复旦大学 2013-2014 学年第一学期《线性代数》

期中考试试卷及参考答案

班级:________ 学号:__________ 姓名:_________ 成绩:______

一、是非题 (每小题2分, 共20分. 请在每小题前的括号中填上"√","×"表示"正确"与"错误")

(×) 1. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, 且 $\mathbf{A} = k\mathbf{B}(k \neq 0)$, 则 $\det(\mathbf{AB}) = \frac{1}{k}[\det(\mathbf{A})]^2$.

解答: $\because\ \det(\mathbf{AB}) = \det\left(\frac{1}{k}\mathbf{AB}\right) = \frac{1}{k^n}[\det(A)]^2$

(×) 2. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$.

解答: 反例: 若 $\mathbf{B}$ 是零矩阵, $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵, 则 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 但 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

(√) 3. 分块矩阵 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别为 m 和 n 阶可逆方阵, $\mathbf{C}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $(\mathbf{X}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{QC}^T\mathbf{P} & -\mathbf{Q} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T)^{-1}, \mathbf{Q} = (\mathbf{B}^T)^{-1}$.

解答: 利用 $\mathbf{X}^T(\mathbf{X}^T)^{-1}$ 直接验证.

(×) 4. 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. ($\mathbf{I}$为单位阵)

解答: 反例: 设 $\mathbf{A}$ 是对角阵, 其对角元, 部分是 -1, 其它为 $+1$, 而 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. 不一定是 $\mathbf{I}$ 或 $-\mathbf{I}$.

(×) 5. 矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 则 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

解答: 只有当 $\mathbf{A}$ 是(列)满秩矩阵时, 才适用消去律. 否则, 若 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n$, 设 $\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{X}_1, \mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{X}_2$, 其中矩阵 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 中的列向量是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 基础解系的不同线性组合, 此时还是有 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 但 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 未必相等.

(√) 6. 若 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 可逆.

解答: $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} + 3\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = 2\mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 + 3(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2\mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I})\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$. 因此, $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 可逆.

(√) 7. 对矩阵实施初等变换不会改变矩阵的秩.

解答: 参见浙大教材p.89 定理2.6

(√) 8. 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 当 $m < n$ 时, 必有非零阶.

解答: $\because\ \mathrm{rank}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} = m < n$, 再根据齐次方程组有非零解的充要条件(浙大教材p.112定理3.2) 可知, 方程必有非零解.

(×) 9. 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 满足 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = m$, 则方程有唯一解.

解答: 当方程相容时, 若 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = m < n$ 则方程有无穷多解(浙大教材p.107).

(×) 10. 向量组(I)可以由向量组(II)线性表示, 则 rank(I) = rank(II).

解答: 参见浙大教材p.124 推论1.

二、选择题(每题3分，共30分．请将答案填入每题的括号中.)

(C) 1. 关于齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 下列哪个命题是错误的:

(A) 方程组的任意一个解均可由基础解系线性表示.

(B) 基础解系线性无关.

(C) 基础解系是唯一的.

(D) 基础解系是方程组所有解构成向量组的极大线性无关组.

(C) 2. 设向量 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ 均为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解. 则 $\mathbf{A}$ 可能是下列哪个矩阵:

(A) $\begin{bmatrix}0&2&-2\\-4&2&2\\0&3&3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-5&0&10\\0&2&-2\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}2&-1&-1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

(D) 3. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathbf{b}$ 是 n 维列向量, 若 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{b}\\\mathbf{b}^T&0\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}(\mathbf{A})$, 则

(A) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 必有无穷多解; (B) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解;

(C) $\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{b}\\\mathbf{b}^T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\y\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 只有零解; (D) $\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{b}\\\mathbf{b}^T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\y\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解

(C) 4. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^n(n\geq 2$ 为正整数) 的值为:

(A) $\begin{bmatrix}\lambda^n&\lambda^{n-1}&\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&(n-1)\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^n\\0&0&\lambda^{n-1}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&n(n-1)\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$

(A) 5. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵, 且 $\mathbf{AB}=\mathbf{BC}=\mathbf{CA}=\mathbf{I}_n$($\mathbf{I}_n$为 n阶单位阵), 则 $\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2$ 等于

(A) $3\mathbf{I}_n$ (B) $2\mathbf{I}_n$ (C) $\mathbf{I}_n$ (D) $\mathbf{0}_n$

(B) 6. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*\neq\mathbf{0}$, 若 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系:

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

(A) 7. 设向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关, 则下列哪组向量线性相关

(A) $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1$ (B) $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$

(C) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1$ (D) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,3\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1$

(C) 8. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, 则 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ 的充要条件是:

(A) $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ (B) $\det(\mathbf{A})\neq 0$ (C) $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ (D) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

(D) 9. 若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价, 则必有

(A) 若 $\det(\mathbf{A})=a\neq 0$, 则 $\det(\mathbf{B})=a$; (B) 若 $\det(\mathbf{A})=a\neq 0$, 则 $\det(\mathbf{B})=-a$;

(C) 若 $\det(\mathbf{A})=0$, 则 $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{0}$; (D) 若 $\det(\mathbf{A})=0$, 则 $\det(\mathbf{B})=0$;

(B) 10. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵, 且 $\mathrm{rank}(\mathbf{AB})=\mathrm{rank}(\mathbf{B})$, 则:

(A) $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=n$ (B) $\mathrm{rank}\left(\mathbf{AB}^2\right)=\mathrm{rank}\left(\mathbf{B}^2\right)$

(C) $\mathrm{rank}\left(\mathbf{AB}^2\right)<\mathrm{rank}\left(\mathbf{B}^2\right)$ (D) 以上三式均不正确.

