第四章 级数

第一节 数项级数

本节主要介绍数项级数的收敛性判定，至于求和问题放在下一节。

1. 正项级数的审敛

（1）除了敛散性定义和性质外，主要方法有：（i）比较法，（ii）比值法和根值法，（iii）积分判别法：设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负连续且单调减少，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛（比如对于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$，由于 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 发散，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散）（iv）正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

（2）几个简单级数的收敛性：

$p-$级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散。$p=1$ 时得调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，其部分和 $s_n=\ln n+c+\varepsilon_n\ (\varepsilon_n\to 0)$。

等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，$|q|<1$ 时收敛，且为绝对收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$，$|q|\ge 1$ 时发散。

级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$，$p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散。

（3）判定正项级数 $\sum a_n$ 的敛散性的一般步骤：

（i）先看 $\lim a_n$，若该极限存在但不等于零或不存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；（比如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$，由于，$\frac{n+1}{2n+1}\to\frac{1}{2}\neq 0$，故级数发散）

（ii）若 $\lim a_n=0$，再用以下方法去判定：

$1^0$．判阶法和比较法，判阶法主要是看 $a_n$ 是关于 $\frac{1}{n}$ 的几阶无穷小．比如 $\sum_{n=1}\frac{n+1}{n\sqrt{n^3+1}}$，由于 $\frac{n+1}{n\sqrt{n^3+1}}$ 是关于 $\frac{1}{n}$ 的 $\frac{3}{2}$ 阶无穷小也即与 $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 为同阶无穷小，故级数收敛，再比如 $\sum_{n=1}\frac{n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$，由于 $\frac{n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$ 是关于 $\frac{1}{n}$ 的 $1$ 阶无穷小即与 $\frac{1}{n}$ 为同阶无穷小，故级数发散．用比较法就要找一个

比较对象$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，若要说明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则设法将$a_n$放大为$b_n$（即$0 \le a_n \le b_n$）并且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛．若要说明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则设法将$a_n$缩小为$b_n$（即$0 \le b_n \le a_n$）并且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散．或找一个已知其敛散性的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$并且极限$\lim \frac{a_n}{b_n}$能比较方便地求出来，那么就可以判定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性．

$2^0$．用比值法和根值法，特别$a_n$中出现$n!, n!!, a^n$时．比如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-(-1)^n}}$，由于$(\frac{n}{2^{n-(-1)^n}})^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} < 1$，故级数收敛（注：该题不能用比值法，因为$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在）

$3^0$．通过说明部分和有界也是证明正项级数收敛的有效办法．

例 1．判别下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} [e-(1+\frac{1}{n})]^p$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\frac{1}{n}})\ (a>0)$

（3）$\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3+\sqrt{5})^n \pi$

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$，其中 $x_n = \sin x_{n-1}, n = 2,3,\cdots, x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$

解（1）由于$e-(1+\frac{1}{n})^p \sim \frac{e}{2n}$，从而知$\sum_{n=1}^{\infty} [e-(1+\frac{1}{n})]^p$与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$具有相同的敛散性，因此当$p>1$时，原级数收敛；$p \le 1$时，原级数发散。

（2）$\sqrt[n]{a} - \sqrt{1+\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln a}{n}} - (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - (1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$

$= (\ln a - \frac{1}{2})\frac{1}{n} + (\frac{\ln^2 a}{2} + \frac{1}{8})\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

所以 $\ln a-\dfrac{1}{2}\neq 0$，即 $a\neq\sqrt{e}$ 时原级数发散；$\ln a-\dfrac{1}{2}=0$，即 $a=\sqrt{e}$ 时原级数收敛。

注：该级数是否是正项级数不容易看出来，但通过泰勒展开后可以发现：$a<\sqrt{e}$ 时，对于充分大的 $n$，有 $\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<0$；$a>\sqrt{e}$ 时，对于充分大的 $n$，有 $\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}>0$。

值得注意的是：由于级数的收敛性与前面有限项无关，因此一个级数若从某项以后所有项均非负，那么它的收敛性判定与正项级数无异。另外对于负项级数，每项加负号就可变成正项级数。判阶法与比较法只能用于正项级数，不能用于变号的级数，但泰勒展开公式可用于任何级数。

（3）$a_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}>0$，$A_1=\sqrt{2}, A_{n+1}=\sqrt{2+A_n}\ n=1,2,\cdots$

