§4 连续函数

1. 函数的连续性

几何意义: 函数图像是否连绵不断.

定义1 设 $f(x)$ 在 $U(x_0;h)$ 内有定义, 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 并称点 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

例 1 多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,

正弦函数 $\sin x$, 余弦函数 $\cos x$

在任意 x_0 处连续.

连续函数的等价定义

函数在 x_0 处连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义:

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,h)$ 内有定义,

若对任意给定的正数 ε, 存在数 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

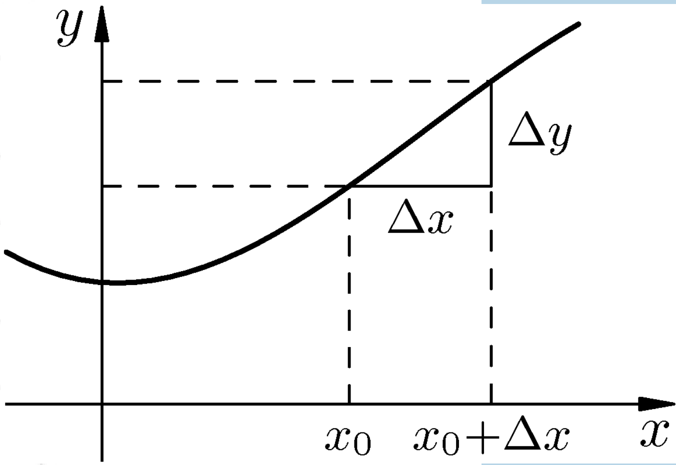
$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

$\Delta x=x-x_0$ 称为自变量 x 在 x_0 处的增量,

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的增量.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

连续定义可写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0).$



左右连续

定义2 设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+h)$ (或 $(x_0-h, x_0]$)内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\text{或} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续 (或左连续).

定理1 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处左右连续 .

(适用分段点)

例2 讨论 $f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处的连续性.

解
$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0} x = 0 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0} (-x) = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处连续.

连续函数

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点处连续， 则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，也称函数$f(x)$是 (a,b) 内的连续函数.

若函数 $f(x)$ 在开区间(a,b) 内连续， 且在左端点 a 处右连续，右端点 b 处左连续，则称 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并称函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数.

若函数 $f(x)$ 函数的定义域由区间组成，它在这些区间上连续，则称函数 $f(x)$ 在其定义域上连续.

2. 间断点,及其分类

设函数 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0,h)$ 内有定义，若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点.

间断点的类型:

(1) 若 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 第一类间断点.

(a) 若 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 可去间断点.

(b) 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 跳跃间断点.

(2) 若 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 第二类间断点.

对可去间断点，只要重新定义 $f(x_0)=f(x_0-0)$，能使 x_0 为连续点.

间断点例子

例 3 $y=\dfrac{\sin x}{x},\quad x=0$ 是可去间断点.

延拓成 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 这是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

$y=\operatorname{sgn}(x),\quad x=0$ 是跳跃间断点.

$y=\dfrac{1}{x},\quad x=0$ 是第二类间断点.

定理2 (连续函数的局部有界性)

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续， 则$\exists\delta>0$, 使得$f(x)$ 在$U(x_0;\delta)$ 内有界.

定理3 (连续函数的局部保号性)

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续， 且 $f(x_0)>0$ (或 $f(x_0)<0$),

则 $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时，有

$$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0 \qquad (\text{或 } f(x)<\frac{f(x_0)}{2}<0).$$

定理4 (连续函数的四则运算)

若 $f(x), g(x)$ 都在 x_0 处连续，

则 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处也连续 .

因为 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

在其定义域上连续.

例 4　求证 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$,

证　已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, 下面证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.　则 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} a^{x_0} = a^{x_0}$.

不妨设　$a > 1$,　先证　$\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.

令 $0 < x < 1, n = [\frac{1}{x}]$,　则　$0 < \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$,　　$x \to 0^+ \Leftrightarrow n \to \infty$.

