一元微积分学-2 (2021. 01)

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任一固定的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n)=0$ (其中 $n\in\mathbb{N}$). 证明函数列 $\{f(x+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于0.

2. 设 $\{a_n\}$ 为数列, a,λ 为有限数. 证明:
(1) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
(2). 若存在正整数p，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $b_n>0$, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots b_n}$. 证明:
(1) 数列 $\{c_n\}$ 收敛;
(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=a$.

4. 设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$. $\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$

5. 设函数 $f(x)$在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明：
(1) 存在一个 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f(\xi)=\xi$;
(2) 存在一个$\eta\in(0,\xi)$, 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta$.

7. 设 $n>1$ 为整数, $F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)dt$. 证明：方程 $F(x)=\dfrac{n}{2}$ 在 $(\dfrac{n}{2},n)$ 内至少有一个根.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0$, $\lim\limits_{h\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$， $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$, 且存在一点 x_0 使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个实根.

9. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)>0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$上点 $p=(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距. $(=2)$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3, 使得
$$\lim_{h\to0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

11. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

12. 设 n 为正整数, 计算 $\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\dfrac{d}{dx}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|dx$. $(=4n)$

13. 计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$. $\left(=\frac{\pi^3}{8}\right)$

14. 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$. $\left(=\frac{e^{2\pi}+1}{5(e^{2\pi}-1)}\right)$

15. 设 $|f(x)|\le\pi$, $f'(x)\ge m>0$ $(a\le x\le b)$. 证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\le\dfrac{2}{m}$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1)$, $0<f'(x)<1$. 试证当 $a\in(0,1)$,
$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2>\int_0^a f^3(x)dx.$$

17. 设函数 $f\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$, $\int_0^1 xf(x)dx=1$. 试证:
(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$;
(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$.

18. 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x_n$. $(=b)$

19. 设 $f(x)\in C[a;b]$. 证明：$2\int_a^b f(x)dx\int_x^b f(t)dt=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

20. 设函数 $f(x)\in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

21. 设函数 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$. 证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2, 使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$．若积分 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx$ 存在，试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4$$

23. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的.

24. 求最小实数 C, 使得满足 $\int_0^1|f(x)|dx=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\leq C$. $(=2)$

25. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且满足 $\int_0^1 f(x)dx=1$. 求一个这样的函数 $f(x)$, 使得积分 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx$ 取得最小值. $\left(=\frac{4}{\pi(1+x^2)}\right)$

26. 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离. $\left(=\sqrt{\frac{19}{2}}\right)$

27. 求通过直线 $l:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\ 5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$. $(3x+4y-z+1=0,\ \ x-2y-5z+3=0)$

28. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi t\end{cases}$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$. $\left(=t^3+\frac{1}{2e}t^2+\left(\frac{1}{e}-3\right)t+2\ \ (t>-1)\right)$

29. 712 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程. $(xy+yz+zx=0)$

30. 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线,线密度为ρ . 在点 $(0,h)$ 处(其中$h>0$)有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力. $\left(=\left(F_x,F_y\right)=\left(\dfrac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}},\dfrac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\dfrac{a}{h}\right)\right)\right)$

31. 设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{1+x}\int_0^y f(t)dt=0$, 且 $f(0)=1$, 试证: 当 $x\geq 0$ 时, 有 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

32. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程. $(y''-y'-2y=e^x-2xe^x)$

33. 设抛物线 $y = ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时, $y \ge 0$, 又已知该抛物线与x轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定a, b, c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. $\left(a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1\right)$

34. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}\ (x \ge 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$, 求点 A 的坐标. $(= (1, 1))$