A卷 (考试卷)

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n-n\sin\frac{1}{n}\right)=$ ______________ .

2. 若 $\int f(x)dx=\arccos\sqrt{x}+C$，则 $f(x)=$ ______________________ .

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $x=\int_0^{x^3-1}f(u)du$. 则 $f(7)=$ ______________ .

4. 曲线 $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程是 = ______________.

5. 设向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 满足: $|\overrightarrow{a}|=4$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$, 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4$. 则 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=$ ______________.

二、计算题

1. (15分) 求下列积分 (定积分、不定积分与广义积分).
   (1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(|x|+x^3)\cos x dx$; (2) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$; (3) $\int_1^e\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$.

2. (6分) 求曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 的拐点坐标.

3. (6分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x\sin^2 x}$.

4. (6分) 求曲线段 $y=2x^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le5)$ 的弧长.

5. (6分) 求点 $A(3,-2,1)$ 在平面 $\Pi:\ 3x-y+z-4=0$ 上的投影点的坐标.

三、解答题

1. (8分) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & x\ge1,\\ -x^2+bx, & x<1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a, b 的值.

2. (8分) 设函数 $f(x)$ 满足：$f(x)=\frac{1}{x^2+3}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$. 求定积分 $\int_0^1 f(x)dx$.

3. (10分) 设直线 $l_1:\begin{cases}2x+y=0,\\ 4x+2y+3z=6,\end{cases}$ 和 $l_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{41}$.

   (1) 验证 l_1 与 l_2 为异面直线；

   (2) 求经过 l_1 并与 l_2 平行的平面方程.

4. (10分) 设直线 $y=kx\ (0<k<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 及所围成的图形 D_1 的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形 D_2 的面积为 S_2 . 试确定使 S_1+S_2 达到最小时 k 的值, 并求该值所对应的平面图形 $D_1\cup D_2$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

5. (5分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\int_0^{\xi} f(x)dx=(1-\xi)f(\xi).$$

B卷 (补考卷)

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$ ______________ .
2. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2-e^x}\tan u du$. 则微分 $\mathrm{d}f(x)=$ _____________________ .
3. 定积分 $\int_{-a}^{a}\left(\frac{x}{2}\cos^2 x+1\right)\sqrt{a-x^2}dx=$ ______________ .
4. 曲线 $y=xe^x$ 的拐点坐标是 ______________.
5. 与向量 $\overrightarrow{a}=(3,6,8)$ 及 x 都垂直的单位向量是 ______________.

二、计算题

1. (15分) 求下列积分 (定积分、不定积分与广义积分).
   (1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$; (2) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$; (3) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$.
2. (6分) 求函数 $y=x^3-9x^2+15x+3$ 的极值.
3. (6分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\tan^2 t dt}{x\ln(1-x^2)}$.
4. (6分) 求曲线段 $y=\frac{1}{3}x^3\ (1\le x\le\sqrt{7})$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积.
5. (6分) 求经过两点 $P(2,-1,-3)$ 和 $Q(0,3,-1)$ 并与平面 $\Pi_1:\ 2x-2y+z-3=0$ 垂直的平面 Π 的方程.

三、解答题

1. (8分) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin ax, & x\le 0,\\ \ln(1+x)+b, & x>0,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导, 求 a, b 的值.

2. (8分) 已知 $\int xf(x)dx=\arccos x+C$，求不定积分 $\int f(x)dx$.

3. (10分) 已知点 $P_0(2,-1,3)$, 直线 $l_0:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ 以及平面 $\pi_0:\ 3x-2y+z+5=0$.

   (1) 验证直线 l_0 与平面 π_0 相交；

   (2) 若直线 l 经过点 P_0, 并与直线 l_0 相交, 且平行于平面 π_0. 求 l 的方程.

4. (10分) 求曲线 $y=x^2-2x$, $y=0$, $x-1$, 及 $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S, 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

5. (5分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0).$$

   试证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=0$.