内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

$\Longrightarrow$ 近似计算 $\begin{cases} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \end{cases}$

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理

$\Longrightarrow$ 连续函数在区间上的平均值公式

二、定积分定义

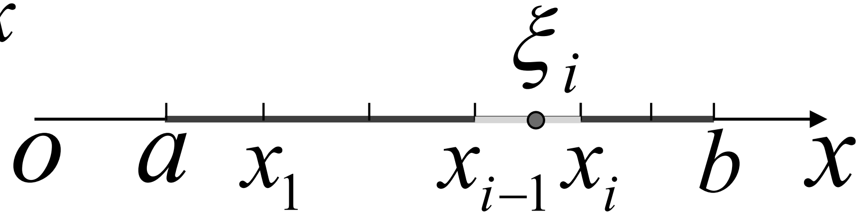
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 的任一种分法

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取

$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

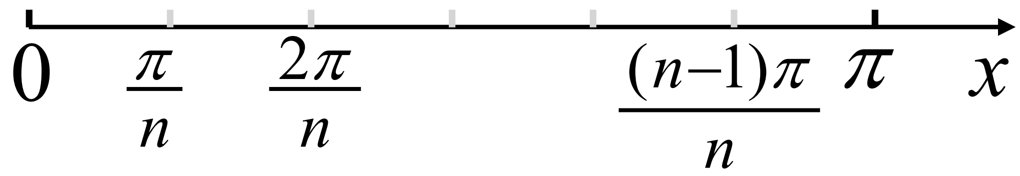
此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

思考与练习

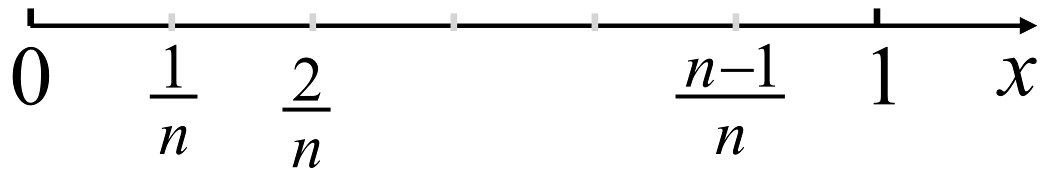
1. 用定积分表示下述极限 :

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

解: $$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$



或 $$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^{1}\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$



思考： 如何用定积分表示下述极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right]$$

提示：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

$$\boxed{-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

极限为 0 !

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x$

$= \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$ (左矩形公式)

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x$

$= \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$ (右矩形公式)

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

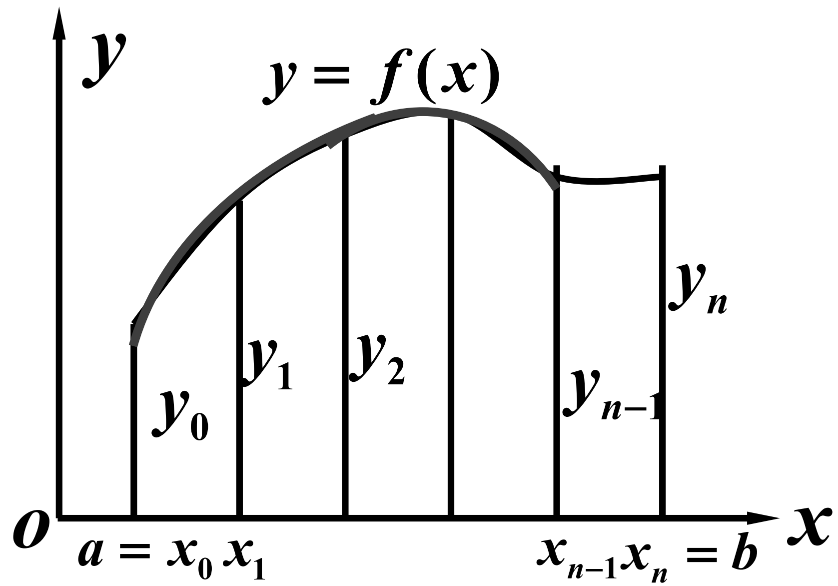
$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}[y_{i-1} + y_i]\Delta x$$

$= \dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1})\right]$ (梯形公式)

为了提高精度，还可建立更好的求积公式，例如辛普森公式，复化求积公式等， 并有现成的数学软件可供调用.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})$$

$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})].$$



三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k 为常数)

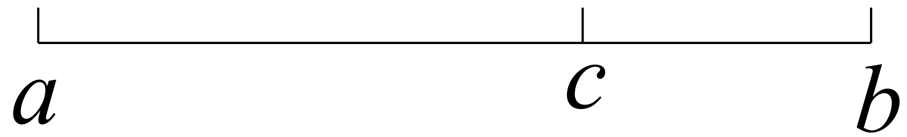
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

证: 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \text{右端}$$

5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

证: 当 $a < c < b$ 时,



因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点 , 于是

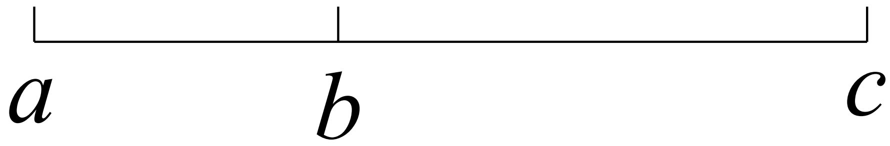
$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda \to 0$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 a , b , c 的相对位置任意时，例如 $a < b < c$,

则有



$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

证: $\because \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

推论1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

推论2. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a<b)$

证: $\because \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$$\therefore \quad -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x),\ m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b)$$

例3. 试证: $1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$.

