22. 求由方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 在(1,1)处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

没有求具体值

(方法1) 对方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$ 关于 x 求偏导 得 $\begin{cases} 1 = u_x + v_x \\ 0 = 2u u_x + 2v v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{v}{v-u} \\ v_x = \frac{-u}{v-u} \end{cases}$

29. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 在点 $M_0(0,0,a)$ 处的切线与法平面方程.

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$

$G(x,y,z)=x^2+y^2-ax$

$$m=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix}_{M_0}=-4yz\Big|_{M_0}=0$$

$$n=\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}=\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}=\begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x-a \end{vmatrix}_{M_0}=4zx-2az\Big|_{M_0}=-2a^2$$

$$p=\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-a & 2y \end{vmatrix}_{M_0}=2ay\Big|_{M_0}=0$$

切线: $\frac{x}{0}=\frac{y}{-2a^2}=\frac{z-a}{0}$

即 $\begin{cases} x=0 \\ z=a \end{cases}$

法平面: $0(x-0)-2a^2(y-0)+0(z-a)=0$

即 $y=0$

30. 求函数$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在点$M(1,2,-2)$沿曲线

$$x=t,\ y=2t^2,\ z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导数.

$x'(t)=1,\ y'(t)=4t,\ z'(t)=-8t^3$

在$(1,2,-2)$处 $t=1$

$\vec{s}=(1,4,-8)$, $\vec{e_s}=(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$

$u_x=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $u_y=\frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $u_z=\frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\nabla u=(u_x,u_y,u_z)$

$\nabla u(1,2,-2)=(\frac{8}{27},\frac{-2}{27},\frac{2}{27})$

$\frac{\partial u}{\partial s}=\nabla u(1,2,-2)\cdot\vec{e_s}=-\frac{16}{243}$

∵切线可有两个方向

∴ $\vec{s'}=(-1,-4,8)$, $\vec{e_{s'}}=(-\frac{1}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9})$

$\frac{\partial u}{\partial s'}=\nabla u(1,2,-2)\cdot\vec{e_{s'}}=\frac{16}{243}$

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0, \; f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定 , 需另行讨论.

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: $(1,0)$, $(1,2)$, $(-3,0)$, $(-3,2)$.

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点$(1,0)$处 $A=12$, $B=0$, $C=6$,

$$AC-B^2=12\times 6>0,\quad A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$为极小值;

在点$(1,2)$处 $A=12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)\text{不是极值;}$$

在点$(-3,0)$处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0,\ \therefore f(-3,0)\text{不是极值;}$$

在点$(-3,2)$处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值.}$$

$$\underset{A}{f_{xx}(x,y)=6x+6},\quad \underset{B}{f_{xy}(x,y)=0},\quad \underset{C}{f_{yy}(x,y)=-6y+6}$$

例2.讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点，并且在 (0,0) 都有

$$AC - B^2 = 0$$

$z = x^3 + y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ 0 \end{cases}$，因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，$z = (x^2 + y^2)^2 > z\big|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2\big|_{(0,0)} = 0$ 为极小值.

二、最值问题

依据

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{函数 } f \text{ 在闭域上连续} \\ \Downarrow \\ \text{函数 } f \text{ 在闭域上可达到最值}\end{array}}$$

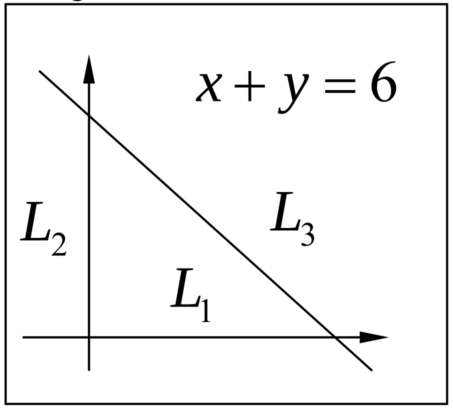
$$\text{最值可疑点}\begin{cases}\text{驻点,偏导数不存在的点} \\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点P 时,

$$f(P)\text{为极小}\textbf{(大)}\text{值} \Longrightarrow f(P)\text{为最小}\textbf{(大)}\text{值}$$

例3. 设区域 D 由x 轴、y 轴及直线 $x+y=6$ 围成的三角形区域，求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D上的最大值和最小值.

解: 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$



得 $f(x,y)$在 D内的唯一驻点$(2,1)$, $f(2,1)=4$.

在 L_1上, $y=0,\quad 0\le x\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_2上, $x=0,\quad 0\le y\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_3上， $y=6-x,\quad 0\le x\le 6,\quad z=\varphi(x)=2x^3-12x^2$

$\varphi'(x)=6x^2-24x$, 令 $\varphi'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=4$.

$\because \varphi(0)=0,\quad \varphi(4)=-64,\quad \varphi(6)=0.$

所以在 D上最大值为$f(2,1)=4$, 最小值为 $f(4,2)=-64$.