则 $A_n\to 2$，$a_n=\sqrt{2-A_n}\to 0$，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{2-A_{n+1}}}{\sqrt{2-A_n}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+A_n}}}{\sqrt{\backslash 2-A_n}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+A_n}}{2-A_n}}=\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2+A_n}}}\to\frac{1}{2}<1$$

由比值法知原级数收敛。

（4）（分析：初一看，并不能知道该级数是正项、负项、变号级数，考虑到 $\sin x$ 的周期性，我们希望找出 $(3+\sqrt{5})^n\pi=2k\pi+c_n\pi$ 中的 $c_n(0\le c_n<2)$）

解：设 $(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$，其中 $a_n,b_n$ 都为正整数，

那么 $(3-\sqrt{5})^n=a_n-b_n\sqrt{5}$

从而 $(3+\sqrt{5})^n=2a_n-(3-\sqrt{5})^n$

故 $\sin(3+\sqrt{5})^n\pi=-\sin(3-\sqrt{5})^n\pi$

又由 $0<\sin(3-\sqrt{5})^n\pi\sim(3-\sqrt{5})^n\pi$，及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-\sqrt{5})^n$ 收敛，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(3-\sqrt{5})^n\pi$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(3+\sqrt{5})^n\pi=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(3-\sqrt{5})^n\pi$ 收敛。

（5）分析：易见 $0\le x_n\to 0$，希望能找出 $x_n$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的几阶无穷小。由数列极限一节的例 9 知 $x_n$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 为同阶无穷小（$nx_n^2\to 3$），结论就出来了。解答过程请同学完成。

2．变号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的审敛

主要知识：收敛与发散定义、性质、莱布尼兹判别法。
一般方法和步骤：

（1） 先看 $\lim a_n$，若该极限存在但不等于零或不存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；（比如 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$，由于极限 $\lim \sin n$ 不存在，故级数发散）

（2） 看 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 是否收敛，若收敛，则该级数绝对收敛；

（3） 若 $\lim a_n = 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，用以下方法判别 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛：

$1^0$．若是交错级数且符合莱布尼兹判别法的条件，可用莱布尼兹判别法判定其收敛；

$2^0$．将通项 $a_n$ 分拆成两项或多项的和（可以直接拆，也可用带皮亚诺余项的泰勒公式拆），注意：对于 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中一个收敛一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则无定论．

$3^0$．加括号，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 加括号后发散，则原级数发散；加括号后收敛，原级数不一定收敛．但如果每隔固定项数加括号后收敛且 $\lim a_n = 0$，则原级数收敛．

$4^0$．利用收敛与发散定义，即考查部分和的极限是否存在，来判定敛散性也是有效的方法．

注：（1）对于变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，比值法与根值法也适用：

若 $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$，或 $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1$，则原级数绝对收敛；

若 $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$，或 $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = r > 1$，则原级数发散．

（2）变号级数的审敛不能用比较法．
（3）对于变号级数，要求指明发散、绝对收敛、条件收敛．
例 2．判别下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$，　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p})\,(p>0)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$　　（4）$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\cdots$

（1）分析：这是一个交错级数，且符合莱布尼兹判别法的条件，故收敛；再看是否绝对收敛？由于$\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$发散，知$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$发散。故结论是：条件收敛。

（2）分析：这是一个交错级数但不符合莱布尼兹判别法的条件，故不能用莱布尼兹判别法。考虑将通项分拆成几项的和，直接分拆不方便，用泰勒公式来分拆：

$$a_n=\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p})=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})=b_n-c_n$$

其中　$b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$，$c_n=\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$

当$0<p\le\frac{1}{2}$时。$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散，故原级数发散；

当$\frac{1}{2}<p\le 1$时。$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$绝对收敛，故原级数条件收敛；

当$p>1$时。$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$绝对收敛，故原级数绝对收敛。

注：对于$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$绝对收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$中一个绝对收敛一个条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$条件收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$可能条件收敛也可能绝对收敛.

（3）分析：直观看$\sqrt{n^2+1}$与$n$差不多大，$\sqrt{n^2+1}=n+c_n$，

$$c_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

因此$\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin(n+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n})\pi=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

至此容易判断原级数条件收敛。

（4）分析：易见 $p=1$时条件收敛； $p\neq 1$呢？这是一个交错级数但不符合莱布尼兹判别法的条件，且不好用分拆的方法。若每两项加括号，得级数：

$$(1-\frac{1}{2^p})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p})+\cdots(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p})$$

$p>1$时，$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}>0$且$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}\sim\frac{1}{2n-1}$，故原级数发散；

$0<p<1$时，对充分大的$n$，$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}<0$且$-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p})\sim\frac{1}{(2n)^p}$，故原级数发散。

注：以上几题给出了分析过程，具体的解答过程自己完成。

3．证明题及其它

证明一个级数收敛或发散用到的知识和方法与前面介绍的情况差不多.具体做题时最好先分清是正项级数还是变号级数，然后采用合适的方法去证明.

