小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,$\exists$时刻,从此时刻以后,

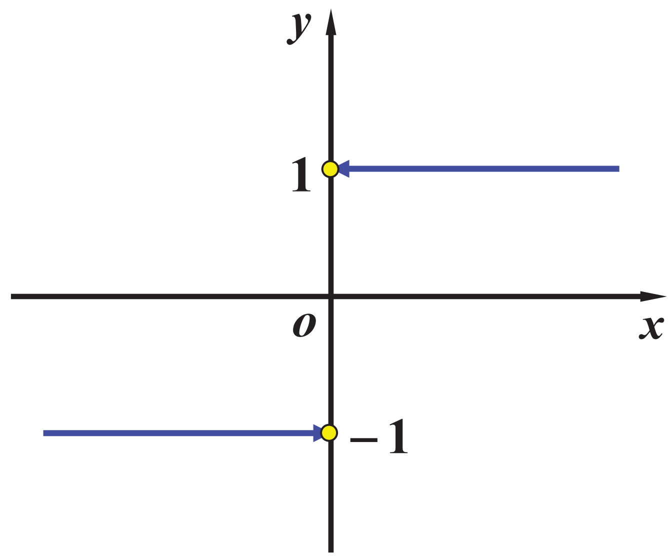
恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过　程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时　刻	N或者X			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>X$	$x>X$	$x<-X$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过　程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

定理 : $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) = A.$

例7 验证 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.



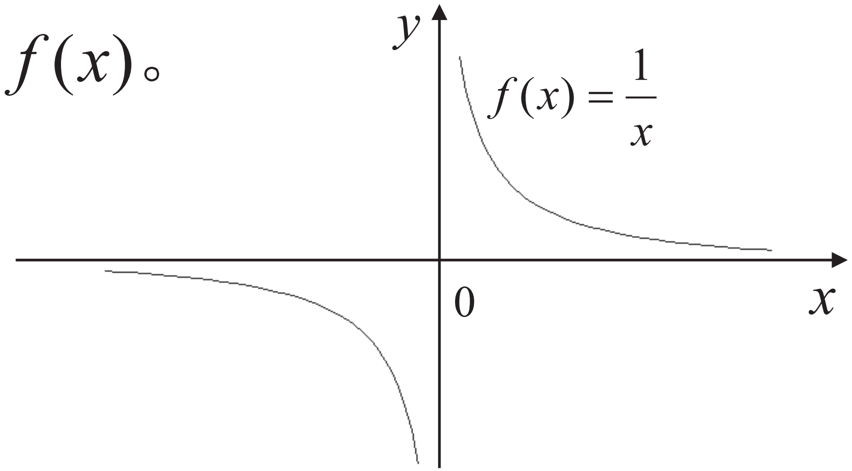
证 $$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to -0}(-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to +0} 1 = 1$$

左右极限存在但不相等, $\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例8 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$， 讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。



解 $\boldsymbol{f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty,}$

$\boldsymbol{f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,}$

$\therefore$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}$ 不存在。

三、函数极限的性质

1.有界性

定理　若在某个过程下，$f(x)$有极限，则存在过程的一个时刻，在此时刻以后$f(x)$有界.

2.唯一性

定理　若$\lim f(x)$存在，则极限唯一.

3.不等式性质

定理(保序性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$

若$\exists\delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,有$f(x)\le g(x)$,则$A\le B$.

推论 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,且$A<B$

则$\exists\delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,有$f(x)<g(x)$.

定理(保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),

则$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,

$f(x)\ge 0$(或$f(x)\le 0$),则$A\ge 0$(或$A\le 0$).

4.子列收敛性(函数极限与数列极限的关系)

定义 设在过程$x \to a$(a可以是x_0, x_0^+,或x_0^-)中有数列$x_n(\neq a)$,使得$n \to \infty$时$x_n \to a$.则称数列$\{f(x_n)\}$,即$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$为函数$f(x)$当$x \to a$时的子列.