由　a^x　严格递增得　$1 < a^x \le a^{\frac{1}{n}}$,　　$\lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

由迫敛性知 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.　而　$\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = \lim\limits_{t\to 0^+} a^{-t} = \dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0^+} a^t} = 1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

当 $0 < a < 1$　时,　$\lim\limits_{x\to 0} a^x = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{a})^x} = 1$.

定理5 若 $y = f(x)$ 是区间 I 上的严格递增(减)连续函数,

则 $y = f^{-1}(x)$ 也是区间 $J = f(I)$ 上的严格递增(减)连续函数,

因此

$$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arc}\cot x,$$

$$\log_a x$$

都是(相应定义域上)连续函数.

定理6 设 $u = g(x)$ 在 x_0 处连续, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则 $y = f\big(g(x)\big)$ 在 x_0 处连续.

证 由 $y = f(u)$ 在 u_0 处连续,

则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 使得当 $|u - u_0| < \eta$ 时, 有

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

另由 $u = g(x)$ 在 x_0 处连续, 对上述 $\eta > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta.$

所以对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left|f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)\right| = \left|f(u) - f(u_0)\right| < \varepsilon$$

因此 $y = f\big(g(x)\big)$ 在 x_0 处连续.

初等函数的连续性

幂函数可以写成 $y = x^{\alpha} = (e^{\ln x})^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

所以 $y = x^{\alpha}$ 是连续函数.

因此基本初等函数在其定义域上连续.

初等函数在其定义域上连续.

所以一般只要讨论分段函数的分段点处的连续性.

举例

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\arctan\sqrt{\ln x}}{\sin\dfrac{\pi x}{2e}}$.

解 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\arctan\sqrt{\ln x}}{\sin\dfrac{\pi x}{2e}}=\dfrac{\arctan\sqrt{\ln e}}{\sin\dfrac{\pi e}{2e}}=\dfrac{\arctan 1}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-\ln(2-\sin x)}{\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-\ln(2-\sin x)}{\sin x}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}-\ln\left(2-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{4}}$.

举例

例 7　证明　$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$

证明　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

所以　$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$

例 8　证明　$e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0).$

证明　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{t=e^x-1}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \dfrac{1}{\ln e} = 1.$

所以　$e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0).$

例9 连续复利

设存款计息1 次/年时，年率为 r, 本金为 A, 则 n 年后的本息为

$$S = A(1+r)^n,$$

再设, 计息 t 次/年, 则 每次利率 $\dfrac{r}{t}$, 从而

$$S = A\left[(1+\frac{r}{t})^t\right]^n.$$

令 $t \to \infty$,

$$S = A\lim_{t\to\infty}\left[(1+\frac{r}{t})^t\right]^n = A\lim_{t\to\infty}\left[(1+\frac{r}{t})^{\frac{t}{r}}\right]^{rn} = Ae^{rn}.$$

例10 细菌繁殖

设初始细菌数 A_0, 求经过一段时刻 t 后的细菌总数 S.

一般若 t_i 时刻的细菌数为 $A(t_i)$, 增速为 $V(t_i)$, 则有 $V(t_i) = k \cdot A(t_i)$,

k 为常数, n 等分 $[0, t]$, 则

在 $[0, \frac{t}{n}]$ 末, 细菌数 $S_1 = A_0 + V(0) \cdot \frac{t}{n} = A_0 + (kA_0) \cdot \frac{t}{n} = A_0(1 + k\frac{t}{n})$,

