第 八 章 多元函数微分法及其应用

1. 求下列函数的定义域：

（1）$u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

（2）$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$；

（3）$u=\arcsin\frac{y}{x}$；

（4）$u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

2. 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y),f(x-y,xy)$.

3.设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$.若$y=1$时，$z=x$,求f和z.

4. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty,y\to1} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$

5. 设

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

证明：$f(x,y)$在原点$(0,0)$处的二重极限存在。

6. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

7. 讨论下列函数在(0,0)点处的连续性：

(1)$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(2)$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

8. 求下列函数的一阶偏导数:

(1)$z=\frac{x}{y^2}$

(2)$z=x\sin(x+y)$

(3)$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(4)$u = (\frac{x}{y})^z \ \ (x, y, z > 0)$

(5)$z = \ln(x + y^2)$

(6)$z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan(\frac{y}{x})}$

(7)$f(x, y) = \int_x^y \sin t^2 dt$

9. 求下列函数的二阶偏导数:

(1)$z = x^y$

(2)$u = x^{\frac{y}{z}}$

10. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

证明：

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

11. 求下列函数的全微分

(1)$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(2)$u=\cos(x+y)+\sin(xy)$

12. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$在(0,0)处(1)是否连续; (2)是否存在偏导数; (3)是否可微; (4)偏导数是否连续.

13. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点(0,0)处是否连续、偏导存在、可微.

14. 设 f 具有一阶连续偏导数，求函数 $u = f(xy, \frac{x}{y})$ 的一阶偏导数.

15. 设 f 具有二阶连续偏导数， $z = f(\frac{y}{x}, x^2y)$,求 z 的各种二阶偏导数.

16. 设$f(x,y) = \int_0^{xy} e^{-t^2}dt$, 求

$$\frac{x}{y} \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

17. 设二元函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^z = xy$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. 设$f(x, y, z) = e^x yz^2$，其中$z = z(x, y)$是由$x + y + z + xyz = 0$确定的隐函数.求$f'_x(0, 1, -1)$.

19. 设方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy^2 - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$ 确定函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

20. 设 $z = f(x, y)$ 在点(1,1)处可微且 $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}\mid_{(1,1)}= 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}\mid_{(1,1)}= 3$, $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\mid_{x=1}$.

21. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由 $e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 确定.求 $\frac{du}{dx}$.

22. 求由方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 在(1,1)处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

23. 设 $z = e^{-x} - f(x - 2y)$，且当 $y = 0$ 时 $z = x^2$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

24. 设函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$，求其在点$A(1,0,1)$处的梯度，及沿A指向点 $B(3,-2,2)$的方向导数.

25. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在点(1,2)处沿从点(1,2)到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向函数.

26. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点$P_0(1,1)$处的最大方向导数.

27. 求曲线$y = x, z = x^2$在点$M(1, 1, 1)$ 处的切线和法平面方程.

28. 求曲线 $\begin{cases} x = (t+1)^2 \\ y = t^3 \\ z = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 在点(1,0,1)处的切线与法平面方程.

29. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 在点 $M_0(0,0,a)$ 处的切线与法平面方程.

30. 求函数$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点$M(1,2,-2)$沿曲线

$$x=t,\ y=2t^2,\ z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导数.

31. 求曲面 $e^x + xy + z = 3$ 在点(0,1,2)处的切平面与法线方程.

32. 求曲面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$的平行于平面$x + 4y + 6z = 0$的各切平面.

33. 证明:曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 的所有切平面都经过坐标原点.

34. 求 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值.

35. 求函数$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值点和极值.

36. 求函数 $z=f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ 在闭区域 $D:0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$ 上的最值.

37. 求函数$f(x,y)=x^2-y^2+2$在椭圆域$D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

38. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

第 9 章 重积分

1. 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $D: x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数, 求当 $a\to 0$ 时, $\dfrac{1}{\pi a^2}\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极限.

2. 判断下列积分值的大小: $J_i=\displaystyle\iint\limits_{D_i}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, i=1,2,3$, 其中 $D_1=\left\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\right\}, D_2=\left\{(x,y)|x^2+y^2\le 2R^2\right\}, D_3=\{(x,y)||x|\le R,|y|\le R\}$.

3. 证明 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(4\sqrt{|xy|}+x^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(4|xy|+y^2)\mathrm{d}\sigma\le 8$.

4. 交换下列二次积分次序:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int_1^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$

5. 计算下列二重积分:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=-1,\ y^2=-4x$ 围成的区域.