例3．设$a_n>0,s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}\,(\sigma>0)$收敛.

分析：由于$a_n>0,$可知或者$s_n\to s<+\infty$或者$s_n\to+\infty$。

当$s_n\to s<+\infty$时即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s>0$收敛时，由$\frac{\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}}{a_n}=\frac{1}{s_n^{1+\sigma}}\to\frac{1}{s^{1+\sigma}}$知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}$ 收敛.

当$s_n\to+\infty$时即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散时，很难用比较法证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}$ 收敛，因为找不到比较对象，此时应想到用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}$ 的部分和$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^{1+\sigma}}$有界来证明结论。$\sigma=1$时，其证明不困难：

$\frac{a_n}{s_n^2}\le\frac{s_n-s_{n-1}}{s_ns_{n-1}}=\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}$，由此得$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^2}\le\frac{2}{s_1}-\frac{1}{s_n}<+\infty$；$\sigma>1$时，对于充分大的$n$，总有$\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}<\frac{a_n}{s_n^2}$，由比较法可得结论；本题困难的地方就是证明：$0<\sigma<1$时，$T_n$有界。$\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^{1+\sigma}}\le\frac{1}{\xi_n^{1+\sigma}}(s_n-s_{n-1}),\xi\in(s_{n-1},s_n)$，如想到$f'(x)|_{x=\xi}=\frac{-\sigma}{\xi^{1+\sigma}}$，其中$f(x)=\frac{1}{x^\sigma}$，就应该有思路了：

$$\frac{1}{s_n^{\sigma}}-\frac{1}{s_{n-1}^{\sigma}}=f(s_n)-f(s_{n-1})=f'(\xi)(s_n-s_{n-1})=\frac{-\sigma}{\xi^{1+\sigma}}(s_n-s_{n-1})\le\frac{-\sigma}{s_n^{1+\sigma}}(s_n-s_{n-1}),$$

因而有 $\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^{1+\sigma}}\le\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{s_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{s_n^{\sigma}})$，故有

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^{1+\sigma}}\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\frac{1}{\sigma a_1^{\sigma}}-\frac{1}{\sigma s_n^{\sigma}}\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\frac{1}{\sigma a_1^{\sigma}}<+\infty \text{。}$$

在整个分析过程中，我们发现通过证明 $T_n$ 有界来说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}$ 收敛在 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时也有效，而且 $0<\sigma<1$ 时的证明过程对所有情况都有效。因此有下面的证明。

证明：$\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}\le\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^{1+\sigma}}$，

令 $f(x)=\frac{1}{x^{\sigma}}$，则 $f'(x)=\frac{-\sigma}{x^{1+\sigma}}$，

$$\frac{1}{s_n^{\sigma}}-\frac{1}{s_{n-1}^{\sigma}}=f(s_n)-f(s_{n-1})=f'(\xi)(s_n-s_{n-1})=\frac{-\sigma}{\xi^{1+\sigma}}(s_n-s_{n-1})\le\frac{-\sigma}{s_n^{1+\sigma}}(s_n-s_{n-1})$$

因而有 $\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^{1+\sigma}}\le\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{s_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{s_n^{\sigma}})$，故有

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^{1+\sigma}}\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\frac{1}{\sigma a_1^{\sigma}}-\frac{1}{\sigma s_n^{\sigma}}\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\frac{1}{\sigma a_1^{\sigma}}<+\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\sigma}}$ 收敛，结论得证。

注：这里还有一种更简便的证明 $T_n$ 有界的方法：

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^{1+\sigma}}=\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{s_k-s_{k-1}}{s_k^{1+\sigma}}\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\sum_{k=2}^{n}\int_{s_{k-1}}^{s_k}\frac{1}{x^{1+\sigma}}dx\le\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\int_{s_1}^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\sigma}}dx<+\infty,$$

利用积分或广义积分证明级数部分和（或多项之和）有界（或无界）有时是很有效的。

例 4．设 $a_n>0,$ 且 $a_n$ 单调减少，证：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 具有相同的收敛性.

