第二节　微积分的基本公式

1. 问题的提出
2. 变上限定积分
3. 定积分与原函数的关系

本节通过函数微分与积分之间的关系，找到定积分与不定积分之间的关系，解决定积分的计算问题，为定积分计算提供了一般的计算方法。

一、问题的提出

变速直线运动中位移函数与速度函数的联系

设质点作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，则质点在这段时间内所走过的路程 $\boxed{\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt}$

另一方面这段路程可表示为 $\boxed{s(T_2)-s(T_1)}$

从物理上得出：$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1).$

从物理上得出: $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2) - s(T_1).$

由导数可知: $s'(t) = v(t).$

这一事实启发我们考虑:
若函数f(x) 可积, F'(x)=f(x), 是否有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

二、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点，考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

如果上限 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在 $[a,b]$ 上定义了一个函数，

记 $\boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt}.$ 积分上限函数

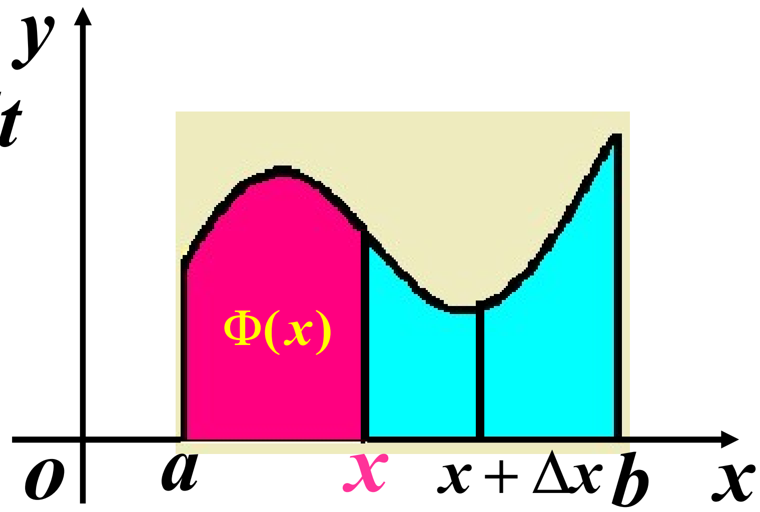
积分上限函数的性质

(1) $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$

(2) $\Phi(x^2)=\int_a^{x^2} f(t)dt$

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\boxed{\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)}$ $\quad (a\le x\le b)$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$



$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

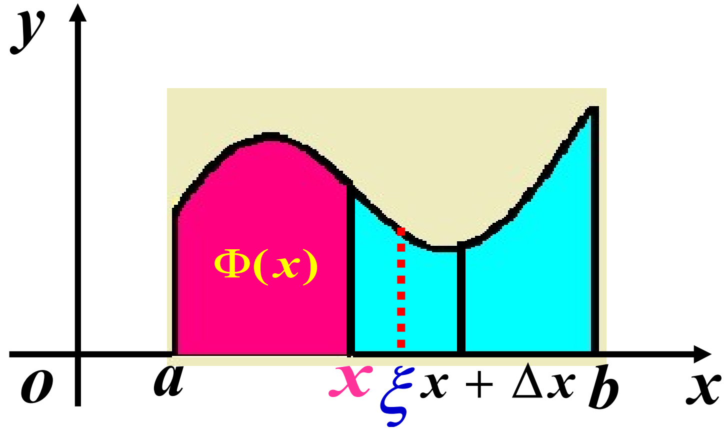
$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt$$

$$=\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

由积分中值定理得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad \xi \in [x, x+\Delta x],$$



$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi),$$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) \quad \boxed{= f(x)}$$

$$\Delta x \to 0, \xi \to x \qquad \boxed{\therefore \quad \Phi'(x) = f(x).}$$

思考题

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = ?$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt = ?$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt = ?$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x tf(x)dx = ?$$

变限函数求导公式说明：

1. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$，求导变量只出现在积分限上。

2. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$，求导变量同时在积分限和被积函数上，

此时只有当积分变量和求导变量相同，公式才成立。

3. 其他情况，如：求导变量出现在被积函数中，但它又不是积分变量时，变限函数求导公式不能直接使用。故求导需要注意积分变量和求导变量的关系。

例如：1. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt = xf(x)$,

2. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x xf(x)dx = xf(x)$,

但是，3. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt \neq xf(x)$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt = \frac{d}{dx}\left(x\cdot\int_a^x f(t)dt\right)$$

$$=\int_a^x f(t)dt + x\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$$

$$=\int_a^x f(t)dt + xf(x)$$

练习

1. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x xf(x)dx$,　　2. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt$

