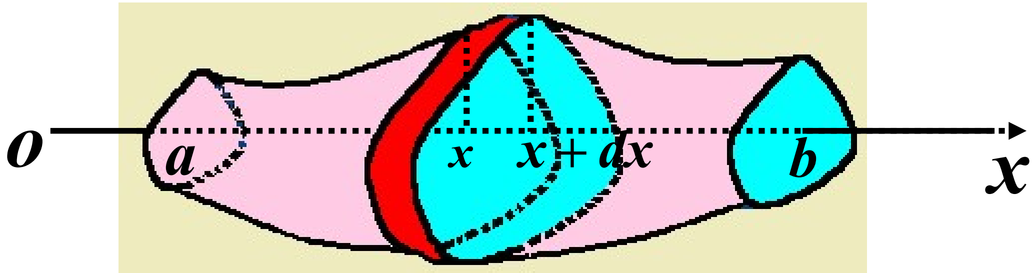
一、平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，

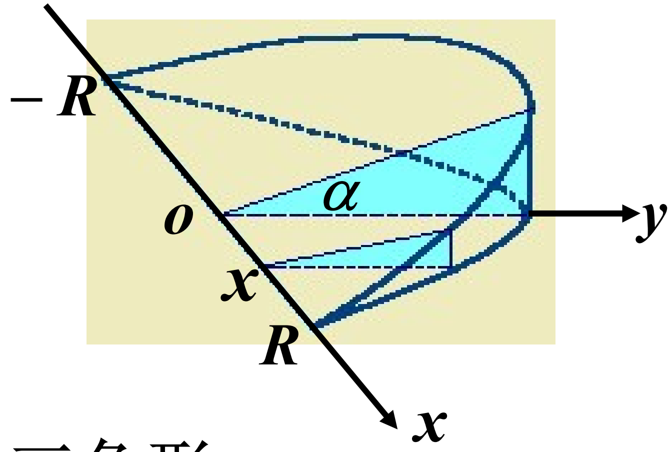


$A(x)$为x的已知连续函数

$dV = A(x)dx$, 立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx$.

例 1 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解 取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

垂直于x轴的截面为直角三角形

截面面积 $A(x)=\dfrac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V=\dfrac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

或者利用对称性

思考: 可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

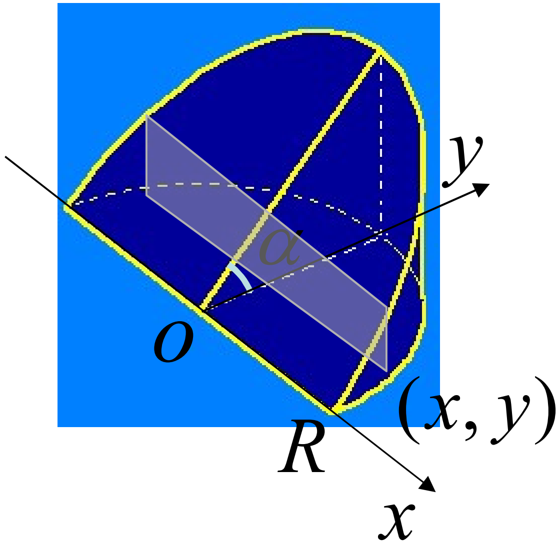
如何用定积分表示体积？

提示:

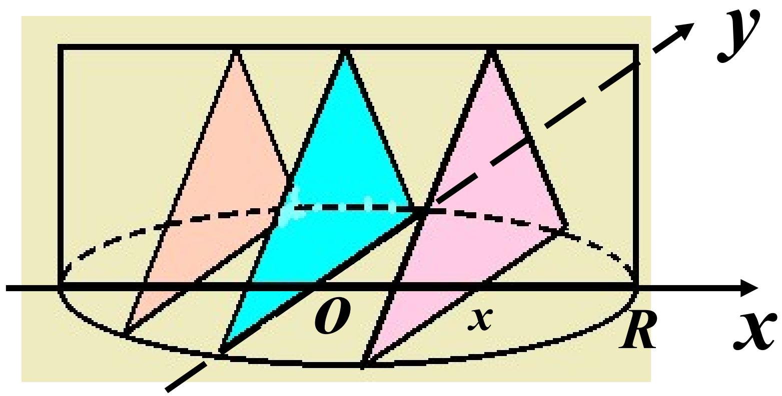
$$A(y) = 2x \cdot y \tan\alpha$$

$$= 2\tan\alpha \cdot y\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$V = 2\tan\alpha \cdot \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$$



例 2 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆半径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.



