第4节

平面及其方程

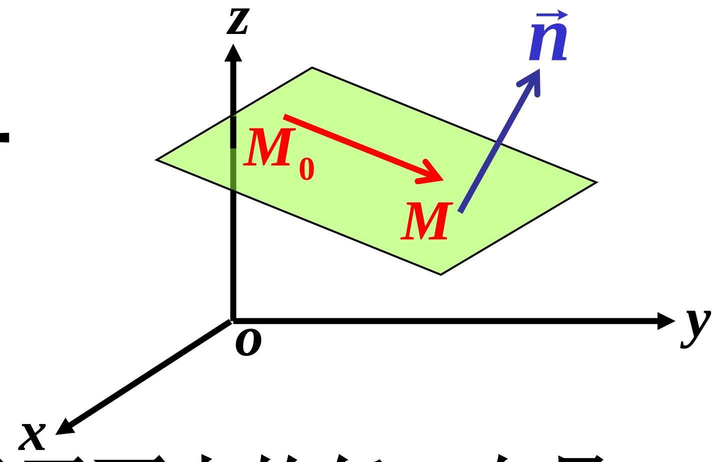
一、平面的点法式方程

二、平面的一般方程

三、两平面的夹角

一、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量.



法线向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

已知 $\vec{n}=\{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

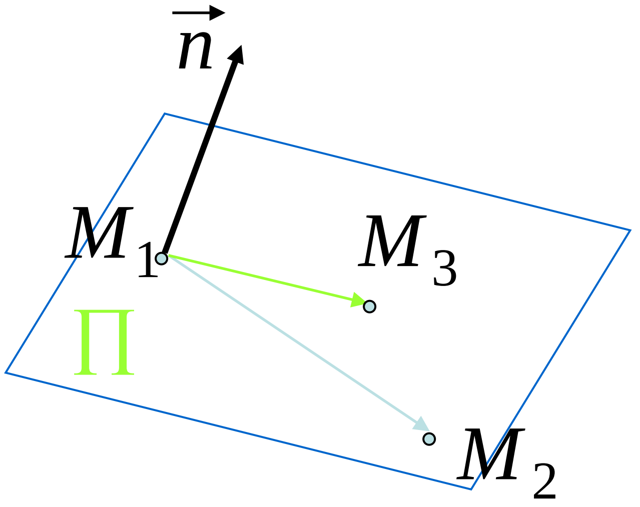
$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足上方程，不在平面上的点都不满足上方程，上方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

例1.求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.



解: 取该平面Π 的法向量为

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$

说明: 此平面的**三点式方程**也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况： 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)\ (k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2 求过点(1,1,1)，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

二、平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

$Ax+By+Cz+D=0$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}.$

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D=0$ 时, $Ax+By+Cz=0$ 表示**通过原点**的平面;
- 当 $A=0$ 时, $By+Cz+D=0$ 的法向量

$$\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i},$$ 平面平行于 x 轴;

- $Ax+Cz+D=0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax+By+D=0$ 表示 平行于 z 轴的平面;
- $Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 面 的平面;
- $Ax+D=0$ 表示平行于 yoz 面 的平面;
- $By+D=0$ 表示平行于 zox 面 的平面.

例 3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0,$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\},\qquad \therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

例 4　设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解　设平面为$Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将$A=-\frac{D}{a}$, $B=-\frac{D}{b}$, $C=-\frac{D}{c}$,

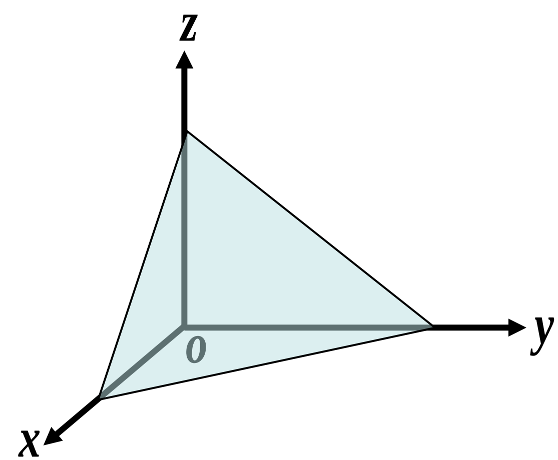
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

