第七节

多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

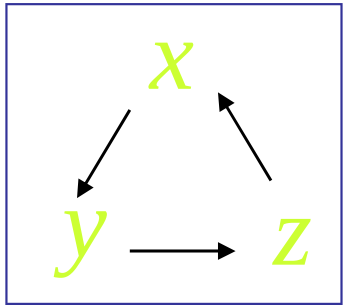
法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2,\ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$



切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

二、曲面的切平面与法线

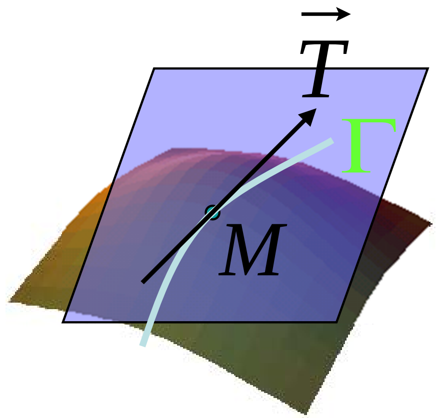
设 有光滑曲面 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$

通过其上定点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，设 $t = t_0$ 对应点 M, 且

$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0 . 则 Γ 在

点 M 的**切向量**为



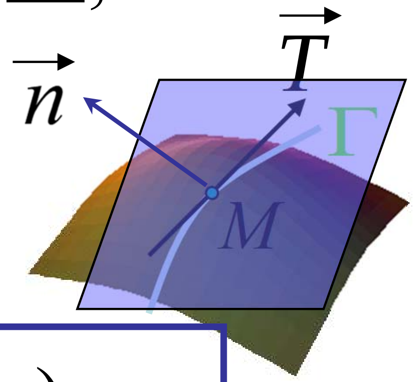
$$\vec{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

切线方程为 $$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明：Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上. 此平面称为 Σ 在该点的**切平面**.

证: $\because \Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 在 Σ 上,

$\therefore \quad F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \equiv 0$



两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得
$$\boxed{\begin{aligned} F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0) \\ +F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0 \end{aligned}}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$

$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T} \perp \vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性 , 表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上 , 从而切平面存在 .

曲面 Σ 在点 M 的**法向量**

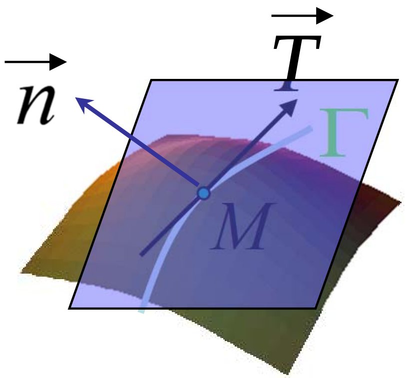
$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$



特别, 当光滑曲面Σ的方程为显式$z=f(x,y)$时, 令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点(x,y,z), $F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$

故当函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时, 曲面Σ在点(x_0,y_0,z_0)有

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角, 并假定法向量方向向上, 则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}$$

例3. 求球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解： 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0\,,x_0z_0\,,x_0y_0)\,,\quad \vec{n}_2=(x_0\,,y_0\,,z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0\,z_0}{x_0{}^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{z_0{}^2}$$

$$\therefore \quad x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的**法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\,F_y(x_0,y_0,z_0),\,F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $\dfrac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda=\pm 2$$

2. 设 $f(u)$ 可微,证明 曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .

3. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1, \quad F_1\cdot(-m)+F_2\cdot(-n), \quad F_2)$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m, 1, n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

例3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$ 的切线与法平面.

解: 点 $(1,1,1)$ 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

*第九节 二元函数的泰勒公式

一、二元函数泰勒公式

二、极值充分条件的证明

一、二元函数的泰勒公式

一元函数 $f(x)$ 的泰勒公式:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

推广

多元函数泰勒公式

记号 (设下面涉及的偏导数连续):

- $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$ 表示 $h\,f_x(x_0,y_0)+k\,f_y(x_0,y_0)$
- $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$ 表示

$$h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hk\,f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$$

- 一般地, $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)$ 表示

$$\sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p\, h^p k^{m-p} \left.\frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}\right|_{(x_0,y_0)}$$

定理1. 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有直到 $n+1$ 阶连续偏导数，$(x_0+h,\ y_0+k)$ 为此邻域内任一点，则有

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+R_n \qquad ①$$

其中 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k) \qquad ②$

$$(0<\theta<1)$$

① 称为 f 在点 (x_0,y_0) 的 ***n* 阶泰勒公式**，②称为其**拉格朗日型余项**.

证: 令 $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)\ \ (0 \le t \le 1)$,

则 $$\varphi(0) = f(x_0, y_0), \varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$$

利用多元复合函数求导法则可得:

$$\varphi'(t) = h f_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + k f_y(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = h^2 f_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ + 2hk f_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ + k^2 f_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi''(0) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0)$$

一般地,

$$\varphi^{(m)}(t) = \sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p \, h^p k^{m-p} \left. \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}} \right|_{(x_0+ht,\, y_0+kt)}$$

$$\Rightarrow \varphi^{(m)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0)$$

由$\varphi(t)$的麦克劳林公式, 得

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta) \qquad (0 < \theta < 1)$$

将前述导数公式代入即得二元函数泰勒公式.

说明:

(1) 余项估计式. 因 f 的各 $n+1$ 阶偏导数连续, 在某闭邻域其绝对值必有上界 M, 令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则有

$$|R_n| \le \frac{M}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1} \qquad \left(\begin{array}{l} h=\rho\cos\alpha \\ k=\rho\sin\alpha \end{array}\right)$$

$$= \frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}$$

$$\Big\downarrow \text{利用} \max_{[0,1]}(x+\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{2}$$

$$\le \frac{M}{(n+1)!}(\sqrt{2})^{n+1}\rho^{n+1} = o(\rho^n)$$

(2) 当 $n = 0$ 时, 得二元函数的拉格朗日中值公式:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

$$= h f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$(0 < \theta < 1)$$

(3) 若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上的两个一阶偏导数恒为零, 由中值公式可知在该区域上 $f(x, y) \equiv$ 常数.