# 东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 17-18-3 得分

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

姓名________ 学号________ 密 封 线

一.（30%）填空题

1. 设方阵 $A$ 满足 $A^2+2A+2E=O$，则 $A+3E$ 的逆矩阵 $(A+3E)^{-1}=$________.

2. 设 3 阶方阵 $A$ 的特征值为 $2,\ 1,\ -1$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，则矩阵 $A^*-A^{-1}$ 的行列式 $\left|A^*-A^{-1}\right|=$________.

3. 设向量空间 $R^2$ 中两组基 $\alpha_1=(3,\ 4)^T,\alpha_2=(2,\ 3)^T;\beta_1=(1,\ 1)^T,\beta_2=(0,\ 1)^T$，已知 $R^2$ 中向量 $\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2$ 下坐标是 $(1,\ 1)^T$，则 $\alpha$ 在基 $\beta_1,\beta_2$ 下坐标是________.

4. 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的元素都是 $k(\neq 0)$，则 $A$ 的特征多项式是________.

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ x & 1 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似，则 $(x,\ y)=$________.

6. 设 3 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\gamma\\ -\alpha+\beta+2\gamma\\ \alpha-\beta-3\gamma\end{pmatrix}$，则行列式 $\left|AB^{-1}\right|=$________.

7. 如果向量 $(k,\ 1,\ 4)$ 可由向量组 $(1,\ 2,\ -1)$，$(3,\ -1,\ 1)$ 线性表示，则参数 $k$ 满足条件________.

8. 如果实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^{\ 2}+(\lambda+1)x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2\lambda x_1x_3$ 是正定二次型，则参数 $\lambda$ 满足条件________.

9. 设 $a(\neq 0)$ 是 3 阶实对称矩阵 $A$ 的二重特征值，$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 0,\ -1)^T$ 是 $A$ 的对应特征值 $a$ 的特征向量。如果 $A$ 不可逆，则 $A$ 的另一个特征值是________，相应的特征向量为________.

10. 设 $\alpha$ 是 3 维列向量，$\alpha^T\alpha=k$，$k\in(\ 1,\ +\infty)$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(E-\alpha\alpha^T)X$ 的规范形为________.

二．（12%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\q\end{pmatrix}$ 的秩为 2，

1．求参数 $p$，$q$ 的值;

2. 求该向量组的一个极大线性无关组，并且将向量组中的其余向量用极大线性无关组表示出来。

三（12%）线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+px_3=5 \\ 3x_1+px_2+3x_3=2 \end{cases}$

讨论参数 $p$ 取何值时，线性方程组 （1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求其通解。

四（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，

如果 $AXA^* = 6E + AX$，求矩阵 $X$．

五（10%）设向量 $\eta=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & x & 0\\ 4 & y & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

1. 求参数 $x$，$y$ 的值；
2. 问：矩阵 $A$ 是否相似于对角矩阵？说明理由。

六（14%）设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

1. 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵;

2. 求正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

七（10%）证明题:

1. 设 $\eta_1,\eta_2$ 是 $n$ 维列向量，$A$ 是 $s\times n$ 矩阵，$A$ 的秩为 $n-2$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 的每个解向量都可由 $\eta_1,\eta_2$ 线性表示，证明 $\eta_1,\eta_2$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系。

2. 设 $n$ 阶实矩阵 $A$ 满足 $A^2=A$，证明存在 $n$ 阶对称矩阵 $P,Q$，使得 $A=PQ$.