内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$
\begin{array}{ccc}
\text{有理函数} & \xleftarrow{\text{万能代换}} & \text{三角函数有理式} \\
\downarrow \text{分解} & \nwarrow \text{根式代换} & \uparrow \text{三角代换} \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单无理函数}
\end{array}
$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便，要注意综合使用基本积分法，简便计算 .

说明：将 $R(\sin x, \cos x)$ 化为有理函数的积分代换方法:

(1) 万能代换：令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$;

(2) 改良的万能代换：令 $t=\tan x$,

$R(\sin x, \cos x)$满足：

$$R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x);$$

(3) 令 $t=\cos x$, $R(\sin x, \cos x)$满足：

$$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x);$$

(4) 令 $t=\sin x$, $R(\sin x, \cos x)$满足：

$$R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x);$$

例8. 求 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\sin x$ 为奇函数, 可令 $t = \cos x$,

$$\text{原式} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= \int (1 - \frac{1}{\cos^2 x})\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \cos x + \sec x + C$$

例9　求积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.

解　$u=\tan\frac{x}{2}$,　　$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $dx=\frac{2}{1+u^2}du$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$=\frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}]+C$$

$$=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式 , 可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

$$令\ t=\sqrt[p]{ax+b},\ p 为 m, n 的最小公倍数.$$

例10. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \quad =3\int \frac{u(u+1)-(u+1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$=3[\,\tfrac{1}{2}u^2-u+\ln\left|1+u\right|\,]+C$$

$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2，3 的最小公倍数 6，令 $x = t^6$，则有

$$原式 = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例12. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

例13. 求 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}}\mathrm{d}x$

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$, 则 $x=\frac{1+2t^3}{1-t^3}$, $dx=\frac{9t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt$

原式 $=\int \frac{3}{1-t^3}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt$

$$=-\ln|1-t|+\int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{1+t+t^2}dt$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln\left|1+t+t^2\right|+\frac{3}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln\left|1+t+t^2\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{1+2t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+2}+2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}+C$$

不定积分

分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} &\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或}\quad &\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得 ;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int u\,v'\,\mathrm{d}x$ 容易计算 .

例1. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\therefore\ \text{原式} = \int x\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

思考: 如何求 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$?

提示:

$$\text{原式} = -\int x^2\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots$$

例2. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

解: 原式 $= \int \ln x\ \mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

例3. 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}x^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

例4. 求 $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \sin x \, \mathrm{d}e^x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, \mathrm{d}e^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

故　原式 $= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

例6. 求 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

例7. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x$

$$= \tan x \ln\cos x - \int \tan x\,\mathrm{d}(\ln\cos x)$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \tan x - x + C$$

例8. 求$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解: $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\therefore$ 原式$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

例9. 求 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: $I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$

得递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

说明: 已知 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1\right)$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C$$

例10. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

证: $$I_n = \int \tan^{n-2} x \, (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

注: $I_n \to \cdots \to I_0$ 或 I_1

$$I_0 = x + C, \qquad I_1 = -\ln|\cos x| + C$$

例11. 设 $I_n=\int \sec^n x\,\mathrm{d}x$，证明递推公式:

$$I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad(n\geq 2)$$

证: $\boxed{I_n}=\int\sec^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int\sec^{n-2}x\cdot\mathrm{d}(\tan x)$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x$$

$$-(n-2)\int\sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)\int\sec^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x\ \boxed{-(n-2)\,I_n}\ +(n-2)\,I_{n-2}$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad(n\geq 2)$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分 ;

2) 分部产生循环式 , 由此解出积分式 ;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变 ,
解出积分后加 C)

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例12. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:
$$
\begin{aligned}
\int x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}f(x) \\
&= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C \\
&= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C
\end{aligned}
$$

说明: 此题也可先求出 $f'(x)$，再积分

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例13. 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

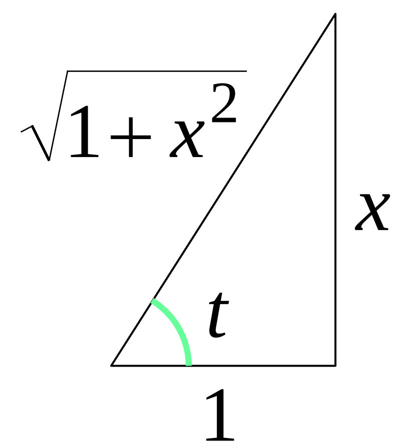
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 则

$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2　用分部积分法

$$I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$$

例14. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: $I=\sin(\ln x)-\int x\,\mathrm{d}\sin(\ln x)$

$$=\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x$$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+\int x\,\mathrm{d}\cos(\ln x)$$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$I=\frac{1}{2}x\big(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\big)+C$$

例15. 求 $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解：原式 $= \dfrac{1}{4}\int(\ln x)^4\,\mathrm{d}x^4$

$$= \frac{x^4(\ln x)^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^4\,\mathrm{d}(\ln x)^4$$

$$= \frac{x^4(\ln x)^4}{4} - \int x^3(\ln x)^3\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{x^4(\ln x)^4}{4} - \frac{1}{4}\int(\ln x)^3\,\mathrm{d}\,x^4$$

$$= \frac{x^4(\ln x)^4}{4} - \frac{x^4(\ln x)^3}{4} + \frac{3}{4}\int x^3(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4}\ln^2 x - \frac{3}{8}\ln x + \frac{3}{32}\right) + C$$

内容小结

分部积分公式 $\int u v' \,\mathrm{d}x = u v - \int u' v \,\mathrm{d}x$

1. 使用原则： v易求出, $\int u' v \,\mathrm{d}x$易积分

2. 使用经验：“**反对幂指三**” ，前 u 后 v'

3. 题目类型：

分部化简； 循环解出; 递推公式

备用题. 求不定积分$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部，再换元)

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}(e^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{(e^x-1)} = 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u \qquad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2)$, $\mathrm{d}\,x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}\,u$

故 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2\int\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}\,u$$

$$=2u\ln(1+u^2)\ -4\int\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\mathrm{d}\,u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}\quad-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$