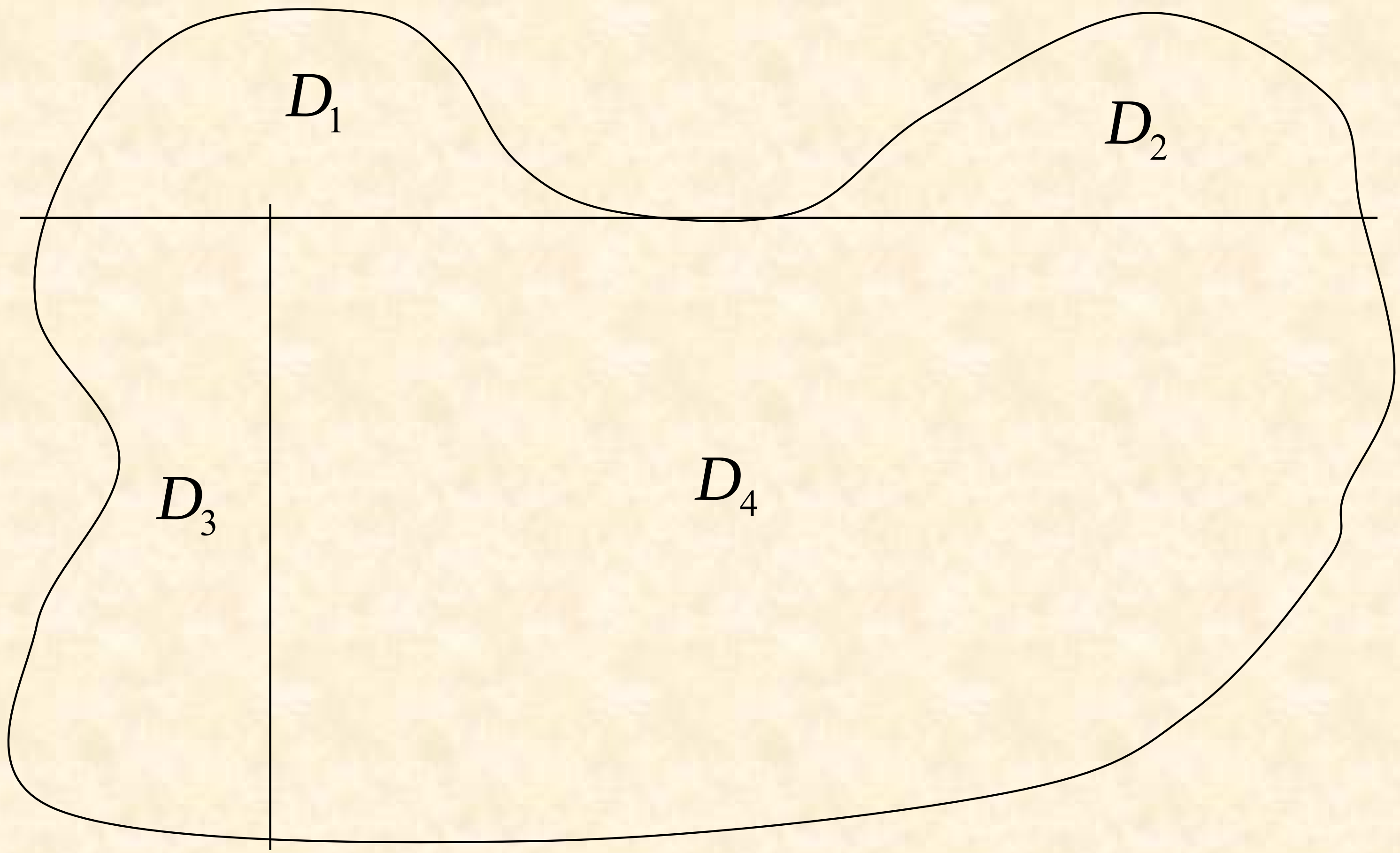
若区域如图，则必须分割.



