第三章 一元积分学

第一节 不定积分

本节基本内容有：原函数及不定积分的概念，不定积分的计算。重点是掌握不定积分的计算。不定积分的计算方法大致可分为基本方法和特殊方法。

（1）基本方法是指“一表三法”即基本积分公式表、第一、二换元法、分部积分法。这里要求：熟记基本积分公式表，凑微分是计算积分的基本功，要很熟练，特别是一些简单的微分式要相当熟悉（比如$\frac{1}{x}dx = d\ln x$）。基本方法中也包括对被积函数的恒等变形，特别将被积函数分拆成简单函数的和、差（比如有理函数的分拆、三角函数的分拆）以及对分子、分母同乘以（或同除以）一个因子等技巧。

（2）特殊方法有很多，本节通过例子介绍几个方法：裂项相消法、循环回归法、配对法，递推法。

例1． 求下列不定积分

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (2) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

解(1)分析:思路一:被积函数为无理函数且含有$\sqrt{x^2-1}$,容易想到作换元$x=\sec t$将被积函数中的根号消掉（一般而言当被积函数中含有$\sqrt{a^2\pm x^2},\sqrt{x^2\pm a^2}$时可试一试三角代换）．思路二：被积函数中分母的次数比分子高二次，可想到倒代换$t=\frac{1}{x}$（一般而言当被积函数中分母的次数比分子高二次或二次以上时，可试一试倒代换$t=\frac{1}{x+a}$，思路三：如分子分母同乘以x，则被积表达式变成$\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{dx^2}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$，可作换元$t=x^2$问题得到简化．但还需再换元．

思路四：被积表达式变形为$\frac{dx}{x(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$，可作换元$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$．下面就前三个思路试一试

方法一：令$x=\sec t$，那么$dx=\sec t\tan tdt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int 1dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$$

方法二：令$x=\frac{1}{t}$，那么$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

或（直接变形）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\arcsin\frac{1}{x}+C$

方法三：

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

作换元$t=x^2$，则$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$

（至此问题得到了简化，容易想再换元$u=\sqrt{t-1}$消去根号）

令$u=\sqrt{t-1}$，则$t=u^2+1,dt=2udu$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{t-1}}=\int\frac{du}{1+u^2}=\arctan u+C=\arctan\sqrt{t-1}+C=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

或（不换元，直接通过凑微分解决）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{d\sqrt{x^2-1}}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

（2）思路：被积函数是两类不同函数$\frac{x}{(1+x^2)^2}$和$\arctan x$的乘积，此时应想到用分部法。一般而言当被积函数是五类函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）中两类或多类函数的乘积时，可试一试分部法$\int udv=uv-\int vdu$。记住两条原则：（1）$\int vdu$比$\int udv$简单，（2）被积函数中选择哪一部分与dx结合凑出dv（或v）是关键，有个一般规律：$\int 反,对,幂,三,指dx$，此式中离dx越近的那类函数越优先与dx结合凑出v．本题中应是$\frac{x}{(1+x^2)^2}$与dx结合凑出dv：$\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}d(\frac{1}{1+x^2})$

$$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan xd\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

对后一积分，可作换元$t=\arctan x$，那么

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}+C=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{2}+C$$

故$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{4}+C$

注：对后一积分也可用教材中介绍过的关于积分$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$的推递式去解决．本题也可先作换元$x=\tan t$，再分部：

$$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=\int t\sin t\cos tdt=-\frac{1}{4}\int td\cos 2t=\cdots$$

总结：不定积分的题变化多技巧性强，往往一题有多种解法，一题也可能需同时用换元、分部等方法和技巧才能解决．但无论如何我们首先掌握其一般步骤、基本方法和基本思路，通过加强训练达到熟能生巧的程度．一般步骤是：首先看是否需要对被积函数通过代数运算、三角函数公式等作恒等变形（特别是变为若干简单函数的和、差），然后看是否需采用凑徽分法、第二换元法、分部法，最后用不定积分的线性运算法则和基本积分公式求出结果。