证: 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

$$\therefore \quad f(\frac{\pi}{2}^-) < f(x) < f(0^+)$$

即
$$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x$$

即
$$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$$

8. 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M,

则由**性质7** 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

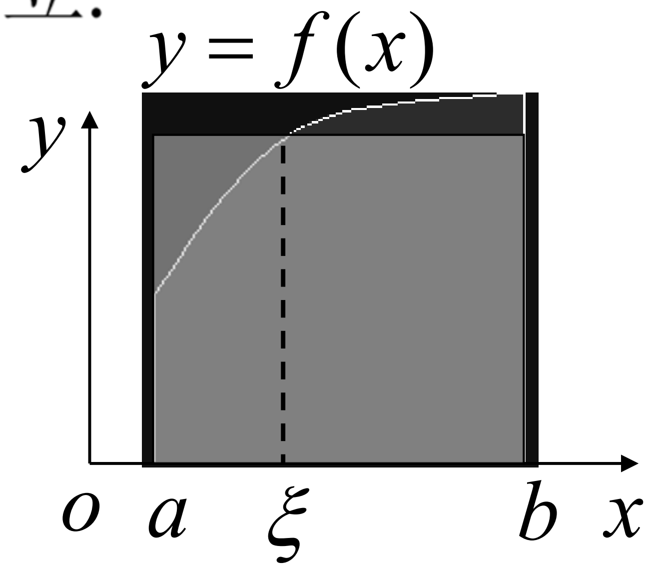
根据闭区间上连续函数介值定理, 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此定理成立.

说明:

- 积分中值定理对 $a<b$ 或 $a>b$ 都成立.
- 可把 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=f(\xi)$



理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 因

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

$\Longrightarrow$ 近似计算 $\begin{cases} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \end{cases}$

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理

$\Longrightarrow$ 连续函数在区间上的平均值公式

第二节　微积分的基本公式

一、原函数

二、积分上限的函数及其导数

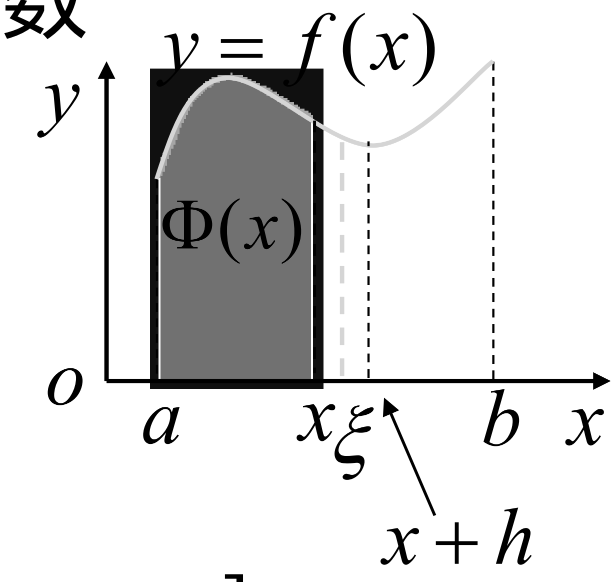
三、牛顿 – 莱布尼兹公式

二、积分上限的函数及其导数

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数 .



证: $\forall\, x, x+h\in[a,b]$, 则有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\quad (x<\xi<x+h)$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

说明:

1) 定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路 .

2) 变限积分求导: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

解: 原式 $= -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \dfrac{1}{2e}$

例2. 确定常数 a , b , c 的值, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad (c\neq 0).\qquad \boxed{\frac{0}{0}}$$

解: $\because\ x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, $\therefore\ b=0.$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c$$

$c\neq 0$, 故 $a=1.$ 又由 $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}.$

例3 已知 $F_1(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

$$F_2(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt,\quad F_3=\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt,\quad F_4(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} e^{-t^2}dt$$

求：

$$F_5(x)=\int_0^x tf(t)dt,\qquad F_6(x)=\int_0^x xf(t)dt$$

$$F_7(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

求： $F_i'(x)\quad \left(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7\right)$

$$F_1'(x) = e^{-x^2} \qquad F_2'(x) = 2xe^{-x^4} \qquad F_3'(x) = \sin x e^{-\cos^2 x}$$

$$F_4'(x) = \cos x e^{-\sin^2 x} + \sin x e^{-\cos^2 x} \qquad F_5'(x) = xf(x)$$

$$F_6'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$$

$$F_7'(x) = \left(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right)' = \int_0^x f(t)dt$$