例 5 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$



$$\because V=1,\quad \therefore\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件）$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$， 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

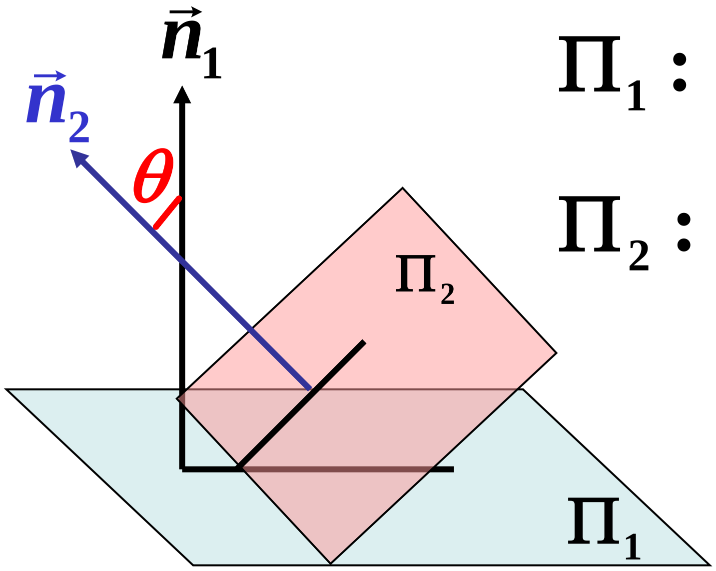
$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

三、两平面的夹角

定义 **两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.**（通常取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

例6 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0, \qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0, \qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0, \qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1 = \{2,-1,1\}$, $\vec{n}_2 = \{-4,2,-2\}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{-2}$, 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \notin \Pi_2$

两平面平行但不重合.

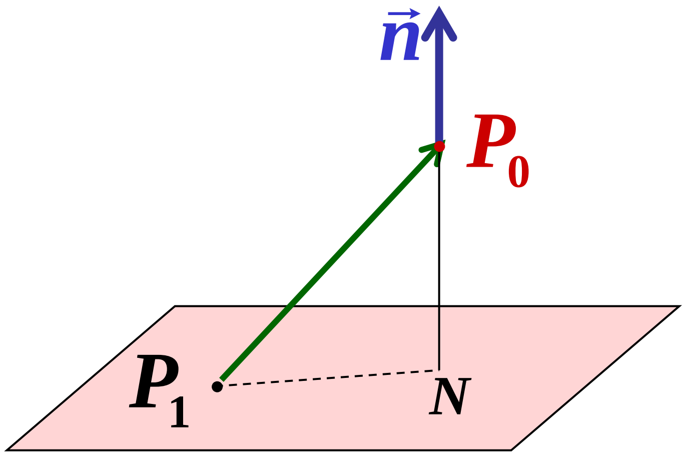
(3) $\because \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-1}{2}$, 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \in \Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

例7　设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

解　$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = |\mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$\mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{n^0} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\}$$

$$\therefore \Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{n^0}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\therefore \Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\therefore \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到平面距离公式

四、小结

平面的方程

点法式方程.

一般方程.

截距式方程.

三点式方程.

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

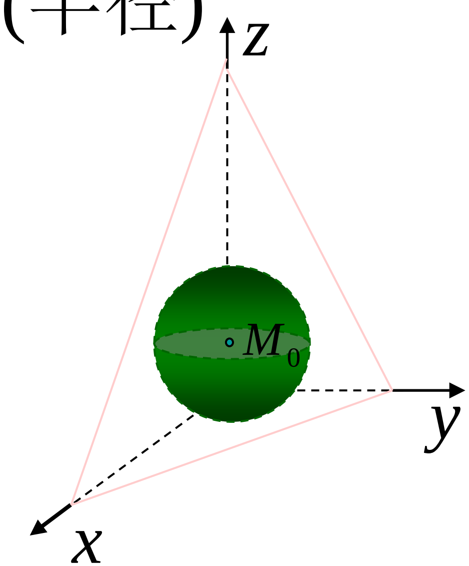
两平面的夹角.（注意两平面的位置特征）

点到平面的距离公式.

