15

东南大学考试卷(A卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 15-16-3 得分

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.（30%）填空题

1. 若对任意数x,y，矩阵A满足$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\\y-x\end{pmatrix}$则$A=$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}$；

2. $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $V=\{(x,y,z)^T\mid x+y-z=0\}$ 的一组基为 $(-1\ \ 1\ \ 0)^T,(1\ \ 0\ \ 1)^T$；

3. 设4阶方阵$A=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4),B=(\alpha_2,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，已知$|A|=2,|B|=3$，则$|A+B|=$ 40；

4. 设方阵A满足$A^2+3A-4E=O$，则$(A+2E)^{-1}=$ $(A+E)/6$；

5. 已知向量组$\alpha_1=(1,4,3)$，$\alpha_2=(2,t,-1)$，$\alpha_3=(-2,3,1)$线性相关，则参数t满足条件 t= -3；

6. 设5阶方阵A的秩为3，则伴随矩阵A^*的秩为 0；

7. 若$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\x&0&y\\1&-1&-1\end{pmatrix}$与对角矩阵合同，则$(x,y)=$ $(2,-1)$；

8. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$正定，则$a$满足 $-2<a<0$；

9. 设A,B都是4阶的非零矩阵，$AB=O$，且$r(A)-r(B)=2$，则$r(A)+r(B)=$ 4；

10. 设A是2阶方阵，α_1,α_2为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则$A$的特征值为 0, 1.

姓名________ 学号________ 线 封 密

二. （8%）求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ——4′

$=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x^4.$ ——4′

三. （14%）已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$，$\beta=(3,10,b,4)^T$，问

（1）a,b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

（2）a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出此表示式.

解：因为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$， ---4′

所以 (1) 当 $b\neq 2$ 时，线性方程组 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta$ 无解，此时 β 不能由 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$ 线性表示.

——2′

(2) 当 $b=2,a\neq 1$ 时，线性方程组 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta$ 有唯一解：$x=(-1\ \ 2\ \ 0)^T$，此时 β 可唯一的表示为 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

---4′

当 $b=2,a=1$ 时，线性方程组 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta$ 有无穷多解：

$$x = k(-2 \quad 1 \quad 1)^T + (-1 \quad 2 \quad 0)^T,$$

其中k为任意数，此时β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示为

$$\beta = -(2k+1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3.$$ ---4'

四.（12%）设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵$X$使得$AX - E = A + X$.

解：由$AX - E = A + X$可得 $(A-E)X = A+E$，从而

$$X = (A-E)^{-1}(A+E),$$ --4'

$$[A-E, \quad A+E] \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 73 & -12 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$，从而

$$X = \begin{bmatrix} 73 & -12 & 2 \\ -12 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ —8'

五.（12%）设A是n阶方阵，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是n维非零列向量. 若

$$AX_1 = X_2, AX_2 = X_3, \cdots, AX_{n-1} = X_n, AX_n = \theta,$$

（1）证明$X_1, X_2, \cdots, X_n$线性无关；

（2）求A的特征值和特征向量.

证：(1) 由已知条件知

$AX_1 = X_2, A^2X_1 = AX_2 = X_3, \cdots, A^{n-1}X_1 = X_n, AX_n = \theta.$

设 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_nX_n = \theta$，即

$$k_1X_1 + k_2AX_1 + k_3A^2X_1 \cdots + k_nA^{n-1}X_1 = \theta \qquad (*)$$

(*)式两边同时左乘 A^{n-1}，得

$$k_1A^{n-1}X_1 + k_2A^nX_1 + k_3A^{n+1}X_1 \cdots + k_nA^{2n-2}X_1 = \theta.$$

因为 $A^nX_1 = \theta$，故 $A^{n+1}X_1 = \cdots = A^{2n-2}X_1 = \theta$，得

$$k_1A^{n-1}X_1 = \theta, \text{即} k_1X_n = \theta.$$

从 $X_n \neq \theta$, 知 $k_1 = 0$. 类似可得 $k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$，从而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 线性无关。 $-8'$

(2) $A(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_2, X_3, \cdots, X_n, \theta) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

由 (1) 知 $P = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可逆矩阵，故

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

从而 A, B 具有相同的特征值，故 A 的特征值为 $\lambda = 0$ (n 重根)。又因 $r(A) = r(B) = n-1$，知齐次线性方程组

$$Ax = \theta$$

的基础解系由 $n-(n-1) = 1$ 个向量组成。

由于 $AX_n = \theta, X_n \neq \theta, X_n$ 就是 $Ax = \theta$ 的基础解系，故 A 的特征向量是 $kX_n, k \neq 0.$ $-4'$

六. （14%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

（1）求 a,b 的值;

（2）利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换.

解：（1）二次型 f 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$. 由题设，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=12.$$ --- 6'

解得 $a=1, b=2$.

（2）A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-3$. - — 3'

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解齐次线性方程组 $(2E-A)x=\theta$, 得其基础解系

$$\xi_1=(2,0,1)^T, \xi_2=(0,1,0)^T.$$

对于 $\lambda_3=-3$ 解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=\theta$, 得其基础解系

$$\xi_3=(1,0,-2)^T.$$ - — 3'

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已经两两正交，只需再作单位化，由此得

$$\eta_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T.$$

$$令 Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},Q 为正交阵.$$

令 $x=Qy$，得该二次型在此正交变换下的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$. - - 2'

七．（10%）证明题：

1. （5%）设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关.

证：设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 B 的列向量. 显然 $r(B)\le n$. 又

$$r(B)\ge r(AB)=r(E)=n.$$

- - 5'

综上，$r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=n$. 所以 B 的列向量组线性无关.

2. （5%）设 A 是 n 阶方阵，若对所有的 n 维向量 x，恒有 $x^TAx=0$，证明 A 是反对称矩阵.

证：设 $A=(a_{ij})$，令 $e_i=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其第 i 个分量是 1，其余全是 0.

由题设知 $e_i^TAe_i=a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n.$

再取 $X=e_i+e_j(i\ne j)$，则

$$[e_i+e_j]^TA[e_i+e_j]=e_i^TAe_i+e_i^TAe_j+e_j^TAe_i+e_j^TAe_j=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=0,$$ 5'

得 $a_{ij}=-a_{ji},\forall i\ne j.$

所以 A 是反对称矩阵.