例２．求下列不定积分：

(1)$\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx$　　(2)$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$　　（3）$\int\frac{1}{1+x^3}dx$

（1）分析：先作变形：$\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx=\int(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x})dx=\int\frac{e^x dx}{\cos x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$，分成了两个积分，每个积分都不好求，它们都是两类不同函数的积，可用分部法试一试：先试第一个$\int\frac{e^x dx}{\cos x}=\int\frac{1}{\cos x}de^x=\frac{e^x}{\cos x}-\int e^x d\frac{1}{\cos x}=\frac{e^x}{\cos x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$，分部后右端出现的积分并不比左端的积分简单，但正好可以与原积分中的后一项相消，问题也得到了解决。

解：$\int\frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx=\int(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x})dx=\int\frac{e^x dx}{\cos x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx$

$$=\int\frac{1}{\cos x}de^x+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\frac{e^x}{\cos x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\frac{e^x}{\cos x}+C$$

总结：这种方法我们称之为裂项相消法，基本过程是这样的：将欲求的不定积分I分拆成两项或多项，然后对其中某一项或多项作分部积分，如能达到相消的目的，那问题就解决了。本题对后一项作分部积分也能达到相消的目的$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^x dx=\int e^x d\frac{1}{\cos x}$。注意：最后结果中要加上任意常数$C$。

（2）分析：被积函数比较复杂，涉及几类不同的函数，可试一试分部法：

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x}=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

右端积分还不好求，再分部试一试：

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

右端出现了与左端一样的积分，那我们把该积分解出来就可得结果。

解：$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

所以$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

此题有另外常用的思路，思路一：被积函数中有$\arctan x$（并且分母中还有$1+x^2$），可试一试换元$t=\arctan x$，即$x=\tan t$：

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \sin t e^t dt = \cdots$$

换元后的积分是我们熟悉的积分。

思路二：被积函数中有一个复杂的因子$e^{\arctan x}$，有一种值得一试的方法：当被积函数中有一个复杂并且不好处理的因子时，可将这个复杂的因子设为一个变量。本题可设$t=e^{\arctan x}$，

则原积分变为$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \sin(\ln t)dt = \cdots$

总结：以上方法我们称之为循环法，基本过程是这样的：将欲求的不定积分I通过运算（主要是分部积分两次，且两次分部中都要用同一类函数去凑v）后出现如下形式

$$I = F(x) + \alpha I \ (\alpha \neq 1)$$

再解出I（要注意：最后结果中要加上任意常数C）。其实这种方法我们在学高数时已经学过，典型例子就是求$\int \sin x e^x dx$。在后两种思路中，换元后的积分还需通过循环回归法去解。这种方法在定积分计算中也很有用。不同的是不定积分一般是通过多次分部来循环，而定积分则可通过分部、换元等各种方法来循环。

(3)分析:相信同学们都能做出这题,这是有理函数的积分.我们总可以通过将有理函数分拆成最简分式的和去解决：$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x-x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x-x^2}$. 本题可用另一种方法：配对法去解。

解：令$I=\int\frac{1}{1+x^3}dx,\ J=\int\frac{x}{1+x^3}dx$，则

$$I+J=\int\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int\frac{1}{1-x+x^2}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})+C_1$$

$$I-J=\int\frac{1-x}{1+x^3}dx=\int\frac{1-x+x^2-x^2}{1+x^3}dx=\int\frac{1}{1+x}dx-\int\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$=\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(1+x^3)+C_2$$

由以上两式可得

$$I=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1+x^3)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})+C$$

总结：这种方法的思路是这样的：为求积分I，给它配另一个积分J，然后求出$I+J,I-J$（另一般的是$aI+bJ,cI+dJ$）再解出I。此方法我们应该见过，有个典型的例子：求$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

