

华东师范大学期末试卷 (B)
2010 —2011 学年第 一 学期

课程名称: 高等数学 B

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 10 级

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

一、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^3 + 2n}{6n^4 + 5} = \underline{\hspace{2cm}} ;$

(2) 设 $y = \frac{e^x + x}{xe^x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}} ;$

(3) 比较① $\int_1^2 \ln x dx$ 与② $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ 的大小, 则① ② (填入 “>”, “<” 或 “=”);

(4) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域是 ;

(5) 设点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$;

二、计算下列极限 (20 分, 每小题 4 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3};$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right);$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \arctan t dt}{x^3 \tan x}.$

三、求下列积分（20 分，每小题 4 分）

$$(1) \int (\sec^2 x + 3 \cos x) dx; \quad (2) \int \frac{x}{1+5x} dx; \quad (3) \int \sin \sqrt{x} dx;$$
$$(4) \int_0^2 |x^2 - 1| dx; \quad (5) \int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx, \text{ 其中 } f(x) = \frac{5(x+3)(x-1)}{3(x+1)(x+2)}.$$

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8 分，每小题 4 分）

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx; \quad (2) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}$$

五、判别下列级数的敛散性，并说明理由（16 分，每小题 4 分）

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right)^2; \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

六、（8 分，每小题 4 分）

$$(1) \text{ 证明：当 } x > 0 \text{ 时， } \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2};$$

$$(2) \text{ 求函数 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \text{ 在 } [-1, 3] \text{ 上的最大值和最小值.}$$

七、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导，且满足关系式 $f(1) = \frac{2}{e} \int_0^{\frac{1}{2}} e^x f(x) dx$ ，证明：存在一

$$\text{个 } \xi \in (0, 1), \text{ 使 } f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

八、（7 分）设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数且 $g(0) = 0$ 。求常数 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，并

讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。