华东师范大学期中试卷

2020 —2021 学年第 1 学期

课程名称：_____高等数学 B____

学生姓名：____________________ 学　　号：____________________

专　　业：____________________ 年级/班级：___2020 级_______

课程性质：专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

补充说明：闭卷考试，不得使用计算器

一、（8 分，每小题 4 分）

（1）求函数 $f(x)=\ln(3^x-9)+\arccos\dfrac{2x-1}{5}$ 的定义域；

（2）求函数 $y=1+\ln(x+3)$， $x>-3$ 的反函数.

二、计算下列极限（25 分，每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+8x-9}$；

（2）$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 b}{x-b}$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x$ ；

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}$ ；

（5） $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

三、求下列函数的导数或微分（25 分，每小题 5 分）

（1）设 $y=x\arcsin x-\frac{1}{2}\ln(1+x^3)$ ，求 y' ；

（2）设 $y=\frac{1-x^3}{\sqrt[3]{x}}$ ，求 y' ；

（3）设 $y=\sin^2 x\cos x^2$ ，求 y' ；

（4）设 $y=e^{ax}\sin bx$ ，求 dy ；

（5）设 $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$，求 dy .

四、（10 分，每小题 5 分）

（1）证明：当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x$;

（2）求函数 $f(x)=x^3+x^2-x+2$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

五、（10 分，每小题 5 分）

设星形线的参数方程为 $x=a\cos^3 t; y=a\sin^3 t$ ，$(a>0;0\le t<2\pi)$

（1）求过点 $\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ 的切线方程;

（2）证明：当 $t_0 \neq 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ 时，切线被坐标轴所截线段为一常数.

六、（10 分，每小题 5 分）

（1）设 $f_n(x) = x^2 + nx - 1$（n 为正整数），证明：存在唯一的点 $x_n \in \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$，使得

$f_n\left(x_n\right) = 0$；

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + x_n\right)^n$.

七、（6 分）已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{2x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{3}{4},$$

求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

八、（6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)=f(b)=0, f(c)>0$.

证明：在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)<0$.