第二章一元微分学

第二节　中值定理

有关知识：

（1）费马定理.

（2）罗尔定理，拉氏中值定理，柯西中值定理。

（3）达布定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)\neq f'(b)$，则对于介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任一实数 c，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$。

本节中的题需要一定的技巧，主要体现上：找一个合适的函数（大多数情况下需要我们去构造，称之为辅助函数）在合适的区间上（有时就是题中给出的区间，有时需我们构造新的区间，称之为辅助区间），使用合适的中值定理。

例 1：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$。

分析：欲证的结论实际上是：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $[f(x)-x]'|_{x=\xi}=0$，即 $F'(\xi)=0$（$F(x)=f(x)-x$），容易想到作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，并考虑对 $F(x)$ 用罗尔定理。但 $F(0)\neq F(1)$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上用罗尔定理行不通。应重新找一个区间，使得 $F(x)$ 在该区间上满足罗尔定理的条件。易见 $F(0)=0,F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},F(1)=-1$，故存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(x_0)=0$，因此 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理的条件。那么对 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上用罗尔定理便可得结论。具体的证明过程学生自己完成。

注：本题中构造了辅导函数 $F(x)=f(x)-x$，也构造了辅导区间 $[0,x_0]$。这是本问题解决的关键和难点同时也是解决此类问题（称之为介值问题）常用的思路和技巧。

例 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$ 且曲线 $y=f(x)$ 与抛物线 $y=(x-a)(x-b)$ 有一个交点 $(c,f(c))$ $(a<c<b)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=2$。

分析：欲证的结论为 $[f(x)-g(x)]''|_{x=\xi}=0$，其中 $g(x)$ 为满足 $g''(x)=2$ 的某个函数，由题设容易想到：$g(x)=(x-a)(x-b)$。作辅助函数 $F(x)=f(x)-(x-a)(x-b)$，则有 $F(a)=F(c)=F(b)(=0)$，进而可证明结论。具体的证明过程学生自己完成。

注：欲证 $F^{(k)}(\xi)=0$（$F(x)$ 可能是我们要构造的辅助函数)时,下面两种情况是常见的

(1) 由 $F(x_1)=F(x_2)=\cdots=F(x_{k+1})$ ($x_1<x_2<\cdots<x_{k+1}$ 是需要我们找出来的),得 $F^{(k)}(x)=0$

(2) 由 $F(a)=F(b)=F'(b)=F''(b)=\cdots=F^{(k-1)}(b)=0$ 或

$F(a)=F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(k-1)}(a)=F(b)=0$，得 $F^{(k)}(\xi)=0$

例 3 设 $0<a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

分析：欲证的结论变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

这正是柯西中值定理的结论．具体的证明过程学生自己完成。

注：这里无须技巧，关键一点是作恒等变形．

介值问题中构造辅助函数是解题的关键也是难点，下面通过举例说明如何构造辅助函数．

例 4：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，求证：对任意实数 λ，$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1。$$

分析：本题的条件与例 1 完全相同，欲证的结论是例 1 的推广（取 $\lambda=0$ 时便是例 1 的结论）。

欲证的结论变形为：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$[f(x)-x]'|_{x=\xi}-\lambda[f(x)-x]|_{x=\xi}=0$$

可是该找什么样的辅助函数就不如例 1 那样容易看出。先把欲证的结论从形式上简化

$$g(x)'|_{x=\xi}-\lambda g(x)|_{x=\xi}=0，\text{或}[g(x)'-\lambda g(x)]|_{x=\xi}=0$$

其中 $g(x)=f(x)-x$，如能找到一个函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=g'(x)-\lambda g(x)$ 且在某个区间上满足罗尔定理的条件，那问题就解决了。很遗憾，满足 $F'(x)=g'(x)-\lambda g(x)$ 的 $F(x)$ 很难找，我们把思路放开阔些：找一个满足 $F'(x)=h(x)[g'(x)-\lambda g(x)](h(x)\neq0)$ 的 $F(x)$ 也可以，再仔细观察一下就能看出 $F(x)=e^{-\lambda x}g(x)$ 符合要求．验证一下是否符合罗尔定理的条件：$g(0)=g(x_0)=0\Rightarrow F(0)=F(x_0)=0$（$x_0$ 在例 1 中找到的）. 对 $F(x)$ 用罗尔定理便可得结论。具体的证明过程学生自己完成。

