2022年数学科学学院转专业考试（非师范笔试）试题

求解下列各题（100分，每小题分10分，最后三题为高中内容）

(1) (I) 证明: 当$x \in [0,1)$时,

$$x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x) \le x.$$

(II)求极限$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$

(2) 设非负函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 在点$x_0 \in [a,b]$处连续并且$f(x_0) > 0$. 证明: $\int_a^b f(x)dx > 0$ $(a<b)$.

(3) 设$f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{(g(-x+t)-g(-x))\sin(2xt)}{t^2}$, $\ln(1+x^2)$是 $g(x)$ 的一个原函数, 求$\int_0^1 f(x)dx$.

(4) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导. 证明存在$\xi \in (a,b)$使得

$$f\,'(\xi) = 2\xi + \frac{f(a)-f(b)}{a-b} - a - b$$

(5) 已知点$A(1,0,1), B(1,2,5)$, 求过点A, B的直线绕z轴旋转所得旋转曲面方程.

(6) 设$f(x)$在$(0,1)$上有定义, 且函数$e^x f(x)$与$e^{-f(x)}$在$(0,1)$上单调不减. 证明: $f(x)$在$(0,1)$上连续.

(7) 设函数$f(x)$在区间$[0,2]$上连续, 在$(0,2)$内可导, 且$f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)| \le 1$. 证明: $1 \le \int_0^2 f(x)dx \le 3$.

(8) 如果一个数列由有限个连续的正整数组成 (数列的项数大于2), 且所有项之和为N, 那么称该数列为N型标准数列, 例如: 数列$2,3,4,5,6$为20型标准数列. 求2668型标准数列的个数.

(9) 已知数列$\{a_n\}$是首项为1, 公差为$2m$的等差数列, 前n项和为S_n. 设$b_n = \frac{S_n}{2^n n}$ (n为正整数), 若数列$\{b_n\}$是严格递减数列, 求实数m的取值范围.

(10) 若函数$f(x), g(x)$满足: 对任意$x \in [u,v]$, $|f(x)-g(x)| \le 1$恒成立, 其中实数$u<v$, 则称$f(x)$与$g(x)$在区间$[u,v]$上"近似".

(I) 若$f(x) = x + \frac{8}{x}$与$g(x) = -x + m$在区间$[1,3]$上近似, 求实数m的所有可能值;

(II) 对任意两个定义在$[0,1]$上的函数$f(x), g(x)$, 是否一定存在一个正整数N和$N+1$个函数$f_i(x)$ $(i = 0, 1, \cdots, N)$, 其中$f_0(x) = f(x), f_N(x) = g(x)$. 使得对$i = 0, 1, \cdots, N-1$均有$f_i(x)$与$f_{i+1}(x)$在区间$[0,1]$上近似? 证明你的结论.