解 取坐标系如图

底圆方程为

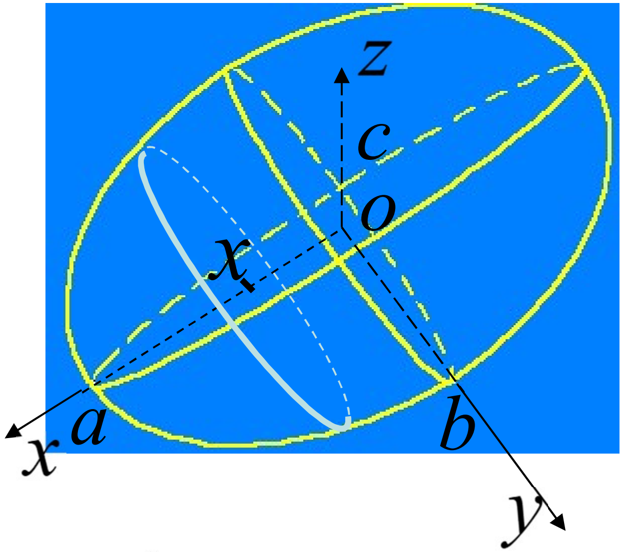
$x^2 + y^2 = R^2$,

垂直于 x 轴的截面为等腰三角形

截面面积 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

立体体积 $V = h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h.$

例3. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围立体(椭球体)的体积.



解: 垂直 x 轴的截面是椭圆

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1$$

它的面积为 $A(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\ (-a\le x\le a)$

因此椭球体体积为

$$V=2\int_0^a \pi\, bc(1-\frac{x^2}{a^2})\mathrm{d}\,x=2\pi bc\left[\,x-\frac{x^3}{3a^2}\,\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

特别当 $a=b=c$ 时就是球体体积 .

机动 目录 上页 下页 返回 结束

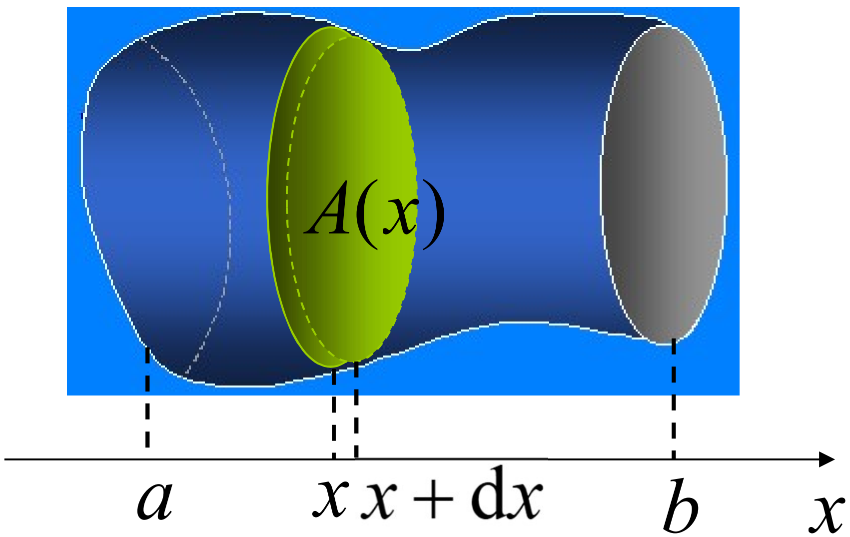
二、旋转体的体积

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

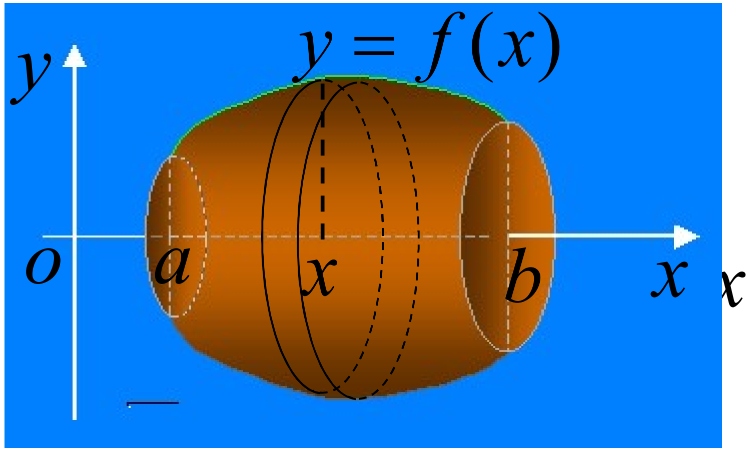
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



