11-12 高数上期末：

一、填空题 （共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ __________.

3. 设 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离，则 $\int_0^{100}\varphi(x)\mathrm{d}x=$ ______.

4. 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围图形的面积 A＝__________.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=$ __________.

一、选择题 （共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6. 下列命题中正确的一个是（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Rightarrow \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge g(x)$；

(B) 若 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(C)若 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $f(x)>g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(D)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Rightarrow \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$

7. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$（　　）

（A） $-f'(x_0)$　（B） $f'(-x_0)$　（C） $f'(x_0)$　（D） $2f'(x_0)$

8. 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有连续的三阶导数，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，且 $f^{(3)}(x_0)<0$，则（　　）

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(D) $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

9. 设 $f(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ ______.

(A)为正常数　(B)为负常数　(C)恒为零　(D)不为常数

10. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，则 $f(x)=$ ______

(A) $\mathrm{e}^x\ln 2$　(B) $\mathrm{e}^{2x}\ln 2$　(C) $\mathrm{e}^x+\ln 2$　(D) $\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$

三、解答题（共 6 道小题，4 个学分的同学选作 5 道小题，每题 12 分，共 60 分；5 个学分的同学 6 道题全做，每题 10 分，共 60 分）

11. 求极限(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ 其,中 $a\ b\ c>$,

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 可导，且在 $x=0$ 处二阶导数 $g''(0)$ 存在，

且 $g(0)=g'(0)=0$, 试求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx$

其中 $(k>1)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

14. 求 $\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt\ (x\geq 0)$, 其中当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=x$, 而 $g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

15. 求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解

16. (1). 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

(2). 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $1\leq f(x)\leq 2$, 证明：

$$\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\leq\frac{9}{8}.$$

一．填空题

1. $\dfrac{1}{a}$ 2. $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$ 3. 25 4. $\dfrac{37}{12}$ 5. $2\ln x-\ln^2 x+C$

二．选择题

6. D 7. A 8. D 9. A 10. B

三．解答题

11. (1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$

$\because \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$ 有界，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ 其中 $a\ b\ c>$，

原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{x}\right)}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\left(abc\right)^{\frac{1}{3}}$

12. 解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}g''(0)$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}, & x\ne 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0), & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=g''(0)-\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0)$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

13. 由积分中值定理，$\exists\ \eta\in[0,\dfrac{1}{k}]$，使得 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$.

$\because k>1$，得 $\dfrac{1}{k}<1$.则 $\eta\in(0,1)$.

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，由题意知 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，$(0,\eta)$ 内可导

且 $F(1)=f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)=F(\eta)$. 由罗尔中值定理，在 $(0,\eta)$ 内

存在一点 ξ，使得

$F'(\xi)=e^{1-\xi}f(\xi)-\xi e^{1-\xi}f(\xi)+\xi e^{1-\xi}f'(\xi)=0$，$\because e^{1-\xi}>0$，得

$f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.其中 $\xi\in(0,1)$.

14. 令 $u=x-t$,则 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$. 于是

$$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u;$$

当 $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$时,$\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x (x-u)\sin u\mathrm{d}u=x-\sin x;$

当 $x\ge\dfrac{\pi}{2}$时,$\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u\mathrm{d}u+0=x-1.$

所以$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\begin{cases} x-\sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ x-1, & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

15. 讲方程改写为:$y^{-4}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3}=\dfrac{2x}{3(1+x^2)}$,这是贝努里方程.

令 $z=y^{-3}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3y^{-4}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 代入上述方程得:

$$-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}z=\frac{2x}{3(1+x^2)},\text{即}\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2x}{1+x^2}z=-\frac{2x}{1+x^2},\qquad(1)$$

这是一阶线性非齐次方程,它对应的齐次方程为

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2x}{1+x^2}z=0$,它的通解为$z=C(1+x^2)$, 令 $z=(1+x^2)u(x)$则

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2xu(x)$,将其代入(1)得

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2xu(x)-\frac{2x}{1+x^2}(1+x^2)u(x)=-\frac{2x}{1+x^2},\text{即}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x}{1+x^2},$$

积分得 $u=\dfrac{1}{1+x^2}+C$,即(1)的通解为 $z=1+C(1+x^2)$,从而原方程的通解为

$\dfrac{1}{y^{-3}}=1+C(1+x^2)$.由初始条件 $y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$, 有 $8=1+C, C=7$.

故所求的特解为 $y^3=(7x^2+8)^{-1}$.

16.(1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\pi)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$.

另一方面

$\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{n+1}(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\pi)=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$.

所以由夹逼准则知原式 $=\dfrac{2}{\pi}$.

(2) $\because\ 1\le f(x)\le 2\quad \therefore (f(x)-1)(f(x)-2)\le 0$, 得

$\int_0^1\dfrac{(f(x)-1)(f(x)-2)}{f(x)}\le 0$， 即 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le 3$，

得到 $2\sqrt{2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}\le 3$

从而整理得：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\dfrac{9}{8}$.