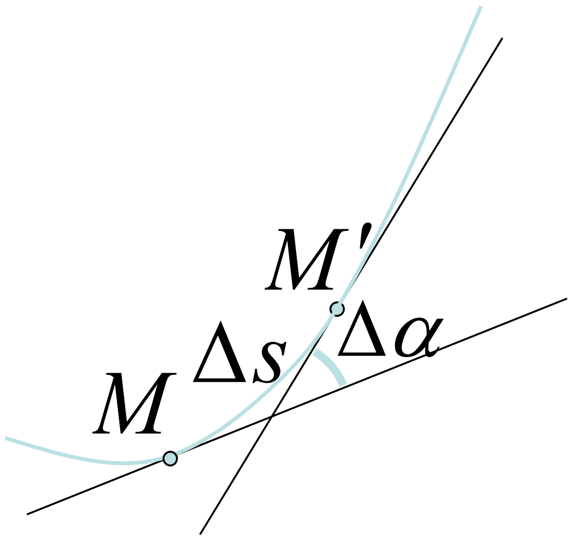
二、曲率

曲线的曲率（curvature）就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，通过微分来定义，表明曲线偏离直线的程度。

曲率在数学上表明曲线在某一点的弯曲程度的数值。

二、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs , 对应切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义



弧段 Δs 上的平均曲率

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

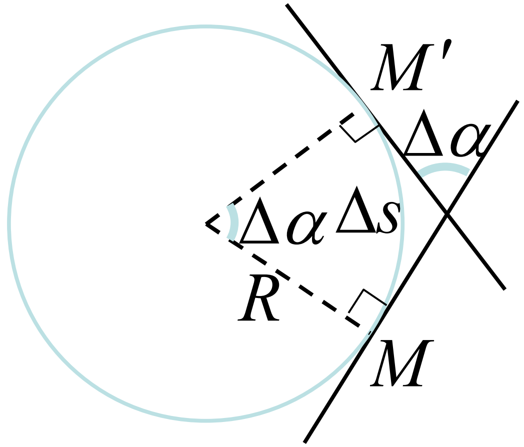
点 M 处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

注意: 直线上任意点处的曲率为 0 !

例1. 求半径为R 的圆上任意点处的曲率 .

解: 如图所示 ,



$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$$

可见: R 愈小, 则K 愈大 , 圆弧弯曲得愈厉害 ;

R 愈大, 则K 愈小 , 圆弧弯曲得愈小 .

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

曲率K的计算公式

设曲线弧 $y=f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha=y' \quad (设 -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

得 $\alpha=\arctan y'$

$$\mathrm{d}\alpha=(\arctan y')'\,\mathrm{d}x=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

又 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

故曲率计算公式为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

当 $|y'|<<1$ 时, 有曲率近似计算公式 $K\approx|y''|$

说明:

(1) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

(2) 若曲线方程为 $x = \varphi(y)$, 则

$$K = \frac{|x''|}{(1 + x'^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}}$$

例2. 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 在何处曲率最大?

解: $\dot{x} = -a\sin t;\qquad \ddot{x} = -a\cos t$

$\dot{y} = b\cos t;\qquad \ddot{y} = -b\sin t$

$\dot{x}$ 表示对参数 t 的导数

故曲率为

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

K 最大 $\rightleftarrows$ $f(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ 最小

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2\sin t\cos t - 2b\cos t\sin t = (a^2 - b^2)\sin 2t$$

$$f'(t)=(a^2-b^2)\sin 2t$$

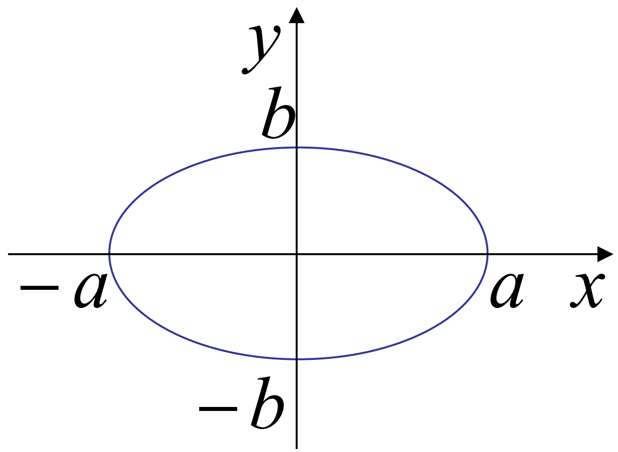
令 $f'(t)=0$, 得 $t=0,\frac{\pi}{2},\ \pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

计算驻点处的函数值:

t	$\boxed{0}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\boxed{2\pi}$
$f(t)$	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$	a^2	$\boxed{b^2}$

设$0<b<a$, 则$t=0,\pi,2\pi$时

$f(t)$取最小值, 从而 K 取最大值 .

