第二章 一元微分学

第一节 导数、微分、高阶导的计算

有关知识：

（1）导数、微分的概念，性质。基本导数公式表.
（2）求导法则.

（3）$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处左、右导数都存在且相导。对一元函数可导 $\Rightarrow$ 连续（反之不然）.

（4）高阶导数的计算，记住几个简单函数的高阶导数：$e^x, a^x \ln(a+x), \sin x, \cos x, (a+x)^\alpha$（特别 $\frac{1}{1+x}$, 或 $\frac{1}{1-x}$）及莱布尼兹公式。

例 1：（1）设 $f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)$，则 $f'(1)=$ ______ 。

（2）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}=$ __ 。

（3）设严格单调函数 $y=f(x)$ 有二阶连续导数，其反函数为 $x=\varphi(y)$，且 $f(1)=1, f'(1)=2, f''(1)=3$，则 $\varphi''(1)=$ ______ 。

分析：（1）易见 $f(1)=0$ 可直接由导数定义求出结果：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=-\frac{99!}{2}\pi$

（2）已知 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$，那么 $\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}=$

$$\frac{f(1+\sin x)-f(1)+f(1+x)-f(1)-2(f(1-\tan x)-f(1))}{x}$$

$$=\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}+\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+2\frac{f(1-\tan x)-f(1)}{-\tan x}\times\frac{\tan x}{x}$$

$$\to 2\times 1+2+2\times 2\times 1=8$$

另解：由题设知 $f(1+h)=f(1)+2h+o(h)(h\to 0)$，则

$$\frac{f(1+\sin x)+f(1+x)-2f(1-\tan x)}{x}$$

$$=\frac{2\sin x+2x+4\tan x+o(\sin x)+o(x)+o(\tan x)}{x}\to 8$$

（3）$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'}$，$\varphi''(y)=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^3}$，又 $x=1$ 时 $y=1$

$$\varphi''(1)=-\frac{y''}{(y')^3}\Big|_{x=1}=-\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\frac{3}{8}$$

例 2：设 $p(x)=x, q(x)=1-x, f(x)$ 为多项式，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $f(x)\ge p(x), f(x)\ge q(x)$

试证 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$ 。

分析：初一看与导数没有关系。且由题设可以看出 $f(\frac{1}{2})\ge p(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，但如何说明 $f(\frac{1}{2})\ne\frac{1}{2}$？这是问题的关键。这里用到：多项式总是可导的。

证明：由题设知 $f(\frac{1}{2})\ge p(\frac{1}{2})=q(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

若 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，

则当 $x>\frac{1}{2}$ 时

$\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}\ge\dfrac{p(x)-p(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=1$，令 $x\to\frac{1}{2}+0$，可得 $f_+{}'(\frac{1}{2})\ge 1$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时

$\dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}\le\dfrac{q(x)-q(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=-1$，令 $x\to\frac{1}{2}-0$，可得 $f_-{}'(\frac{1}{2})\le -1$

从而 $f_+{}'(\frac{1}{2})\ne f_-{}'(\frac{1}{2})$ 这与多项式可导矛盾，故 $f(x)\ne\frac{1}{2}$

所以 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$

例 3（1）设 $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________

（2）设 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________

解：（1） $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{3}{2}4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$

（2） $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}=(x-1)^{\frac{1}{2}}+2(x-1)^{\frac{-1}{2}}$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{\frac{1}{2}-n}+2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(x-1)^{\frac{1}{2}-n}+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n-1}}(x-1)^{-\frac{1}{2}-n}$$

例 4 设 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求

（I） $f^{(n)}(x)$；

解（I） $f(x)=x\ln(1-x^2)=x\ln(1+x)+x\ln(1-x)$

$n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x)^{(k)}[\ln(1+x)+\ln(1-x)]^{(n-k)}$

$$=x[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}]+n[\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}-\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}]$$

$$=\frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\frac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n}$$

$$f'(x)=\ln(1-x^2)-\frac{2x^2}{1-x^2}$$

所以 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2)-\dfrac{2x}{1-x^2},n=1\\ \dfrac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\dfrac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n},n\geq 2\end{cases}$

解法二： $f'(x)=\ln(1-x^{2)}-\dfrac{2x^2}{1-x^2}$，

$f'(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)+2-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}$，

$n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}-\dfrac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}-\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

$$=\frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\frac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n},$$

所以 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2)-\dfrac{2x}{1-x^2},n=1\\ \dfrac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}-\dfrac{(n-2)!(n-x)}{(1-x)^n},n\geq 2\end{cases}$

注：若本问题改为求 $f^{(101)}(0)$，则不必这样去做，可由 Taylor 公式或幂级数展

开解决：

$$f(x)=-x[x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots+\frac{1}{50}x^{100}+o(x^{100})]=-x^3-\frac{1}{2}x^5-\cdots-\frac{1}{50}x^{101}+o(x^{101})$$

所以 $f^{(101)}(0)=-\frac{101!}{50}=-202\times 99!$

注：求高阶导的方法很多，主要有

（1） 将函数恒等变形，尤其是分拆成几个简单函数的和差，然后利用简单函数的高阶导求出结果；

（2） 用莱布尼兹公式；

（3） 利用幂级数展开；

（4） 归纳，递推等.