在 $[\frac{1}{n}t, \frac{2}{n}t]$ 末, 细菌数 $S_2 = A_0(1 + k\frac{t}{n})^2$,

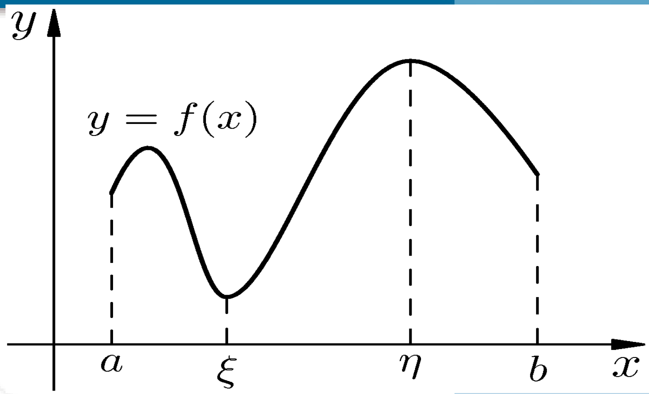
$$\cdots\cdots\cdots$$

在 $[\frac{n-1}{n}t, \frac{n}{n}t]$ 末, 细菌数 $S_n = A_0(1 + k\frac{t}{n})^n$,

令 $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_0\left(1 + k\frac{t}{n}\right)^n = A_0 \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^{\frac{n}{kt}}\right]^{kt} = A_0\,\mathrm{e}^{kt}$.

$y = A\mathrm{e}^{kt}$ 称为(细菌的)生长函数.

4. 闭区间上连续函数的性质



定理7(最大最小值定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少 $\exists \xi,\eta$，使得当 $x\in[a,b]$ 时，有

$$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta),$$

$f(\xi), f(\eta)$ 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

此定理在开区间上不成立，例 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续, 但无最值.

推论(有界性定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

介值定理

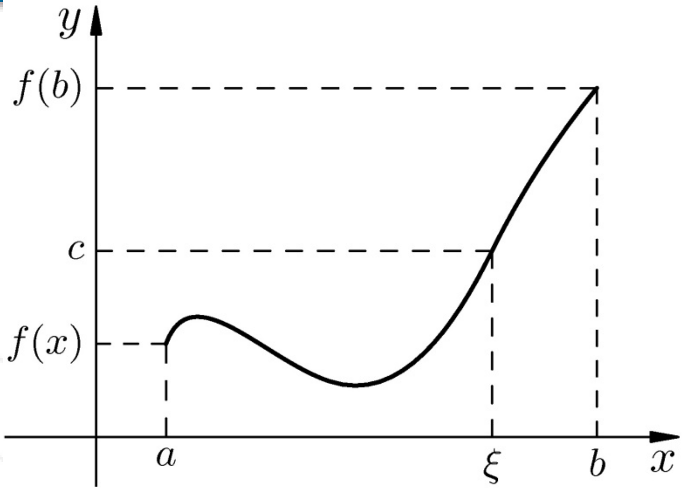
定理8(介值定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$,

则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 $\boldsymbol{\mu}$,

在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \mu.$$

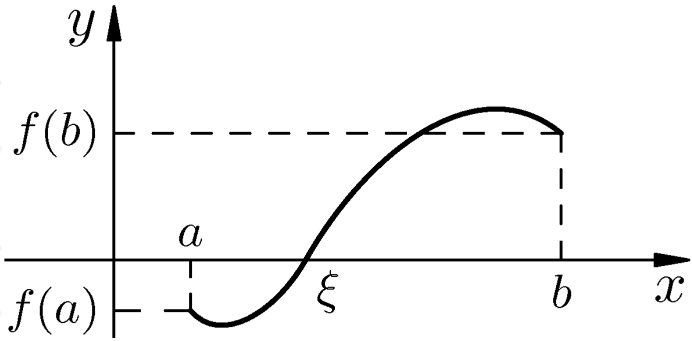


推论 (根的存在定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = 0.$$



根的存在定理的应用例子

例**11** 证明 $x^3+x^2+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

证 设 $f(x)=x^3+x^2+x-1,$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0,\ f(1)=2>0,$

故在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0.$$

即 ξ 是 $x^3+x^2+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内的一个根.