第三章 导数与微分

1. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，是否存在 x_0 的一个邻域，在此邻域内 $f(x)$ 连续？

答：不一定。由导数定义可知，$f(x)$ 必在 x_0 的一个邻域内有定义，且在 x_0 处必连续，但得不到 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续的结论。例设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{为有理数}\\ x^2 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x}=0$，但 $f(x)$ 除点 $x=0$ 外都不连续。

2. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在，能否推出 $f'(x_0)$ 存在？

答：不能。此极限与 $f(x_0)$ 的取值毫无关系。因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否能连续都成问题，更谈不上可导。例设 $f(x)=|x|$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|-\Delta x|}{\Delta x}=0$$

但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

3. 若 $f(x)$ 有反函数，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 在 x_0 所对应的点 $y_0=f(x_0)$ 处必可导吗？

答：不一定。例函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处可导，而其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在相应点 $0^3=0$ 处导数不存在。

4. 若 $f(x)$ 是可导函数，则 $|f(x)|$ 是否可导？$|f(x)|$ 什么时候一定可导？

答：$|f(x)|$ 不一定可导。例 $f(x)=x$ 可导，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。若 $f(x_0)\neq 0$，则在 x_0 某个邻域内 $|f(x)|=f(x)$ 或 $|f(x)|=-f(x)$，故 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导。

在 $f(x_0)=0$ 时，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$，$|f'(x_0)|=\left|\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right|$，在 $x=x_0$ 处

$\left|f\left(x\right)\right|$ 的右导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\left|f\left(x_0+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=\left|f'(x_0)\right|$，$\left|f\left(x\right)\right|$ 的右导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\left|f\left(x_0+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=-\left|f'(x_0)\right|$，可见$\left|f\left(x\right)\right|$在$x=0$处极限存在的充要条件为$f'\left(x_0\right)=0$。因此若$f\left(x\right)$在其所有零点的导数为$0$，则$\left|f\left(x\right)\right|$是可导函数。

5. 若$f\left(x\right)$是可导函数，则$f'\left(x\right)$会有第一类间断点吗？

答：不会。根据下面的定理

定理：设$f\left(x\right)$在x_0的某空心邻域内可导，且在x_0处连续．若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'\left(x\right)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'\left(x\right)=f_+'\left(x_0\right)$，若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'\left(x\right)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'\left(x\right)=f_-'\left(x_0\right)$．即当$f\left(x\right)$在$x_0$处导数的右（左）极限存在时，等于该点的右（左）导数.

由假定$f\left(x\right)$在x_0处可导，$\therefore f_-'\left(x_0\right)=f_+'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$.

$\therefore f'\left(x_0+0\right)=f'\left(x_0-0\right)=f'\left(x_0\right)$，故在$x=x_0$处$f'\left(x\right)$连续。因此$f'\left(x\right)$不会有第一类间断点。

6. 若函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$在点x_0处都不可导，则函数$f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$或$f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$在点$x_0$处是否一定不可导？

答：不一定。例取$f\left(x\right)=\left|x\right|$，$g\left(x\right)=-\left|x\right|$，则$f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$在$x=0$处都不可导，但$f\left(x\right)+g\left(x\right)=0$及$f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=-x^2$在$x=0$处都可导。

7. 若函数$g\left(x\right)$在$x=x_0$处或$f\left(u\right)$在$u=u_0$处$\left(u_0=g\left(x_0\right)\right)$不可导，则复合函数$f\left[g\left(x\right)\right]$在$x=x_0$处必不可导？

答：不一定。例

(1) $g\left(x\right)=\left|x\right|$在$x=0$处不可导，$f\left(u\right)=u^2$

$f\left[g\left(x\right)\right]=\left|x\right|^2=x^2$在$x=0$处可导。

(2) $g\left(x\right)=x^2$，$f\left(u\right)=\left|u\right|$在$u=0$处不可导，

$f\left[g\left(x\right)\right]=\left|x^2\right|=x^2$在$x=0$处可导。

(3) $g(x)=x+|x|$ 在 $x=0$ 处不可导， $f(u)=u-|u|$ 在 $u=g(0)=0$ 处也不可导，

$f\left[g(x)\right]=x+|x|-\left|x+|x|\right|=0$ 在 $x=0$ 处可导。

8. 在求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 时，先求一阶导数 $y'=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$，再等式两边求导得 $y''=\left(\dfrac{1}{2t}\right)'=-\dfrac{1}{2t^2}$，这样做对吗？

答：这样做不对。求一阶导数时上面做法是正确的，但求二阶导数时，等式左面是对 x 求导，而等式右面是对 t 求导，因此就出现了错误。正确做法是等式两边对 x 求导。等式右边对 x 求导时，将 t 看成中间变量，按复合函数求导法则，对中间变量 t 求导后，还要乘上 t 对 x 的导数。即再除以 x 对 t 的导数，因此 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(y'_t\right)'_t}{x'_t}=\dfrac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$.