东南大学考试卷 A 卷

课程名称	线性代数A	考试学期	18-19-3	得　分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭　卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 密 封 线

一. (30%)填空题（E 表示单位矩阵）

1. 设 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，$B=(\beta,\gamma,\alpha)$，而 $|A|=2$，则 $|A+B|=$ __4__；

2. 若 α 是 3 维列向量，$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ __3__；

3. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 $Q=$ __$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$__；

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 B，使得 $AB=O$，则 $t=$ __-3__；

5. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$；

6. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&1\\1&b&1\end{vmatrix}$，求此行列式的所有代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}=$ _$(a-1)(b-1)$__；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}5&7\\0&7\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$ 相似且 $a>0$，则 $B=$ __$\begin{pmatrix}6&1\\1&6\end{pmatrix}$__；

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正惯性指数为__2_；

9. 设 A 是 3 阶实对称阵且满足 $A^2+3A=O$，若 $kA+2E$ 是正定矩阵，则 k 必满足

$\underline{\ k < 2/3\ }$；

10. 设 A 是 3 阶实正交矩阵，矩阵 A 的第 1 行第 3 列元素 $a_{13}=1$，$b=(2,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 有一解为___$(0,0,2)^T$________________________。

二．（**10%**）验证：$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的一组基，并求向量 $\beta_1=(5,0,7)^T$ 在这组基下的坐标。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&4\\0&0&-2\end{pmatrix}$，$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，

而 $\dim R^3=3$，$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一组基。

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\-1&1&1&0\\0&3&2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$，$\therefore \beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，

$\therefore \beta_1$ 在这组基下的坐标为 $(2,3,-1)^T$。

三．（**14%**）设线性方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\2x_1+3x_2+kx_3=3,\\x_1+kx_2+3x_3=2,\end{cases}$ 问：k 取何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&3&k&3\\1&k&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&k+2&1\\0&0&(k+3)(2-k)&2-k\end{pmatrix}$

当 $(k+3)(2-k)\neq 0$ 即 $k\neq -3$ 且 $k\neq 2$ 时，有唯一解；

当 $\begin{cases}(k+3)(2-k)=0\\2-k\neq 0\end{cases}$ 即 $k=-3$ 时，无解；

当 $\begin{cases}(k+3)(2-k)=0\\2-k=0\end{cases}$ 即 $k=2$ 时，有无穷多解，此时，

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&0\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1-5x_3=0\\x_2+4x_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=5x_3\\x_2=-4x_3+1\end{cases}$$

$$\therefore x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_3\\-4x_3+1\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \therefore \text{通解为}\ k\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},k\in R\text{。}$$

四．（**12%**）已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}$，且 $AX=A^T+X$，求矩阵 X。

解：$(A-E)X=A^T\Rightarrow X=(A-E)^{-1}A^T$，

$$(A-E,E)=\begin{pmatrix}0&2&1&1&0&0\\3&3&2&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&-1&-1&3\\0&0&1&3&2&-6\end{pmatrix},$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&3\\3&2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&3\\1&5&-5\end{pmatrix}\text{。}$$

五．（**12%**）设向量 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(1,2,0)^T,\alpha_3=(1,2,1)^T$，方阵 A 满足

$$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=-\alpha_3,$$

（1）求矩阵 A，

（2）求矩阵 $(A-E)^{100}$ 的秩。

解：(1) $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$

$$(P,E)=\begin{pmatrix}-1&1&1&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1/2&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&1&-1/2&1\end{pmatrix},$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1/2&0\\-1&1&-1\\1&-1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

(2) $r((A-E)^{100})=r(P^{-1}(A-E)^{100}P)$

而 $P^{-1}(A-E)^{100}P=(P^{-1}(A-E)P)^{100}=(P^{-1}AP-E)^{100}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & (-2)^{100}\end{pmatrix}$,

$\therefore r((A-E)^{100})=1$。

六．（12%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都是 1，

（1）求 a 的值；（2）用正交变换把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\because r(A)=2$，$\therefore |A|=(a-1)^2(-2-a)=0$，

$\therefore a=1$ 或 $a=-2$，当 $a=1$ 时，显然 $r(A)=1$，不符合条件，$\therefore a=-2$。

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -1 & \lambda+2 & 1\\ -2 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0$，$\therefore \lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$，

$\lambda_1=0$：特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},k\neq 0$；$\lambda_2=3$：特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},k\neq 0$；

$\lambda_3=-3$：特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},k\neq 0$，令 $Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$,

在正交变换 $x=Qy$ 下，$f(x1,x2,x3)=3y_2^{\ 2}-3y_3^{\ 2}$。

七．（10%）证明题：

1．设 A 是 n 阶方阵，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量，且 $\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=\alpha_1$，

$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

证明：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ (1)$\Rightarrow k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$

$\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$ (2)，(2)−(1)可得$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0$ (3)

$\Rightarrow k_2\alpha_1+k_3(\alpha_1+\alpha_2)=0$ (4)，(4)−(3)可得$k_3\alpha_1=0$，$\because \alpha_1\neq 0\Rightarrow k_3=0$，

代回(3)可得$k_2=0$，代回(1)可得$k_1=0$。$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

2. 设A,B分别为n阶矩阵，且A有n个互不相同的特征值，已知$AB=BA$，证明：

存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP,P^{-1}BP$都为对角阵。

证明：$\because A$有n个互不相同的特征值，设为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\therefore A$有$n$个线性无关的特征向量，设为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则有$A\xi_i=\lambda_i\xi_i$，$i=1,2,\cdots,n$，
而$AB\xi_i=BA\xi_i=B\lambda_i\xi_i=\lambda_iB\xi_i$，
若$B\xi_i\neq 0$，$B\xi_i$也是A的对应于特征值λ_i的特征向量，$\therefore B\xi_i$与ξ_i线性相关，
则有$B\xi_i=k_i\xi_i$，
若$B\xi_i=0$，则$B\xi_i=0\xi_i$，$\therefore \xi_i$也是B的特征向量，
$\therefore \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$也是$B$的$n$个线性无关的特征向量。
$\therefore$令$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则$P^{-1}AP,P^{-1}BP$都为对角阵。