高等数学练习卷(V)

一、求极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\ln(1+x)}=$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\int_0^x\sin^3 tdt}=$

3、$\lim\limits_{n\to +\infty}(arc\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=$

二、求导数,微分

1、已知：$y=\sin^2(3-2x)^5$，求：$\dfrac{dy}{dx}$

2、求由方程$e^y+\sin y-\ln(1-x)=0$所确定的函数y的导数y'

3、求函数$y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$的微分$dy$

三、导数应用

1、求函数$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的单调区间和极值。

2、证明：$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(0<a<b)$

四、积分

1、$\int\dfrac{\ln^2\sqrt{x}}{x}dx$

2、$\int\dfrac{\cos 2x}{e^x}dx$

3、$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$

4、$\int_0^1 xe^{2x}dx=$

5、$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{2-x}}dx$

五、应用题：圆柱形的罐头容积 V 一定，制作时应使圆柱的底面半径 r 与高 h 之比为多少，才能使所用的材料最少?

六、级数

1、判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n2^n\sin^n(\dfrac{\pi}{7})$是绝对收敛，条件收敛，还是发散

2、求函数$\ln(x^2+2x+3)$在$x=-1$处幂级数展开式

高等数学练习卷(Ⅴ)答案

一、求极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-x^2)/2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\int_0^x\sin^3 t dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1/2$

3、$\because\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln arc\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-1}{arc\cot x(1+x^2)}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-x}{(1+x^2)}}{arc\cot x}=-1$　$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}(arc\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=$

二、求导数,微分

1、$\dfrac{dy}{dx}=2\sin(3-2x)^5\cos(3-2x)^5\left((3-2x)^5\right)'=-10(3-2x)^4\sin 2(3-2x)^5$

2、对方程两边求导:$(e^y+\cos y)y'+\dfrac{1}{1-x}=0$，$y'=\dfrac{1}{(x-1)(e^y+\cos y)}$

3、$dy=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'dx=\dfrac{-2}{3(1+x)^2}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}dx$

三、导数应用

1、

解：$f'(x)=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$，　得：稳定点：$x=2/5$；不可导点：$x=0$

故：$(-\infty,0]$、$[\dfrac{2}{5},+\infty)$是函数的严格递增区间；$[0,\dfrac{2}{5}]$是函数的严格递减区间；

函数有极大值$f(0)=0$；极小值$f(\dfrac{2}{5})=-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

2、

证:令$f(x)=\ln x$，因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

所以在(a,b)内存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$满足$\ln b-\ln a=\dfrac{b-a}{\xi}$

$\because 0 < a < \xi < b \quad \therefore \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \quad (0 < a < b)$

四、积分

1、$\int \frac{\ln^2 \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\ln^2 x}{4} d(\ln x) = \frac{1}{12}\ln^3 x + c$

2、$\because \int \frac{\cos 2x}{e^x} dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x dx = -e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x - 4\int e^{-x}\cos 2x dx$

$\therefore \int \frac{\cos 2x}{e^x} dx = e^{-x}\left(\frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x\right) + c$

3、$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, d(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^{3/2} x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

4、$\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

5、$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx == \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^2 + e^{2x}} d(e^x) = e^{-1}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4e}$

五、解:设容器底面半径为r，高为h，有条件$V = \pi r^2 h$

容器的表面积 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

令 $S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$ 得唯一驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 而此实际问题显然有最小值，

所以当容器底面半径 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，高 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，所用材料最省。

所以底面半径 r 与高 h 之比应为$1:2$

六、级数

1、判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n 2^n \sin^n(\frac{\pi}{7})$是绝对收敛，条件收敛，还是发散

解：$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\, 2\sin(\frac{\pi}{7}) = 2\sin(\frac{\pi}{7}) < 1$ $\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n 2^n \sin^n(\frac{\pi}{7})$是绝对收敛

2、求函数$\ln(x^2+2x+3)$在$x=-1$处幂级数展开式

解: 令$x+1=t$:

$$\ln(x^2+2x+3)=\ln(2+t^2)\ \ =\ln 2+\ln(1+\frac{t^2}{2})=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x+1)^{2n}\qquad(-1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2})$$

华东师范大学化学与分子工程学院本科化学类2015 级（1）班