例4. 某厂要用铁板做一个体积为$2\ \mathrm{m}^3$的有盖长方体水
问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}\mathrm{m}$,
则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

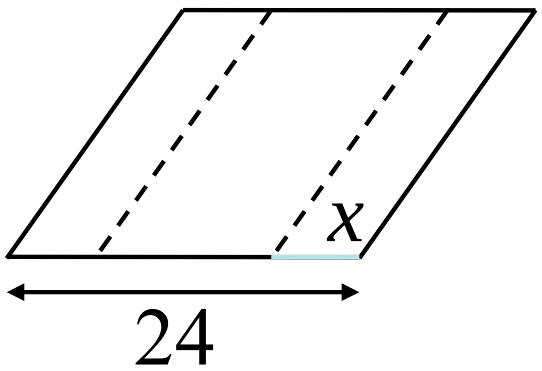
令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

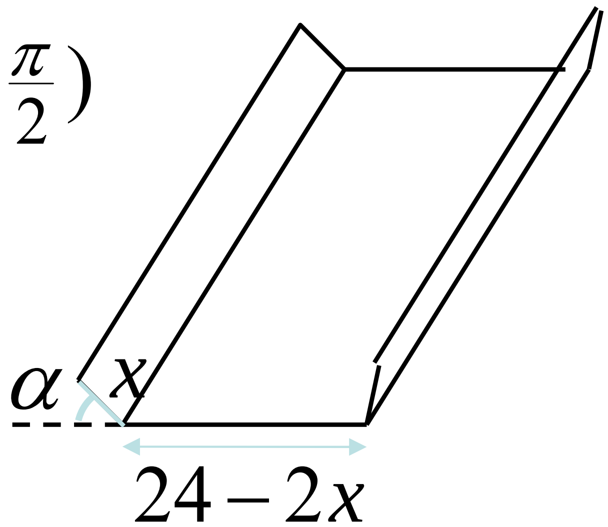
根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$
高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

例5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板 ,把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

解: 设折起来的边长为 x cm, 倾角为α, 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D: 0<x<12, 0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$





$$\boxed{\begin{array}{c} A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha \\ (D:\ 0 < x < 12,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}) \end{array}}$$

令 $$\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \ \sin\alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得: $$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ x = 8\,(\mathrm{cm})$$

由题意知,最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

三、条件极值

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,} \\ \qquad\qquad\quad \text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值

$$\Big\Downarrow \text{转化} \quad \text{从条件 } \varphi(x, y) = 0 \text{ 中解出 } y = \psi(x)$$

求一元函数 $z = f(x, \psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2　拉格朗日乘数法. 例如,

在条件$\varphi(x,y)=0$下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述 , 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数$y=\phi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x,\phi(x))$ 的极值问题, 故

极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记

$$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

方法2 拉格朗日乘数法.

即设目标函数与约束条件分别为

$$z = f(x, y) \text{ 与 } \varphi(x, y) = 0. \qquad (1)$$

若由 $\varphi(x, y) = 0$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 则使得目标函数成为一元函数 $z = f(x, y(x))$. 再由

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_x + f_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x - f_y \cdot \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = 0,$$

求出稳定点 $P_0(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$, 在此点处满足

$$(f_x\varphi_y - f_y\varphi_x)\Big|_{P_0} = 0.$$

$$\left(f_x\varphi_y - f_y\varphi_x \right)\Big|_{P_0} = 0.$$

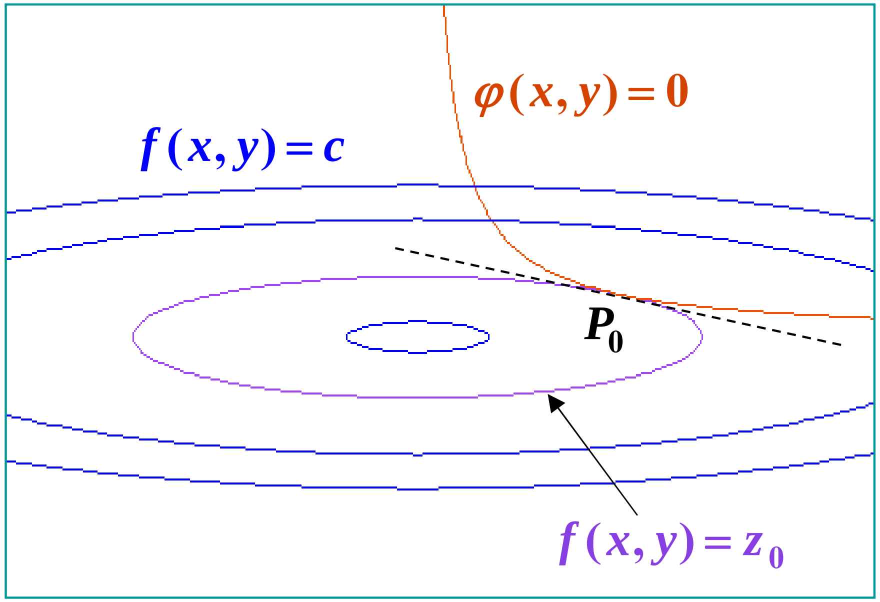
这表示 f 的等值线

$$f(x,y) = z_0$$

与曲线 $\varphi(x,y) = 0$ 在

点 P_0 有公共切线

存在比例常数 λ_0，满足



$$(f_x(P_0), f_y(P_0)) + \lambda_0(\varphi_x(P_0), \varphi_y(P_0)) = (0, 0).$$

这又表示：对于函数

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

在点 (x_0, y_0, λ_0) 处恰好满足:

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数$\boldsymbol{F}$ 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如，求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$，$\psi(x,y,z)=0$ 下的极值.