以上构造的辅助函数是通过观察、分析后找出来的，技巧性很强．下面介绍一个方法（称为积分还原法），可以比较容易地找出辅助函数，无需太多技巧而且比较程序化．

欲证的结论 $g(\xi)'-\lambda g(\xi)=0$ 中的 ξ 换成 x 得 $g(x)'-\lambda g(x)=0$，将其变形为

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\lambda$$

对上式两边积分得

$$\ln g(x)=\lambda x+c$$

变形得

$$e^{-\lambda x}g(x)=C(C=e^{c})$$

那么$F(x)=e^{-\lambda x}g(x)$便是要找的辅助函数.

总结：这种方法的一般过程是这样的：把欲证的结论中的介值ξ换成x，并且必要时要作恒等变形（以利于方便积分）．然后等式两边求不定积分，再移项、化简、整理得如下形式的等式

$$F(x)=C$$

那么$F(x)$便是要找的辅助函数.

例 5：设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

分析：首先由题设可以看出 $g(x)\neq 0, x\in(a,b)$，下面用积分还原法找辅助函数：

把结论中的ξ换成x，并作恒等变形

$$f(x)g''(x)=g(x)f''(x)$$

两过积分得

$$f(x)g'(x)-\int f'(x)g'(x)dx=g(x)f'(x)-\int f'(x)g'(x)dx$$

整理得

$$f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=c$$

辅助函数便是

$$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$$

找到了辅助函数后，证明过程是简单的.
下面再举一个例子来简单介绍另一种方法：待定常数法.

例 6：设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$c\in(a,b)$,证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b)$$

分析：令 $\lambda=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，那么欲证的结论为 $f''(\xi)=\lambda$

把 λ 取代欲证的结论中的 $f''(\xi)$，并变形为 $f(c)-\dfrac{\lambda}{2}(c-a)(c-b)=0$

把上式中的 c 换成 x，其左端便是要找的辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{\lambda}{2}(x-a)(x-b)$$

证明：令 $\lambda=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，$F(x)=f(x)-\dfrac{\lambda}{2}(x-a)(x-b)$

则 $F(a)=F(b)=F(c)=0$，由罗尔定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F''(\xi)=0$$

即 $f''(\xi)=\lambda$，也即 $f''(\xi)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，从而得结论.

本例还有其它方法：

（1）通过观察、分析找出辅助函数，然后用中值定理解决：

欲证的结论变形为 $f''(\xi)-\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}=0\rightarrow[f(x)-g(x)]''|_{x=\xi}=0$，其中 $g(x)$ 为满足 $g''(x)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$ 的某个函数，由题设容易想到：$g(x)=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$。欲找的辅助函数为 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$

（2）通过积分还原法找辅助函数，然后用中值定理解决：

$\xi\rightarrow x$，并变形得 $f''(x)=\dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$，两边积分两次得

$$f(x)=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x^2+c_1x+c_2)$$

这里出现了两个任意常数，需取合适的 c_1，使之变为

$$f(x)=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)+C$$

便可得出辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$

习题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,$ 求证：对任意实数 $x_0\in(0,1)$，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=f(x_0)$.

（容易想到辅助函数 $F(x)=f(x)-xf(x_0)$，但不能在 $[0,1]$ 上使用罗尔定理，需找辅助区间）

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，曲线 $y=f(x)$ 与连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线有一个交点 $C(c,f(c))\,(a<c<b)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。

（本题思路与例 2 差不多）

3．设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

（把结论变形，然后用柯西中值定理）

4．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(x)\neq 0(x\in(0,1), f(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\ (\alpha\neq 0\text{ 为常数})$$

(用积分还原法找辅助函数)

5．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $g'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}$$

(用积分还原法找辅助函数)

6．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$,证明：

(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；

(2) $\exists\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

（（1）由题设可知 $\exists x_1,x_2$，使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，用连续函数的性质便可证得结论.