思考题. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,则它位于第一卦限,且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = x_0 = y_0 = z_0 = R(\text{半径})$$



$$\because x_0+y_0+z_0 \le 1, \ \therefore 1-3x_0 = \sqrt{3}\,x_0$$

从而 $$x_0 = y_0 = z_0 = R = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2$$

例. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面$\prod$: $x + y + z = 0$, 求其方程 .

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0, \text{ 即 } A=-2C$$

$$\vec{n}\perp\Pi \text{ 的法向量} \Longrightarrow A+B+C=0, \text{ 故}$$

$$B=-(A+C)=C$$

因此有 $-2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0 \quad (C\neq 0)$

约去C, 得 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

第5节 空间直线及其方程

一、空间直线方程

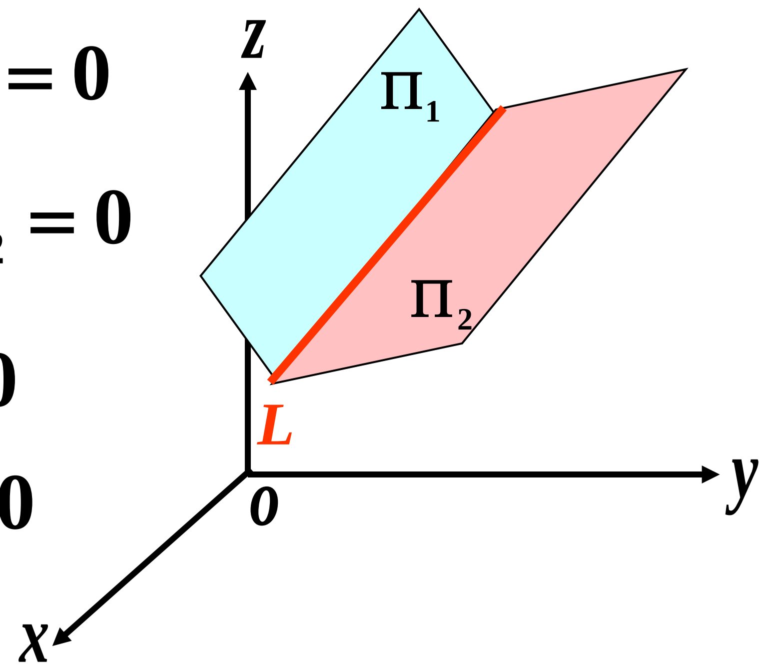
二、线面间的位置关系

一、空间直线的一般方程

定义　**空间直线可看成两平面的交线.**

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



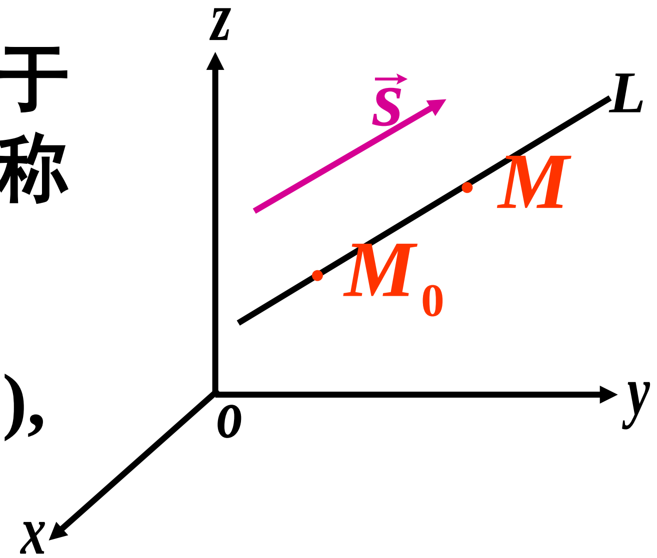
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

二、空间直线的标准式方程与参数方程

方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的方向向量.



$$M_0(x_0,y_0,z_0),\qquad M(x,y,z),$$

$$\forall\ M\in L,\qquad \overrightarrow{M_0M}\parallel \vec{s}$$

$$\vec{s}=\{m,n,p\},\qquad \overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 直线的标准式方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

