内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 沿方向 l (方向角为 α, β, γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿方向 l (方向角为 α, β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \quad = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

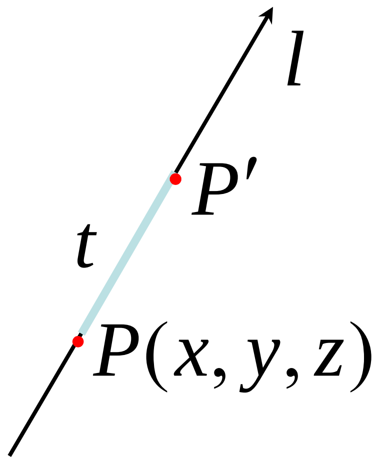
2. 关系

- 可微 $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\substack{\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ 偏导数存在

定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点**沿任意方向** l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中α,β,γ为l的方向角.



证明: 由函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微，得

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$$

$$= t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right) + o(\rho)$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\Delta f}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

类似地，对于二元函数的情形，若函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$可微，则在该点处沿方向l(方向角为α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

- 可微 $\begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 方向导数存在

反例 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

例1. 求函数 $u = x^2yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

例2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\ ^1\!/_2\ }$.

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\ y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

二、梯度

方向导数公式 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha\ ,\cos\beta\ ,\cos\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l}^{\,0}=|\vec{G}|\cos(\vec{G},\vec{l}^{\,0})\quad(|\vec{l}^{\,0}|=1\ )$$

当 $\vec{l}^{\,0}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时, 方向导数取最大值

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)=|\vec{G}|$$

这说明 $\vec{G}:\begin{cases}\text{方向：}f\text{ 变化率最大的方向}\\ \text{模：}f\text{ 的最大变化率之值}\end{cases}$

1. 定义

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 处的梯度 (gradient), 记作 $\operatorname{grad} f$, 即

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

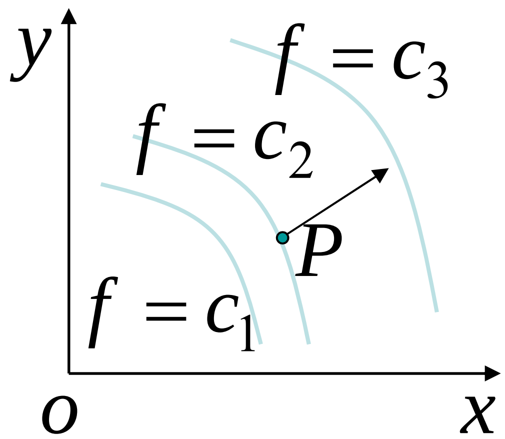
说明: 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

2. 梯度的几何意义

对函数 $z=f(x,y)$,曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ 称为函数 f 的**等值线**.

设 f_x, f_y 不同时为零，则 L^* 上点 P 处的法向量为

$$(f_x, f_y)\big|_P = \operatorname{grad} f\big|_P$$



(设 $c_1<c_2<c_3$)

同样，对应函数 $u=f(x,y,z)$，有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$，当各偏导数不同时为零时，其上点 P 处的法向量为 $\operatorname{grad} f\big|_P$.

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

例3. 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M = \underline{\frac{2}{9}(1, 2, -2)\quad}$

解： $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,2,-2)}$

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{r^2} \cdot 2x$

注意 x , y , z 具有轮换对称性

$$= \left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2}\right)\bigg|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1, 2, -2)$$

例4. 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{r}^{\,0}$.

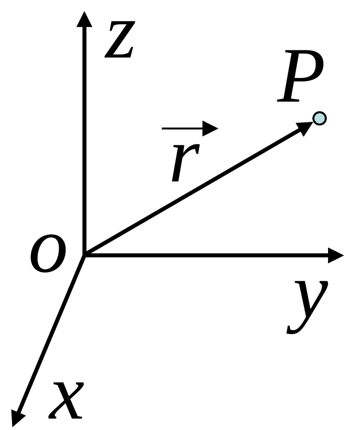
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r},\quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{r}^{\,0}$$



例5. 求函数$f(x,y)=x^2-xy+y^2$在点$P_0(1,1)$处的最大方向导数。

解：$f_x\big|_{(1,1)}=2x-y\big|_{(1,1)}=1,\ f_y\big|_{(1,1)}=2y-x\big|_{(1,1)}=1$

设l的方向角为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\max=\sqrt{2}$$

内容小结

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=(f_x(x,y),\ f_y(x,y))$$

3. 关系

- 可微 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\overset{\not\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{l}^{\,0}$ 梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.