（2）通过观察、分析找出辅助函数：

$$f''(\eta)=f(\eta)\to[f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)]|_{x=\eta}=0\to[g'(x)+g(x)]|_{x=\eta}=0$$

$\rightarrow [e^x g(x)]|_{x=\xi} = 0\,(g(x) = f'(x) - f(x))$，由此可以看出辅助函数可设为

$F(x) = e^x g(x)$，

或用积分还原法找辅助函数：

$$f''(\eta) = f(\eta) \rightarrow f''(x) = f(x) \rightarrow f''(x) - f'(x) = -(f'(x) - f(x)) \rightarrow \frac{f''(x) - f'(x)}{f'(x) - f(x)} = -1$$

积分，变形并整理得 $e^x[f'(x) - f(x)] = C$，由此可以看出辅助函数.

但不能直接对 $F(x) = e^x g(x) = e^x(f'(x) - f(x))$ 在 $[a,b]$ 上用罗尔定理，而需找一辅助区间：

令 $G(x) = e^{-x} f(x)$，那么 $G(a) = G(\xi) = G(b) = 0 \Rightarrow G'(x_1) = G'(x_2) = 0$

$\Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0\,(x_1 \in (a,\xi), x_2 \in (\xi,b))$，辅助区间为 $[x_1, x_2]$）

7．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，

(1) $\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$；

(2) $\exists \eta \in (0,1)$，使得 $f''(\eta) = \dfrac{-2}{\eta} f'(\eta)$.

（用积分还原法找辅助函数)

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$， $c \in (a,b)$,证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(c) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(c-a)^2(c-b)$$

（参照例 6 ）

9．设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $c \in (a,b)$,证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

（方法一：待定常数法：令 $\lambda = 2[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}]$

欲证的结论变形为

$$f(a)(b-c) + f(c)(a-b) + f(b)(c-a) - \frac{1}{2} f''(\xi)(a-b)(b-c)(a-c) = 0$$

在上式的左端中用 λ 取代 $f''(\xi)$，用 x 取代 c（亦可用 x 取代 a 或 b ）便得辅助函数

$$F(x)=f(a)(b-x)+f(x)(a-b)+f(b)(x-a)-\frac{\lambda}{2}(a-b)(a-x)(b-x)$$

方法二：通过观察、分析找出辅助函数：

$$F(x)=f(x)-g(x)$$

$$g(x)=\frac{f(a)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

１０．设 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间 I 上二阶可导，$x_0+h\in I$，$\alpha\in(0,1)$，证明：$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+\alpha h)=\alpha f(x_0+h)+(1-\alpha)f(x_0)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2f''(x_0+\theta h)$$

（这里的介值 ξ 是 $x_0+\theta h$，涉及到三个点 $x_0,x_0+\alpha h,x_0+h$ 或者 $0,\alpha,1$，用待定常数法．作辅导函数 $F(t)=f(x_0+th)-tf(x_0+h)-(1-t)f(x_0)-\frac{t(t-1)}{2}h^2\lambda$）

多介值问题：下面通 2 个例子说明此类问题

例 7：设 $0<a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)=\frac{f'(\xi_3)}{3{\xi_3}^2}(b^2+ab+a^2)$$

分析：欲证的等式中有三项，仔细观察每一项，能想到应该与拉氏中值定理，柯西中值定理有关：

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},\ \ \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

因此能想到下面等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b+a)=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}(b^2+ab+a^2)$$

由以上等式，问题就解决了。

证明：由拉氏中值定理及柯西中值定理知 $\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2},\ \ \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

又由于 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b+a)=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}(b^2+ab+a^2)$

故 $f'(\xi_1)=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}(b+a)=\frac{f'(\xi_3)}{3{\xi_3}^2}(b^2+ab+a^2)$

例 8：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ \lambda_1,\lambda_2$ 是满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的任意正数，证明：在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=1$$

分析：初一看，不知从何处下手，而且题中特别说明了ξ和η是不同的两点。我们从物理意义上来分析此问题，以此寻找思路：

设$s=f(t)$是某物体的运动方程，那么该物体在时刻$t=0$，处于位置0，在时刻$t=1$，处于位置1，经过 1 个单位时间，运动了 1 个单位路程，$s=f(t)$的导数$\frac{ds}{dt}=f'(t)$是速度，若把λ_1,λ_2视为路程，路程除以速度就是时间，欲证的结论的物理意义就非常明显了：物体运动的 1 个单位路程分成两段λ_1,λ_2，两段所用的时间分别为$\frac{\lambda_1}{v_1},\frac{\lambda_2}{v_2}$（$v_1,v_2$分别为两段的平均速度），两段所用时间之和等于总时间 1。而平均速度等于某时刻点上的瞬时速度，问题就简单了。