在分割后的三个区域上分别使用积分公式

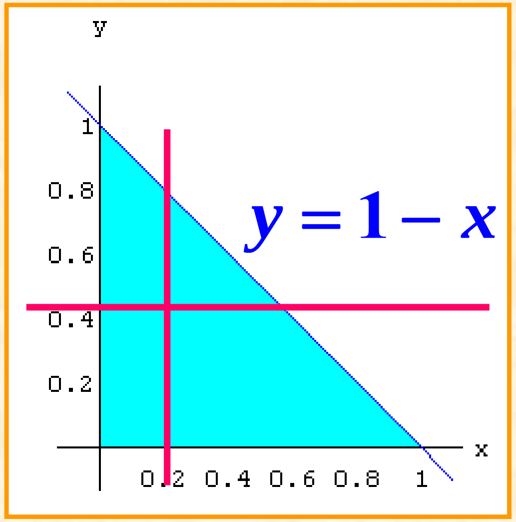
$$\iint_{D} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

一般情形，这时可用平行于 y 轴与平行于x轴的直线将积分区域分成上述两种情形求解。



例 1　改变积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 的次序.

解　积分区域如图

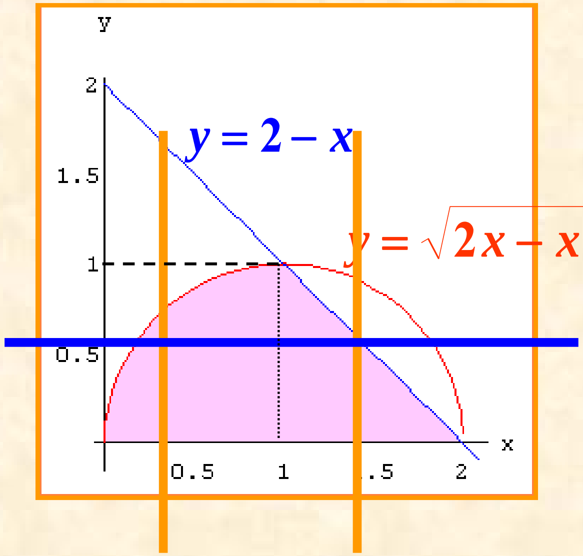


原式 $= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx.$

例 2　改变积分

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$的次序.

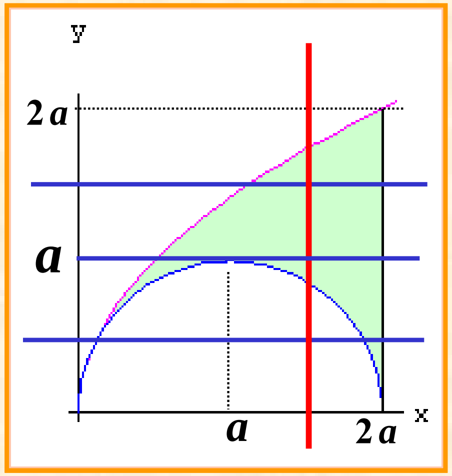
解　积分区域如图



$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

例 3　改变积分$\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$的次序.

解



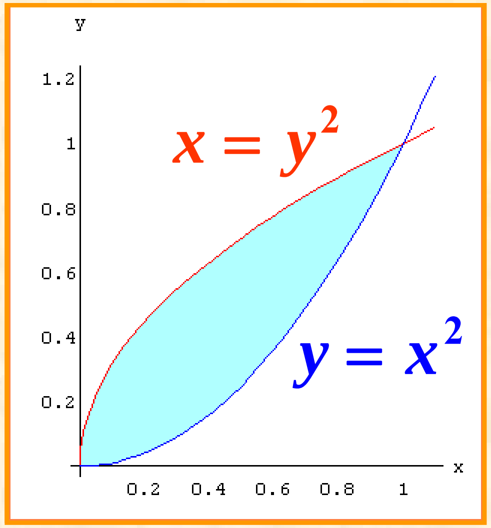
$$y=\sqrt{2ax}$$

$$y=\sqrt{2ax-x^2} \Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\text{原式}=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

例 4　求$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中$D$是由抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围平面闭区域.