证明：令　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, T_n=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n}$

则

$$S_n\le a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-1}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{2^{n-1}}+\cdots+a_{2^n-1})$$

$$\le a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^{n-1}}=T_{n-1}$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

又$T_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \le a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})$

$= 2S_{2^n} - a_1$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛,

综上知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 具有相同的收敛性

例 5．．设$a_n > 0$, 且$\lim \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda$，则

（1）$\lambda > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

（2）$\lambda < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明:（1）$\lambda > 1$时，取$r$，使得$1 < r < \lambda$，由题设知 $\exists N$，使得当 $n \ge N$时，$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > r$，

即$\ln \frac{1}{a_n} > r \ln n$，从而 $a_n < \frac{1}{n^r}$，故$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

（2）的证明留给学生完成.

例 6．设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其和为$A$，试证:

（1）$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$;

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)}$ 收敛，且和为$A$;

（3）又若$a_n > 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n! a_1 a_2 \cdots a_n}}{n+1}$ 收敛.

证明：令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 $S_n \to A$，

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - [a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})]$$

$$= nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

所以 $\lim \dfrac{\sum_{k=1}^{n} ka_k}{n} = \lim(S_n - \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} S_k}{n}) = A - A = 0$；

（2）令 $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{k(k+1)},\ A_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$

则 $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) A_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{A_{k-1}}{k}$

$$= A_1 - \frac{A_n}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k} = A_1 - \frac{A_n}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} a_k = S_n - \frac{A_n}{n+1}$$

由题设及（1）知 $S_n \to A,\ \dfrac{A_n}{n+1} \to 0$，从而 $\lim T_n = A$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛，且和为 $A$；

（3）$\sqrt[n]{n! a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{a_1 (2a_2) \cdots (na_n)} \le \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}$

从而 $\dfrac{\sqrt[n]{n! a_1 a_2 \cdots a_n}}{n+1} \le \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots na_n}{n(n+1)}$

由(2)及比较法知则 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n! a_1 a_2 \cdots a_n}}{n+1}$ 收敛.

例 7．设 $a > 0, a_n > 0$，且 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a}{n} + o(\dfrac{1}{n})$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，且 $a > 1$ 时绝对收敛；$a < 1$ 时条件收敛.

证明：由题设知 $\exists N$，当 $n \ge N$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \dfrac{a}{2n} > 1$ 即 $a_n < a_{n+1}$

又$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}a_N<\frac{a_N}{(1+\frac{a}{2N})(1+\frac{a}{2(N+1)})\cdots(1+\frac{a}{2(n-1)})}$

而$(1+\frac{a}{2N})\cdots(1+\frac{a}{2(n-1)})>\frac{a}{2N}+\frac{a}{2(N+1)}+\cdots+\frac{a}{2(n-1)}\to\infty\ (n\to\infty)$

所以　$\lim a_n=0$

故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

$a>1$时，取$r$满足　$1<r<a$

由于　$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n})$，及$(1+\frac{1}{n})^r=1+\frac{r}{n}+o(\frac{1}{n})$

故存在$M$，使得$n>M$ 时有$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq(1+\frac{1}{n})^r$

而$(1+\frac{1}{n})^r=\frac{\frac{1}{n^r}}{\frac{1}{(n+1)^r}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，即原级数绝对收敛.

$a<1$时，仿上面的证明，学生自己完成.

注：这里用到了一个命题：设$a_n>0,b_n>0$，且$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$，那么

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

该命题的证明作为练习题留给学生完成.

例 8.（1）设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=4,$　则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$______.

（2）设$a_n>0,$且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条不件收敛，则$\lim\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=$_____.

解:（1）$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$，$A_n=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$

则$T_n\to2,A_n\to4$，$S_{2n-1}=2A_n-T_{2n-1}\to6$，又$a_n\to0$，故$S_n\to6$，即得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$.

（2）由题设知$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\to\infty$，$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\to\infty$，

$a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n\to S$，

所以 $\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\dfrac{(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+(a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n})}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}\to 1$

例 9．设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数，且 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调减少，证明：$\lim(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n})=+\infty$．

证明：由题设知 $\lim(a_n-a_{n+1})=0$，又 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调减少，故有 $a_n-a_{n+1}>0$，即 $a_n>a_{n+1}>0$，

$$0<\frac{a_n a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}\le\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k^2-a_{k+}^2}{a_k-a_{k+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to 0$$

故 $\lim(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n})=+\infty$

练习题：

1．判别下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}\sin\dfrac{1}{n}$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}\ (a>0)$，（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}dx$，（5）$\sum_{n=3}^{\infty}(1-\dfrac{1}{\ln n})^n$

