高数(一)A 卷

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$ ______.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\le 0\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，则 $a=$ _____.

3. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$ ______.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right]=$ ______.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=$ ______.

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

6. 当 $x\to 1$时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A) 等于2　(B) 等于0

(C) 为∞　(D) 不存在但不为∞

7. 设 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则 $n=$

(A) 4　(B) 5　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

8. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$内可导，且

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 c 的值为

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 0

9. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$

(A) 2π　(B) π　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

10. 已知微分方程 $y''+4y=x\cos x$，则其通解为

(A) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

(B) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

(C) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x$

(D) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

三、计算题（共 7 小题，共 60 分)

11.（8分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

12.（8分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判定它是否为极值点.

13.（8分）设可微函数 $f(x)$ 满足：$\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^x tf(x-t)dt$，求 $f(x)$.

14.（8分）证明：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$，并计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

15.（8分）已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

16.（10分）

(1) 叙述并证明牛顿-莱布尼兹公式；

(2) 计算定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

17.（10分）设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

高数(一)A 卷答案

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. $\frac{4}{3}$ **2. 2** **3.** $\sin x^2$ **4.** $\frac{2}{\pi}$ **5. 1**

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

6. D 7.B 8.C 9. D 10.A

三、计算题（共 7 小题，共 60 分)

11.(8 分)

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(t+1)(3t+2)$ $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$

12. (8 分)

解：对原方程两边关于 x 求导可得

$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$ $(*)$

令 $y'=0$，得 $y=x$，将此代入原方程，有 $2x^3-x^2-1=0$，从而得驻点 $x=1$

$(*)$ 式两边求导得

$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0$

因此，$y''|_{(1,1)}=\frac{1}{2}>0$.故驻点（1，1）是 $y=y(x)$ 的极小值点

13. (8 分)

解 令 $x-t=u$，则 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

故原方程化为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

两端对 x 求导 $f(x)=x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，再次求导 $f'(x)=1+f(x)$.

解此方程得 $f(x)=Ce^x-1$. 因为 $f(0)=0$，所以 $C=1$，故 $f(x)=e^x-1$.

14. (8 分)

证：(1)令 $x=\frac{\pi}{4}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\sin(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

(2)原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\pi\ln 2$

15.(8 分)

解：当 $x \to 0$时，应用麦克劳林公式 ，有

$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$

代入得 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + o(x^2) + f(0)x + f'(0)x^2 + o(x^2)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+f(0))x + f'(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2$

所以 $f(0) = -1$, $f'(0) = 2$

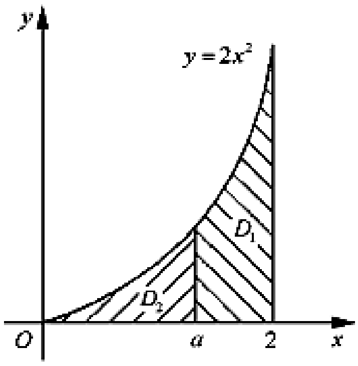
16. (10 分)

解：（1）牛顿－莱布尼茨公式 若$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，而且$f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

（2）$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x \cdot \left|\cos x\right|\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \dfrac{4}{5}$

17. (10 分)



解：(1)如图所示

$V_1 = \pi\int_0^2 (2x^2)^2\mathrm{d}x = \dfrac{4\pi}{5}(32 - a^5)$

$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi\int_0^{2a^2}\dfrac{y}{2}\mathrm{d}y = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4$

(2) 设 $V = V_1 + V_2 = \dfrac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4$.由

$V' = 4\pi a^3(1-a) = 0$

得区间$(0,2)$内的唯一驻点 $a = 1$

当$0 < a < 1$时，$V' > 0$；当$a > 1$时，$V' < 0$

因此$a = 1$是极大值点即最大值点.

此时，$V_1 + V_2$取得最大值等于 $\dfrac{129}{5}\pi$