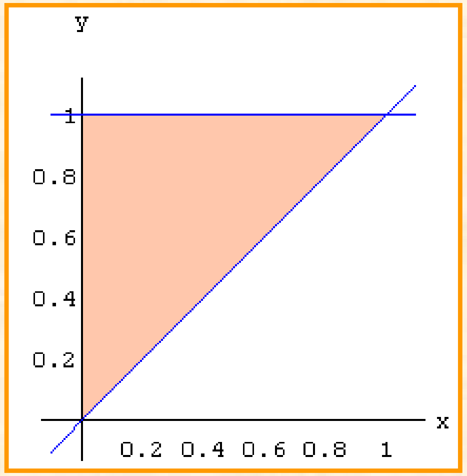
解　两曲线的交点

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$$

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$$

$$=\int_0^1[x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]dx = \frac{33}{140}.$$

例5　求 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1)为顶点的三角形.



解　$\because \int e^{-y^2}dy$ 无法用初等函数表示

$\therefore$ 积分时必须考虑次序

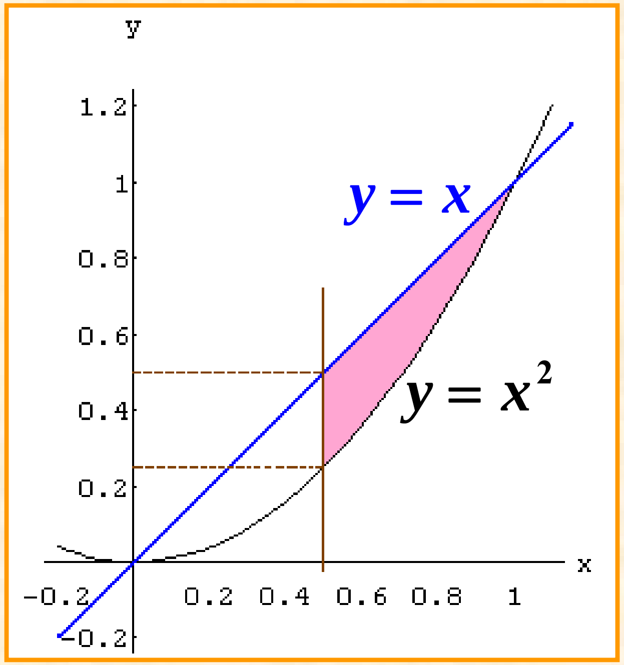
$$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

例 6　计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

解　$\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$ 不能用初等函数表示

$\therefore$ 先改变积分次序.



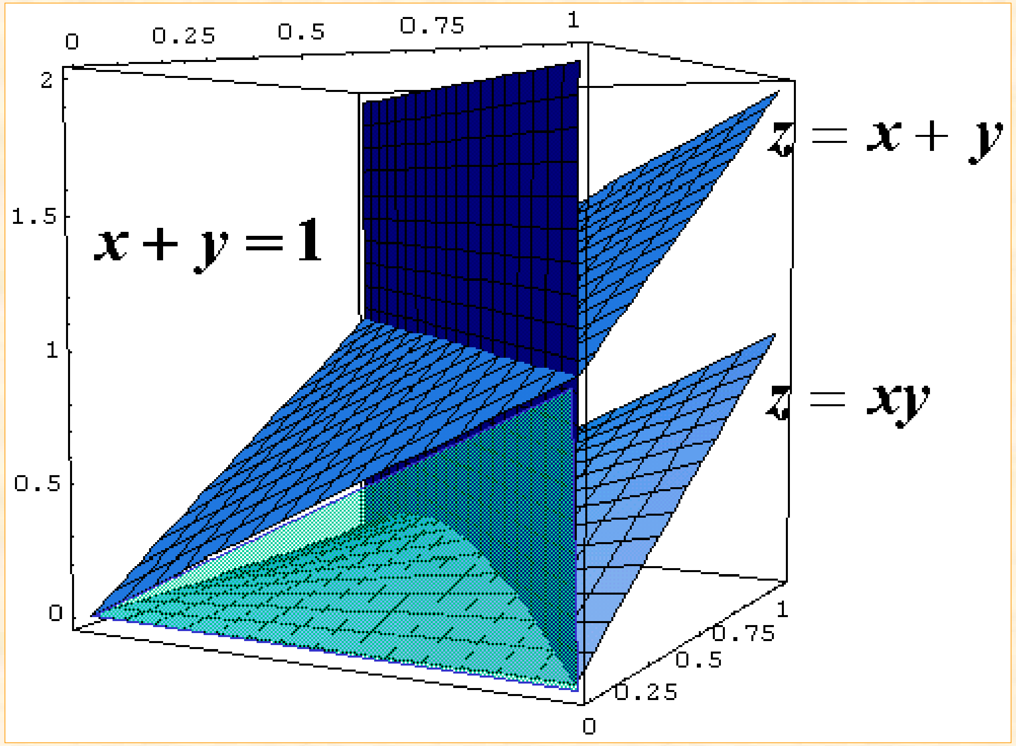
原式 $=I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^{x})dx \;=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$