当求高阶导函数时，（1）是最常用的方法，（2）也是常用方法之一。当求在某一点的高阶导数时，（3）是常用的方法。

例 5：（1）设 $f(x)=x^{100}e^x$，则 $f^{(200)}(0)=$ ________

（2） 设 $f(x)=x^{100}e^{x^2}$，则 $f^{(200)}(0)=$ ________

解：（1）用莱布尼兹公式

$$f^{(200)}(0)=(x^{100}e^x)^{(200)}|_{x=0}=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k(x^{100})^{(k)}(e^x)^{(200-k)}|_{x=0}=\frac{200!}{100!}$$

或利用幂级数展开

$$f(x)=x^{100}(1+x+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}+\cdots)=x^{100}+\cdots+\frac{1}{100!}x^{200}+\cdots$$

由展开式中 x^{200} 的系数 $\frac{1}{100!}$ 可得 $f^{(200)}(0)=\frac{200!}{100!}$

（2）利用幂级数展开很容易得结果：$\frac{200!}{50!}$，而莱布尼兹公式不方便。

例 6：设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，求 $f^{(n)}(0)$。

分析：本题用前面提到的方法（1），（2），（3）都不方便。试一试方法（4）。

解：$f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，得 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x$，再求导得

$\sqrt{1-x^2}f''(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，整理得 $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$

两端求 n 次导得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$$

又由 $f'(0)=0, f''(0)=2$，可得

当$n=2k+1(k=0,1,\cdots)$时，$f^{(n)}(0)=0$

当$n=2k(k=1,2,\cdots)$时，$f^{(n)}(0)=f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$

例 7：(1) 已知$y=y(x)$由方程$e^y+6xy+x^2=1$确定，则$y''(0)=$____.

(2) 设$\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$，则$\frac{dy}{dx}|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$___，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$___.

解: (1)方程两边求导得

$$e^y\frac{dy}{dx}+6y+6x\frac{dy}{dx}+2x=0, \qquad (1)$$

得$\frac{dy}{dx}=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$,

又$x=0$时$y=0$, 得$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=0$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(6\frac{dy}{dx}+2)(e^y+6x)-(6y+2x)(e^y\frac{dy}{dx}+6)}{(e^y+6x)^2}$$

用$x=0$，$y=0$，$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=0$代入上式得$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=-2$, 即$y''(0)=-2$

或对(1) 两边再求导得

$$e^y(\frac{dy}{dx})^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}+6x\frac{d^2y}{dx^2}+2=0$$

用$x=0$，$y=0$，$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=0$代入上式得$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=-2$, 即$y''(0)=-2$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-\cos t^2}{-2t\sin t^2}=t$$

$$\frac{dy}{dx}|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{-2t\sin t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

注：在求复合函数、隐函数、参数方程、反函数的导数时，建议把导数(包括高阶导)写成微商的形式,这样就清楚是对哪个变量求导.

练习题

1.（1）设 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则 $\lim\sqrt{nf(\frac{2}{n})}=$ ________．(答案:$\sqrt{2}$)

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 的某个邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

且在 $x=1$ 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$) 处的切线方程为 ____________ 。

(由条件求出：$f(1)=0, f'(1)=2$)

（3） 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，则 $f(0)=$ ______, $f'(0)=$ _______ 。
(答案: 0， 0)

2.（1）设 $y=y(x)$ 由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

（2）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 。

(答案:$\frac{x^2-2xy+y^2}{(2x-y)^3}$， $\frac{(1+t^2)(3+t^2)}{8t^5}$)

3．设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{4x}-e^x}{x}, x<0\\ ax+b\cos x, x\ge 0\end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 。(答案:3，$\frac{15}{2}$)

4．设 $f(x)$ 满足 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在，函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, x\ne 0\\ f'(0), x=0\end{cases}$$

求 $g'(0)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（答案：$\frac{f''(0)}{2}$ 。下面做法中哪一步不正确

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$）

５．（1）设 $y=(\dfrac{x}{1+x})^x$，则 $y'=$ ________ 。

（2）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$,，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x^2}$,，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

６．设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$,则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

７．设 $f(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$,则 $f(1)=$ ________.（答案：$(-1)^n n!m^n$）

８．设 $y=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$,证明：$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.（提示：用归纳法）

９．设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$,证明：$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}[\ln x-(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})]$（提示：用归纳法）

１０．设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0 \quad, x=0\end{cases}$，证明：$f^{(n)}(0)=0$.（提示：用归纳法）

１１．设 $y=e^x\sin x$，求 $y^{(n)}$.

（先求 y', y'' 等，通过观察得结果 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$，再用归纳法证明结论．如利用

复数 $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，则更方便）

１２．求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$

（先求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$，$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$，可用欧拉公式 $e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$，先求 $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ikx}$，再取

实部和虚部便可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$，$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$．然后求导可得结果）