第一节（2）
定积分的性质、中值定理

1. 定积分性质
2. 中值定理

一、定积分性质和中值定理

对定积分的**补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$;

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （k为常数）.

证 $\int_a^b kf(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k\int_a^b f(x)dx.$$

性质3 假设$a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c的相对位置如何，上式总成立.

例 若 $a<b<c,$

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质4 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a.$

性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx\geq 0.\quad (a<b)$

证 $\because\ f(x)\geq 0,\ \therefore\ f(\xi_i)\geq 0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$$\because\ \Delta x_i\geq 0,\quad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0,$$

$$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$$

$$\therefore\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$

例 1 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x$, $x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

性质5的推论：

（1）如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$　　$(a<b)$

证　$\because\ f(x)\le g(x),\quad \therefore\ g(x)-f(x)\ge 0,$

$$\therefore\ \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0,$$

$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx \ge 0,$$

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

性质5的推论:

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.\quad (a<b)$

证 $\because\ -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore\ -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

说明: $|f(x)|$在区间$[a,b]$上的可积性是显然的.

性质6 设M及m分别是函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值,

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

证 $\because \ m \le f(x) \le M$,

$$\therefore \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 2 估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx$值的范围.

解 $$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x},\qquad \forall\, x\in[0,\pi],$$

$$0\le\sin^3 x\le 1,\qquad \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx,$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\frac{\pi}{3}.$$

例 3　估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$值的范围.

解　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$上单调下降,

故$x = \dfrac{\pi}{4}$为最大点，$x = \dfrac{\pi}{2}$为最小点,

$$M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\quad m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},$$

$$\because\ b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

性质7（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.　　$(a \le \xi \le b)$

积分中值公式

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$　　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值

证 $\because\ m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

$$\therefore\ m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

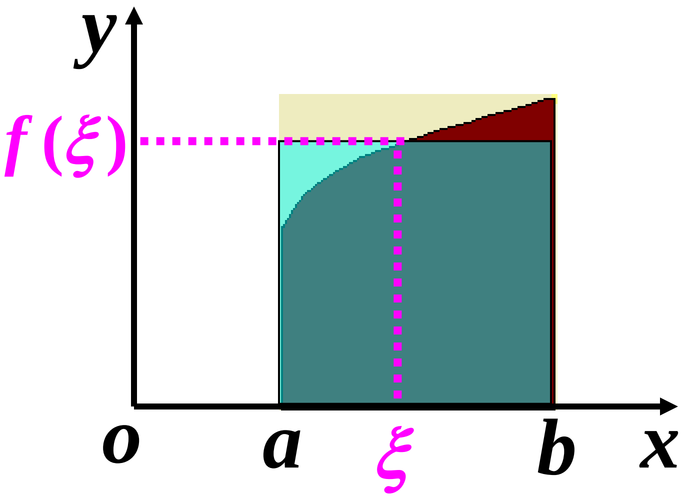
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a\le\xi\le b)$

1. 积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边， 以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

2. 积分中值公式的注释：

微分中值定理中的$\xi\in(a,b)$，

积分中值定理中的$\xi\in[a,b]$。

例 4 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\dfrac{3}{t} f(t)dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x,\ x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\dfrac{3}{t} f(t)dt=\xi\sin\dfrac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

例 5 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1} x^2 e^{-x^2}dx$.

方法1：利用积分中值定理

方法2：利用估值定理以及夹逼准则

$$(n+1)^2 e^{-(n+1)^2} \le x^2 e^{-x^2} \le n^2 e^{-n^2}$$

$$\int_n^{n+1}(n+1)^2 e^{-(n+1)^2}dx \le \int_n^{n+1} x^2 e^{-x^2}dx \le \int_n^{n+1} n^2 e^{-n^2}dx$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 e^{-(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}(n^2 e^{-n^2}) = 0$$

性质8（广义的积分中值定理）

如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,

$g(x)$在$[a,b]$上不变号,

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

二、小结

1．定积分的性质

（注意估值性质、积分中值定理的应用）

2．典型问题

（１）估计积分值；

（２）不计算定积分比较积分大小.

思考

定积分性质中指出，若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，则 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积。这一性质之逆成立吗？为什么？

解答

由 $f(x)+g(x)$或$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积，不能断言 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上都可积。

例 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$

显然 $f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$在$[0,1]$上可积，但 $f(x),g(x)$在$[0,1]$上都不可积。