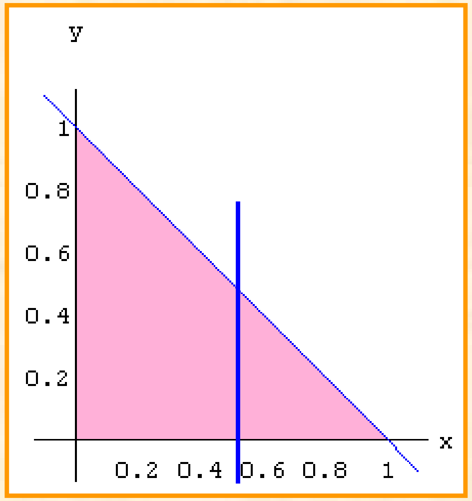
例 7 求由下列曲面所围成的立体体积，

$z = x + y$，$z = xy$，$x + y = 1$，$x = 0$，$y = 0$.

解 曲面围成的立体如图.



所围立体在xoy面上的投影是



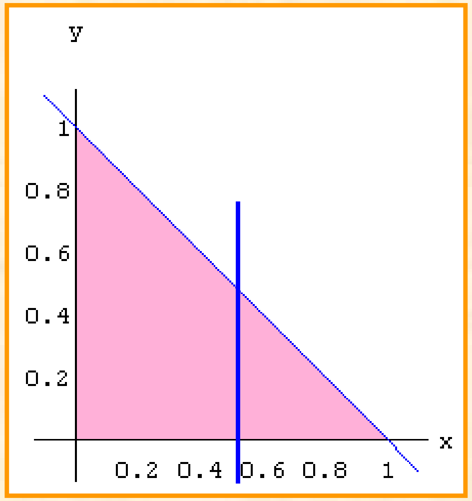
$$\because \quad 0 \le x + y \le 1, \quad \therefore \quad x + y \ge xy,$$

$$\text{所求体积} V = \iint_D (x + y - xy) d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy) dy$$

$$= \int_0^1 [x(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^3] dx = \frac{7}{24}.$$

所围立体在xoy面上的投影是



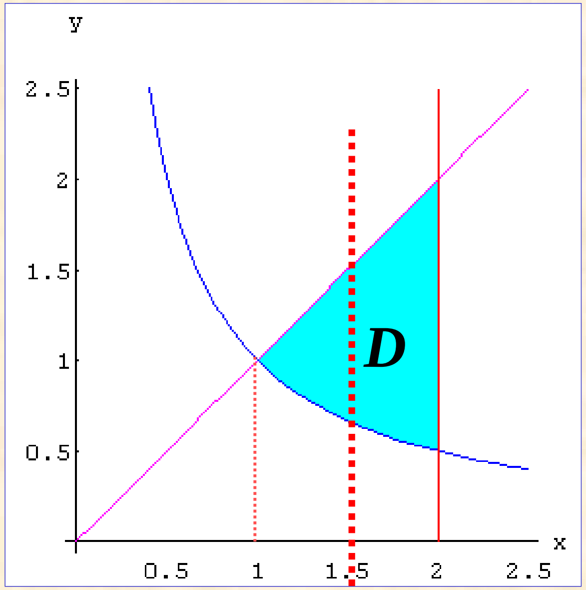
$\because \quad 0 \le x+y \le 1, \quad \therefore \quad x+y \ge xy,$

$$\text{所求体积} V = \iint_D (x+y-xy)d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy)dy$$

$$= \int_0^1 [x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3]dx = \frac{7}{24}.$$

例8 计算 $\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}d\sigma$. 其中 D 由 $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2$ 围成.



解 X-型 $D:\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2.$

$$\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}.$$