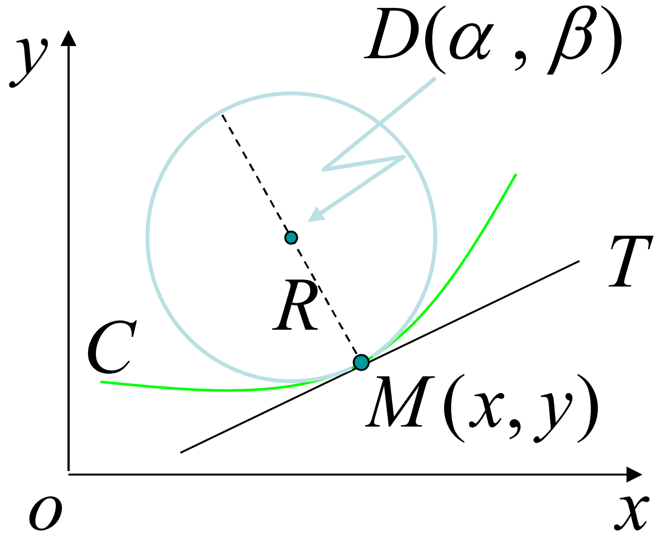


这说明椭圆在点$(\pm a,0)$ 处曲率最大.

三、 曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点 , 在点 M 处作曲线的切线和法线, 在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$



把以 D 为中心, R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆 (密切圆) , R 叫做曲率半径, D 叫做曲率中心.

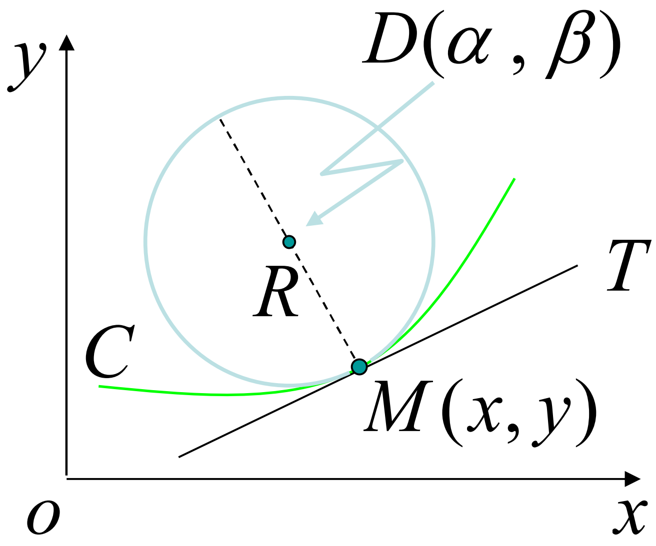
在点M 处曲率圆与曲线有下列密切关系:

(1) 有公切线; (2) 凹向一致; (3) 曲率相同 .

设曲线方程为 $y=f(x)$, 且 $y''\neq 0$, 求曲线上点M 处的曲率半径及曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标公式 .

设点M 处的曲率圆方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2$$



故曲率半径公式为

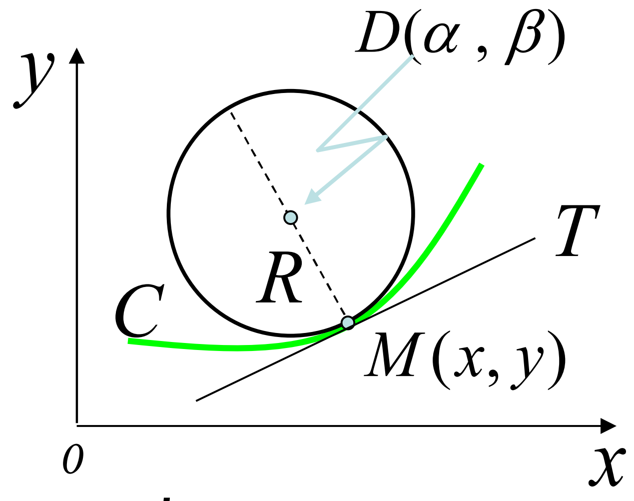
$$\boxed{R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}}$$

$\alpha\,,\beta$ 满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 & (M(x,y)\text{在曲率圆上})\\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta} & (DM\perp MT)\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式

