

课程名称: 高等数学 B

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 15 级

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

一、(8 分, 每小题 4 分)

(1) 求函数 $f(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域:

(2) 求函数 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的反函数.

二、计算下列极限 (25 分, 每小题 5 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2};$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\sqrt{1 + \sin^3 x} - 1}$$

三、求下列函数的导数或微分 (20 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $y = 2^x + x^2 + \arctan x$, 求 y' ;

(2) 设 $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$, 求 dy ;

(3) 设 $y = \arcsin x + \ln(1 + x^2)$, 求 y' ;

(4) 设 $y = x^{\sin x} (x > 0)$; 求 y' .

四、(10分, 每小题5分)

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$;

(2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值.

五、(12分, 每小题6分)

(1) 求曲线 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程;

(2) 求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

六、(12分, 每小题6分)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2a}{x^2 - ax} \right)^x = 8$, 求常数 a 的值;

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{1 - \cos x} = 5$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

七、(6分) 证明方程 $x^6 + x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ 至少有一个实根.

八、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导. 假定 $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$ 的连线与曲线 $y = f(x)$ 交于 $C(c, f(c))$ (其中 $a < c < b$). 证明至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.