高等数学练习卷（Ⅱ）

一、求函数 $f\left(x\right)=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

二、计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{6}{x^2-x-2}\right)$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{e^{-x^2}-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$.

三、求下列函数的导数或微分

（1 设 $y=\ln x+\ln 2$，求 y' ；

（2）设 $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$，求 y'；

（3）设 $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$，求 dy；

（4）设 $y=e^{-x}\sin x$，求 dy；

（5）设 $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$，求 y'.

四、设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+a\sin^2 x}-1$ 与 $\ln(1+x^2)$ 是等价无穷小量，求常数 a 的值.

五、

（1）确定常数 a、b 的值，使函数

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0\\ -1, & x=0\\ \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1+bx}, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续；

（2）求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x}{|x|\left(x^2-4\right)}$ 的间断点，并确定其类型。若是可去间断点，则补充定义函数值后使它连续.

六、

（1）求曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$ 在点 $\left(4,4\right)$ 处的切线方程和法线方程；

（2）求参变量函数 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

七、设 $f\left(t\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}\sin\dfrac{t}{2x^2+1}$，求 $f'\left(t\right)$.

八、设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$（$n=1,2,\cdots$），证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛，并求其极限.

华东师范大学化学与分子工程学院
化学系2015级本科生化学班团支部
宣

高等数学练习卷(Ⅱ)答案

一、求函数 $f\left(x\right)=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 $\left|\frac{x-1}{5}\right|\le 1$，$25-x^2>0$，$-4\le x\le 6$ 且 $-5<x<5$。

$\therefore$所求函数的定义域为 $\left[-4,5\right)$。

二、计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5=e^5$

（3） $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{6}{x^2-x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+3\right)}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+1}=\frac{5}{3}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{e^{-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{-x^2}=-1$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(\tan x-\sin x\right)}{x^3}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\sin x\left(1-\cos x\right)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}x\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

三、求下列函数的导数或微分

（1 设 $y=\ln x+\ln 2$，求 y' ；

解 $y'=\frac{1}{x}$

（2）设 $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$，求 y'；

解 $y'=\frac{\left(1-\ln x\right)'\left(1+\ln x\right)-\left(1-\ln x\right)\left(1+\ln x\right)'}{\left(1+\ln x\right)^2}=-\frac{2}{x\left(1+\ln x\right)^2}$

（3）设 $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$，求 dy；

解 $dy=2\arctan\frac{x}{2}d\left(\arctan\frac{x}{2}\right)=2\arctan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{1}{2}dx=\frac{4}{x^2+4}\arctan\frac{x}{2}dx$

（4）设 $y=e^{-x}\sin x$，求 dy；

解 $dy=d\left(e^{-x}\right)\sin x+e^{-x}d\left(\sin x\right)=\left(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)dx$

（5）设 $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$，求 y'.

解 取对数，得

$$\ln y=x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

在上式两边关于 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1}\frac{-2}{x^2}$$

$\therefore y'=y\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1}\frac{-2}{x^2}\right]=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}\right]$

四、 设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+a\sin^2 x}-1$ 与 $\ln(1+x^2)$ 是等价无穷小量，求常数 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+a\sin^2 x}-1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}a\sin^2 x}{x^2}=\frac{a}{4}$

另外，由条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+a\sin^2 x}-1}{\ln(1+x^2)}=1$

$\therefore \frac{a}{4}=1$，因此 $a=4$

五、

（1）确定常数 a、b 的值，使函数

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0\\ -1, & x=0\\ \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1+bx}, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续；

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=-\sqrt{2}a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1+bx}=-b$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须有

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$$

由此得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点，并确定其类型. 若是可去间断点，则补充定义函数值后使它连续.

解 由函数 $f(x)$ 的表达式知，$f(x)$ 间断点是 $x_1=0$，$x_2=2$，$x_3=-2$

$\because \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x_1=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

$\because \lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x_2=2$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，而且是 $f(x)$ 的可去间断点. 若补充定义 $f(2)=\dfrac{1}{4}$，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

$\because \lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\infty$

$\therefore x_3=-2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

六、

（1）求曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$ 在点 $(4,4)$ 处的切线方程和法线方程；

解 在方程两边关于 x 求导，得

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=0$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，由此得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=4\\y=4}}=-1$

因此所求的切线方程为

$$y-4=(-1)(x-4) \quad \text{即} \quad x+y-8=0$$

法线方程为

$y-4=1\cdot(x-4)$ 即 $x-y=0$

（2）求参变量函数$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解 $\because \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$， $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}t$

因此$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{1+t^2}{4t}$

七、设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}\sin\dfrac{t}{2x^2+1}$，求 $f'(t)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}=e^{2t}$， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)\sin\dfrac{t}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{t\left(x^2+1\right)}{2x^2+1}=\dfrac{t}{2}$

$\therefore f(t)=\dfrac{1}{2}te^{2t}$

因此 $f'(t)=\dfrac{1}{2}e^{2t}+te^{2t}$

八、设 $x_1=1$， $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$ （$n=1,2,\cdots$），证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

解 $\because x_1=1$且$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$， $\therefore 0<x_n<2$

又$\because x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$且$x_2=1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}>1=x_1$

$\therefore \{x_n\}$单调有界， 由单调有界原理知$\{x_n\}$收敛。

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解之得$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$