§4 幂级数

1 函数项级数

如果将数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的通项 u_n 换成某区间 I 上的函数，即 $u_n(x), x \in I$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, x \in I$$

称为定义在 I 上的函数项级数. 并称

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), x \in I$$

为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的第 n 个部分和函数.

收敛域

对每个 $x_0 \in I$, 该函数项级数就成为一个数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots.$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x_0 处收敛，

点 x_0 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x_0 处发散.

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点全体称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **收敛域**.

和函数

对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 D 中每一点，都有一个确定的和与之对应，这就定义了 D 上的一个函数 $S(x)$，称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数，

记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in D.$$

当然有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x \in D.$$

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$ 称为级数的余项.

对任意 $x \in D$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

例1 函数项(几何)级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots.$$

当 $|x| < 1$ 时，级数收敛，它的和函数是 $\dfrac{1}{1-x}$.

当 $|x| \geq 1$ 时，级数发散.

因此，对任意 $x \in (-1, 1)$,

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots.$$

2 幂级数及其收敛半径

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的级数称为幂级数，其中 $x_0, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 都是常数.

作变换 $y = x - x_0$，则上述幂级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + \cdots.$$

我们只讨论这一类型级数的收敛域.

显然 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 0$ 处收敛.

幂级数

定理1 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $\overline{x} \neq 0$ 处收敛，则对满足 $|x| < |\overline{x}|$ 的任何 x，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，而且绝对收敛.

证明 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n \overline{x}^n = 0$,

收敛数列有界，所以存在 $M > 0$, 使得 $\left|a_n \overline{x}^n\right| \le M \ (n = 0,1,2,\cdots)$.

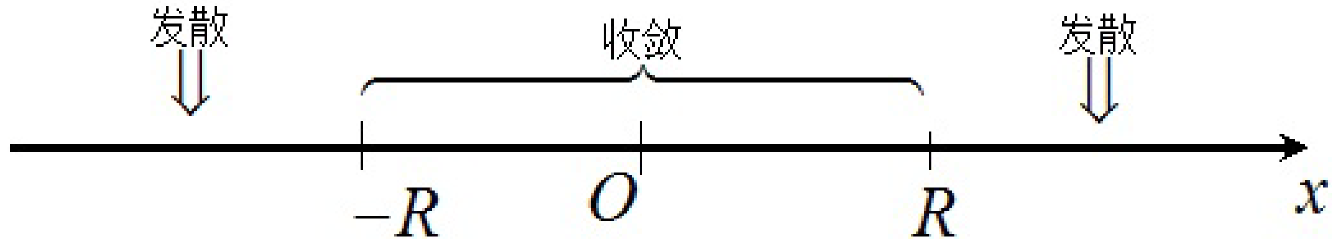
对 $|x| < |\overline{x}|$, 记 $r = \left|\dfrac{x}{\overline{x}}\right| < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 收敛.

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n \overline{x}^n \cdot \frac{x^n}{\overline{x}^n}\right| = \left|a_n \overline{x}^n\right| \cdot \left|\frac{x^n}{\overline{x}^n}\right| \le M r^n,$$

由比较判别法知当 $|x| < |\overline{x}|$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，而且绝对收敛.

幂级数

由定理 1 知只要有非零收敛点，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间 (开，闭, 半开半闭，有限, 无限都可能).



R 称为**收敛半径**，$(-R, R)$ 称为**收敛区间.** 可以分为三种情况:

(1) 在 $(-R, R)$ 内收敛，$[-R, R]$ 外发散，$x = \pm R$ 处另外判断.

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛，收敛半径 $R = +\infty$,

(3) 只在 $x = 0$ 处收敛，收敛半径 $R = 0.$

收敛半径的求法

定理2 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

(i) 当 $0<\rho<+\infty$ 时，$R=\frac{1}{\rho}$;

(ii) 当 $\rho = 0$ 时，$R=+\infty$;

(iii) 当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

证明 考察 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的绝对值级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|x\right| = \rho\left|x\right|.$$

(i) 当 $0<\rho<+\infty$ 时，由比式判别法知

当 $\rho|x|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，

当 $\rho|x|>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\left|a_n x^n\right| \neq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，所以 $R=\frac{1}{\rho}$.

