

第2-3节

常数项级数的收敛准则

一、正项级数及其收敛准则

二、交错级数及其收敛准则

三、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数及其收敛准则

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 \iff 部分和序列 S_n
($n = 1, 2, \dots$) 有界.

定理2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数,

且存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \leq k v_n$ (常数 $k > 0$), 则有

- (1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;
- (2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨设对一切 $n \in \mathbb{Z}^+$, 都有 $u_n \leq k v_n$,

令 S_n 和 σ_n 分别表示 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和, 则有

$$S_n \leq k \sigma_n$$

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $S_n \leq k \sigma$

由定理 1 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, 这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例1. 讨论 p 级数 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ (常数 $p > 0$)

的敛散性.

解: 1) 若 $p \leq 1$, 因为对一切 $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p > 1$, 因为当 $n-1 \leq x \leq n$ 时, $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 故

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} &= \int_{n-1}^n \frac{1}{n^p} dx \\ &\leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \end{aligned}$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right]$ 的部分和

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

故级数收敛, 由比较判别法知 p 级数收敛.

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对一切 $n \geq N$,

(1) $u_n \geq \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) $u_n \leq \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散

根据比较判别法可知, 所给级数发散.

定理3. (比较判别法的极限形式) 设两正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 满足 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \text{ 则有}$$

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \quad (l \neq \infty)$$

$$(l - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (l + \varepsilon) v_n \quad (n > N)$$

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 取 $\varepsilon < l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时, 利用 $u_n < (l + \varepsilon) v_n$ ($n > N$), 由定理 2 知若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 时, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $\frac{u_n}{v_n} > 1$, 即

$$u_n > v_n$$

由定理 2 可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

特别取 $v_n = \frac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l \quad \begin{cases} p \leq 1, 0 < l \leq \infty \implies \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1, 0 \leq l < \infty \implies \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散.

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{1}{n^2} \right]$ 的敛散性.

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \left[1 + \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{1}{n^2} \right]$ 收敛.

定理4 . 比式判别法 (D'alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时, 级数发散.

证: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 取 ε 使 $\rho + \varepsilon < 1$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 知存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \therefore u_{n+1} &< (\rho + \varepsilon) u_n < (\rho + \varepsilon)^2 u_{n-1} < \cdots \\ &< (\rho + \varepsilon)^{n-N} u_{N+1} \end{aligned}$$

$\sum (\rho + \varepsilon)^k$ 收敛, 由比较判别法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时, 必存在 $N \in Z_+$, $u_N \neq 0$, 当 $n \geq N$ 时 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

说明: 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{级数收敛;} \\ p \leq 1, \text{级数发散.} \end{cases}$

例5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ($x > 0$) 的敛散性.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

根据定理4可知:

当 $0 < x < 1$ 时, 级数收敛;

当 $x > 1$ 时, 级数发散;

当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

定理5. 根式判别法 (Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散.

证明提示: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, \therefore 对任意给定的正数 ε

($\varepsilon < |1 - \rho|$), 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$$

$$\rho < 1 \implies \rho + \varepsilon < 1$$

即

$$(\rho - \varepsilon)^n < u_n < (\rho + \varepsilon)^n$$

$$\rho > 1 \implies \rho - \varepsilon > 1$$

分别利用上述不等式的左, 右部分, 可推出结论正确.

说明： $\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散。

例如， p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ：

$$u_n = \frac{1}{n^p}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{ 级数收敛;} \\ p \leq 1, \text{ 级数发散.} \end{cases}$

例6. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 收敛于 S , 并估计以部分和 S_n 近似代替和 S 时所产生的误差 .

解: $\because \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

由定理5可知该级数收敛 . 令 $r_n = S - S_n$, 则所求误差为

$$\begin{aligned} 0 < r_n &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n} \end{aligned}$$

二、交错级数及其收敛判别法

设 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

称为**交错级数**.

定理6. (Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

$$1) \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

证: $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq u_1$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$

故级数收敛于 S , 且 $S \leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$\therefore |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leq u_{n+1}$$