§3 牛顿一莱布尼茨公式

1. 积分上限函数及其导数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(t)$ 在 $[a,x], x\in[a,b]$ 上连续，且

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

随 x 而变化，故

$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (值)是 $[a,b]$ 上的 x (值)的一个函数，

记

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

称为 $f(x)$ **的积分上限函数.**

同样可以定义 $f(x)$ **的积分下限函数**

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

积分上限函数的导数

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),\quad x\in[a,b].$$

证 设 x 是 $[a,b]$ 上任一点，

$$\begin{aligned}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

积分上限函数的导数

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

由积分中值, 在 $x, x+\Delta x$ 中存在 ξ,

使得 $$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x.$$

所以 $$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

令 $\Delta x \to 0\ (\xi \to x)$, 得

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

注 若 x 为端点, 则上式为单侧极限(结果为单侧导数).

积分上限函数求导举例

由定理 1 知积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

这也证明了第五章的不定积分存在定理. 但它不一定是初等函数.

例1 求导 $\int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t.$

解 设 $\Phi(u)=\int_0^u e^{t^2}\mathrm{d}t,\ u=x^2,$ 由复合函数求导公式得

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t=\Phi'(u)\big|_{u=x^2}\frac{du}{dx}$$

$$=e^{u^2}\big|_{u=x^2}\,2x=2xe^{x^4}.$$

一般积分限函数的导数

$$\Psi'(x)=\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt=-\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)dt=-f(x).$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt=\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt+\int_{\psi(x)}^{a} f(t)dt\right)$$

$$=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x).$$

例2 求导 $\int_{e^x}^{x^2}\sin(t)\mathrm{d}t.$

解 $\frac{d}{dx}\int_{e^x}^{x^2}\sin(t)\mathrm{d}t=2x\sin x^2-e^x\sin e^x.$

积分上限函数求导举例

例3　设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调递**减**连续函数，证明

$$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调递**增**函数.

证

$$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x 2tf(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(x)\mathrm{d}t=\int_0^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t\geq 0.$$

所以 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调递**增**函数.

积分上限函数求导举例

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$.

解　由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}2x}{x(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^3}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{6x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x}{\sin x}=12.$$

2. 牛顿一莱布尼茨公式

定理2(微积分学基本定理)

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$ **(牛顿—莱布尼茨公式)**

证 由于 $F(x), \Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 则

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C.$$

因此 $$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\mathrm{d}t + C\right)$$

$$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

简记 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

积分举例

例5 求 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan(-1)$

$=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}.$

例6 求 $\int_{-1}^{1}|x|\,dx.$

解 $\int_{-1}^{1}|x|\,dx=-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}$

$=-0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1.$

例7 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx.$

解 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx$

$$=\sin x\,\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\,\Big|_{\pi/2}^{\pi}=2.$$

例8 求 $\int_{-1}^{3}|2-x|\,dx.$

解 $\int_{-1}^{3}|2-x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(x-2)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}(2-x)^2\Big|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_{2}^{3}=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5.$$