(2) $\displaystyle\iint\limits_D (|x|+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $|x|+|y|\le 1$ 围成的区域.

(3) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=y^2, y=x$ 围成的区域.

(4) $\iint\limits_{D}(1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 (0,0), (1,0), (1,2) 和 (0,1) 的梯形闭区域.

(5) $\iint\limits_{D}(x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是闭区域, $0\leq y\leq \sin x, 0\leq x\leq \pi$.

(6) $\iint\limits_{D}(y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是闭区域, $x^2+y^2\leq R^2$.

(7) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}\sigma (a>0)$, 其中 D 为由下半圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 与直线 $x=0$, $y=0$ 所围成的区域.

(8) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 为由双曲线 $xy=1$ 与直线 $x=\frac{1}{2}, y=x$ 所围成的区域.

(9) $\displaystyle\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 为由不等式 $x^2+y^2\geq 2$ 和 $x^2+y^2\leq 2x$ 所决定的区域.

6. 利用极坐标计算下列问题:

(1) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$.

(2) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=x, x^2+(y-1)^2=1$ 围成, 且在 $y=x$ 下方的区域.

(3) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2\leq 1, x+y\geq 1$.

(4) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D: x^2+y^2 \le Rx$.

(5) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式 $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge 0$ 及 $y \le x$ 所决定的区域.

(6) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为由双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 所围成的区域.

7. 利用二重积分或三重积分计算下列曲面所围立体体积V:

(1) $z = 6 + x + y, z = 0, x = 0, y = 0, x + y = 1.$

(2) $z = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x.$

(3) $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(4) $z = 1 - x^2 - y^2, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$ 所围成的立体在第一卦限中的部分.

(5) $z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12, x = 0, z = 0.$

(6) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), x = \sqrt{y}, y = x.$

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dV, \Omega$ 由曲面 $z = xy$ 与平面 $y = x, x = 1, z = 0$ 围成.

9. 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz$

10. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z^2)dV$, Ω 由曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 和平面 $z=H$, $z=-H(H>0)$ 所围成.

11. 利用柱面坐标计算三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dV$, Ω 由 $x^2+y^2=z$ 与 $z=1$ 围成.

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z dV$, Ω 由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成.

(3) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2) dV$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=2$ 所围成的区域.

12. 利用球面坐标计算三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV,\ \Omega: x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) $\iiint\limits_{\Omega} |\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|dV,\ \Omega$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域.

13. 求 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$, 其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leq 2Rz\ (R>0)$ 的公共部分.

14. 求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

15. 求 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

16. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2y, & 若1\le x\le 2, 0\le y\le x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 2x\}$.

17. 求 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值, 其中 D由直线$y=x, y=-1,$及$x=1$围成.

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$
.

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又设 D 是由直线 $x=0, y=0, x+y=1$ 在第一象限所围成的平面区域.

(1)求证: $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$ (2) 求 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

20. 设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中 D 是由 $y = 0$, $y = x^2, x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x,y)$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y \geq 1.$

22. 设 $F(t) = \iiint f(x^2+y^2+z^2)dV$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leq t^2$ $(t>0)$, f 为连续函数, 证明: $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

23. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 被抛物面 $x^2+y^2=2az$ $(z>0)$ 所围立体的表面积.

24. 求由曲线 $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$ 所围成的均匀薄板的重心.

25. 求由曲线 $r = a\sin 2\theta$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ 所围图形对原点的转动惯量.
(面密度 $\rho = 1$)

26. 求密度均匀的半球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 4\ (z \geq 0)$ 的重心坐标.

27. 求由抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=1, z=2$ 所围成的，密度均匀 $(\rho=1)$ 的立体对 z 轴的转动惯量.

第 10 章 曲线积分与曲面积分

1. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\int\limits_L (x-y)\mathrm{d}S$, 其中 $L: y=|1-x|-x; 0\le x\le 2$.

(2) 设L是连接点$A(2,0)$及$B(0,\frac{3}{2})$的直线段，其线密度为$\mu=2xy+\frac{3}{2}x^2$，求其质量.

(3) $\oint\limits_L x\mathrm{d}S$,其中 L 为由 Oxy 平面上的曲线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成区域的边界.

(4) $\oint\limits_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}S, L$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 其周长为 a .

(5) $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S, L$ 为圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$.