第七节 多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

复习：平面曲线的切线与法线

已知平面光滑曲线 $y=f(x)$在点(x_0,y_0)有

切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

若平面光滑曲线方程为$F(x,y)=0,$因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

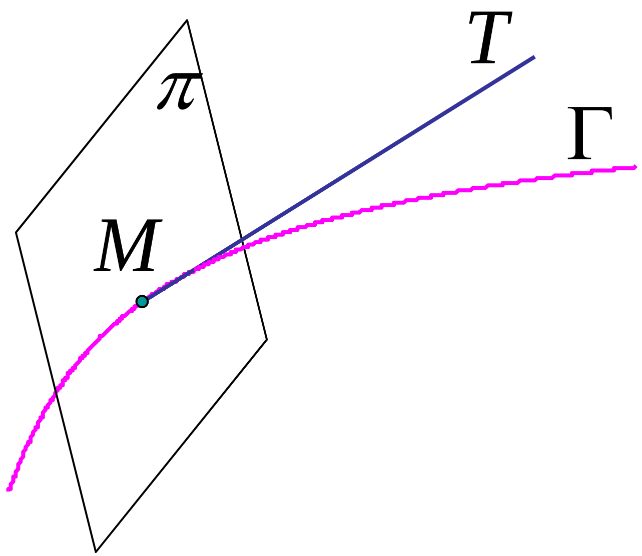
故在点(x_0,y_0)有

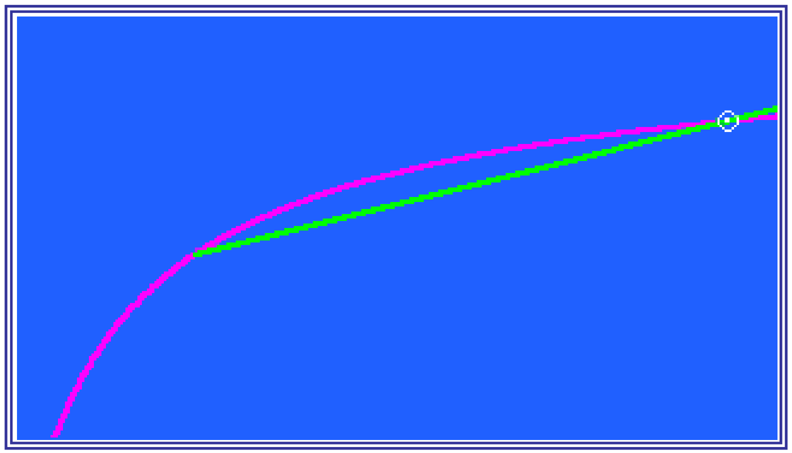
切线方程 $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

法线方程 $F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

一、空间曲线的切线与法平面

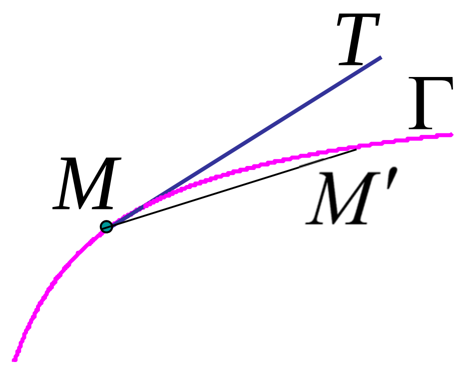
空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.





点击图中任意点动画开始或暂停

1. 曲线方程为参数方程的情况



$$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

设 $t=t_0$ 对应 $M(x_0, y_0, z_0)$

$t=t_0+\Delta t$ 对应 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

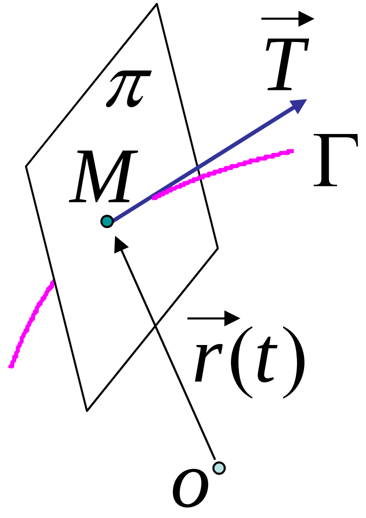
割线 MM' 的方程:

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

上述方程之分母同除以 Δt，令 $\Delta t\to 0$, 得

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

此处要求$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0,
如个别为0, 则理解为分子为 0 .



切线的方向向量:

$$\vec{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

称为曲线的**切向量** .

$\vec{T}$也是法平面的法向量, 因此得**法平面方程**

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

说明: 若引进向量函数 $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$, 则 Γ 为 $\vec{r}(t)$ 的矢端曲线, 而在 t_0 处的导向量

$$\vec{r}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

就是该点的切向量.

例1. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

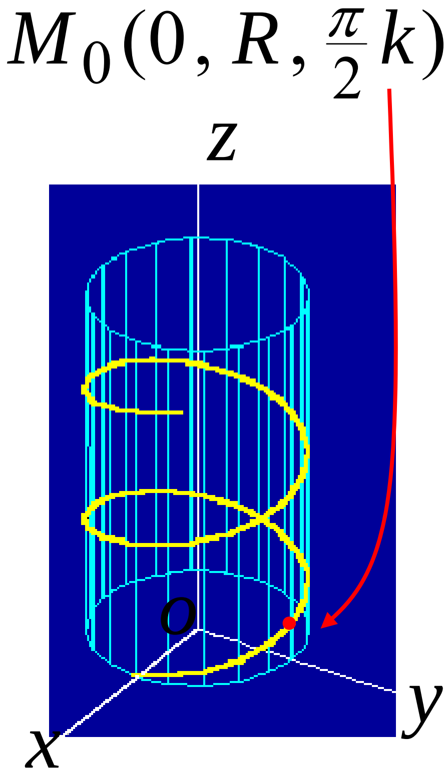
解: 由于 $x' = -R\sin\varphi,\ y' = R\cos\varphi,\ z' = k$, 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\vec{T} = (-R, 0, k)$, 故

切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$

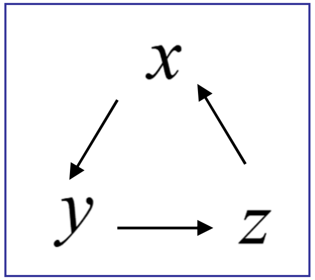


2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$时，$\Gamma$ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$



曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$$

$$=\left\{1,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$$

或 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$