东南大学考试卷(A 卷)

课程名称	线性代数A	考试学期	16-17-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______

一.（30%）填空题

1. 设$\alpha=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，则$A^{10}=$______________.

2. 设A,B,C均为n阶方阵，$|A|=1$，$|B|=2$，$|C|=3$，则$\begin{vmatrix}A & B\\ O & C\end{vmatrix}=$______________.

3. 设$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,t)^{\mathrm{T}}$，若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的维数是 2，则$t=$______________.

4. 设α_1,α_2是向量空间V的一组基，$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$. 若向量$\eta\in V$在$\alpha_1,\alpha_2$下的坐标是$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，则$\eta$在$\beta_1,\beta_2$下的坐标是______________.

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & a\end{pmatrix}$，若存在矩阵$B\neq O$使得$AB=O$，则$a=$______________.

6. 设A是n阶方阵，向量α,β是非齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=b$的两个不同的解，则A的属于特征值λ的一个特征向量为______________.

7. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$相似，则$|A|=$______________.

8. 若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2+2x_2^2+4x_3^2$正定，则$t$的取值范围是______________.

9. 设三阶矩阵A的特征值为$1,2,3$，A_{ij}是行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，则$|A|^{-1}(A_{11}+A_{22}+A_{33})=$______________.

10. 下列 4 个命题中，**正确**命题的**个数**是______________个:
    ①若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关；
    ②无论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关，向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$总线性相关；
    ③若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意两个向量都线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；
    ④若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则其中任一向量可由其余两个向量线性表示.

密 封 线

二. （10%）计算行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

三. （14%）已知方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2bx_1+x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$同解,

1. 求参数a,b,c的值;
2. 求方程组的通解.

四. （12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，且 $XA-B=2X$，求 X.

五. （14%）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\k&0&1\end{pmatrix}$，

1. 求 A 的所有特征值和特征向量;
2. 根据参数 k 的取值，判断矩阵 A，B 是否相似. 若相似，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$；若不相似，说明理由.

六. （12%）设 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，其中 A 是三阶实对称矩阵，A 不可逆，并且 A 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量有 $\alpha_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

1. 求二次型 $f(x)$ 的表达式;
2. 用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换.

七. （8%）证明题:

1. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2$，且 α_1,α_2 线性无关. 向量 β 是齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\end{cases}$ 的非零解，证明 α_1,α_2,β 线性无关.

2. 设 A 是可逆实对称矩阵，证明对任意自然数 N，$\sum_{k=-N}^{N}A^{2k+1}$ 与 A 合同.