# 东南大学考试卷 A 卷

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 课程名称 | 线性代数 | 考试学期 | 19-20-2 | 得　分 | |
| 适用专业 | 全　校 | 考试形式 | 闭　卷 | 考试时间长度 | 120 分钟 |

姓名________ 学号________ 密 封 线

一．(30%)填空题（$E$ 表示单位矩阵）

**1.** 设 2 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\beta)$，$B=(\alpha_2,\beta)$，若 $|A|=-2,|B|=2$，则 $|2A-B|=$__ $-6$__；

**2.** 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_1+\alpha_2,k\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关，则 $k=$___1___；

**3.** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$，若 $Ax=0$ 的基础解系中只含两个向量，则 $a=$____1____；

**4.** 设向量空间 $V$ 的从基 $\alpha_1,\alpha_2$ 到 $\beta_1,\beta_2$ 的 过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$，向量 $\eta$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2$ 下的坐标是 $(1,-1)^T$，则 $\eta$ 在基 $\beta_1,\beta_2$ 下的坐标是__________ $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ ____；

**5.** 将 2 阶矩阵 $A$ 的第二行的 2 倍加到第一行，再将第一行和第二行互换得矩阵 $B$，则满足 $B=PA$ 的矩阵 $P=$ __________ $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ ______；

6. 若 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 满足 $AB=A+B$，则 $(A-E)^{-1}=$ __________ $B-E$ ____；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&3\\y&4\end{pmatrix}$ 合同，则参数 $x,y$ 的取值范围是 _$x<4,y=3$__；

8. 已知 $A,P$ 为 2 阶矩阵，且 $P=(\alpha,\beta)$ 可逆，若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $Q=(2\beta,3\alpha)$，则 $Q^{-1}AQ=$ __________ $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ ____；

9. 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_2=2\\-x_1+2x_2=1\end{cases}$ 的最小二乘解是__________ $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ____；

**10.** 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的若当标准形是__________ $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ______.

二． （**10%**）**计算** $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 3 & 1 \\ & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解：按行展开，得 $D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}$.

故 $D_n-D_{n-1}=2(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=2^{n-1}(D_2-D_1)=2^n$；

$D_n-2D_{n-1}=D_{n-1}-2D_{n-2}=\cdots=D_2-2D_1=1$

所以,

$$D_n=2^{n+1}-1$$

三． （**12%**）已知向量 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\3\\0\end{pmatrix}$ 可以由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}$ 线性表示，且表达式不唯一，求参数 $a,b$ 的值及表达式.

解：对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$ 作初等变换得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 3a-3\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3-2a\\ 0 & 0 & b+2 & 0 & 6-5a\end{pmatrix},$$

因为表达式不唯一，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 $b=-2$.

又 $\beta_2$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，$b+5a=0$，即 $a=\frac{6}{5}$.

$$\beta_1=(-1+c)\alpha_1+(2-c)\alpha_2+c\alpha_3；$$

$$\beta_2=(\tfrac{3}{5}+c)\alpha_1+(\tfrac{3}{5}-c)\alpha_2+c\alpha_3$$

其中，$c$ 是任意常数.

**四.** （**13%**）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $XA-AXA=E-A^2$ 的解.

解：由 $XA-AXA=E-A^2$ 得 $\quad (E-A)XA=(E-A)(E+A)$.

因为 $E-A$ 可逆，所以 $\quad XA=E+A$.

又 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

所以，

$$X=(E+A)A^{-1}=A^{-1}+E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&0\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

五. （**12%**）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-a&-1&a\\4&2&-3\end{pmatrix}$ 相似于对角阵，求 $a$，并求可逆矩阵 $P$ 及对角阵 $\Lambda$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

**解：** $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$，所以，$A$ 的特征值为 1，$-1$（二重）.

因为 $A$ 与对角阵相似，所以，相应于特征值 $-1$，$A$ 有两个线性无关的特征向量，即，$r(A+E)=1$，故 $a=0$.

此时 $(A+E)x=0$ 有基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

$(A-E)x=0$ 有基础解系 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\Lambda=diag(-1,-1,1)$，

则 $P$ 可逆，且 $P^{-1}AP=\Lambda$.

六. （13%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 $2$，

求参数 $a$，并求一正交变换 $x=Qy$，把 $f$ 化为标准形，并给出相应的标准形.

解：$f$ 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，

因为 $r(A)=2$，$a=2$.

此时，$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，故 $A$ 的特征值是 $0,3,3$.

相应于特征值 0， $Ax=0$ 有基础解系 $\alpha=(-1,1,1)^T$；

单位化，得 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$ ；

相应于特征值 3， $(A-3E)x=0$ 有基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，

正交化，单位化，得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$.

令 $Q=\left(\gamma,\gamma_1,\gamma_2\right)$，则 $Q$ 是正交阵. 在正交变换 $x=Qy$ 下，

$$f(x_1,x_2,x_3)=3y_2^2+3y_3^2.$$

七. （10%）证明题：

1. 设 $A$ 为 $s\times n$ 矩阵. 证明：$r(A)=n$ 的充分必要条件是存在 $n\times s$ 矩阵 $B$，使得 $BA=E$.

证：必要性　若 $r(A)=n$，则存在可逆矩阵 $P,Q$，使得 $A=P\begin{pmatrix}E_n\\ O\end{pmatrix}Q$.

令 $B=Q^{-1}(E_n,O)P^{-1}$，则 $B$ 是 $n\times s$ 矩阵，且 $BA=E$.

充分性　若存在 $n\times s$ 矩阵 $B$，使得 $BA=E$，则因为

$n=r(E)=r(BA)\le r(A)\le n$，知，$r(A)=n$.

**2.** 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是 $n$ 阶正定矩阵，$b_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 记 $B=\left(b_ib_ja_{ij}\right)$. 证明：$B$ 也是正定矩阵.

证：显然，$A$ 是对称的. 因为 $A$ 是正定的，$A$ 的每个顺序主子式都大于零.

又 $B$ 的第 $k$ 个顺序主子式等于 $B_k=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2A_k$，其中，$A_k$ 是 $A$ 的第 $k$ 个顺序主子式，故 $B_k>0$，从而 $B$ 也是正定的.