第十一章

无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 幂级数
- 傅里叶级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

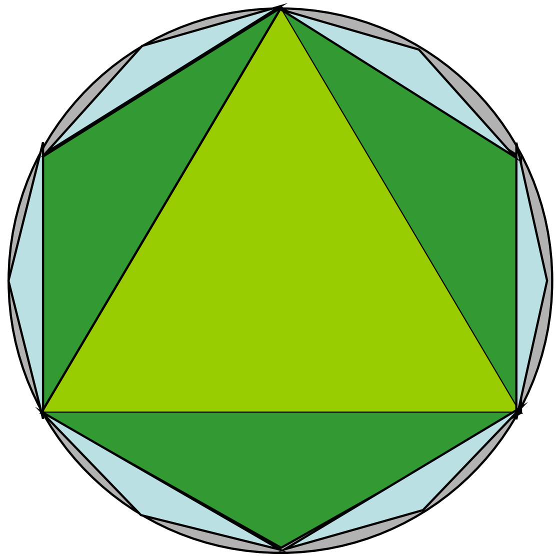
四、柯西收敛准则

一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$边形,设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$



$n\to\infty$时,这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

引例2. 小球从 1 米高处自由落下，每次跳起的高度减少一半，问小球是否会在某时刻停止运动? 说明道理.

由自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}g\,t^2$ 知 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间，则小球运动的时间为

$$T=t_1+2t_2+2t_3+\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\approx 2.63\ (\mathrm{s})$$

定义：**给定一个数列** $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ **将各项依次相加, 简记为** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，**即**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n **叫做级数的一般项, 级数的前 n 项和**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, **则称无穷级数收敛**，**并称 S 为级数的和,（也称级数收敛于S）**

记作 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, **则称无穷级数发散 .**

当级数收敛时, 称差值

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

为级数的余项. 显然

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0$$

若 $\boldsymbol{s_n \approx s}$， 误差是 $|\boldsymbol{r_n}|$.

给定数列 $\{s_n\}$，

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) + \cdots$$

$$= s_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(s_n - s_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

其中 $u_1 = s_1, u_n = s_n - s_{n-1}\ (n \geq 2)$

给出了由部分和数列确定该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项的公式.

由定义， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\{s_n\}$ 同时收敛或同时发散，

在收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i$.

例 1 讨论等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$$ 的收敛性.

分析：利用级数收敛的定义来讨论

解 如果 $q \neq 1$ 时,

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$， **级数收敛，**

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$，**级数发散.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

如果 $|q| = 1$ 时,

当 $q = 1$ 时， 由于 $s_n = na \to \infty$， **级数发散**,

当 $q = -1$ 时， 级数变为 $a - a + a - a + \cdots$,

$$S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在， **级数发散**.

综上 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{当 } |q| < 1 \text{ 时, 收敛,} \\ \text{当 } |q| \geq 1 \text{ 时, 发散.} \end{cases}$

例 2　判定无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ 的收敛性.

解　因为 $u_n = 2^{2n} 3^{1-n} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,

已知级数为等比级数，　$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当 |q| < 1 时, 收敛, \\ 当 |q| \geq 1 时, 发散. \end{cases}$

公比 $q = \frac{4}{3}$,　因为 $|q| \geq 1$,

由等比级数的敛散性， 所以原级数发散.

例3. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$$

$$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (1) 发散;

技巧:
利用 “拆项相消” 求和

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$S_n=\underline{\frac{1}{1\cdot 2}}+\underline{\frac{1}{2\cdot 3}}+\underline{\frac{1}{3\cdot 4}}+\cdots+\underline{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

例3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= [\ln 3+\ln 1-2\ln 2] + [\ln 4+\ln 2-2\ln 3] + [\ln 5+$$

$$+\ln 3-2\ln 4] + \cdots + [\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n]$$

$$= -\ln 2 + \ln(n+1)-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2,$ 故原级数收敛 , 其和为 $-\ln 2$.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛，其和为 $c\,S$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c\,u_k=c\,S_n$ ，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c\,S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S$.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变 .

性质2. 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n\pm\sigma_n \to S\pm\sigma \quad (n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例4.判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\quad \sum_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证: $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见: **若级数的一般项不趋于0，则级数必发散 .**

例如, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$, 其一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当$n\to\infty$时, u_n不趋于0,因此这个级数发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上 , 假设调和级数收敛于 S , 则

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .

例5. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$; (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.