高等数学练习卷(VI)

一、填空题

1、对于函数 $f(x)=x^3$，在区间 $[-2,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的点ε 是 ______

2、求曲线 $y=\sqrt{x^2-2x}$ 的渐近线：________________ 。

3、判断下列定积分大小：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x^3dx$ ______ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}x^3\,dx$

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛域是 ________________ 。

二、极限、导数

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x x\tan t dt}{\int_0^x(\cos t-1)dt}$

2、求曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程

3、已知：$y=x^{\sqrt{x}}$，求：$dy|_{x=4}$

三、导数应用

1、证明不等式：$\frac{1}{2}\ln^2(1+x)<x-\ln(1+x)$ （$x>0$）

2、确定函数 $f(x)=3x^{\frac{5}{3}}+\frac{5}{3}x^2$ 的凸性区间，并求拐点.

四、不定积分

1、$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

2、$\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$

3、$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

五、定积分

1、$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin^2 x+\sqrt{1-\sin^2 x}\right)dx$

2、$\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{5x^2+1}}$

3、设 $f(x)$ 为区间 $[0,a]$ 上的连续函数,且当 $0\le x\le\frac{a}{2}$ 时 $f(x)+f(a-x)>0$,

试证: $\int_0^a f(x)\,dx>0$

六、广义积分和应用题：

1、计算$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}+e^{-x^2}}dx=$

2、求由曲线$y=x^2+3$，$y=x^2$和$y=4$所围成的平面图形绕x轴旋转所产生的旋转体体积

七、级数

1、判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$是绝对收敛，条件收敛，还是发散

2、求幂级数$x+\frac{1}{2*2}x^2+\frac{1}{3*2^2}x^3+\frac{1}{4*2^3}x^4+\cdots+\frac{1}{n*2^{n-1}}x^n+\cdots$的和函数及收敛域，并求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n*2^{n-1}}$的和

高等数学练习卷(VI)答案

一、 填空题

1、 -1　　2、 $y=x-1\,,\,y=-x+1$　　3、<　　4、 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

二、极限、导数

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x x\tan t dt}{\int_0^x(\cos t-1)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x \tan t dt}{\int_0^x(\cos t-1)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan t dt+x\tan x}{\cos x-1}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan t dt}{x^2}-2=-2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}-2=-3$$

2、 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+2\cos t)}\Big|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$ ， $t=0$ 对应的点为 $(0,1)$

所求切线方程是 $x-2y+2=0$

3、 $\dfrac{dy}{dx}=x^{\sqrt{x}}(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x)$ ， $dy\big|_{x=4}=8(1+\ln 2)dx$

三、导数应用

1、证：设： $f(x)=\ln^2(1+x)-2x+2\ln(1+x)$，

$\because f'(x)=\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}-2+\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0\quad(x>0)$

且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续 $\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减

$\therefore$ 当 $x>0$ 时， $f(x)<f(0)=0$，即 $\ln^2(1+x)<2[x-\ln(1+x)]$

$$\therefore \frac{1}{2}\ln^2(1+x)<x-\ln(1+x)\quad(x>0)$$

2、确定函数 $f(x)=3x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{5}{3}x^2$ 的凸性区间，并求拐点.

解： $f'(x)=5x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{10}{3}x$　　$f''(x)=\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{10}{3}$

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时 $f''(-1)=0$，当 $x=0$ 时 $f''(0)$ 不存在

$\therefore$ 上凸区间为 $(-1,0)$，下凸区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$

拐点为 $(-1,-\dfrac{4}{3})$ 和 $(0,0)$

四、不定积分

1、$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x}\sqrt{x}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+c$

2、$\displaystyle\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx=\tan x\ln\cos x+\int\tan x\frac{\sin x}{\cos x}dx=\tan x\ln\cos x+\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\tan x\ln\cos x+\tan x-x+c$

3、$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}\overset{\sqrt[4]{2x-1}=t}{=\!=}\int\frac{2t^3}{t^2-t}dt=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=(t+1)^2+2\ln|t-1|+c$

$=\left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right)^2+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+c$

五、定积分

1、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin^2 x+\sqrt{1-\sin^2 x}\right)dx=0+2\int_0^{\pi}|\cos x|dx=2\int_0^{\pi/2}\cos xdx-2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos xdx$

$=2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=4$

2、$\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{5x^2+1}}\overset{x=1/t}{=\!=}\int_2^1\frac{t^3}{\sqrt{5+t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^2\frac{t}{\sqrt{5+t^2}}dt=\sqrt{5+t^2}\Big|_1^2=3-\sqrt{6}$

3、$\because\displaystyle\int_{a/2}^{a}f(x)dx\overset{x=a-t}{=\!=}\int_{a/2}^{0}f(a-t)(-dt)=\int_0^{a/2}f(a-x)dx$

$\therefore\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_{a/2}^{a}f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_0^{a/2}f(a-x)dx$

$=\displaystyle\int_0^{a/2}[f(x)+f(a-x)]dx=\frac{a}{2}[f(\xi)+f(a-\xi)]>0\quad \xi\in(0,a/2)$

六、　　广义积分和应用题

1、$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}+e^{-x^2}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(e^{x^2})}{1+e^{2x^2}}=\frac{1}{2}\arctan(e^{x^2})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}$

2、求由曲线 $y=x^2+3$，$y=x^2$ 和 $y=4$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体体积

旋转体体积 $V=2\pi\displaystyle\int_0^1(x^2+3)^2dx+2\pi\int_1^2 4^2dx-2\pi\int_0^2 x^4dx$

$$=2\pi(\frac{1}{5}x^5+2x^3+9x)\Big|_0^1+32\pi \quad -2\pi\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{112}{5}\pi+32\pi-\frac{64}{5}\pi=\frac{208}{5}\pi$$

七、级数

1、$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散 $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$非绝对收敛

$\because$级数为交错级数，通项趋于零,且$\ln(1+\frac{1}{n})>\ln(1+\frac{1}{n+1})$ ，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$是条件收敛

2、$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-x/2}=\frac{2}{2-x} \qquad (-2<x<2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n*2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}}dt=\int_0^x\frac{2}{2-t}dt=-2\ln(2-t)\Big|_0^x=2\ln\frac{2}{2-x} \quad (-2\le x<2)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n*2^{n-1}}=2\ln\frac{2}{2-x}\Big|_{x=1}=2\ln 2$$

华东师范大学化学与分子工程学院本科化学类 2015 级（1）班