直线的一组方向数

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

直线的参数方程

例1 用标准式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0,\quad z_0 = -2$

点坐标$(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{4,-1,-3\}$,

标准式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

例 2 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$,

所求直线方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

三、两直线的夹角

定义 **两直线的方向向量的夹角称之.（锐角）**

直线 $L_1:\quad \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1},$

直线 $L_2:\quad \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2},$

$$\cos(\widehat{L_1,L_2})=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的夹角公式

两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = \{1, -4, 0\},$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = \{0, 0, 1\},$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2,$ 即 $L_1 \perp L_2.$

例 3 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m, n, p\}$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$,

所求直线的方程

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 4 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

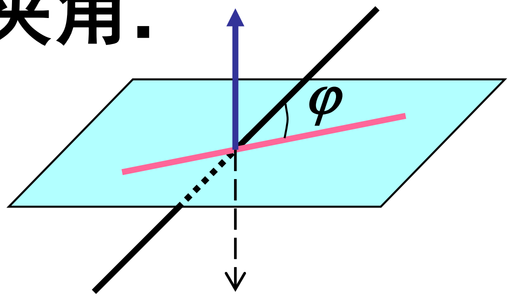
$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

四、直线与平面的夹角

定义　**直线和它在平面上的投影直线的夹角φ称为直线与平面的夹角.**

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$



$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\},$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = \{A, B, C\},$$

$$(\vec{s}\,\widehat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad (\vec{s}\,\widehat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系:

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L \,//\, \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$

例 5 设直线$L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$, $\vec{s}=\{2,-1,2\}$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

例6 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$,

$L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

解 将两已知直线方程化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases}, \quad L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设所求直线 L 与 L_1, L_2 的交点分别为

$A(t_1, 2t_1, t_1-1)$ 和 $B(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1)$.

$\because M_0(1,1,1)$ 与 A, B 三点共线,

故 $\overrightarrow{M_0A} = \lambda\overrightarrow{M_0B}$ (λ 为实数).

于是 $\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B}$ 对应坐标成比例，即有

$$\frac{t_1-1}{t_2-1} = \frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1} = \frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1},$$

解之得 $t_1 = 0, t_2 = 2,$

$\therefore \boldsymbol{A(0,0,-1), B(2,2,3)}$

$\because$ 点 $\boldsymbol{M_0(1,1,1)}$ 和 $\boldsymbol{B(2,2,3)}$同在直线 $\boldsymbol{L}$ 上,

故 $\boldsymbol{L}$ 的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

五、平面束

设有直线

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\Pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\Pi_2) \end{cases}$$

考虑 ★

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$

因 A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2 不成比例 故

$\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2, \lambda C_1 + \mu C_2$ 不全为 0

从而

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

表示一个平面

若一点 P 在 L 上 则点 P 的坐标必同时

满足 Π_1 和 Π_2 的方程

则点 P 的坐标也满足 ★

因而 ★ 表示过 L 的平面

对于 λ,μ 的不同值★表示过 L 的所有平面

——过 L 的平面束

一般在具体应用时，常取 $\lambda = 1$或$\mu = 1$

而考虑缺Π_1 或 Π_2 的平面束

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

例9 求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程

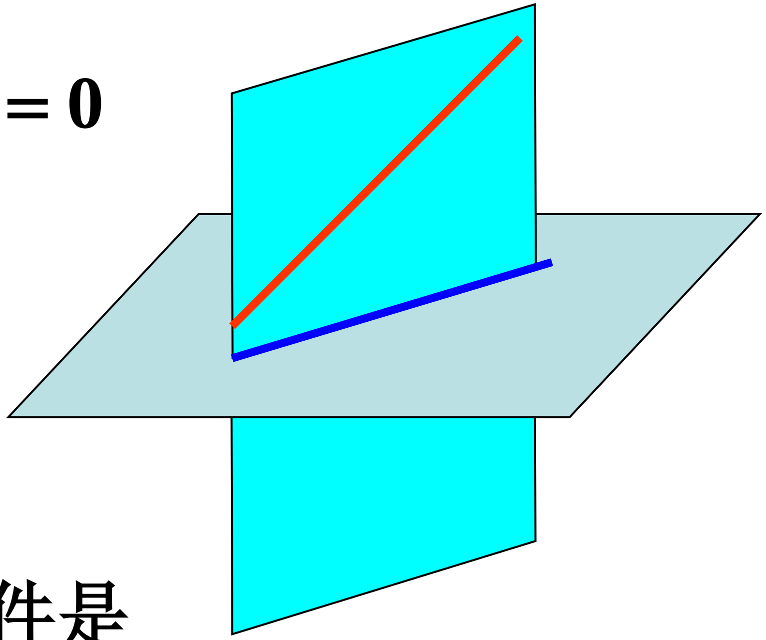
[分析] 过所给直线作一平面与已知平面垂直，两平面的交线即位所求

解 过所给直线的**平面束**方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y$$
$$+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$



