2021-2022 学年《线性代数》第一次过程性考试试题

（共计十个题目，每题 10 分，开卷考）

1. 计算 9 阶排列 135792468 的逆序数, 并指明它是偶排列还是奇排列;

2. 请利用行列式的定义计算下列 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

的值;

3. 已知如下的关于变量 x 的方程，请求出这个方程的全部根。

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^9 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^9 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_9 & a_9^2 & \cdots & a_9^9 \end{vmatrix}=0;$$

4. 计算下列 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix};$$

5. 求出与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵；

6. 设 n 阶矩阵 A 是可逆的，如果将 A 的第 i 列与第 j 列交换一下，那么，A^{-1}会如何变化？若将 A 的第 i 列乘上数 c 后再加到第 j 列上去，A^{-1}又会如何变化？

7. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵；

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$，求$A^n, A^{-n}$；

9. 设含有参数 λ 的线性方程组如下

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5, \\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11, \\ 4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2, \end{cases}$$

试就 λ 的取值情况确定此方程组何时无解？何时有解？在有解的情况下何时解唯一，何时有无穷多个？

10．设 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$，证明:

$$Tr(AB)=Tr(BA),$$

其中，$Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 表示矩阵 A 的迹。