华东师范大学 2010 年攻读硕士学位研究生入学试题　　共 2 页

考试科目代码及名称： 360 高等数学（A）

招生专业(领域)名称：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。

一．填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2(t-\sin t)dt}{\int_{x^2}^0 t^2dt}=$________________.

2. 设 $f(x)=x^2\cos x$，则$f^{(2010)}(0)=$________________.

3．函数 $f(x,y)=x^3-x^2y+y^3$在点$P(1,1)$处的最大方向导数是________________.

4．椭球面$2x^2+y^2+z^2=10$在点（2，1，1）处的切平面方程是 ________________.

5．方程$(x^2-1)y'+2xy-\sin x=0$满足$y\big|_{x=0}=1$的特解是________________.

6．设 A^{-1},A^* 分别为4阶方阵A 的逆矩阵和伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则$\left|(2A)^{-1}-3A^*\right|=$________________.

二．选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x}} & x>0\\ x^2\sin x & x\le 0\end{cases}$，则 $f(x)$在$x=0$处（　）

（A）极限不存在；　　（B）极限存在，但不连续；

（C）连续，但不可导；　　（D）可导

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x+y)}{2x-y}=$（　）

(A)$\dfrac{1}{2}$；　　（B）∞；　　(C)-1；　　(D)不存在.

9．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan nx}{n!}$是（　）

（A）　发散级数；　　(B)条件收敛级数；

（C）绝对收敛级数；　　（D）无法判别敛散性，和 x 的取值有关.

10．$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x}{1+x^2}\cos^4 xdx$ ；　$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x+\cos^4 x)dx$ ；　$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin x-\cos^4 x)dx$.

则有（　）

（A）$I<N<M$ ；　　（B）$M<I<N$；

（C）$N<I<M$ ；　　（D）$M<N<I$.

11. 设 $f(x)=2-\frac{1}{2}x, S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{4}x, x\in[0,4)$, 其中$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4\left(2-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{n\pi}{4}xdx, n=1,2,3\ldots$,

则 $S(-1)$ 为（ ）

（A）$-\frac{3}{2}$ ； （B）$\frac{3}{2}$； （C）$-\frac{1}{2}$ ； （D）$\frac{5}{2}$.

12. 若$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是三维列向量, 且三阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_1|=m, |\beta_2,\alpha_1,\alpha_2|=n$, 则$|\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|$

等于( )

(A) $m+n$ ； (B) $-(m+n)$ ； (C) $-m+n$； (D) $m-n$.

三、解答题

13.（10 分）讨论函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-2)}+ax+b}{e^{n(x-2)}+1}$ 的连续性，其中 a,b 为常数.

14. (10 分) 函数 $f(x)$在$x=a$ 点处二阶可导, 求$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}$.

15. (10 分) 计算$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

16. (12 分) 证明当 $p>1$时, 有不等式$\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1(0\le x\le 1)$.

17. (12 分) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$ 的和函数.

18. (12 分) 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

19. (12 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$, 且积分曲线

$\int_L[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy$ 与路径无关，求函数 $f(x)$.

20. (12 分) 问 a,b 取什么值时, 线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-5x_5=b \end{cases}$

有解?在有解时, 求出通解.

21. (12 分) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 0, -1, 对应的特征向量为$\alpha_1=(1,2,2)^T, \alpha_2=(2,-2,1)^T, \alpha_3=(-2,-1,2)^T$.

(1) 求 A ； (2) 令 $P=(-2\alpha_2,3\alpha_3,\alpha_1)$, 求$P^{-1}AP$.