证明：对于 $\lambda_1\in(0,1)$，$\exists x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=\lambda_1$

从而$\lambda_2=1-\lambda_1=f(1)-f(x_0)$，由拉氏中值定理知 $\exists\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\lambda_1}{x_0},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{\lambda_2}{1-x_0},$$

所以 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=x_0+1-x_0=1$，并且$\xi\neq\eta$。

注：以上两个问题虽同属多介值问题，但有很大的不同。例 7 中只要求证明ξ_1,ξ_2,ξ_3是存在的，不要求说明它们是不同的，证明过程简单。关键一点是：根据欲证的等式（必要时要对等式作恒等变形），构造出一个有二项或多项的恒等式，然后对等式中各项分别用中值定理（拉氏中值定理及柯西中值定理）。例 8 中既要求证明ξ,η是存在的，还要求说明它们是不同的，这时应想到如果它们是在不同区间内找到的，那它们自然就不相同了，这种问题的处理往往是先将区间分成两个或多个区间，然后在各个区间上用中值定理。能分析该题的几何意义吗？

其他：费马定理、达布定理在证明介值问题时也是很有用的。另外也可用中值定理证明含介值的不等式。

例 9 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$0\le f(x)\le\frac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

分析：欲证的结论变形为

$$[f(x)-\frac{1}{1+x^2}]'_{x=\xi}=0$$

因此可想到辅助函数为 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，但没法对 $F(x)$ 用罗尔定理。考虑用费马定理去解决：想办法说明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最大或最小值。

证明：令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $F(0)=0, F(+\infty)=0, F(x)\le 0$

若 $F(x)=0, \forall x\in[0,+\infty)$，则 $\forall \xi\in(0,+\infty)$，有 $F'(\xi)=0$，从而结论成立。

若 $\exists x_0\in(0,+\infty), F(x_0)<0$，则 $\exists \xi\in(0,+\infty)$，使得

$$F(\xi)=\min_{x\in[0,+\infty)} F(x)$$

由费马定理知 $F'(\xi)=0$，得结论。

综上知 $\exists \xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

注：证明问题： $\exists \xi\in I$，使得 $F'(\xi)=0$ 时，容易想到

（1）用罗尔定理，要注意验证罗尔定理的条件；

（2）用费马定理，要说明 $F(x)$ 在区间 I 的内部取得最大值或最小值。

（3）达布定理，该定理不常用，偶尔用一下，后面的泰勒公式及应用一节中，有例子就用到了。

例１０：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,$ 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒等 0，证明：$\exists \xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)>0$

证明：令 $F(x)=f^2(x)$，则 $F(0)=0$，由题设知 $\exists x_0\in(0,1), F(x_0)>0$

由拉氏中值定理 $\exists \xi\in(0,1), F'(\xi)=\dfrac{F(x_0)-F(0)}{x_0}>0$，得结论.

练习题

11．设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists \xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi_1)}{2\xi_1}=\frac{f'(\xi_2)}{4\xi_2{}^3}(b^2+a^2)=\frac{\xi_3 f'(\xi_3)}{(b^2-a^2)}(\ln b-\ln a)$$

12．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，证明：在 $(0,1)$ 内存在 n 个互不相同的点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，使得

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{a_n}{f'(\xi_n)}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

１３. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ I 上二阶可导，且 $|f(x)|\le 1$, $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明：$\exists\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$

（作辅助函数 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，用费马定理证明，要说明 $F(x)$ 可在 $(-2,2)$ 内取得最值：

$$f'(x_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}\Rightarrow|f'(x_1)|\le 1, x_1\in(-2,0)$$
$$f'(x_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}\Rightarrow|f'(x_2)|\le 1, x_2\in(0,2)$$

$F(x_1)\le 2$，$F(x_2)\le 2$，$F(0)=4\Rightarrow F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最大值在其内部取得，还须说明 $f'(\xi)\ne 0$.）