东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 17-18-3 得分 ______

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______ 线 封 密

一.（30%）填空题

1. 设方阵 A 满足 $A^2+2A+2E=O$, 则 $A+3E$ 的逆矩阵 $(A+3E)^{-1}=$______.

2. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 2, 1, -1, A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^*-A^{-1} 的行列式 $\left|A^*-A^{-1}\right|=$______.

3. 设向量空间 R^2 中两组基 $\alpha_1=(3,\ 4)^T,\alpha_2=(2,\ 3)^T;\beta_1=(1,\ 1)^T,\beta_2=(0,\ 1)^T$，已知 R^2 中向量 α 在基 α_1,α_2 下坐标是 $(1,\ 1)^T$，则 α 在基 β_1,β_2 下坐标是______.

4. 设 n 阶方阵 A 的元素都是 $k(\neq 0)$，则 A 的特征多项式是______.

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ x & 1 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似，则 $(x,\ y)=$______.

6. 设 3 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\gamma\\ -\alpha+\beta+2\gamma\\ \alpha-\beta-3\gamma\end{pmatrix}$, 则行列式 $\left|AB^{-1}\right|=$______.

7. 如果向量 $(k,\ 1,\ 4)$ 可由向量组 $(1,\ 2,\ -1)$, $(3,\ -1,\ 1)$ 线性表示，则参数 k 满足条件______.

8. 如果实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1{}^2+(\lambda+1)x_2{}^2+x_3{}^2+2\lambda x_1x_3$ 是正定二次型，则参数 λ 满足条件______.

9. 设 $a(\neq 0)$ 是 3 阶实对称矩阵 A 的二重特征值，$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 0,\ -1)^T$ 是 A 的对应特征值 a 的特征向量。如果 A 不可逆，则 A 的另一个特征值是______，相应的特征向量为______.

10. 设 α 是 3 维列向量，$\alpha^T\alpha=k$, $k\in(1,\ +\infty)$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(E-\alpha\alpha^T)X$ 的规范形为______.

二．（12%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\q\end{pmatrix}$ 的秩为 2，

1．求参数 p，q 的值；

2. 求该向量组的一个极大线性无关组，并且将向量组中的其余向量用极大线性无关组表示出来。

三（12%）线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+px_3=5 \\ 3x_1+px_2+3x_3=2 \end{cases}$

讨论参数 p 取何值时，线性方程组 （1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求其通解。

四（12%）设矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$A^*$是$A$的伴随矩阵，

如果$AXA^* = 6E + AX$，求矩阵X.

五（10%）设向量$\eta=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & x & 0\\ 4 & y & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

1. 求参数x，y 的值；
2. 问：矩阵A.是否相似于对角矩阵？说明理由。

六（14%）设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

1. 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵;

2. 求正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

七（10%）证明题：

1. 设 η_1,η_2 是 n 维列向量，A 是 $s\times n$ 矩阵，A 的秩为 $n-2$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 的每个解向量都可由 η_1,η_2 线性表示，证明 η_1,η_2 是 $AX=0$ 的一个基础解系。

2. 设 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2=A$，证明存在 n 阶对称矩阵 P,Q，使得 $A=PQ$.