这平面与已知平面垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=-1$$

所求平面方程为 $y-z-1=0$

这就是过已知直线且垂直于平面 $x+y+z=0$

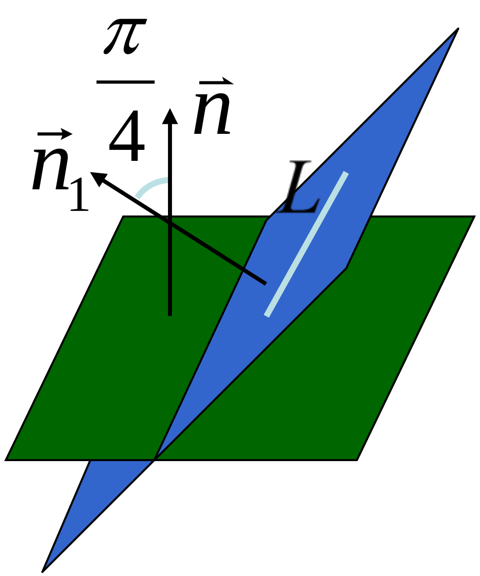
的平面的方程

它与已知平面 $x+y+z=0$ 的交线：

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

即为所求的投影直线的方程

例. 求过直线L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.



提示: 过直线 L 的平面束方程

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$.

已知平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,-4,-8\}$

选择 λ 使 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} \Longrightarrow \lambda=-\dfrac{3}{4}$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0$.

和 $x-z+4=0$.

六、小结

空间直线的一般方程.

空间直线的标准式方程与参数方程.

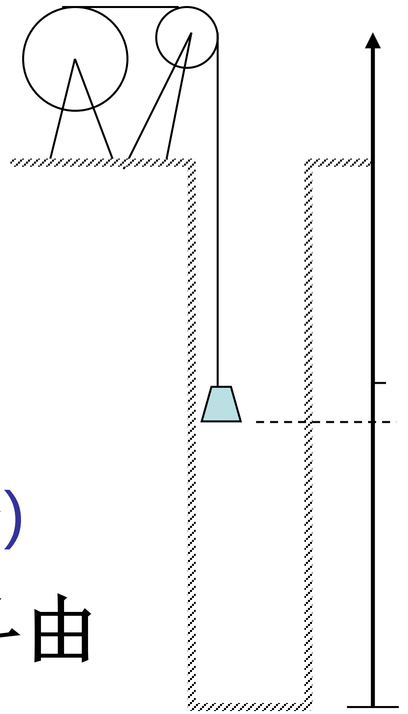
两直线的夹角.（注意两直线的位置关系）

直线与平面的夹角.

（注意直线与平面的位置关系）

思考与练习

1.为清除井底污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口,已知井深30 m ,抓斗自重400N ,缆绳每米重50N， 抓斗抓起的污泥重2000N , 提升速度为3m /s , 在提升过程中污泥以20N /s 的速度从抓斗缝隙中漏掉,



现将抓起污泥的抓斗提升到井口, 问克服重力需作多少焦耳(J) 功?(99考研)