特别，当考虑连续曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时, 有

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$



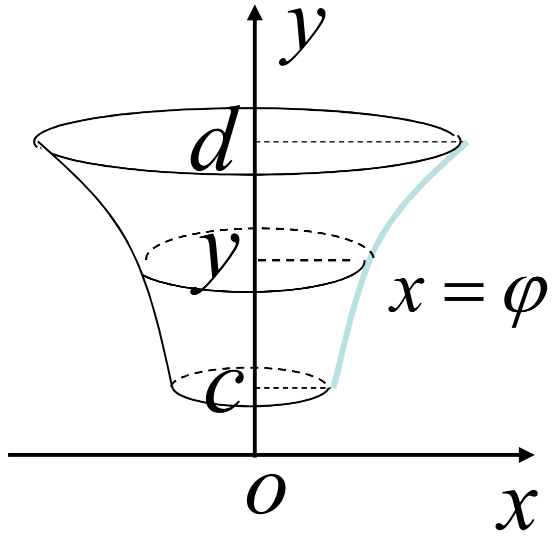
当考虑连续曲线段

$$x=\varphi(y)\ \ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时,

有

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$

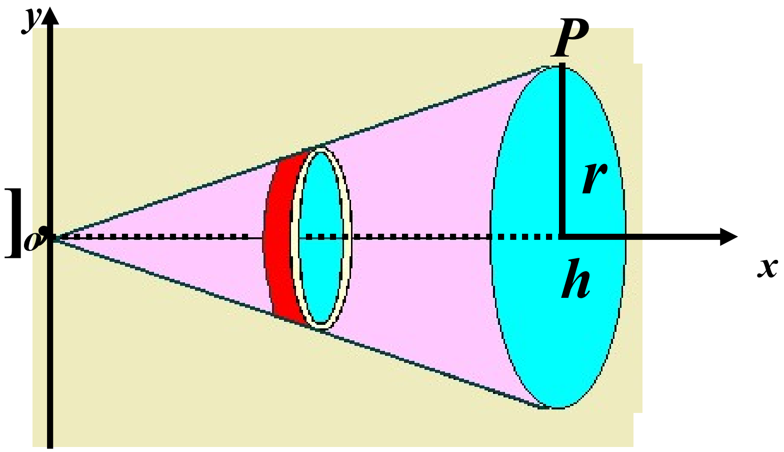


例 1 连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积.

解 直线 OP方程为 $y=\frac{r}{h}x$

取积分变量为x， $x\in[0,h]$

在$[0,h]$上任取小区间$[x,x+dx]$，

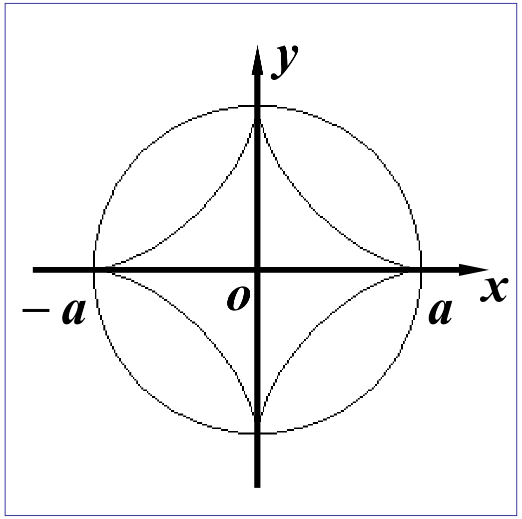


$$dV=\pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2dx$$

圆锥体的体积

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi hr^2}{3}.$$

例 2 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$绕$x$轴旋转构成旋转体的体积.



