高等数学 A(下)期中考试题目

第一题（选择填空）以下每题 5 分共 30 分

1、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的　（ A ）

(A)必要而非充分条件　　(B)充分而非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

2、设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，$x=u+v$，$y=u-v$，则 $z_u+z_v=$　（ C ）

(A) $\dfrac{u-v}{u^2-v^2}$　(B) $\dfrac{v-u}{u^2-v^2}$　(C) $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$　(D) $\dfrac{v-u}{u^2+v^2}$

3、设 $z=xye^{-xy}$，则 $z'_x(x,-x)=$　（ D ）

(A) $-2x(1+x^2)e^{x^2}$　(B) $2x(1-x^2)e^{x^2}$　(C) $-x(1-x^2)e^{x^2}$　(D) $-x(1+x^2)e^{x^2}$

4、曲线 $x=2\sin t, y=4\cos t, z=t$ 在点 $(2,0,\frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程是　(C)

(A) $2x-z=4-\dfrac{\pi}{2}$　(B) $2x-z=\dfrac{\pi}{2}-4$　(C) $4y-z=-\dfrac{\pi}{2}$　(D) $4y-z=\dfrac{\pi}{2}$

5、设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，在 $P_0(x_0,y_0)$ 处，有

$f_x(P_0)=0, f_y(P_0)=0, f_{xx}(P_0)=f_{yy}(P_0)=0, f_{xy}(P_0)=f_{yx}(P_0)=2$，则（ C ）

(A) 点 P_0 是函数 z 的极大值点　　(B) 点 P_0 是函数 z 的极小值点

(C) 点 P_0 非函数 z 的极值点　　(D) 条件不够，无法判定

6、函数 $f(x,y,z)=z-2$ 在 $4x^2+2y^2+z^2=1$ 条件下的极大值是　（ C ）

(A) 1　(B) 0　(C) -1　(D) -2

第二题。计算下列积分（每题 10 分,共 40 分）

7. 计算下列对坐标的曲面积分:

$\iint_\Sigma x^2y^2z\,dxdy$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

解:(1)Σ: $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，下侧，Σ在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为: $x^2+y^2\le R^2$.

$$\iint_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\left[\left(r^2-R^2\right)+R^2\right]^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}\left(R^2-r^2\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R\left[R^4\sqrt{R^2-r^2}-2R^2\sqrt{\left(R^2-r^2\right)^3}+\sqrt{\left(R^2-r^2\right)^5}\right]\mathrm{d}\left(R^2-r^2\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot2\pi\left[\frac{2}{3}R^4\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}R^2\left(R^2-r^2\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{7}{2}}\right]_0^R$$

$$=\frac{2}{105}\pi R^7$$

8.利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

星形线 $x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$；

解：

$$A=\oint_L -y\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}a\sin^3t\cdot3a\cos^2t(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}\sin^4t\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cdot\sin^2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos4t)(1-\cos2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos2t-\cos4t+\cos2t\cos4t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{16}a^2\left[2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos2t+\cos6t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{3}{8}\pi a^2$$

9.设质点受力作用，力的反方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，若质点由$(a,0)$沿椭圆移动到 $B(0,b)$，求力所做的功.

解：依题意知 $F=kxi+kyj$，且 L：$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$，$t$：$0\to\frac{\pi}{2}$

$$W=\int_L kx\mathrm{d}x+ky\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ka\cos t\left(-\sin t\right)+kb\sin t\cdot b\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k\left(b^2-a^2\right)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k\left(b^2-a^2\right)}{2}\left[\frac{-\cos2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{k\left(b^2-a^2\right)}{2}$$

(其中 k 为比例系数)

10. $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行);

解答：圆周的参数方程为：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，t:0→2π.

故 $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\left[(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)a\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\left(-a^2\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi$$

第三题（证明题）以下每题 10 分，共 30 分

11．请完整陈述 Green 公式，并且证明之。

12. 设 C 是取正向的圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$f(x)$是正的连续函数，证明：

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$$

证明：由格林公式有

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy,$$

其中 D 是由 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 所围成的区域。而

$$\iint_D f(x)dxdy=\int_0^2 dx\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x)dy=2\int_0^2 f(x)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx,$$

$$\iint_D f(y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(y-1)^2}}f(y)dx=2\int_0^2 f(y)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy,$$

即
$$\iint_D f(x)dxdy=\iint_D f(y)dxdy,$$

所以

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\geq\iint_D 2d\sigma=2\pi$$

13. 设函数 $f(x,y)$ 在单位圆域上有连续的偏导数，且在边界上的值恒为零。证明：

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}dxdy$$

其中：D 为圆域 $\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1$。

证明：取极坐标系，由 $\begin{cases}x=r\cos\vartheta\\ y=r\sin\vartheta\end{cases}$，得到

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta,$$

将上式两端同乘 r，得到

$$r\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\vartheta+\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\vartheta=xf_x'+yf_y'。$$

于是有

$$I=\iint_D\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{1}{r^2}r\frac{\partial f}{\partial r}rdrd\vartheta=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial r}dr=\int_0^{2\pi}f(r\cos\vartheta,r\sin\vartheta)\Big|_\varepsilon^1 d\vartheta$$

$$=\int_0^{2\pi}f(\cos\vartheta,\sin\vartheta)d\vartheta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\vartheta,\varepsilon\sin\vartheta)d\vartheta=0-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\vartheta,\varepsilon\sin\vartheta)d\vartheta$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\vartheta,\varepsilon\sin\vartheta)d\vartheta$$

由积分中值定理，有

$I=-2\pi\cdot f(\varepsilon\cos\vartheta_1,\varepsilon\sin\vartheta_1)$，其中 $0\le\vartheta_1\le 2\pi$ 。

故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}f(\varepsilon\cos\vartheta_1,\varepsilon\sin\vartheta_1)=f(0,0)$