

武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1. (10 分) 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值。
2. (10 分) 设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .
3. (10 分) 设 $|A| = \frac{1}{2}$, A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵, 计算行列式: $|(3A)^{-1} - 2A^*|$
4. (10 分) 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 求矩阵 B .
5. (8 分) 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, -3, 求行列式 $|A^{-1} + 3A + 2I|$ 的值。
6. (8 分) 证明 秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。
7. (8 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$, 的秩为 2, 求参数 t 的值。
8. (16 分) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解。
9. (10 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = ax_1^2 + 2x_2^2 + 2bx_1x_3 - 2x_3^2, (b > 0)$, 其中 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.
 - (1) 求 a, b 的值;
 - (2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出正交矩阵.
10. (10 分) 设有向量组

$$\alpha_1 = 1, 1, -3, 2^T, \alpha_2 = 3, -2, -4, 1^T, \alpha_3 = 4, -1, -7, 3^T, \alpha_4 = 2, 2, 3, 4^T$$
 - (1) 求矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的秩 $R(A)$.
 - (2) 求此向量组的一个极大线性无关组. 并将其余的向量用极大线性无关组表出

武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1. (10 分) 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14}$ 的值。

解 因为 $A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14} = A_{11} - A_{12} + 2A_{13} + 2A_{14}$

根据行列式的展开定理知：在 A 中将第一行换成 $1, -1, 2, 2$. 便得：

$$A_{11} - A_{12} + 2M_{13} - 2M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. (10 分) 设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

解 由 $AA^* = |A|E$, 故 $A = |A|(A^*)^{-1}$, 又 $|A^*| = |A|^3$, $(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix}$

$$A_1^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, |A^*| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\text{所以 } |A| = -2, \text{ 故 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (10 分) 设 $|A| = \frac{1}{2}$, A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵, 计算行列式: $|(3A)^{-1} - 2A^*|$

$$\begin{aligned} \text{解 } |(3A)^{-1} - 2A^*| &= \left| \frac{2}{3} \frac{1}{2} A^{-1} - 2A^* \right| = \left| \frac{2}{3} A^* - 2A^* \right| = \left| -\frac{4}{3} A^* \right| \\ &= \left(-\frac{4}{3} \right)^4 |A^*| = \left(-\frac{4}{3} \right)^4 |A|^3 = \frac{2^5}{3^4} = 32/81 \end{aligned}$$

4. (10 分) 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 求矩阵 B .

解 由题设 $AB = A + 2B$, 得 $(A - 2I)B = A$ 因为 $|A - 2I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A - 2I \text{ 可逆, 且 } B &= (A - 2I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. (8分) 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1、2、-3, 求行列式 $|A^{-1} + 3A + 2I|$ 的值。

解: 因为 $A\eta = \lambda\eta$, 则 $A^{-1}A\eta = \lambda A^{-1}\eta$ 从而 $\frac{1}{\lambda}\eta = A^{-1}\eta$

即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值, η 是 A^{-1} 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量;

知, $\frac{1}{\lambda} + 3\lambda + 2$ 是 $A^{-1} + 3A + 2I$ 的特征值 因为 3 阶方阵 A 的特征值为 1、2、-3,

所以 3 阶方阵 $A^{-1} + 3A + 2E$ 的特征值为 6、 $\frac{17}{2}$ 、 $-\frac{22}{3}$,

$$\text{则 } |A^{-1} + 3A + 2I| = 6 \times \frac{17}{2} \times \left(-\frac{22}{3}\right) = -374$$

6、(8分) 证明 秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证: 设矩阵 $R(A) = r$, 则矩阵 A 必与矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ 等价, 所以必存在两个可逆矩阵

$P_{m \times m}, Q_{n \times n}$ 使得 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} Q$, 而 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ 可以分解为 r 个只有一个元素 1 其余元素全为零的 $m \times n$ 阶矩阵之和的形式:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_1 + E_2 + \cdots + E_r \end{aligned}$$

$$\text{故 } A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} Q = \sum_{i=1}^r P E_i Q, \text{ 由 } R(P E_i Q) = 1 (i=1, 2, \cdots, r),$$

所以秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

7. (8分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$,

的秩为 2, 求参数 t 为的值。

解 由二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$, 故 $R(A) = 2$, 有 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$ 即 $t = \frac{7}{8}$

8、(16 分) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解。

解: 因为求方程组和方程的公共解, 联立方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$ 的解

有增广矩阵 $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix} = B$

当 $(a-1)(a-2) = 0$ 时, 即 $a = 1$ 或 $a = 2$.

当 $a = 1$ 时 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此有公共解为 $X = k(-1, 0, 1)^T$, 可为任意常数

当 $a = 2$ 时 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有公共解为 $X = (0, 1, -1)^T$.

9、(10 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 + 2bx_1x_3 - 2x_3^2, (b > 0)$, 其中 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变法将二次型 f 化为标准型, 并写出正交矩阵.

解: (1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 设 A 的特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$, 有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = -4a - 2b^2 = -12$$

得 $a=1, b=2$ 所以, $|A-\lambda I|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

从而, $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-3$.

$\lambda_1=\lambda_2=2$, 所对应的特征向量有 $X_1=(2,0,1)^T, X_2=(0,1,0)^T$

$\lambda_3=-3$ 所对应的特征向量 $X_3=(1,0,-2)^T$

因为, X_1, X_2, X_3 俩俩正交, 单位化得 $Y_1=(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^T, Y_2=(0,1,0)^T,$

$$Y_3=(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})^T \quad \text{因此, } Q=(Y_1, Y_2, Y_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

10、(10分) 设有向量组

$$\alpha_1 = 1, 1, -3, 2^T, \quad \alpha_2 = 3, -2, -4, 1^T, \quad \alpha_3 = 4, -1, -7, 3^T, \quad \alpha_4 = 2, 2, 3, 4^T$$

(1) 求矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的秩 $R(A)$.

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组. 并将其余的向量用极大线性无关组表出

解 对 A 作初等行变换变成行阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 得 (1) $R(A)=3$

(2) 所给向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$