解 $\because y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$,

$$\therefore y^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \quad x\in[-a,a]$$

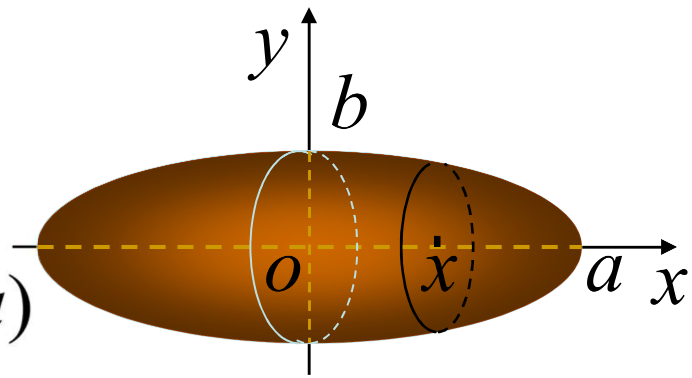
旋转体的体积

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

例3. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.

解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$



则

$$V=2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x$$

(利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法**2**　利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则　$V = 2\int_0^a \pi y^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

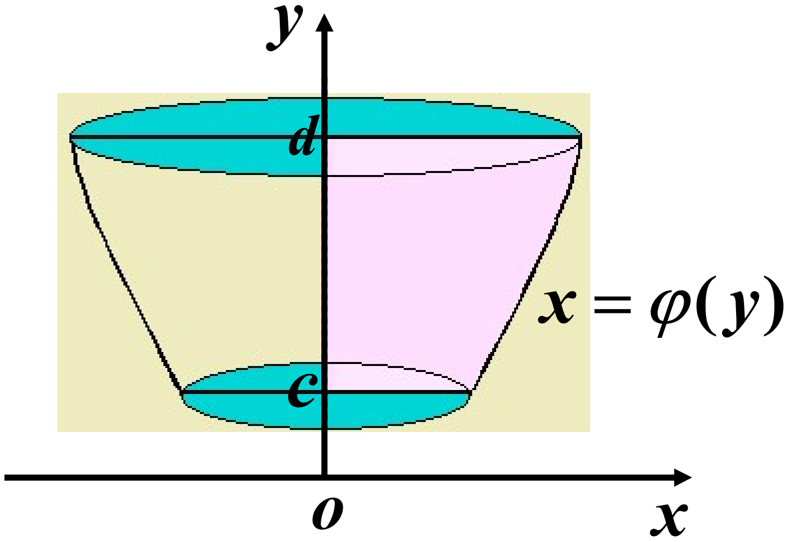
$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当$b = a$ 时, 就得半径为a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

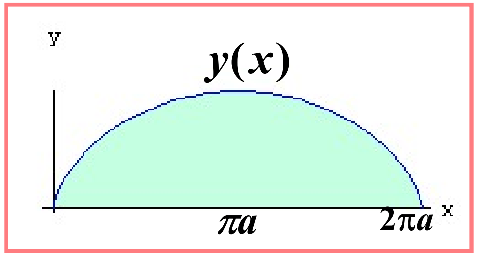
类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例 3 求摆线 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转的旋转体体积

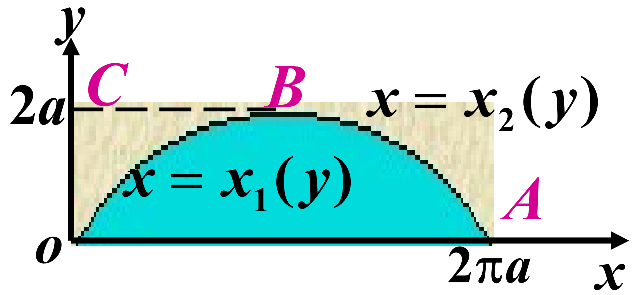


$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2a^3.$$

绕y轴旋转的旋转体体积



可看作平面图$OABC$与OBC分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dt - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dt$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3.$$

注意上下限！

注 $$\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(t^2\sin t-2t\sin^2 t+\sin^3 t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{令}\ u=t-\pi)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[-(\cancel{u^2}+2\pi u+\cancel{\pi^2})\sin u-2(\cancel{u}+\pi)\sin^2 u-\cancel{\sin^3 u}\right]\mathrm{d}u$$

$$=-4\pi\underbrace{\int_0^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u}_{\text{分部积分}}-4\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u}_{\text{关于}\frac{\pi}{2}\text{对称}} \qquad (\text{利用“偶倍奇零”})$$

$$=-4\pi^2-8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=-4\pi^2-8\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-6\pi^2$$