内容小结

1. 数列极限的 “$\varepsilon - N$” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

   唯一性；有界性；保号性;

   任一子数列收敛于同一极限

3. 极限存在准则:

   两边夹准则；单调有界准则；柯西准则

3. 柯西极限存在准则

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall\,\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使当 $m>N$, $n>N$ 时,

有 $$\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$$

证: "必要性". 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N$, 使当 $m>N$, $n>N$ 时, 有

$$\left|x_n-a\right|<\varepsilon/2,\quad \left|x_m-a\right|<\varepsilon/2$$

因此 $$\left|x_n-x_m\right|=\left|(x_n-a)-(x_m-a)\right|$$

$$\le\left|x_n-a\right|+\left|x_m-a\right|<\varepsilon$$

"充分性" 证明从略 .

柯西极限存在准则的等价描述

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $\mathrm{n} > N$ 时，对一切$p \in N^+$,

有

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$$

例9. 设$x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, 证明$\{x_n\}$收敛.

证明要点：$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2}$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

方法1. 找一个趋于∞的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1=1$, $x_{n+1}=1+2x_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时, 下述作法是否正确? 说明理由.

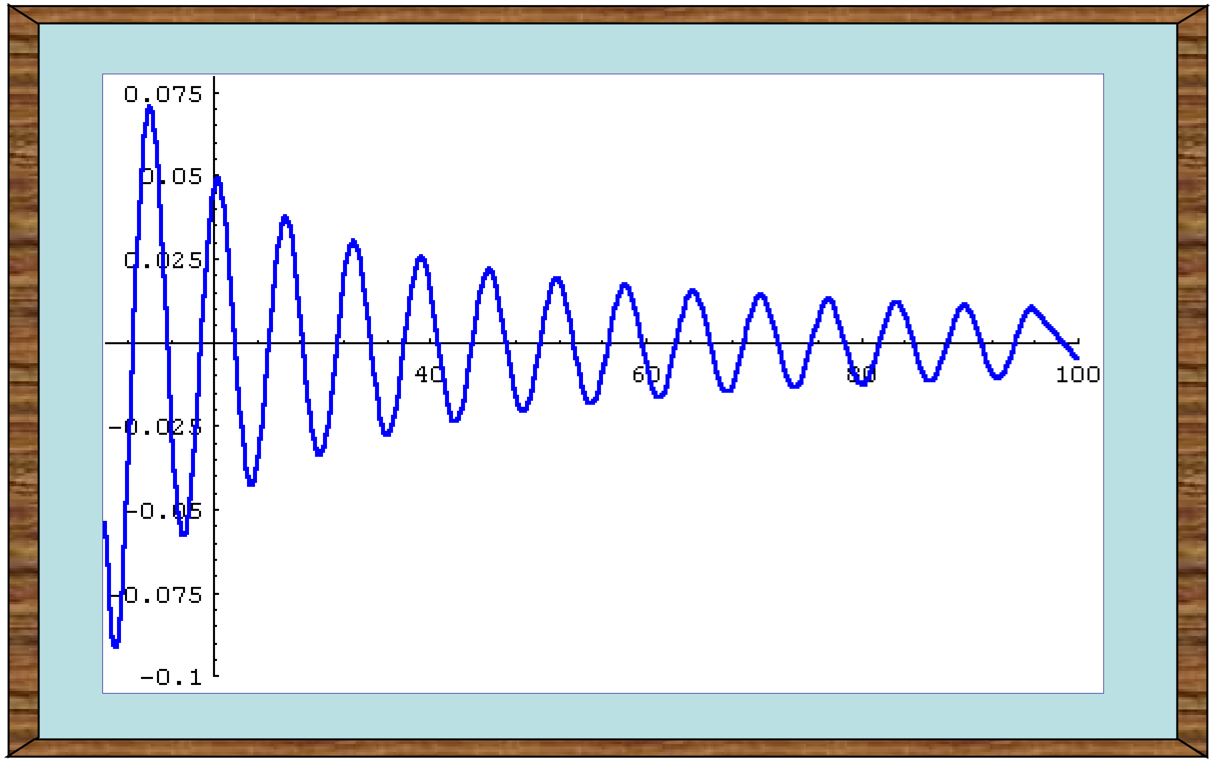
设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a=1+2a \Longrightarrow a=-1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的<u>过程中</u>，对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

1. 定义：

定义 1　设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义，A 是一个确定的数。若对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数$X(\geq a)$，使得对于适合不等式$x > X$的一切x，都满足不等式$|f(x)-A| < \varepsilon$，

则常数A就叫函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to +\infty)$$

$\boxed{"\varepsilon - X"定义}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, 使当x > X时, 恒有|f(x)-A| < \varepsilon.$$