3. $\dfrac{d}{dt}\int_a^x xf(t)dt$,　　4. $\dfrac{d}{dt}\int_a^x tf(t)dt$

5. $\dfrac{d}{dt}\int_a^t xf(x)dx$,　　6. $\dfrac{d}{dx}\int_a^t xf(x)dx$

7. $\dfrac{d}{dt}\int_a^x tf(x)dx$,　　8. $\dfrac{d}{dx}\int_a^t tf(x)dt$

9. $\dfrac{d}{dt}\int_a^t xf(t)dt$,　　10. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt$

11. $\dfrac{d}{dx}\int_a^t xf(x)dt$　　12. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x tf(x)dx$

练习答案1:

$$1.\ \frac{d}{dx}\int_a^x xf(x)dx = xf(x),\qquad 2.\ \frac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt = xf(x)$$

$$3.\ \frac{d}{dt}\int_a^x xf(t)dt = 0,\qquad 4.\ \frac{d}{dt}\int_a^x tf(t)dt = 0$$

$$5.\ \frac{d}{dt}\int_a^t xf(x)dx = tf(t),\qquad 6.\ \frac{d}{dx}\int_a^t xf(x)dx = 0$$

$$7.\ \frac{d}{dt}\int_a^x tf(x)dx = \frac{d}{dt}(t\cdot\int_a^x f(x)dx) = \int_a^x f(x)dx,$$

$$8.\ \frac{d}{dx}\int_a^t tf(x)dt = \frac{d}{dx}(f(x)\cdot\int_a^t tdt) = f'(x)\cdot\int_a^t tdt$$

练习答案2:

$$9.\ \frac{d}{dt}\int_a^t xf(t)dt = xf(t),$$

$$10.\ \frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt = \frac{d}{dx}(x\cdot\int_a^x f(t)dt)$$

$$=\int_a^x f(t)dt + x\cdot\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = \int_a^x f(t)dt + xf(x)$$

$$11.\ \frac{d}{dx}\int_a^t xf(x)dt = \frac{d}{dx}(xf(x)\int_a^t dt) = (xf(x))'\int_a^t dt$$

$$12.\ \frac{d}{dx}\int_a^x tf(x)dx = tf(x)$$

例 1　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f(x)>0$.

证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$在$(0,+\infty)$内为严格单调增加函数.

证　$\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$,　$\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$,

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$$\because\ f(x)>0,\quad (x>0)\qquad \therefore \int_0^x f(t)dt>0,$$

$\because (x-t)f(t)\geq 0$，且不恒为0，$\therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$

$$\therefore F'(x)>0\quad (x>0).$$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为严格单调增加函数.

例 2　设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(x) < 1$.证明

$$2x - \int_0^x f(t)dt = 1$$ 在[0,1]上只有一个解.

证　令 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt - 1$,

$\because f(x) < 1$,　　$\therefore F'(x) = 2 - f(x) > 0$,

$F(x)$ 在[0,1]上为单调增加函数. $F(0) = -1 < 0$,

$$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 [1 - f(t)]dt > 0,$$

所以 $F(x) = 0$ 即原方程在[0,1]上只有一个解.

定理2（原函数存在定理）

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

注意 当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

定理证明概要

$F(x)$ 和 $\int_a^x f(x)dx$ 都是$f(x)$的原函数,

所以$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C.$

由$F(a) = \int_a^a f(x)dx + C,$得$C = F(a),$

故$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a).$

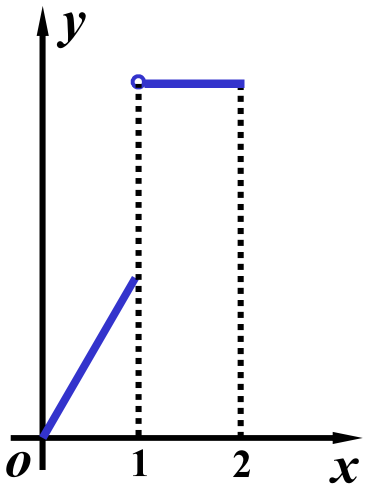
即:$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

例4　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

解　原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}.$

例5　设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx.$

解　$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$



在[1,2]上规定当 $x=1$ 时，$f(x)=5$，

原式 $=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6.$

重要

补充　如果 $f(t)$ 连续，$a(x)$、$b(x)$ 可导，

则 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ 的导数 $F'(x)$ 为

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

证　$F(x)=\left(\int_{a(x)}^{0}+\int_{0}^{b(x)}\right)f(t)dt$

$$=\int_{0}^{b(x)} f(t)dt-\int_{0}^{a(x)} f(t)dt,$$

$$F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

练习：(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$

答案：(1) $2x\sqrt{1+x^4}$

(2) $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解　$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt = -\frac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt,$$

$$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \sin x\cdot e^{-\cos^2 x},$$

