第一节 多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

三、多元函数的极限

定义**2.** 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathrm{R}^n, P_0$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P\in D\bigcap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $\left|f(P)-A\right|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad (\text{也称为 } n \text{ 重极限})$$

当 $n=2$ 时，记 $\rho = \left|PP_0\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

例**1.** 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

求证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证：$\because\ \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证：$\because \left| f(x,y)-0\right| \le \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon/2,$ 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

- 若当点$P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时, 函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定函数极限不存在 .

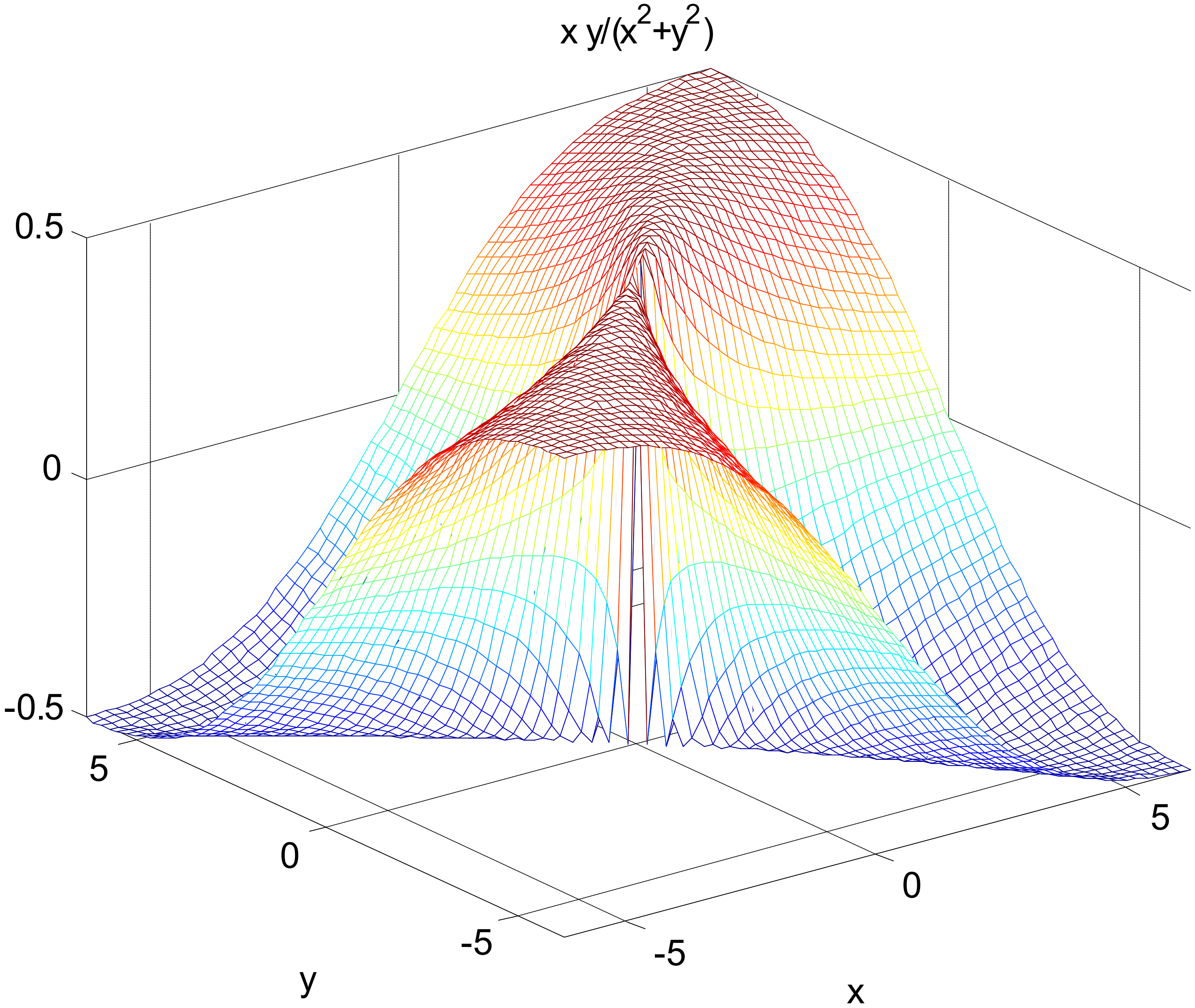
例**3.** 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解**:** 设 $P(x\ ,y)$ 沿直线 $y=k\,x$ 趋于点 (0, 0) , 则有