2. $x \to -\infty$时，$f(x)$的极限

定义 1　设函数$f(x)$在$(-\infty, a)$上有定义，A 是一个确定的数。若对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数$X(\geq a)$，使得对于适合不等式$x < -X$的一切x，都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，

则常数A就叫函数$f(x)$当$x \to -\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to -\infty)$$

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

$2^0.\ x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$时, 恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

1. 定义：

定义 **设函数** $f(x)$ **在** $(-\infty, a)\cup(a, +\infty), a>0$ 上有定义, **若对于任意给定的正数** ε **(不论它多么小), 总存在着正数** X**, 使得对于适合不等式** $|x|>X$ **的一切** x**, 都有** $|f(x)-A|<\varepsilon$,

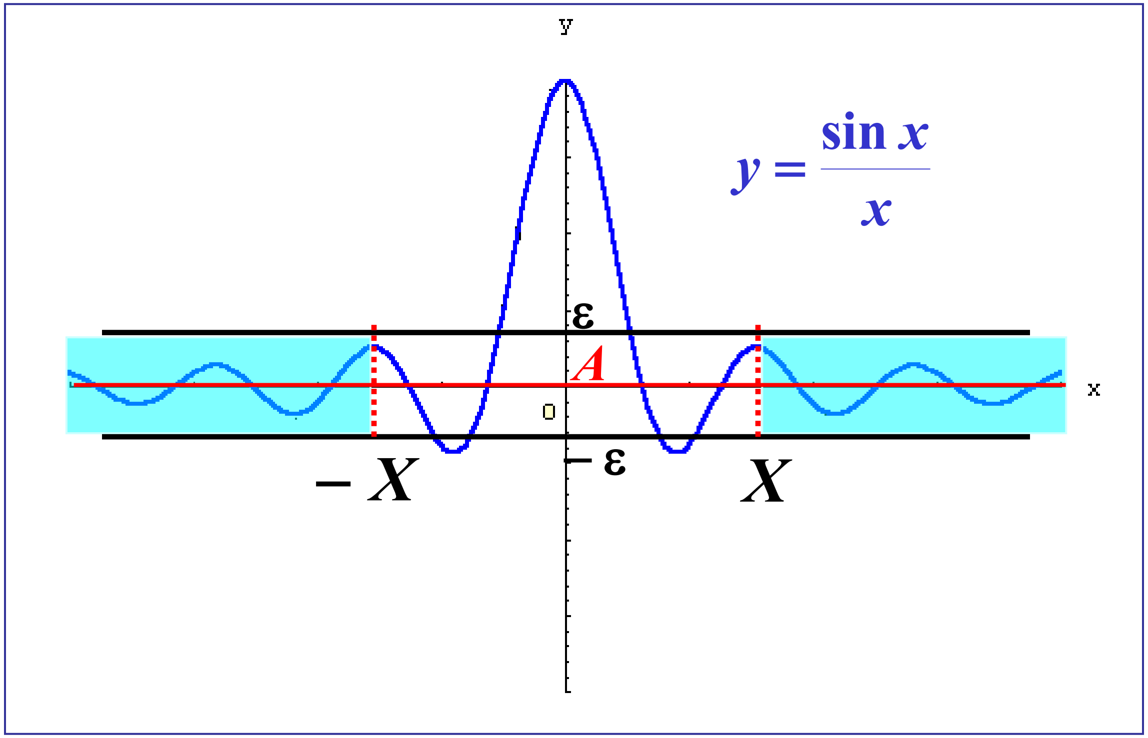
则常数 A **就叫函数** $f(x)$ **当** $x\to\infty$ **时的极限, 记作**

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(\text{当} x\to\infty)$$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - X\text{"定义}}$ $\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

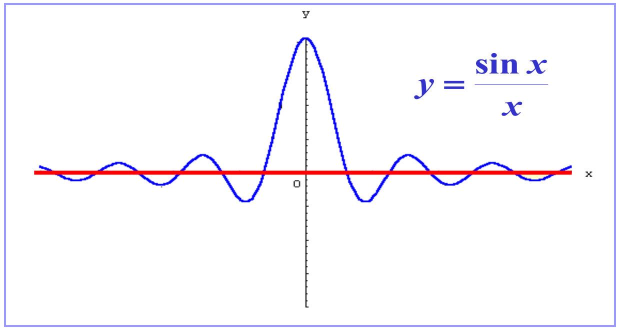
$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$, 使当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

3.几何解释:



当$x<-X$或$x>X$时, 函数 $y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内.