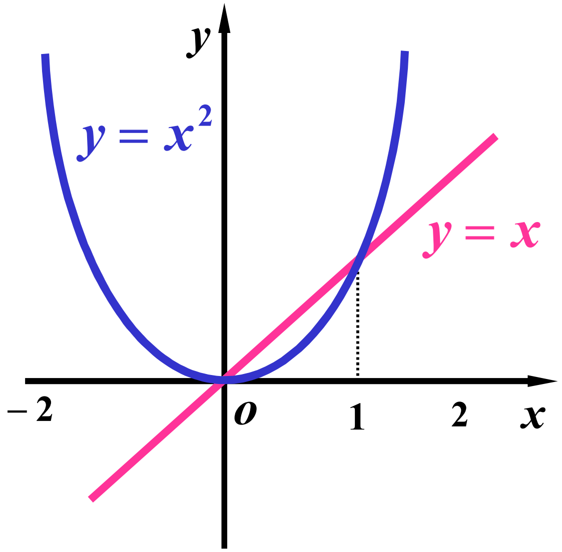
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例6　求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$.

解　由图形可知

$$f(x)=\max\{x,x^2\}$$

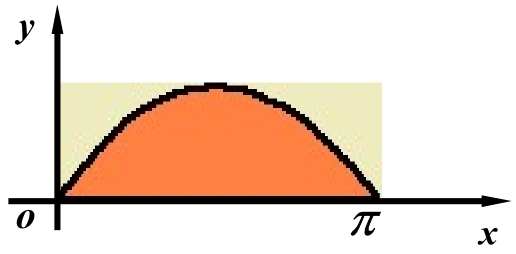
$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$



$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}.$$

例 7　计算曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解　面积 $A = \int_0^{\pi} \sin x dx$



$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2.$$

思考

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)dt$与$\int_x^b f(u)du$是x的函数还是 t 与 u 的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

解答

$\int_a^x f(t)dt$ 与 $\int_x^b f(u)du$ 都是 x 的函数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(u)du = -f(x)$$

思考

证明：（定积分中值定理 修改版）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在开区间 (a,b) 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. $(a<\xi<b)$

习题：

1.求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 x}dx$

解 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

$$= \cos x \Big|_{-\pi/2}^{0} + (-\cos x) \Big|_{0}^{\pi/3} = 3/2$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 1/2 & 1<x<2 \end{cases}$,

求 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0, 2]上表达式,

并讨论 $\phi(x)$在[0, 2]上连续性及可导性.

解：当$0\le x\le 1$时，$\phi(x)=\int_0^x 2t\,dt=t^2\big|_0^x=x^2$

当$1<x\le 2$时，

$$\phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^x \frac{1}{2}dt=t^2\big|_0^1+\frac{t}{2}\Big|_1^x=\frac{1}{2}(x+1)\,.$$

$$\therefore\ \phi(x)=\begin{cases} x^2 & ,\quad 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), & 1<x\le 2\,. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \phi(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1), & 1<x\le 2. \end{cases}$$

$$\because \quad \lim_{x\to 1^-} x^2 = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}(x+1) = 1 = f(1)$$

$\therefore$ $\phi(x)$在$[0, 2]$上连续

$$\phi'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \qquad \phi'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2}(x+1)-1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\phi(x)$在x=1处不可导.

3. 设**f(x)**是**[a, +∞）**上的连续单调增函数,

求证：

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$$

在（**a, +∞**）上也是单调增函数。

证：F(x)在(a, +∞)内连续，

$$F'(x)=\frac{(x-a)[\int_a^x f(t)]'-\int_a^x f(t)dt\cdot(x-a)'}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{(x-a)f(x)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}$$ $\because a\le\xi\le x$，f(x)↑

x-a>0，$\therefore F'(x)>0$； 故F(x)在（a, +∞）上↑.

课后练习

例1：已知$\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$的值。

例2：求由$\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\sin t dt=0$确定的隐函数$y=y(x)$对$x$的导数。

例3：求$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$，其中$f(x)$为已知连续函数。

例：求$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$,其中$f(x)$为已知连续函数。

解：$\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt=\int_0^{x^2}x^2f(t)dt-\int_0^{x^2}tf(t)dt$

$$=x^2\int_0^{x^2}f(t)dt-\int_0^{x^2}tf(t)dt$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)dt+x^2f(x^2)2x-x^2f(x^2)2x$$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)dt。$$

1. 设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}\cdot\int_0^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}+2\cdot\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$,求$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$。

2. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\boldsymbol{ax}-\sin \boldsymbol{x}}{\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{x}}\ln(1+\boldsymbol{t}^2)\boldsymbol{dt}}=\boldsymbol{c}$,其中$\boldsymbol{c}\neq 0$,求$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的值。