例 3。（1）已知$f'(\ln x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ \sqrt{x},x\geq 1\end{cases}$，则$f(x)=$________，又若$f(0)=0$，则$f(x)=$________。

（2）已知$(f(\ln x))'=\begin{cases}1,0<x<1\\ \sqrt{x},x\geq 1\end{cases}$，则$f(x)=$________。

（3）已知$\int\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$的结果中不含反正切函数，则$a=$______。

（4）已知$\int x^3f'(x)dx=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$，则$f(x)=$________。

解：（1）令$t=\ln x$，则$f'(t)=\begin{cases}1,t<0\\ e^{\frac{t}{2}},t\geq 0\end{cases}$

$f(t)=\int f'(t)dt=\begin{cases}t+c_1,t<0\\ 2e^{\frac{t}{2}}+c_2,t\geq 0\end{cases}$，再由$f(t)$在$t=0$处的连续可得$c_1=2+c_2$

所以$f(t)=\begin{cases}t+2+c,t>0\\ 2e^{\frac{t}{2}}+c,t\geq 0\end{cases}$，即$f(x)=\begin{cases}x+2+c,x>0\\ 2e^{\frac{x}{2}}+c,x\geq 0\end{cases}$

若 $f(0)=0$ 则 $c=-2$，所以

$$f(x)=\begin{cases}x, x>0\\ 2e^{\frac{x}{2}}-2, x\geq 0\end{cases}$$

（2） $f(\ln x)=\int(f(\ln x))'dx=\begin{cases}x+c, 0<x<1\\ \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}+c, x\geq 1\end{cases}$

所以 $f(x)=\begin{cases}e^{x}+c, x<0\\ \dfrac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}+\dfrac{1}{3}+c, x\geq 0\end{cases}$

注：（1），（2）有何区别？

（3） $\dfrac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

依题意必有 $C=0$，从而有恒等式

$$\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx}{x^2+1}$$

两边同乘 $(x+1)(x^2+1)$，并比较两边系数可得

$\begin{cases}A+B=1\\ B=a\\ A=2\end{cases}$，从而得 $a=-1$

（4）依题意有

$x^3f'(x)=(x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x)'=-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x$，而从

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{x^3}-\frac{2\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}$$

$$f(x)=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-2\int\frac{\cos x}{x^2}dx-\int\frac{\sin x}{x}dx=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-2\int\frac{\cos x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x}d\cos x$$

$$=2\int\frac{\sin x}{x^3}dx-\int\frac{\cos x}{x^2}dx+\frac{\cos x}{x}=\frac{\cos x}{x}-\int\frac{1}{x^2}d\sin x+2\int\frac{\sin x}{x^3}dx=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}+C$$

练习题:

1．求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{1+x}{x(1+xe^{x})}dx$　　（2）$\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　（3）$\displaystyle\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

（4） $\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$　　　　（5） $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

2．求下列不定积分：

（1） $\int \sin(\ln x)dx$　　　　（2） $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx$　　　　（3） $\int \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$

（4） $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2}dx$　　　　（5） $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

（（1）用循环法，（2）裂项相消法，（3）配对法，（4）裂项相消法，两项同时分部

（5）分部 $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=-\int x^2e^x d\frac{1}{x+2}$，或先拆项 $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\int e^x dx-4\int \frac{x+1}{(x+2)^2}e^x dx$

$=e^x-4\int \frac{e^x}{x+2}dx+4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$）

3.(1)设 $I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n xdx$, 证明:

$$I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$$

(2) 设 $I(n)=\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx\ (n>2)$, 证明:

$$I(n)=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}+I(n-2)$$

((1)用分部,(2)利用三角公式变形: $I_n=\int \frac{\sin(n-1)x\cos x+\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}dx$

$=\frac{\sin(n-1)x}{n-1}+\frac{1}{2}\int \frac{\sin nx+\sin(n-2)x}{\sin x}dx=\frac{\sin(n-1)x}{n-1}+\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_{n-2}$)