东南大学考试卷(A 卷)

课程名称	线性代数A	考试学期	11-12-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. (30%)填空题(E 表示单位矩阵)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 是 4 维列向量,行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$,$|\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=n$。行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,(\beta_1+\beta_2)|=$ ________;

2. 设 A 为 3 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, $|A|=\frac{1}{8}$ 。$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|=$ ________;

3. 若向量 $(1,2,3),(3,a,b)$ 线性相关,则参数 a,b 的值分别为________;

4. 若 5 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$ 的一个特征值,则乘积 $ab=$ ________;

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 7 & k\end{pmatrix}$。若齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的解空间的维数为1,则参数 k 满足条件________;

6. 若向量 α,β 的长度分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$,则内积 $[\alpha+\beta,\alpha-\beta]=$ ________;

7. 已知 A 是 3 阶方阵,三维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。若 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$,则 A 的行列式等于________;

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix}k & 2\\ 2 & k\end{pmatrix}$ 的特征值均大于零,则参数 k 满足条件________;

9. 已知 A 是 3 阶方阵,可逆矩阵 $P=(\alpha,\beta,\gamma)$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,若矩阵 $Q=(\alpha+2\beta,\gamma,\alpha)$,则 $Q^{-1}AQ=$ ________;

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & a\\ b & c\end{pmatrix}$,若对任意 2×2 矩阵 B 都有 $AB=BA$,则参数 a,b,c 满足条件________。

姓名

学号

线 封 密

二．　（8%）设3维向量$\alpha=(x,1,1)$，其中，$x\neq 0$。记$A=E-\frac{1}{3}\alpha^T\alpha, B=E+\frac{1}{x}\alpha^T\alpha$，若$B=A^{-1}$，求$x$的值。

三．　（16%）已知$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&a&0\\1&-2&2\end{pmatrix}$有一个二重特征值。

1.　根据参数a的值讨论矩阵A是否相似于对角阵。

2.　如果A相似于对角阵，求这个对角阵及相应的相似变换矩阵。

3.　问：是否存在正交阵Q，使得Q^TAQ是对角阵？为什么？

四．（12%）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $AXB=C$ 的解。

五．（15%）已知 $A=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，线性方程组 $Ax=\beta$ 有两个不同的解。

求参数 a,b 的值，并 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

六．（9%）假设a,b是参数，讨论实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+ax_1x_3+bx_2x_3$的秩和正、负惯性指数。

七．（10%）证明题

1. 假设E是$n\times n$单位阵，证明：对于任意$s\times n$实矩阵A，$E+A^TA$是正定的。

2. 证明：对任意n阶矩阵A，存在n阶可逆矩阵B和幂等矩阵C（即$C^2=C$），使得$A=BC$。