(6) $\oint\limits_L z\mathrm{d}S$, 其中 L为 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \qquad (0\le t\le t_0) \\ z=t \end{cases}$

(7) $\oint\limits_L x^2\mathrm{d}S, L$为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

2. 计算下列对坐标的曲线积分: (1) 计算曲线积分$\int\limits_L 2xy\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y$, 其中L是曲线$y=e^x$上从点$A(-1,e^{-1})$到点$B(1,e)$的一段.

(2) $\int\limits_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y, L$ 是折线 $y=1-|1-x|$ 上从点(0,0)到点(1,1)再到点(2,0)的二段线.

(3) 设$\vec{F}(x,y,z)=\sin x\vec{i}+\cos y\vec{j}+xz\vec{k}$, $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}-t^2\vec{j}+t\vec{k}$, $0\le t\le 1$, 求曲线积分$\int\limits_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, 其中$C$由向量函数$\vec{r}(t)$所确定.

(4) $\int\limits_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$的下半部分从$A(a,0)$到$B(-a,0)$的一段圆弧.

(5) $\oint\limits_L 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z, L$ 是圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=2 \end{cases}$, 从z轴正向看去，此圆周取逆时针方向.

3. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint\limits_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中$L$为$|x|+|y|=1$逆时针一周.

(2) $\oint\limits_L x^3y\mathrm{d}x+x^2y^2\mathrm{d}y$, 其中$L$为不等式$x^2+y^2\geq 1$及$x^2+y^2\leq 2y$所确定的区域$D$的正向边界.

(3) $\oint\limits_L e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x-e^x(y-\sin y)dy, L$由$y=\sin x, 0\leq x\leq \pi$与$x$ 轴围成,沿逆时针方向.

4. 计算积分:

(1) $\int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 其中$P(x,y)=x, Q(x,y)=y$, L为连接点$A(-1,1)$和点$B(3,9)$的一曲线弧.

(2) $\int\limits_L \frac{(3y-x)\mathrm{d}x+(y-3x)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$, 其中$L$是由点 $A(\frac{\pi}{2},0)$ 沿曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 到点 $B(0,\frac{\pi}{2})$ 的弧段.

5. 验证 $e^x[e^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x + e^x[e^y(x-y)+1]\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求出这样的一个 $u(x,y)$.

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$.

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

(4) $\oiint\limits_{\Sigma} x^2+y^2\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=4$.

(5) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截下的部分.

7. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$在第一卦限中被平面$z=0$及$z=h$ $(h>0)$所截出部分曲面块的前侧.

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下的部分,取外侧.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的下侧.

(4) $\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$z\geq 0$ 的外侧.

(5) $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$, 其中 Σ 是椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 的外侧.

(6)$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被 $z=1,z=2$ 所截部分的外侧.

8. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$和$z=0, z=1$ 所围的外侧.

(2) $\oiint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围立体表面的外侧.

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是圆锥面 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面$z=-1$ 所截下的有限部分曲面的上侧.

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

9. 求向量场 $\overrightarrow{u}(x,y,z)=xy^2\overrightarrow{i}+ye^z\overrightarrow{j}+x\ln(1+z)^2\overrightarrow{k}$ 在点$P(1,1,0)$处的散度 $div\,\overrightarrow{u}$

10. 设流体密度为1,流速 $\overrightarrow{v} = 3xz^2\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j} + z^3\overrightarrow{k}$, 求单位时间内从曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧流向上侧的流量Q.

11. 设 $\overrightarrow{A} = \{x - z, x^3 + yz, -3xy^2\}$,求 $\overrightarrow{A}$的旋度$rot\overrightarrow{A}$,并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (rot\overrightarrow{A})_n \mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 2)$, 其法向量与z轴正向夹角为锐角.

12. 用斯托克斯公式计算 $\oint_\Gamma (y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$为圆周$x^2+y^2+z^2=R^2, x+y+z=0$, 从x轴正向看,取逆时针方向.

13. 求 $\int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S, L$ 为空间螺旋曲线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi, a>0, b>0)$.

14. 设函数 $Q(x,y)$在XOY 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并且对任意t，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,\text{求}Q(x,y).$$

15. 确定常数 λ ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\overrightarrow{A}=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\overrightarrow{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\overrightarrow{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$, 的梯度,并求 $u(x,y)$.

16. 求$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为由$x^2+y^2=z^2$及$z=h(h>0)$围成的封闭曲面的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是此曲线的外法线的方向余弦.