例　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证　$\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{X}=\varepsilon,$

$\forall\varepsilon>0,$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$时恒有

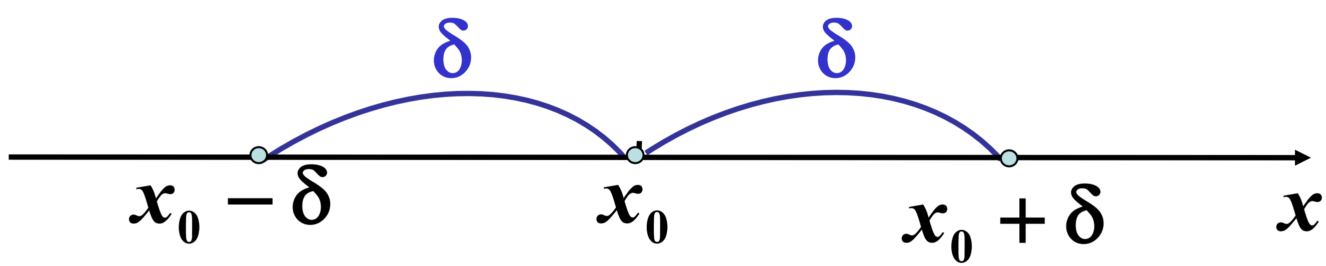
$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$　　故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

二、x 趋于有限值时, $f(x)$的极限

问题: 函数 $y=f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.



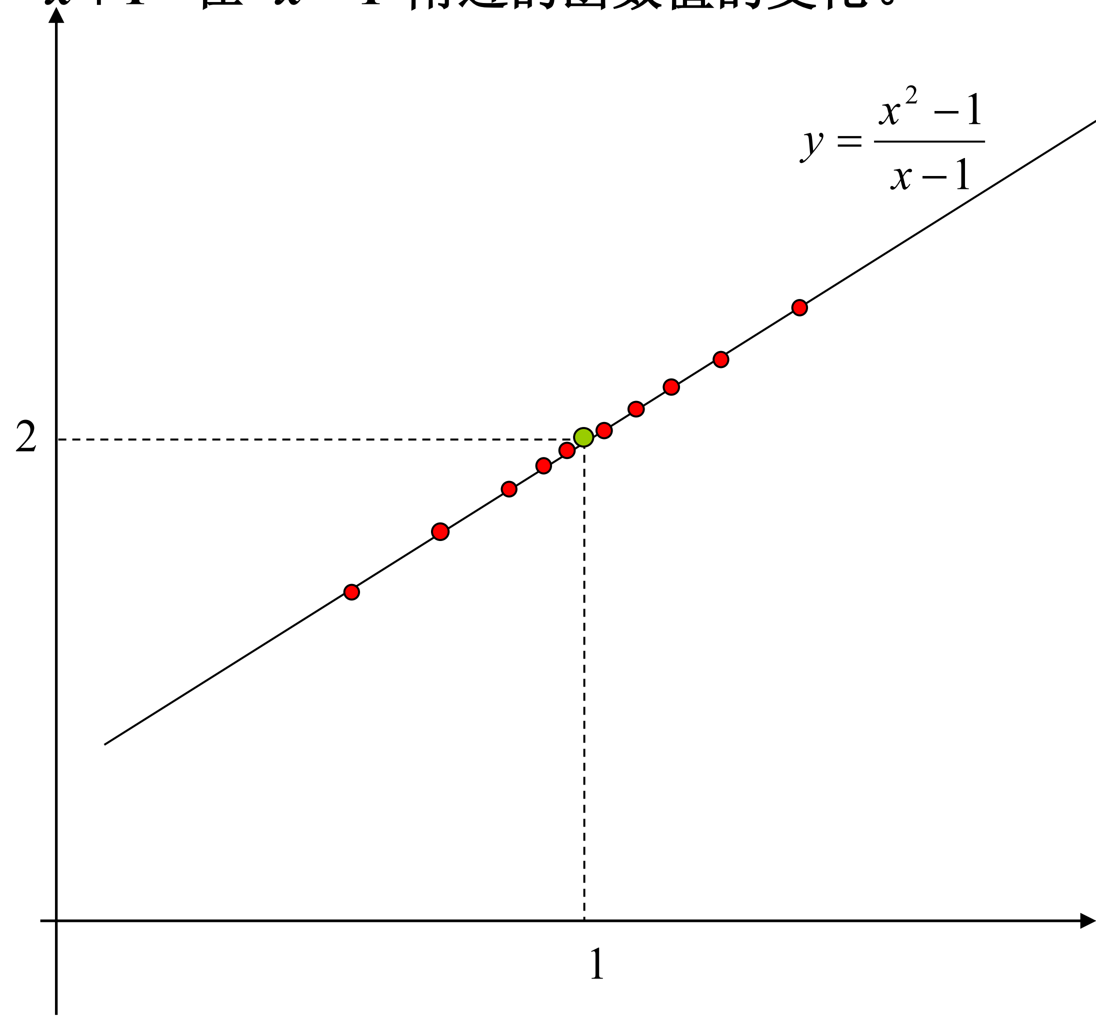
点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