(ii) 当 $\rho = 0$ 时，对任意 x，有 $\rho|x| = 0$,

由比式判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，所以 $R = +\infty$.

(iii) 当 $\rho = +\infty$ 时，对任意 $x \neq 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = +\infty.$$

则当 n 充分大时，$|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$，因此 $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| \neq 0$,

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，即 $R = 0$.

注意 R 也可以由 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ 求得.

幂级数举例

例2 求下列幂级数的收敛域: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

解 (1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}.$

收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=2.$

当 $x=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 当 $x=-2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

所以, 收敛域为 $[-2,2)$.

(2) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$

所以, 收敛半径为 $R=0$, 收敛域为 $\{0\}$.

幂级数举例

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n n^2}$ 的收敛域.

解 令 $y=x-2$, 代入原幂级数得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n n^2}$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^2}{3^{n+1}(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)^2}=\frac{1}{3}.$$

新级数收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=3.$

当 $y=3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 当 $y=-3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛.

所以, 新级数收敛域为 $[-3,3]$, 原级数收敛域为 $[-1,5]$.

一般, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R, 则收敛区间为 (x_0-R,x_0+R).

例4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}$ 的收敛域.

解 令 $y=x^2,$ 代入原幂级数得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{4^n}.$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

解不等式 $|y|=|x^2|<\frac{1}{\rho}=4,$ 原级数的收敛区间为 $(-2,2).$

当 $x=\pm 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散.

所以，原级数收敛域为 $(-2,2).$

3 幂级数的运算性质

根据收敛级数相加、相减的性质以及绝对收敛相乘的性质，我们得到

定理3 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a, R_b,

$R = \min\{R_a, R_b\}$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < R,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R_a, \quad k \text{ 为常数.}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R,$$

其中 $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

幂级数的运算性质

下面列出一些幂级数的性质，但略去证明.

定理4 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续,

即 $$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n x^n.$$

其意义是: 幂级数在其收敛区间内,

极限运算 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 与级数运算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 可交换.

俗称 “可以逐项 求极限.”

幂级数的运算性质

定理5 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$, 则对于收敛区间 $(-R, R)$ 内的任意点 x, 都有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

其意义是: 幂级数在其收敛区间内,

积分运算与级数运算可交换.

俗称“可以逐项求积分.”

幂级数的运算性质

定理6 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$，则在收敛区间 $(-R, R)$ 内的任意点 x 处 $S(x)$ 都可导，而且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

其意义是：幂级数在其收敛区间内，

求导运算与级数运算可交换.

俗称“可以逐项求导.”

幂级数的运算性质

推论 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$, 则在收敛区间 $(-R, R)$ 内的任意点 x 处 $S(x)$ 具有任意阶导数，且可以逐项求导任意次.

即对 $x \in (-R, R)$ 都有

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3\times 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots,$$

$$\cdots$$

$$S^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)n\cdots 2a_3 x + \cdots,$$

$$\cdots$$

此外，还可以证明：当逐项求极限、逐项求积分、逐项求导所得幂级数在 $x = R$ 或 $x = -R$ 处收敛，则在该处定理 4, 5, 6的公式仍成立.

例5 证明: (1) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,|x|<1,$

(2) $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n}.$

证明 以几何级数为出发点

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,|x|<1.$$

(1) 逐项求导得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,|x|<1.$$

(2) 逐项积分得

$$-\ln(1-x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$ 得 $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n}.$

例6 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 的和.

解 考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n,$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1,$$ 收敛区间为 $(-1,\ 1).$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$$

$$=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}=S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{9}{4}.$$