第 11 章 无穷级数

1. 根据级数收敛与发散的定义及性质判断下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{4^{n+1}}{5^n}\right)$

2. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n+1}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{5^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$

3. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n-1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\frac{2}{3^n}$

4. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{3n+2})^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\ln n}}{2^n} \quad (a>1)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

5. 判断下列级数是否收敛, 若收敛, 是绝对收敛还是相对收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{3}{n})$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{\ln n}{\sqrt{n}})$

6. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}x^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}x^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$

7. 求下列函数项级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n! \cdot 3^n} x^n$

8. 将下列函数展开成x的幂级数, 并求出收敛区间.

(1) $\cos^2 x$

(2) $x^3 e^{-x}$

(3) $\ln(5+x)$

(4) $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$

(5) $\ln(1+x+x^2)$

(6) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

(7) $\frac{d}{\mathrm{d}x}(\frac{e^x-1}{x})$

(8) $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$

9. 将下列函数展开成$x-1$的幂级数, 并求出收敛区间.

(1) $\ln x$

(2) $\frac{1}{x^2+3x+2}$

10. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 试将$f(x)$展成$x$的幂级数, 并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

12. 下列周期函数f(x)的周期为2π, 试将f(x)展开成傅里叶级数,如果 $f(x)$ 在$[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

13. 将 $f(x)=x^2\ (0 \le x \le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

14. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi x$, 其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,\cdots)$. 求 $S(-\dfrac{5}{2})$.

15. 将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

16. 将 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le 1, \\ a, & 1<x\le 2, \end{cases}$ 展开成正弦级数和余弦级数.

17. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^a}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\ (a>-1)$

18. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$, 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛.

19. 已知正项数列$\{a_n\}$单调递减, 且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散, 试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛? 说明理由.

20. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明:级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

21. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为3,求幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

22. 将函数 $f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{\cos x - 1}{x})$ 展开成 x 的幂级数, 指出收敛域, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n}$ 的和.

23. 设 $f(x) = x(1 < x < 3)$, 试将它展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

第 十二 章 微分方程

1. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=0$;

(2) $dx+xydy=y^2dx+ydy$;

(3) $\frac{dy}{dx}=2(x-1)^2(1+y^2)$;

(4) $y\ln xdx=x\ln ydy$.

2. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

(2) $x\frac{dy}{dx} - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}, y\mid_{x=1} = 2$

(4) $x\frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x)$

3. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $xy' + y - e^x = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x, y\mid_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$

(3) $x^2y' + xy = 1$

(4) $3y' - y\sec x = y^4\tan x$

(5) $y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}y^2 - \frac{1}{x}y, y \mid_{x=1} = 1$

4. 求下列微分方程的通解.

(1) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$

(2) $(3x^2 + y\cos x)dx + (\sin x - 4y^3)dy = 0$

(3) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

(4) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$

(5) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$

5. 利用观察法求下列方程的积分因子,并求其通解.

(1) $(3x^2 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$

(2) $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$

(3) $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$

6. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $y'' = x \sin x$

(2) $xy'' = y' - xy'^2$

(3) $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0, y \mid_{x=0} = 0, y' \mid_{x=0} = 1$

7. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

(2) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(3) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

8. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $y'' + 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

(2) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x + 1, y \mid_{x=0} = 2, y' \mid_{x=0} = 1$

(3) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$

(4) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$

(5) $y'' + 4y' = 2\cos 2x$

(6) $y'' + y' = x^2 + \cos x$

9. 求微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解.

10. 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

11. 设 $y=e^x$是微分方程$xy'+p(x)y=x$ 的特解,求此微分方程满足条件 $y\,|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

12. 求满足下列条件的函数$y(x)$:

(1)求连续函数$y(x)$满足方程$y(x) = \int_0^{3x} y(\frac{t}{3})dt + e^{2x}$;

(2)求连续函数$y(x)$满足方程$x\int_0^x y(t)dt = (x+1)\int_0^x ty(t)dt(x>0)$

(3)求连续函数$y(x)$满足方程$y(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

13. 已知方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$, 试确定常数 a, b, c 并求该方程的通解.

14. 设二阶连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1, f'(1) = 2$,且使曲线积分 $\int\limits_L y[xf'(x) + f(x)]dx - x^2 f'(x)dy$ 与路径无关,求函数 $f(x)$.

15. 设连续可微函数 $\varphi(x)$满足$\varphi(0) = 1$, 且使得曲线积分

$$\int_L [\sin 2x - y\varphi(x)\tan x]dx + \varphi(x)dy$$

与路径无关.

(1)求$\varphi(x)$;

(2)求$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} [\sin 2x - y\varphi(x)\tan x]dx + \varphi(x)dy$.