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n$ 满足 $\lim n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n=1$

（（5）$(1-\dfrac{1}{\ln n})^n=e^{n\ln(1-\frac{1}{\ln n})}$　$\ln(1-\dfrac{1}{\ln n})<-\dfrac{1}{\ln n}\Rightarrow(1-\dfrac{1}{\ln n})^n=e^{n\ln(1-\frac{1}{\ln n})}\le e^{\frac{-n}{\ln n}}$）

2．设 $a_n=(1-\dfrac{p\ln n}{n})^n$（$p>0$）

（1）求 $\lim a_n$，$\lim n^p a_n$；

（2）讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性.

3．判别下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n^p})\,(p>0)$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$

（3）$a-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{4}}+\cdots$，$(a-a^{\frac{1}{2}})+(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{4}})+\cdots$，$(a>0)$

（4）$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

（5）$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

（6）$1-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\frac{1}{7}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots$

（（6）的提示：　$a_n=\frac{1}{2n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n})\sim\frac{\ln n}{2n-1}\to 0$，

$a_n=\frac{1}{2n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n})=\frac{1}{2n+1}(1+\frac{2}{2n-1})(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$

$>\frac{1}{2n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})=a_{n+1}$）

4．设$a_n\neq 0$，且$\lim a_n=a\neq 0$，证：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$均收敛；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$与$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}|$具有同的收敛性。

5．设$\{na_n\}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$均收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.（写出$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和与$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$的部分和的关系，然后说明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和收敛）

6．设$a_n>0$，且$a_n>a_{n+1}, n=1,2,\cdots$，若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，问$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$收敛否？说明理由.

7若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$e^{a_n}=a_n+e^{a_n+b_n}$，问$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛否？

（收敛，$b_n=\ln(e^{a_n}-a_n)-a_n$，再证明$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(e^{a_n}-a_n)$收敛,）

8．设$b_n>0,\ \lim b_n=b>0$，$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_nb_n}$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$的收敛性.

（先证明$\lim na_n = \dfrac{1}{b}$）

9．设$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，证明：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$收敛；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$收敛，并其和.

（(1）求出$\lim \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$，或用归纳法证$n \ge 12$时，$a_n \ge n^2$

（2）$\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+2}}$，进而写出部分和$S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+2}}$，从而得结果）

10．设$a_n > 0, b_n > 0$，则

（1）若存在$\alpha > 0$，使得$\dfrac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \ge \alpha, n = 1,2,\cdots$，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$发散，且$\dfrac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \le 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

（(1）令$c_n = a_n b_n$，则$c_n - c_{n+1} \ge \alpha\, b_{n+1} > 0$，从而$\lim c_n$存在$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n+1})$收敛，

又$b_{n+1} \le \dfrac{c_n - c_{n+1}}{\alpha}$，可得结论.（2）用一下例 7 注解中的命题）

11．设$\{a_n\}$为单调增加且趋于无穷的正数列，$p > 0$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}}$收敛.

（$p = 1$时易证，由此可证$p > 1$时收敛．$0 < p < 1$时，先用拉氏中值定理证明：

$1 - x^p > p(1-x)\ (0 \le x \le 1)$，取$x = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，得$1 - (\dfrac{a_n}{a_{n+1}})^p \ge p(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}})$，那么

$\dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n^p}(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}) \le \dfrac{1}{p a_n^p}(1 - (\dfrac{a_n}{a_{n+1}})^p) = \dfrac{1}{p}(\dfrac{1}{a_n^p} - \dfrac{1}{a_{n+1}^p})$）

12．设$f(x)$在$x = 0$的某个邻域$U(0)$内可导，且$f(0) = 0$，

（1）若 $f'(x), x\in U(0)$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛；

（2）若 $f'(0)=0$，且 $f''(0)$ 存在，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

13．设 $\{a_n\}$ 是正的单调减少数列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，求 $\lim\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}$.

（利用 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\le a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\le a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$）

14．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$x_1=1$，$x_{n+1}=\frac{x_n+\sqrt{x_n^2+a_n}}{2}, n=1,2,\cdots$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛.

（由 $0\le x_{n+1}-x_n=\frac{a_n}{4x_{n+1}}\le a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛 $\Rightarrow \lim x_n$ 存在）

15．设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的正项级数，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值连续且单调增加，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nf(n)}$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n f(S_n)}$ 收敛.