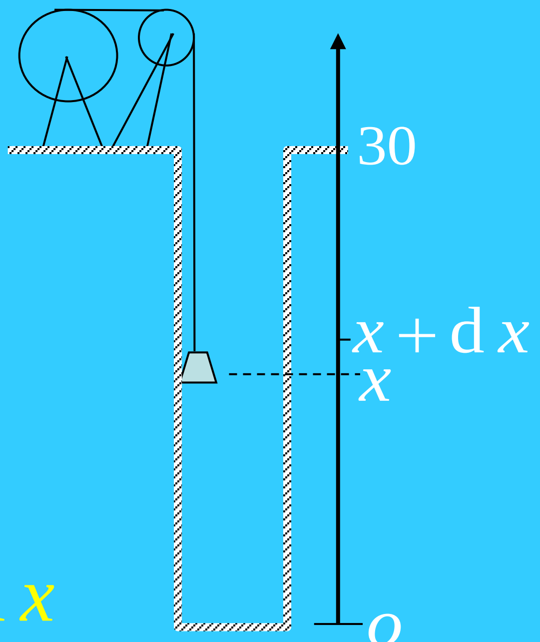
提示: 作 x 轴如图. 将抓起污泥的抓斗由 x 提升 dx 所作的功为

井深 30 m，　抓斗自重 400 N，　缆绳每米重50N，

抓斗抓起的污泥重 2000N，　提升速度为3m/s，

污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_1+\mathrm{d}W_2+\mathrm{d}W_3$$



克服抓斗自重: $\mathrm{d}W_1=400\,\mathrm{d}x$

克服缆绳重: $\mathrm{d}W_2=50\cdot(30-x)\,\mathrm{d}x$

抓斗升至 x 处所需时间 : $\frac{x}{3}$ (s)

提升抓斗中的污泥:

$$\mathrm{d}W_3=(2000-20\cdot\tfrac{x}{3})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad W=\int_0^{30}[400+50(30-x)+(2000-20\cdot\tfrac{x}{3})]\,\mathrm{d}x$$

$$=91500\ (\mathrm{J})$$

机动　目录　上页　下页　返回　结束

例. 半径为 R，密度为 ρ 的球沉入深为H（H > 2 R）的水池底，水的密度 $\rho_0 < \rho$，现将其从水池中取出，需做多少功？

解：建立坐标系如图．则对应

上球的薄片提到水面上的微功为

$$\mathrm{d}W_1 = (\rho - \rho_0)\,\mathrm{g}\,\pi y^2\,\mathrm{d}x(H - R + x)$$

$$= (\rho - \rho_0)\,\mathrm{g}\,\pi (R^2 - x^2)(H - R + x)\,\mathrm{d}x$$

提出水面后的微功为

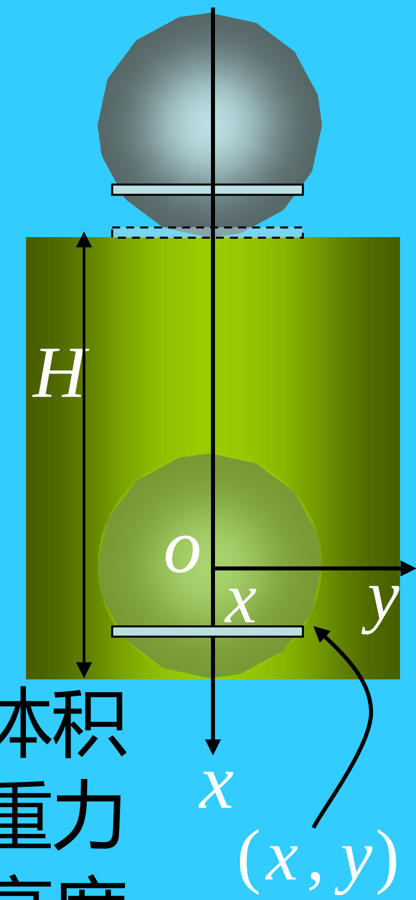
$$\mathrm{d}W_2 = \rho\,\mathrm{g}\,\pi y^2\,\mathrm{d}x \cdot (R - x)$$

$$= \rho\,\mathrm{g}\,\pi (R^2 - x^2)(R - x)\,\mathrm{d}x$$

微元体积

所受重力

上升高度



因此微功元素为

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2$$

$$= g\pi[(\rho-\rho_0)H+\rho_0(R-x)](R^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

球从水中提出所做的功为

$$W = g\pi\int_{-R}^{R}[(\rho-\rho_0)H+\rho_0(R-\underline{x)](R^2-x^2)}\,\mathrm{d}x$$

"偶倍奇零"

$$= 2g\pi[(\rho-\rho_0)H+\rho_0 R]\int_0^R (R^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3[(\rho-\rho_0)H+\rho_0 R]g$$