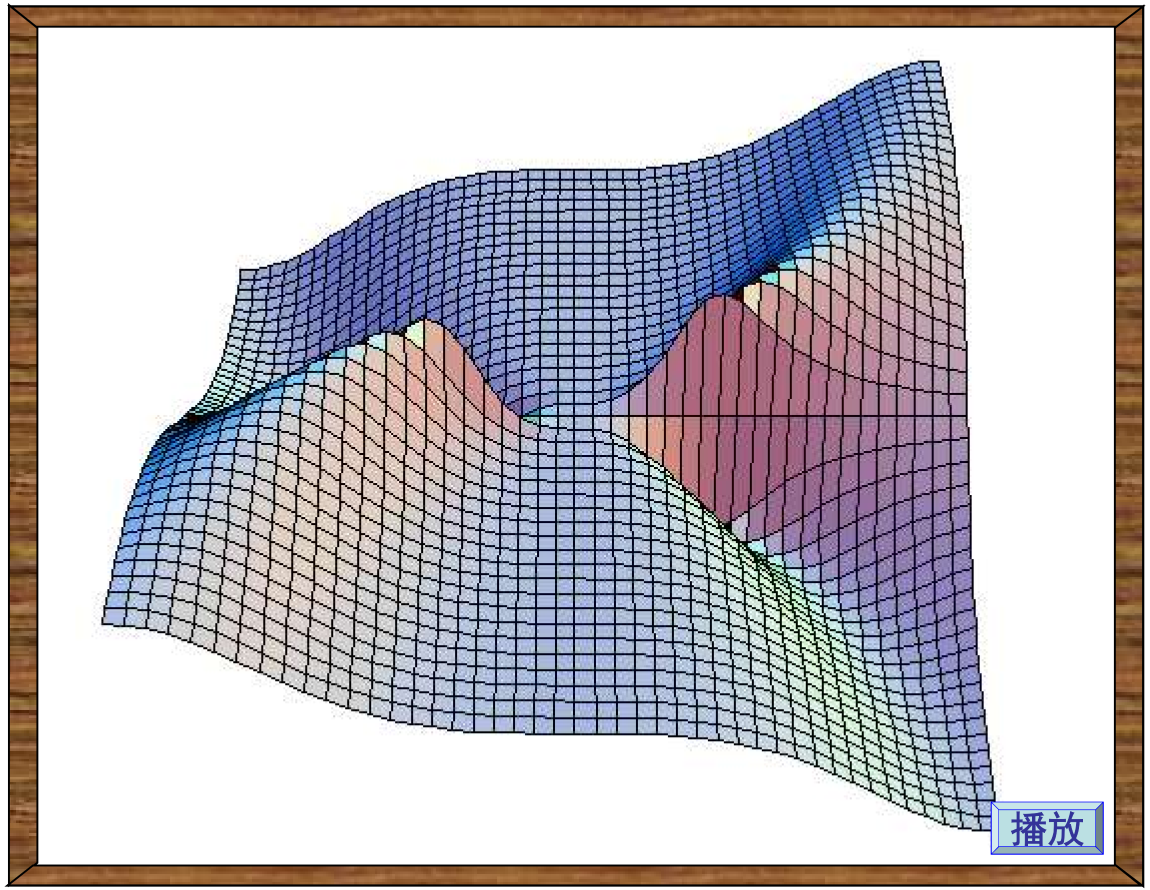
$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同 **!**

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .


x y/(x^2+y^2)
0.5
0
-0.5
5
0
-5
y
-5
0
5
x

观察 $z=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 图形，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.



- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不同.

如果它们都存在, 则三者相等.

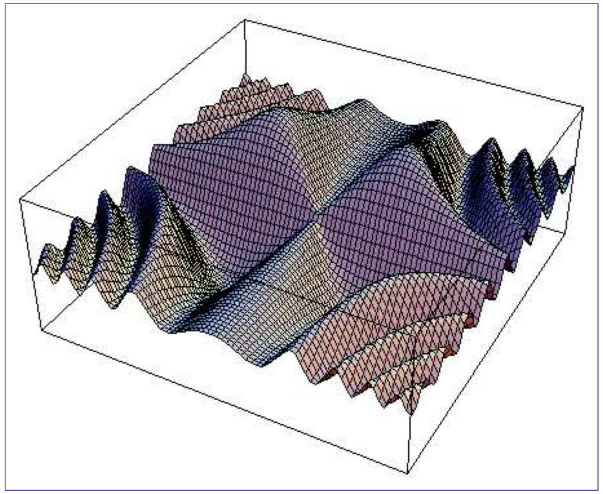
仅知其中一个存在,推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但由例3 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

例　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \overset{u=x^2y}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1,$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0, \quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}=0.$$

例**4.** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域
不包括 $x\,,y$ 轴

解：因 $x^2y^2\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2=x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right|\ge\frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6}=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{2r^4}{r^6}=\infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\infty$ $1-\cos r^2\sim\dfrac{r^2}{2}$

确定极限不存在的方法：

（1）令 $P(x, y)$ 沿 $y = kx$ 趋向于 $P_0(x_0, y_0)$，若极限值与 k 有关，则可断言极限不存在；

（2）找两种不同趋近方式，使 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ 存在，

但两者不相等，此时也可断言 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处极限不存在.

利用点函数的形式有n元函数的极限

定义 2 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D，P_0是其聚点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|PP_0|<\delta$的一切点$P\in D$，都有$|f(P)-A|<\varepsilon$成立,则称A为n元函数$f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

思考与练习

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法是否正确?

解法1 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

解法2 令 $y = kx$, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k} = 0$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$,

$$原式 = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

分析:

解~~法~~1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

此法第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况,第二步未考虑分母变化的所有情况, 例如, $y=\frac{x}{x-1}$时, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$, 此时极限为 1 .

解~~法~~2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k}=0$

此法排除了沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$ 时

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2} = -1$$

解法3 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

$$\text{原式} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

此法忽略了θ的任意性, 当$r\to 0, \theta\to -\frac{\pi}{4}$时

$$\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$ 极限不存在！

由以上分析可见, 三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点 . 同时还可看到, 本题极限实际上不存在 .

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r, θ的变化应该是任意的.

例 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\quad (\rho>0)$

则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $\rho\to 0$.

$$0\le\left|\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{\rho^2\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|}{\rho}$$

$$=\rho\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|\le 2\rho,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$