一、函数极限的定义

考察函数 $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ 在 $x=1$ 附近的函数值的变化。

x	$f(x)$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
0.99999	1.99999

x	$f(x)$
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001
1.00001	2.00001



这一过程表示为：

$x \to 1$ 时，$y \to 2$

即：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

定义 设 $f(x)$ 在点 a 的某去心邻域内有定义，L 为实数，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x)-L| < \varepsilon$，则称 L 为 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad 或 \quad f(x) \to L \ \ (x \to a)$$

说明 (1) ε 给定后，δ 的选择并不唯一，δ 依赖于 a 与 ε。

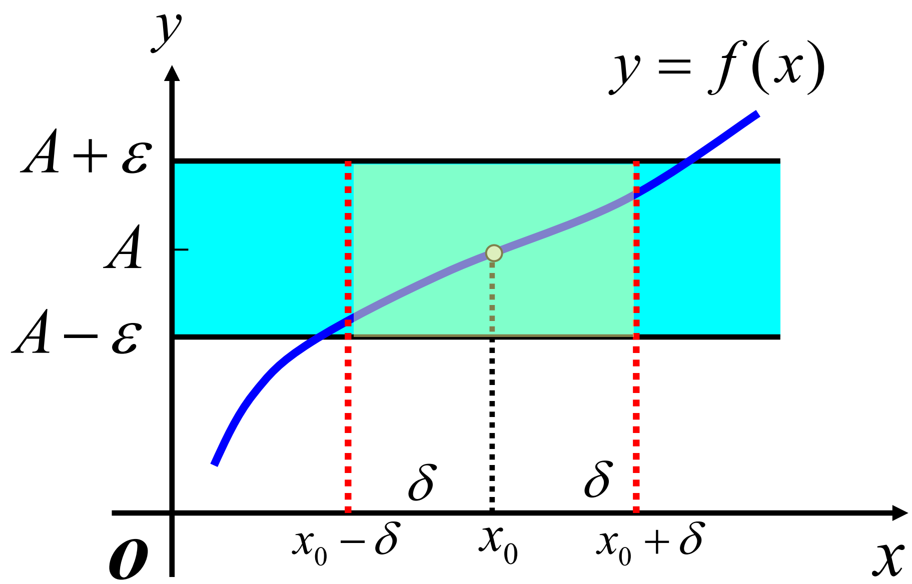
(2) 此极限的定义中，$0 < |x-a| < \delta$，指出 $x \neq a$，有两层含义：

I. a 可以不在 $f(x)$ 的定义域内；

II. a 可以属于 $f(x)$ 的定义域，但此时极限值与 $f(x)$ 在 a 处的函数值无关。

2.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,δ越小越好.

例1 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证 $\because \left| f(x) - A \right| = \left| x - x_0 \right|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < \left| x - x_0 \right| < \delta = \varepsilon$时,

$\left| f(x) - A \right| = \left| x - x_0 \right| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证 函数在点x=1处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-1\right|$ 任给$\varepsilon>0$,

要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$, 只要取$\delta=\varepsilon$,

当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

例3　证明:当$x_0>0$时,$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证　$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x_0}}$,

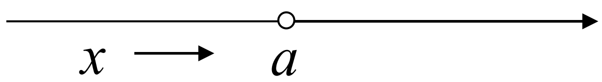
任给$\varepsilon>0$, 要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,

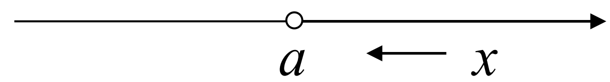
只要$\left|x-x_0\right|<\sqrt{x_0}\varepsilon$且不取负值.取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时, 就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

二、单侧极限





例如　考虑 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限。

当 $x>0$ 时，$f(x)=1$，此时 $x\to 0$ 时极限为 1;

当 $x<0$ 时，$f(x)=-1$，此时 $x\to 0$ 时极限为 -1。

左极限　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<a-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$，

则称 $f(x)$ 在 a 处的左极限为 L，记为 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$　或　$f(a-0)=L$。

右极限　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$，

则称 $f(x)$ 在 a 处的右极限为 L，记为

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=L \quad 或 \quad f(a+0)=L。$$

函数的极限与单侧极限之间的关系：

定理 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow f(a+0)=f(a-0)=L$。

例6 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<1 \\ 1 & x=1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

解 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在。

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$