第4章 不定积分

$$\left.\begin{array}{l} \text{微分法: } F'(x) = (\ ?\ ) \\[2em] \text{积分法: } (\ ?\ )' = f(x) \end{array}\right\} \text{互逆运算}$$

第4章 不定积分

§1　不定积分的概念

1.1 原函数与不定积分的概念

1.2 基本积分公式

1.3 不定积分的性质

1.1 原函数与不定积分的概念

定义 1 若在区间 I(有限或无穷) 上定义的两个函数 F (x) 及 f (x)满足

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad dF(x) = f(x)dx$$

则称 F (x) 为f (x)在区间 I上的一个原函数 .

例 $(\sin x)' = \cos x \ (x \in R)$ $\sin x$是$\cos x$在 R 上的原函数.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

问题:

1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在 ？

2. 若原函数存在，是否唯一?

3. 若不唯一有多少个? 它们之间有什么联系?

对于第1个问题,有

原函数存在定理

若$f(x) \in C(I) \Rightarrow f(x)$在$I$上一定存在原函数.

(下章证明)

初等函数在定义区间上连续 $\longrightarrow$

初等函数在定义区间上有原函数.

问题:

1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在 ？

2. 若原函数存在，是否唯一?若不唯一有多少个?

3. 它们之间有什么联系？

例 $(\sin x)' = \cos x \quad (\sin x + C)' = \cos x$

（C为任意常数）

对于第2个问题, 若原函数存在, 原函数有无穷多!

问题:

1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在 ？

2. 若原函数存在，是否唯一?若不唯一有多少个?

3. 它们之间有什么联系？

$f(x)$的任意两个原函数之间相差一个常数!

复习第3章第1节的

定理2 如果函数$F(x),G(x)$在区间I上可微，

且$F'(x)=G'(x) \Rightarrow F(x)=G(x)+C, x \in I$,

其中C为常数.

定义2 若$f(x)$在区间I内存在原函数,则$f(x)$在I内的原函数全体称为$f(x)$的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C \mid F'(x)=f(x), x\in I, C\in R\}$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　积分常数

通常简写成

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$ （C 为任意常数）

注意：1. 积分号“$\int$ ”是一种运算符号，它表示求已知函数的所有原函数；

求已知函数的所有原函数即不定积分的方法称为积分法.

由不定积分的定义，可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),\qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,\qquad \int dF(x)=F(x)+C.$$

2. 求不定积分的运算与微分运算是互逆的.

例1 求$\int x^5 dx$.

解 $\because \left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5$, $\therefore \int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$.

例2 求$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx$.

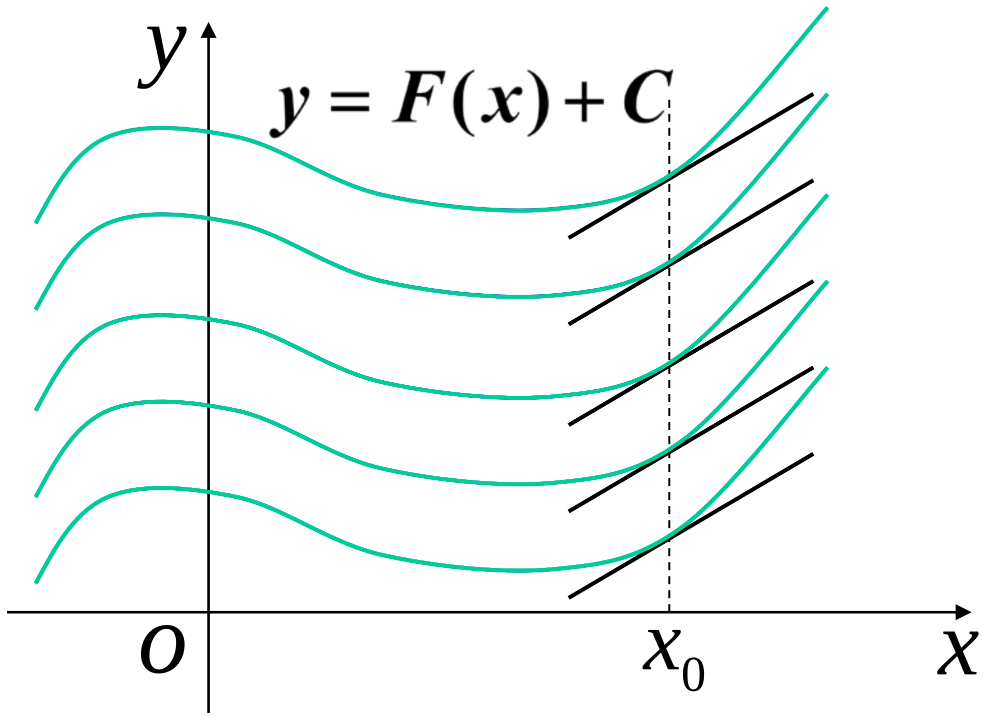
解 $\because \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线 .

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



求f (x)的过(x_0, y_0)的积分曲线：

将(x_0, y_0)代入$y = F(x) + C$可解得

$C = y_0 - F(x_0) := C_0$,

即得到所求的积分曲线：$y = F(x) + C_0$

定义:用于确定常数C的条件

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad 或 \quad y(x_0) = y_0$$

称为初始条件,带有初始条件的求原函数问题,称为初值问题:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

例3 求的初值问题 $\begin{cases} y' = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$，

解

1.2 基本积分公式

利用逆向思维

(1) $\int 0dx = C$

(2) $\int 1dx = x + C$

(3) $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

(4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

(5) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C;$

(6) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

$$(7)\ \int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$(8)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$(9)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C;$$

$$(10)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C;$$

$$(11)\ \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$(12)\ \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$; 或 $= -\arccos x + C$.

(14) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$; 或 $= -\operatorname{arccot} x + C$.

例4 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx$.

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2）$\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

1.3 不定积分的性质

性质　若$f(x)$，$g(x)$在区间I内存在原函数,则

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.（$k$是常数，$k \neq 0$)

若　$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$,则

$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx$$

例5 求积分 $\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx.$

解 原式 $= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$$

例6 求积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

拆项法

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C.$$

例7 **求积分** $\int \tan^2 x dx.$

解 提示:$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

例8 求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

说明： 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

练习

1. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

2. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$

练习1：求 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解：原式 $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\cot x - \tan x + c$$

练习2：求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

解：原式

$$= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2}dx$$

$$= \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

练习3： 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$

提示：$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 基本积分表 (见P 149)
- 不定积分的性质

2. 直接积分法:

利用恒等变形, 积分性质 及 基本积分公式进行积分 .

$$\text{常用恒等变形方法}\begin{cases}\text{分项积分}\\ \text{加项减项}\\ \text{利用三角公式 , 代数公式 ,}\cdots\end{cases}$$

思考与练习

1. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x = \underline{-\frac{1}{2}x^2 + C}$$

提示：$f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$

$$f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

2. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \underline{\frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C}$$