山东大学 2018-2019 学年第一学期 工科高等数学(1) 课程试卷(A)评分标准

（评分细则由各任课老师制定）

一.

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=$ ____0______.

2. $(\ln|x|)'=$ __$\frac{1}{x}$__________.

3. 函数 $\ln(1-x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式是____.

4. 函数 $\mathrm{y=f(x)}$ 对任意的 x 都有 $\Delta\mathrm{y}=(2\mathrm{x}+5)\Delta\mathrm{x}+\mathrm{o}(\Delta\mathrm{x})$，$\Delta\mathrm{x}\to 0$， 且 $\mathrm{f}(0)=0$， 则 $\mathrm{f(x)}=x^2+5\mathrm{x}$_______.

5. $\int_{-4}^{4}(1+x^3)\sqrt{4-x^2}dx=$ ___4π_______.

二. CACBA

1. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=$ C
   A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
2. 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin^2 x$ 是 x 的 A
   A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶无穷小，但不等价 D. 等价无穷小
3. 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，且当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|\le\sin^2 x$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 C
   A. 间断点 B. 连续但不可导的点 C. 可导点且有 $f'(0)=0$ D. 可导点但 $f'(0)\neq 0$
4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$B
   A. $n[f(x)]^{n+1}$ B. $n![f(x)]^{n+1}$ C. $[f(x)]^{2n}$ D. $n![f(x)]^{2n}$
5. 设 $\mathrm{f(x)}=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$，$0\le\mathrm{x}\le 1$，则函数 $\mathrm{y=f(x)}$ 在 $(0,1)$ 上 A
   A. 单调增, $\mathrm{f''(x)}>0$ B. 单调增, $\mathrm{f''(x)}<0$
   C. 单调减, $\mathrm{f''(x)}>0$ D. 单调减, $\mathrm{f''(x)}<0$

三.

1. 计算 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}\right)$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)x}\ \text{............(3 分)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\ \text{...(6 分)}$$

或用 Taylor 展开

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)\right)\text{.......................(3 分)}$$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(\frac{1}{2}x + o(x))\right) = \frac{1}{2}$……………………………………………………………………(6 分)

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数$y = y(x)$的一阶和二阶导数 .

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$…………………………………………………………(3 分)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$……………………………………………………………………(6 分)

3. 求由曲线$y = \sqrt{x}$和直线$y = x - 2$及x轴围成的区域绕x轴旋转形成的旋转体的体积.

解

原式$= \int_0^4 \pi x dx - \int_2^4 \pi(x-2)^2 dx$……………………………………………..(2 分)

$= \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^4 - \frac{\pi(x-2)^2}{3}\Big|_2^4$

$= 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$……………………………………………………………(6 分)

4. 计算$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 原式$= -\frac{1}{2}\int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$. . . . . (2 分)

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx$……………………………………………………(4 分)

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$…………………………………………(6 分)

5. 计算$\int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt\right)dx$.

解 利用分部积分，

原式$= x\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx$…………………………………………………(2 分)

$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt - \int_0^\pi t\frac{\sin t}{\pi-t}dt$

$= \int_0^\pi(\pi-t)\frac{\sin t}{\pi-t}dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2$………………………………………… (6 分)

6. 设k为常数，讨论函数$f(x) = ln\,x - \frac{x}{e} + k$的渐近线，单调性，极值，零点，凹凸性.

解：此函数的定义域为$(0, +\infty)$.

由$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$知$x = 0$是铅直渐近线，

由$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - \frac{x}{e} + k}{x} = -\frac{1}{e}$, 而$\lim_{x\to+\infty}(f(x) + \frac{x}{e})$不存在，所以此函数

无斜渐近线

....(2 分)

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，f(x)在$(0, +\infty)$是凸的.

而当 $x=e$ 时， $f'(x)=0$, 当 $x\in(0,e)$ 时， $f'(x)>0$，严格单调增； 当 $x\in(e,+\infty)$ 时，

$f'(x)<0$， 严格单调减. 极大值 $f(e)=k$ . ...(4 分)

由于函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 因此当$k>0$ 时 $f(x)$

在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点. 当$k=0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点$x=e$，当$k<0$ 时

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点...(7 分)

7. 求微分方程$y''+y=\cos x$的通解.

解

考虑齐次方程$y''+y=0$，其特征方程为$\lambda^2+1=0$。可解得特征根为$\lambda_1=i$，$\lambda_2=-i$.

因而齐次方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分)

设原方程有特解$y^*(x)=x(A\cos x+B\sin x)$

代入方程得$2(B\cos x-A\sin x)=\cos x$

比较系数得$A=0$，$B=\frac{1}{2}$， ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(6 分)

故原方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(7 分)

四.

1. 已知曲线任意一点处的切线和经过该切点与坐标原点的直线都成$\frac{\pi}{4}$的角，求此曲线方程.

两种情况做对一种即得满分（±其中一种）。

解一 曲线上任意一点（x, y），过此点的切线的倾角α的正切$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$，经过该切点与坐标原点的直线的倾角θ的正切$\tan\theta=\frac{y}{x}$,

因此$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha=\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta\pm1}{1\mp\tan\theta}=\frac{x\pm y}{x\mp y}$, 即得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\pm y}{x\mp y}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

解知得$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\pm arctan\frac{y}{x}}$, C为任意常数⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(8 分)

解二 令曲线由极坐标形式$r=r(\theta)$表示， 则此曲线以极角θ为参数的参数方程形式为

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$$

曲线上任意一点(x, y)，过此点的切线的倾角α的正切

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta},$$

$$而\tan\alpha=\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta\pm1}{1\mp\tan\theta}$$

由此得$r'(\theta)=\pm r(\theta)$，…………………………………………………………(6 分)

解此微分方程得所求曲线$r=Ce^{\pm\theta}$，其中 C为任意常数…………………. .(8 分)

2．函数$f(x)$满足$f(0)=f(1)=0$ ，$f''(x)$ 在[0,1]上存在且连续，证明对任意的$x\in[0,1]$, 都

有 $|f(x)|\le\frac{1}{8}max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

证一 首先对$x=0,1$结论显然成立…………………………………………………………(1 分)

其次证$x\in(0,1)$时结论也成立．令$F(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(1-x)x}t(1-t)$，………………(4 分)

则有$F(0)=F(x)=F(1)=0$，则由Rolle定理,存在$\xi_1\in(0,x)$，使得$f'(\xi_1)=0$；存在$\xi_2\in(x,1)$，使得$f'(\xi_2)=0$. 再利用一次 Rolle 定理，知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(0,1)$，

使得$f''(\xi)=0$，即$f''(\xi)+\frac{2f(x)}{(1-x)x}=0$，…………………………………………….(6 分)

所以有$f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)f''(\xi)$，因此可得

$$|f(x)|=\frac{1}{2}|x(x-1)||f''(\xi)|$$

$$\le\frac{1}{2}\max_{x\in(0,1)}[x(1-x)]\max_{x\in(0,1)}|f''(x)|\le\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

综上对任意的$x\in[0,1\}$，都有$|f(x)|\le\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$…………………………(8 分)

证二 首先对 x=0, 1 结论显然成立.

其次证$x\in(0,1)$时结论也成立．由 Taylor 中值定理，得

存在存在$\xi_1\in(0,x)$，使得$0=f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$；

存在存在$\xi_2\in(x,1)$，使得$0=f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$

…………………………………(4 分)

则有 $f(x)=(1-x)f(x)+xf(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2(x-1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2x$，

所以有

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\max_{x\in[0,1]}[x^2(1-x)+(1-x)^2x]=\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

……………………(8 分)