定理 若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,数列$f(x_n)$是$f(x)$当$x \to a$时的一个子列,则有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

证 $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

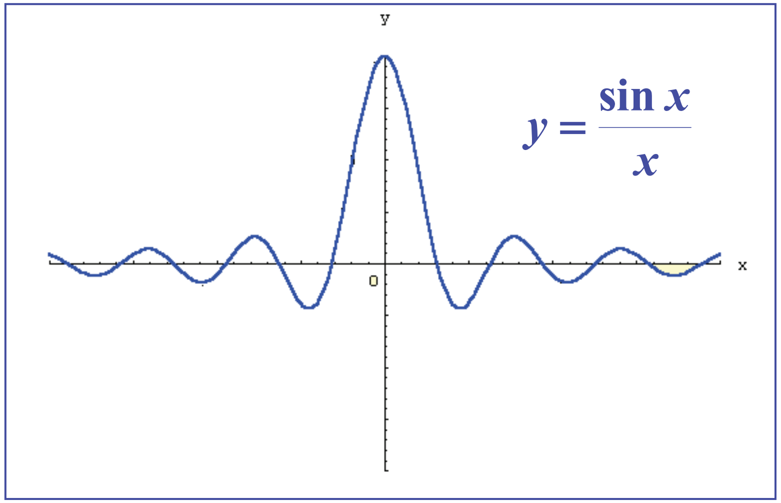
$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有
$|f(x)-A|<\varepsilon.$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0,$

$\therefore$ 对上述$\delta>0,\exists N>0,$使当$n>N$时,恒有
$0<|x_n-x_0|<\delta.$

从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=A.$

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1,$$

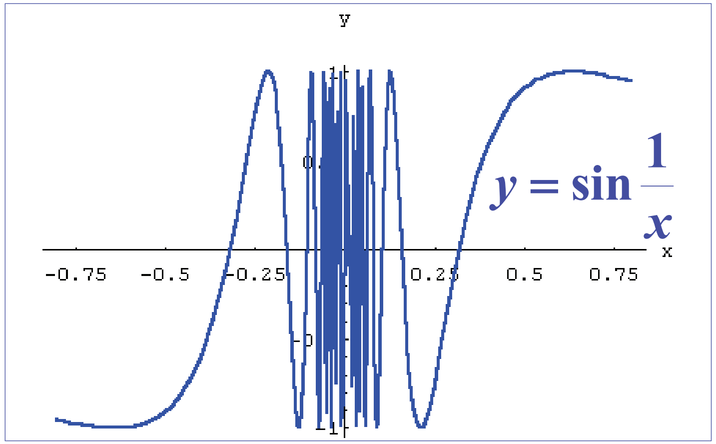
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2}=1$$

函数极限与数列极限的关系

函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在, 且相等.

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,



$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 且 $x_n\neq 0$;

取 $\{x'_n\}=\left\{\dfrac{1}{\dfrac{4n+1}{2}\pi}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$, 且 $x'_n\neq 0$;

$$而\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

$$而\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

二者不相等，故 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

一、极限的运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

例1　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n=m,\\ 0, \text{当} n>m,\\ \infty, \text{当} n<m,\end{cases}$$

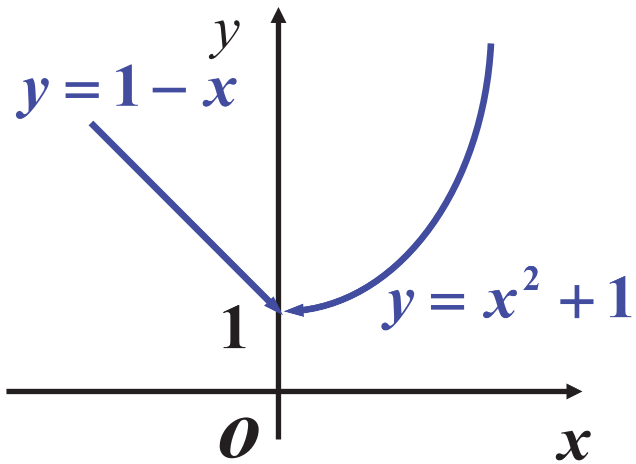
无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例2 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

极限存在准则与两个重要极限

一　极限存在的两个准则

二　两个重要极限

三　小结与思考判断题

一　极限存在准则

1. 迫敛性（两边夹定理）

定理 I　如果数列x_n, y_n及 z_n满足下列条件：

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

那末数列x_n的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则 I′ 如果当 $x \in \overset{0}{U}_{\delta}(x_0)$（或 $|x| > M$）时，有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

