§3 一般项级数

含有无穷多个正数项和无穷多个负数项的级数称为一般项级数.

各项符号正负相间的级数称为交错(项)级数.

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots,$$

$$(u_n > 0,\ \ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

一般我们讨论前一个交错项级数(1).

莱布尼茨判别法

定理1 (莱布尼茨判别法) 若交错项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足如下条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}, \quad (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$

则此交错项级数收敛，且其和满足 $0 \leq S \leq u_1,$ 余项满足 $|R_n| \leq u_{n+1}.$

证明 此级数的前 $2n$ 项部分和为

$$S_{2n} = S_{2(n-1)} + u_{2n-1} - u_{2n} \geq S_{2(n-1)},$$

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0,$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1.$$

所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递增且有界 .

莱布尼茨判别法

由单调有界准则知 $\{S_{2n}\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$，则 $0 \le S \le u_1$.

由 $\qquad S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = S.$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S.$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且 $0 \le S \le u_1$.

余项级数 $\qquad R_n = \pm\left(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots\right)$

也满足定理条件, 故收敛, 且 $\qquad |R_n| \le u_{n+1}.$

级数举例

例1 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 敛散性.

解 这是一个交错级数，满足

$$u_n=\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}=u_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0,$$

所以此级数收敛，且 $S\leq 1.$

2 绝对收敛和条件收敛

对一般项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

构造正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots,$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的绝对值级数.

定理 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

证明 因为 $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$, $\quad 0 \le |u_n| - u_n \le 2|u_n|$.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，及比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| - u_n)$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

但是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，不能保证 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 也收敛.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**；

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

定理 2 说明：绝对收敛级数一定是收敛级数.

级数举例

例2 判断下列级数敛散性，收敛时指出是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p},\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

解 (1) 由于 $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 绝对收敛.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$,

所以 $u_n \not\to 0\ (n\to\infty)$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

级数举例

$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$

(3) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是 $p-$ 级数,

当 $p>1$ 时收敛, $p\le 1$ 时发散.

由例 1 知当 $p>0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $p\le 0$ 时, $(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\not\to 0(n\to\infty)$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 发散.

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{绝对收敛}, & p>1,\\ \text{条件收敛}, & 0<p\le 1,\\ \text{发散}, & p\le 0.\end{cases}$$

级数举例

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$

(4) 因为 $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(n+1)!\left(\frac{|x|}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{|x|}{n}\right)^n}=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{|x|}{e}.$$

所以当 $|x|<e$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 绝对收敛,

当 $|x|\geq e$ 时, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$, (因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$)

$|u_n| \not\to 0 (n\to\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 发散.

级数举例

例3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ 敛散性.

解 由于 $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}[\sqrt{n}-(-1)^{n-1}]}{n-1}$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\quad (n\geq 2).$$

因为 $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减趋于0, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛.

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ 发散.

3* 绝对收敛级数的乘积

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，这两个级数的乘积可以列表为

$$
\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_1 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

绝对收敛级数的乘积

按副对角线相加

$$
\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_1 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

得到一个级数

$$u_1v_1+\left(u_1v_2+u_2v_1\right)+\left(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1\right)+\cdots$$

称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的柯西乘积.

绝对收敛级数的乘积

定理4 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛，其和分别为 $S, T,$

则它们柯西乘积级数也绝对收敛, 且和为 $ST.$

若非绝对收敛，这个结论不一定成立.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛的，但它与自己地柯西乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$:

$$w_1 = u_1 u_1 = 1,\ w_2 = (-1)^{2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right), \quad \cdots,$$

$$w_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right),$$

$$|w_n| > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}}_{n\text{项}} = 1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 发散.