设 $F=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

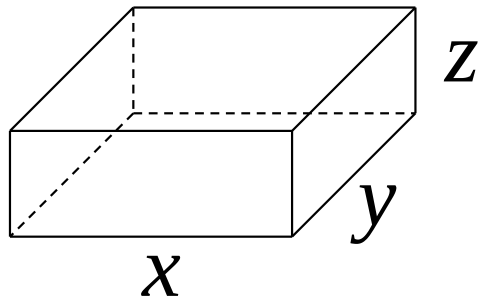
解方程组
$$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi=0 \\ F_{\lambda_2}=\psi=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例6. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x , y , z 分别表示长、宽、高,则问题为求x , y , z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

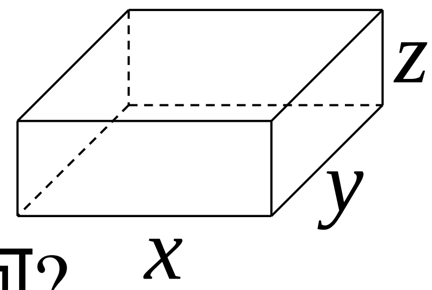
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组 $$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此 , 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$,
长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\ xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值,

设拉格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点 .

3. 函数的最值问题

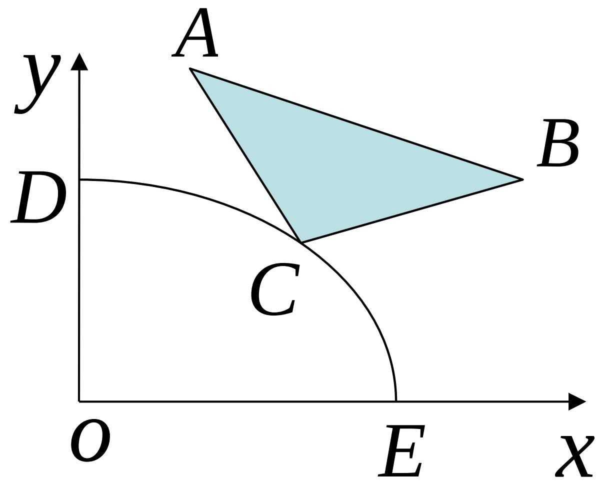
第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$,

试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示： 设 C 点坐标为 (x,y),

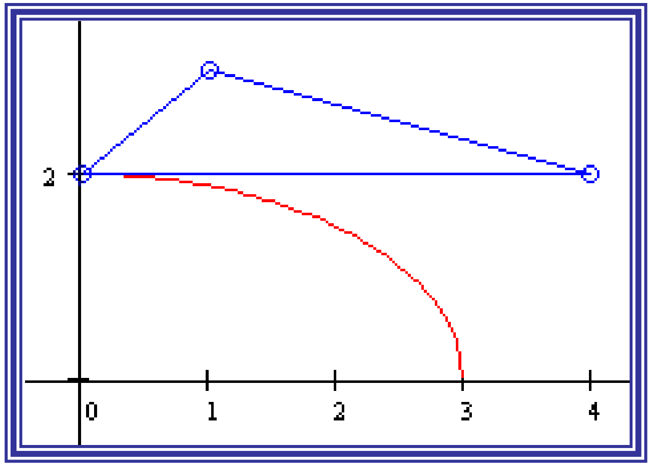
则 $$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0 \end{cases}$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_C=3.5$,比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

3. 求半径为R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x , y , z ,则

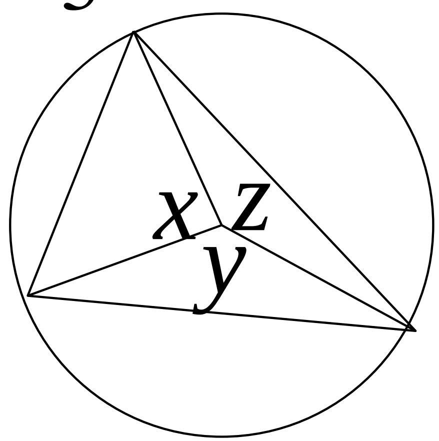
$$x+y+z=2\pi, \quad x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\tfrac{1}{2}R^2\sin x, \quad S_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin y, \quad S_3=\tfrac{1}{2}R^2\sin z$$

设拉氏函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$,得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大,最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 .$$