华东师范大学期末试卷（A卷）

2012 – 2013 学年 第二学期

课程名称: 高等数学A(二)　　课程性质: 专业必修　考试日期: 2013. 07. 01

学生姓名________________　　　　学　　号________________

专　　业________________　　　　年级/班级　2012　

一	二	三	总 分	阅卷人签名

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. 已知函数 $z = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续，则 $a =$ ________.

2. 计算积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ ______________ .

3. 设函数 $u = e^x \cos(yz)$, 则 $\mathbf{div}\,(\mathbf{grad}(u)) =$ ________________________________.

4. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, 且 $y|_{x=1} = e^2$. 则 $y|_{x=-1} =$ ______________.

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (0,1)$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$, $n = 1, 2, \cdots$. 则当 $x \in [-1, 0]$ 时 $S(x) =$ ______________.

二、简答题 (本题共40分，要求给出主要解题步骤)

1. (6分) 设函数 φ 可微, 且 $\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$. 求$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$. (将结果化为最简)

2. (6分) 求曲线积分 $\oint_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为单位圆 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向.

3. (6分) 求微分方程 $y'' + \frac{1}{2-y}(y')^2 = 0$ 的通解.

4. (6分) 求方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

5. (6分) 求函数 $f(x) = \arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在点 $x = 0$ 处的幂级数展开式.

6. (10分) 判别下列级数的敛散性 (对于任意项级数,需讨论绝对收敛与条件收敛性).

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 \arctan\frac{2}{3^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

三、解答题 (本题共40分，要求给出主要解题步骤)

1. (8分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y\ln y$ 的极值.

2. (8分) 计算曲线积分 $\oint_\Gamma yzdx + 3xzdy - xydz,$, 其中 Γ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 4y$ 与平面 $z = 3y + 1$ 的交线, 从 z 轴的正向看去为逆时针方向.

3. (8分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n}$ 的收敛域与和函数.

4. (10分) 设函数 $\varphi(x)$ 二阶连续可导, 且它在点 $(0,1)$ 处的切线平行于 x 轴. 又已知

$$[\varphi'(x)+\varphi(x)-e^x]\,dy-\varphi(x)y\,dx=0$$

是一全微分方程. 试求 $\varphi(x)$ 的表达式以及此全微分方程的通解.

5. (6分) 设对于半空间 $x>0$ 内的任意光滑有向封闭曲面 S 都有

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$ 的表达式.