第5章 不定积分

积分是微分(求导)的逆运算,

希望从函数的变化率—导函数来确定

§1 不定积分概念和基本积分公式

1 原函数、不定积分

定义1 设函数 $F(x), f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 $x \in I$，有

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**一个原函数**.

例如，由于 $(\sin x)' = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$,

$\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数.

定理1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数.

此定理将在下一章给出证明.

原函数的性质

定理2 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

(1) $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，其中 C 为任意常数.

(2) $f(x)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数.

证 (1) 因为 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$,

所以 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

(2) 设 $F(x), G(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的两个原函数，则

$$[F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0,$$

由拉格朗日定理得推论知 $F(x)-G(x)=C.$

不定积分

定理2说明一个函数只要存在一个原函数，就会有无穷多个原函数，

而且每两个之间只相差一个常数，总数与实数一样多.

定义2 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数，称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

积分号，**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量.**

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}=F(x)+C.$$

积分曲线

不定积分与被积函数有如下关系:

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$.

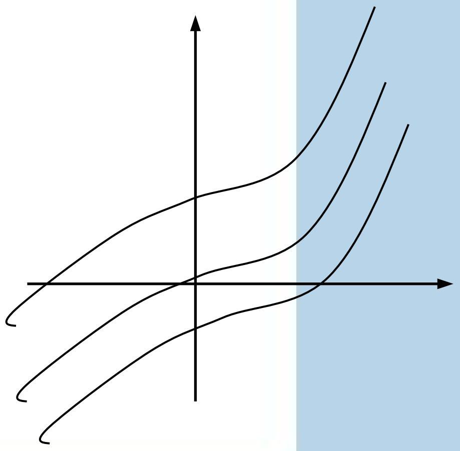
如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则曲线

$y=F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**.

而 $y=F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一条积分曲线.

即 $y=F(x)$ 沿 y 轴方向平行移动得到一族曲线,

称为 $f(x)$ 的**积分曲线族.**



简单的积分例子

对于具体问题，一般先求出全体原函数 $F(x)+C,$

再根据问题给出的条件确定常数 $C,$ 得到所求的原函数.

例1 求过点 $(1,3),$ 且在 (x,y) 处的切线斜率为 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的曲线.

解 由题设可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

则

$$y=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C,$$

将 $(1,3)$ 代入得 $C=1,$

所以，所求曲线方程为 $y=2\sqrt{x}+1.$

2. 基本积分公式

(1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C.$

(2) $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C.$

(3) $\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C \ (a \neq -1, x > 0).$

(4) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C.$

(6) $\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C.$

基本积分公式

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$

(8) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

(9) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C.$

(10) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C.$

(11) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C.$

(12) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C.$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

(14) $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C.$

3. 不定积分的线性性质

定理3 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 I 上都有原函数，则

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x;$

(2) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\quad k$ 为非零常数.

证 (1) 对等式右边求导,

$$[\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x]'=[\int f(x)\mathrm{d}x]'\pm[\int g(x)\mathrm{d}x]'=f(x)\pm g(x).$$

而且 $\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$ 包含任意常数，所以

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

同理可证 (2) 的等式.

不定积分举例

例2　求 $\int (e^x + 3\cos x)\mathrm{d}x.$

解 $\int (e^x + 3\cos x)\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x + 3\int \cos x \mathrm{d}x$

$$= e^x + C_1 + 3(\sin x + C_2),$$

合并 $C_1 + 3C_2 = C,$ 得到

$$\int (e^x + 3\cos x)\mathrm{d}x = e^x + 3\sin x + C.$$

以后在求不定积分时，有积分符号就可以不加常数 $C,$

积分符号消失时加一个 $C.$

不定积分举例

例3 求 $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$= \ln|x| + \arctan x + C.$

例4 求 $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{3}})dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$

不定积分举例

例5　求 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x=\int[2(\frac{1}{5})^x-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^x]dx$

$$=-\frac{2}{\ln 5}(\frac{1}{5})^x+\frac{1}{5\ln 2}(\frac{1}{2})^x+C.$$

例6　求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\tan x-x+C.$$

例7 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x.$

解 $$\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$$

例8 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} \mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{x^4}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

不定积分举例

例9　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

解　$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \sec^2 x\mathrm{d}x + \int \csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \tan x - \cot x + C.$$