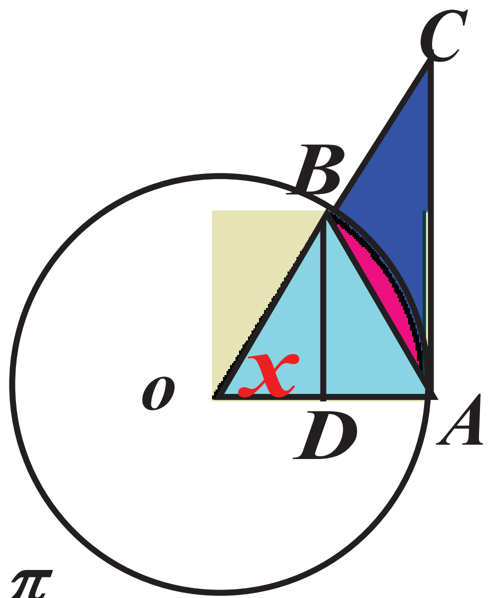
(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A .

准则 I 和准则 I' 称为迫敛性.

注意: 利用迫敛性准则求极限关键是构造出 y_n 与 z_n, 并且 y_n 与 z_n 的极限是容易求的.

二、两个重要极限



1、 $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

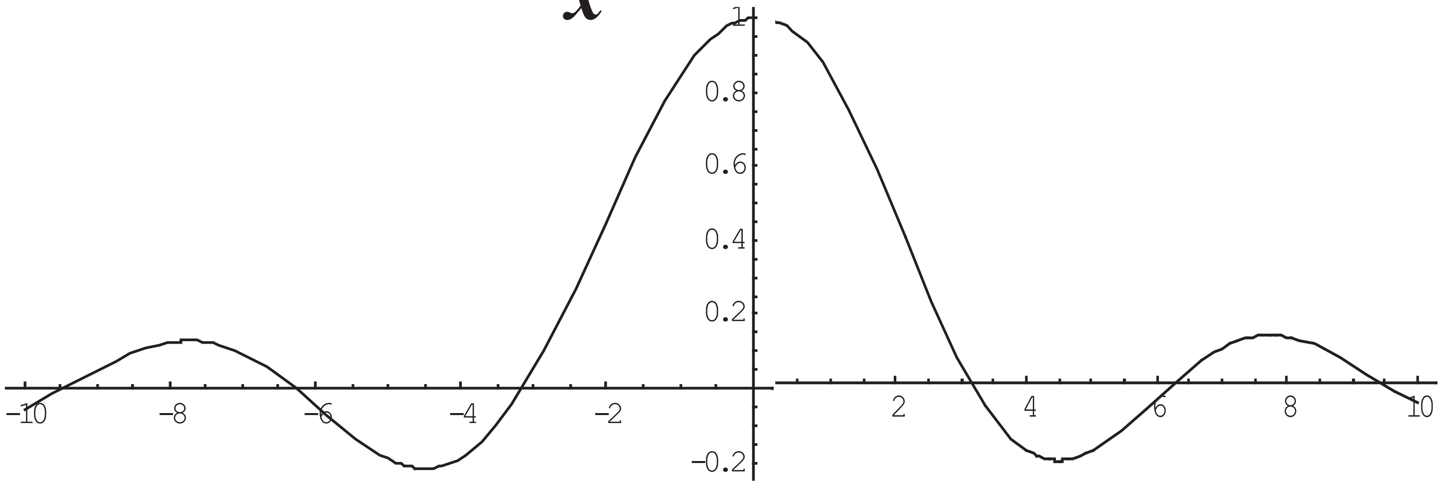
设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$\frac{\sin x}{x}$的图象



利用变量代换可导出上述极限的一般形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$$

例3　（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{x}$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}$， $\varphi\neq 0.$

解 $\because\ \sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\sin\frac{\varphi}{2^2}$

$$= 2^3\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\sin\frac{\varphi}{2^3}$$

$$= \cdots = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}$$

$$\therefore\ 原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

2、 $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

令 $t = -x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1}) = e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

令 $t = \frac{1}{x}$, $\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

利用变量代换可导出上述极限的一般形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

注意这个极限的特征：

底为两项之和，第一项为1，第二项是无穷小量，指数与第二项互为倒数。