华东师范大学 2012 年攻读硕士学位研究生入学试题　　共 3 页

考试科目代码及名称： 360 高等数学(A)

招生专业(领域)名称：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号).

一、填空题(本题 (共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

1．曲线 $y=3x^5-5x^4$ 有________________个拐点.

2．计算 $\int_{-3}^{3}(x\cos\frac{x}{2}+1)\sqrt{9-x^2}dx=$___________________.

3．设函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$．则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=$_____________，$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)=$_____________.

4．曲面 $x^2-4y^2+2z^2=6$ 上点 $(2,2,3)$ 处的法线方程为___________________.

5．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n2^n}$ 的收敛域是____________________.

6．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=5BA^*+E$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，E 为3阶单位矩阵．则

$|B|=$________________.

二、选择题 (本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

7．下列命题正确的是_________.

[A] 设 $f(x)$ 为有界函数，且 $\lim\alpha(x)f(x)=0$，则 $\lim\alpha(x)=0$；

[B] 设 $\alpha(x)$ 为无穷小量,且 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\neq 0$，则 $\lim\beta(x)=\infty$；

[C] 设 $\alpha(x)$ 为无穷大量,且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=a$，则 $\lim\beta(x)=0$；

[D] 设 $\alpha(x)$ 为无界函数,且 $\lim\alpha(x)f(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$.

8．函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,则在点 $(0,0)$ 处 _________.

[A] 不连续；　　**[B]** 两个偏导数均存在；

[C] 沿任一方向的方向导数都存在；　　**[D]** 可微.

9．设曲线 $L: f(x,y)=2$ 经过第四象限内的点 M 和第二象限内的点 N，其中函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，又 Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧．则下列积分为**负值**的是________．

[A] $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x$； **[B]** $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}y$；

[C] $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$； **[D]** $\int_{\Gamma} f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$．

10．设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$，其中的系数

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x \mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots$．则 $S\left(\dfrac{11}{2}\right)=$________．

[A] $-\dfrac{1}{2}$； **[B]** $-\dfrac{3}{4}$； **[C]** $\dfrac{1}{2}$； **[D]** $\dfrac{3}{4}$．

11．微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}+1$ 的特解具有的形式为 ________．

[A] $Ae^{-2x}+B$； **[B]** $Axe^{-2x}+B$；

[C] $Ax^2e^{-2x}+B$； **[D]** $e^{-2x}+B$．

12．设 A 是 $n\times n$ 非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．$r(E+A)$ 和 $r(E-A)$ 分别表示矩阵 $E+A$ 与 $E-A$ 的秩． 已知 $A^3=0$，则有________．

[A] $r(E-A)<n$，$r(E+A)<n$； **[B]** $r(E-A)<n$，$r(E+A)=n$；

[C] $r(E-A)=n$，$r(E+A)<n$； **[D]** $r(E-A)=n$，$r(E+A)=n$

三、解答题

13．(10 分) 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)\left(x-\ln(1+\sin x)\right)}{\tan^4 x}$ ．

14．(10 分) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^2$ 的敛散性.

15．(10 分) 证明不等式: 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

16．(12 分) 求函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{3t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

17．(12 分) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=xy+x^2y\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由直线 $y=x,\ y=0,\ x=1$ 所围

成的区域. 求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

18．(12 分) 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a$的外侧.

19．(12 分) 设函数$u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中f是二阶可微的函数, 且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=1$. 已知函数$u(x,y,z)$满足 Laplace 方程

$$(E)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

(1) 试将上述偏微分方程(E)化为$f(r)$的常微分方程;

(2) 求出$f(r)$的解析式.

20．(12 分) 已知向量$\alpha_1=(1,\ 0,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 3,\ 5)^T$，$\alpha_3=(1,\ -1,\ a+2,\ 1)^T$，$\alpha_4=(1,\ 2,\ 4,\ a+8)^T$以及向量$\beta=(1,\ 1,\ b+3,\ 5)^T$.

(1) 若β不能由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出，求a、b的值；

(2) 求a、b为何值时，β可以表示成α_1，α_2，α_3，α_4的线性组合且表法唯一，并求出该表达式.

21．(12 分) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&2&3\\0&0&a\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&b&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$相似.

(1) 求a、b的值；

(2) 求可逆矩阵P使$P^{-1}AP=B$.