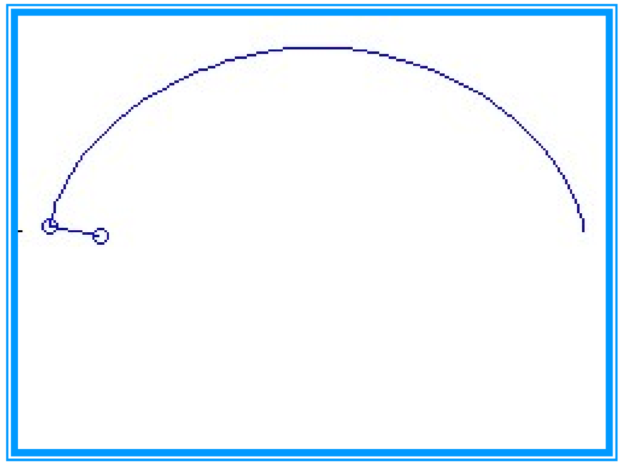
$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$



(注意 $y-\beta$ 与 y'' 异号)

当点 $M(x, y)$ 沿曲线 $y = f(x)$ 移动时, 相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的**渐屈线**,
曲线 C 称为曲线 G 的**渐伸线**.

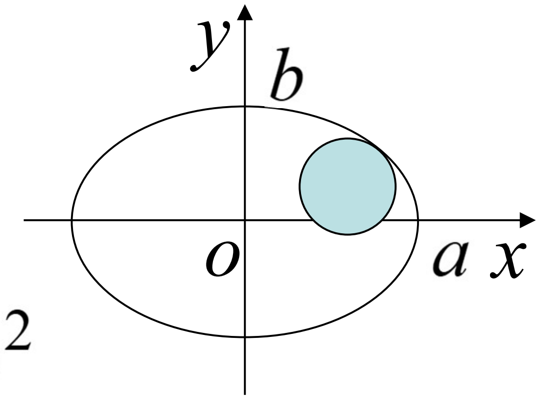
曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为 x).



点击图中任意点动画开始或暂停

例3. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面 , 问选择多大的砂轮比较合适?

解: 设椭圆方程为$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le x \le 2\pi \,, b \le a)$



由例3可知, 椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大 ,
即曲率半径最小, 且为

$$R = \left.\frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}\right|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然, 砂轮半径不超过 $\dfrac{b^2}{a}$ 时, 才不会产生过量磨损 , 或有的地方磨不到的问题.

内容小结

1. 弧长微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

2. 曲率公式 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

曲率中心 $\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\[2ex]\beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$

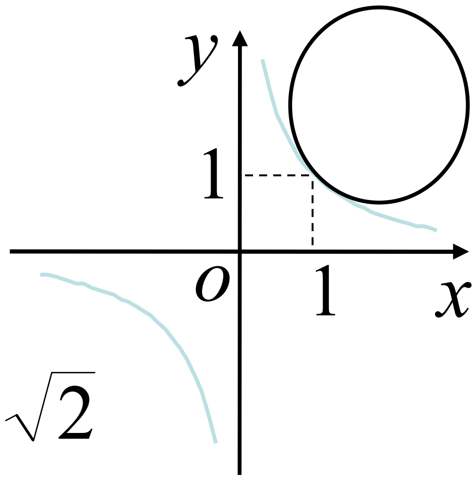
思考与练习

1. 曲线在一点处的曲率圆与曲线有何密切关系?

答: 有公切线； 凹向一致； 曲率相同.

2. 求双曲线 $xy=1$ 的曲率半径 R，并分析何处 R 最小?

解: $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2}{x^3}$, 则



$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{3/2}}{2/x^3}=\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{x^2})^{3/2}\ge\sqrt{2}$$

显然 $R\big|_{x=\pm1}=\sqrt{2}$ 为最小值.

$\boxed{\text{利用 } a^2+b^2\ge 2ab}$

思考题

已知$f(x)$在$[0, 2]$上连续，$(0, 2)$上可导，且满足$f(0)=0$, $f(1)=2, f(2)=0$. 求证对于$\forall\lambda\in \mathrm{R}$，均存在$\xi\in(0,2)$,使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$$

提示：设$F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$

$F(0)=0, F(1)=e^{-\lambda}>0, F(2)=-2e^{-\lambda}<0$

由零点定理，存在$\eta\in(1,2)$，使得$F(\eta)=0$.

在$(0,\eta)$上对F用罗尔中值定理可得结论。

P103.5.设$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3}=\frac{1}{2},$$ 试求$f(0), f'(0), f''(0)$.

解：法一，运用泰勒公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+x(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2))}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(0)=-1, f'(0)=0, f''(0)=\frac{3}{4}$$

解：法二，运用洛必达法则和导数定义

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x+f(x)+xf'(x)=0\Rightarrow f(0)=-1$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{x})+1}{x}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x-x}{x^2}+\dfrac{f(x)+1}{x}}{x},\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\mathrm{x})}{x}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+f(x)+1+xf'(x)}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{3x^2}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\mathrm{x})}{x}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}f''(0)+\frac{1}{3}f''(0)$$