说明: 因齐次方程组(I): $\mathbf{AB}^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 (II): $\mathbf{B}^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有相同的解系.(自行验证)
所以, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}^2)=\mathrm{rank}(\mathbf{B}^2)$.

三、计算证明题(共50分)

1. (8分)求n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解:令 D_n 为该行列式的值, 按第一行展开得:

$$\begin{aligned} & D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2} \\ \Rightarrow\ & D_n-bD_{n-1}=a\left(D_{n-1}-bD_{n-2}\right) \end{aligned}$$

$\because\ D_1=a+b,\quad D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$, 得 $D_2-bD_1=a^2$, 依次类推, 有

$$\begin{aligned} & D_3-bD_2=a\left(D_2-bD_1\right)=a^3 \\ & D_4-bD_3=a^4 \\ & \vdots D_n-bD_{n-1}=a^n \end{aligned}$$

另一方面有: $D_n-aD_{n-1}=b\left(D_{n-1}-aD_{n-2}\right)$, 同时 $D_2-aD_1=b^2$, 依次类推, 有

$$\begin{aligned} & D_3-aD_2=b\left(D_2-bD_1\right)=b^3 \\ & D_4-aD_3=b^4 \\ & \vdots D_n-aD_{n-1}=b^n \end{aligned}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
D_n - bD_{n-1} &= a^n \qquad (1)\\
D_n - aD_{n-1} &= b^n \qquad (2)
\end{aligned}
$$

利用(1)×a−(2)×b, 得

$$
\begin{aligned}
&(a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}\\
\Rightarrow\ & D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i
\end{aligned}
$$

2. (8分)设n 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的每一行元素之和为 0, 即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$. 求证: $A_{11} = A_{12} = \cdots = A_{1n}$, 其中 A_{1j} 为 $a_{1j}(j = 1, 2, \ldots, n)$ 对应的代数余子式.

证明:利用 $\mathbf{A}$ 的每行元素和为零, 得 $a_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, n)$, 矩阵$\mathbf{A}$ 可写成:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}
\end{bmatrix}
$$

而

$$
\begin{aligned}
A_{1j} &= (-1)^{1+j}\begin{vmatrix}
a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}
\end{vmatrix}\\
&\xlongequal[\substack{\vdots\\ C_{n-1}+C_{n-2}}]{\substack{C_{n-1}+C_1\\ C_{n-1}+C_2}} (-1)^{1+j}\begin{vmatrix}
a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -a_{2j}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -a_{nj}
\end{vmatrix}\\
&\xlongequal[\substack{\vdots\\ C_{(j+1)(j+2)}}]{\substack{C_{(n-1)(n-2)}\\ C_{(n-2)(n-3)}}} (-1)^{j}(-1)^{n-j-1}\begin{vmatrix}
a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)}
\end{vmatrix}\\
&= A_{1n}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

3. (8分)设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶方阵，且满足$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{AB}$，证明$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

证明: $\because$ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{AB}\Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，等式两端同时减去单位阵$\mathbf{I}$，有

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{AB}-\mathbf{I}=-\mathbf{I}\\ \Rightarrow\ &(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{B}-\mathbf{I})=\mathbf{I}\end{aligned}$$

因此$\mathbf{A}-\mathbf{I}$与$\mathbf{B}-\mathbf{I}$互为逆阵，所以

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{B}-\mathbf{I})=(\mathbf{B}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})$$

两边同时展开，得

$$\mathbf{AB}-\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{I}=\mathbf{BA}-\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{I}$$

因此$\Rightarrow\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

4. (14分)设四元齐次线性方程组(I)为: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，另一个四元齐次方程组(II)的通解为: $k_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$

   (a) 求齐次方程组(I)的基础解系.

   (b) 线性方程组(I)与(II)是否有非零的公共解? 若有求出其所有非零公共解. 若没有, 请说明理由.

解: (a) 先求(I)的基础解系，将方程组写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

得方程组的基础解系为: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(b) 将方程组(II)的通解代入方程组(I)，其中k_1,k_2为待定系数，得到关于k_1,k_2的方程组:

$$\begin{aligned}k_1+k_2&=1\\k_1+k_2&=1\end{aligned}$$

由此得当$k_1=-k_2=k$时，方程组(II)的解也是方程组(I)的解，即它们有非零公共解:

$$k\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

5. (12分)求下列非齐次线性方程组的特解和通解.

$$\begin{aligned}9x_1-3x_2+5x_3+6x_4&=4\\6x_1-2x_2+3x_3+x_4&=5\\3x_1-x_2+3x_3+14x_4&=-8\end{aligned}$$

解:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1(3)]{\substack{R_{13} \\ R_2-R_1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_2(4)]{R_2(-1/3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得:

特解: $\begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$, 对应齐次方程组的通解: $t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$