

# 华东师范大学期末试卷 (A)

一、求下列函数的导数或微分 (16 分, 每小题 4 分)

(1) 设  $y = \ln x + \sin x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(2) 设  $y = \frac{x}{x^2 + e^x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(3) 设  $y = x \arcsin x$ , 求  $dy$ ;

(4) 设  $2x - \tan(x - y) = \int_0^{x-y} \sec^2 t dt$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

二、计算下列极限 (16 分, 每小题 4 分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{x+1} - 1}$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{2x^2}$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x}$ .

三、求下列积分 (20 分, 每小题 4 分)

(1)  $\int (x^5 + 2 \cos x) dx$ ;

(2)  $\int x^3 \ln x dx$ ;

(3)  $\int x^4 (1 + x^5)^3 dx$ ;

(4)  $\int_0^2 x |x^2 - 1| dx$ ;

(5)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ .

四、判断下列广义积分的敛散性; 若收敛, 则求其值 (8 分, 每小题 4 分)

(1)  $\int_0^{+\infty} e^{2x} dx$ ;

(2)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

五、判别下列级数的敛散性, 并说明理由 (16 分, 每小题 4 分)

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n}}$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^3} \right)$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

六、(10 分, 每小题 5 分)

设  $D$  是由直线  $x=2$ 、 $y=x$  与曲线  $y=\frac{1}{x}$  所围成的平面图形, 求

(1)  $D$  的面积; (2)  $D$  绕  $x$  轴旋转所产生的旋转体体积.

七、(6 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上可导, 且满足关系式  $f(1) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^5 f(x) dx = 0$ , 证明: 存

在一个  $\xi \in (0,1)$ , 使  $f'(\xi) = -\frac{5f(\xi)}{\xi}$ .

八、(8 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$  的收敛域及和函数, 并求  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n!}$  的和.