第六章　定积分的应用

1. 如何理解和运用微元法来解定积分的应用问题？

答：若在某区间上待求的量A满足两个条件（1）对区间的可加性（2）在长度为Δx的区间上的分量可表达为$\Delta A = f\left(x\right)\Delta x + o\left(\Delta x\right) \quad \left(\Delta x \to 0\right)$. 微元实际上就是在$\Delta x \to 0$时，$\Delta A$的等价无穷小量$dA = f\left(x\right)\Delta x$. 用定积分来解应用题关键就在于求出微元。从实际应用角度看，微元就是在$\Delta x \to 0$的条件下，将一些变动的量视为常量而得到的与dx成正比的ΔA的近似值。因此一般来说比较容易求得。求得微元后再在相应的区间上积分就可得到待求的量A。

2. 在计算三叶玫瑰线$r = \sin 3\theta$的面积时，因$r = \sin 3\theta$的周期是$\frac{2}{3}\pi$，是否面积$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}\sin^2 3\theta d\theta$（图 6-8）？

答：不是。在极坐标系中，函数$r = r\left(\theta\right)$的周期并不等于使函数图形开始出现重叠的θ的变化周期。对于本例，虽然$r\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = r\left(\theta\right)$但$\left(r, \theta\right)$和$\left(r, \theta + \frac{2}{3}\pi\right)$并不表示同一个点，实际上$r\left(\theta + \pi\right) = \sin\left[3\left(\theta + \pi\right)\right] = -\sin 3\theta = -r\left(\theta\right)$，而$\left(r, \theta\right)$和$\left(-r, \theta + \pi\right)$表示同一个点。因此使图形开始出现重叠的$\theta$的变化周期是$\pi$，故计算面积$A$时考虑的$\theta$变化范围应该是$\left[0, \pi\right]$，由图可知三叶玫瑰线的三叶$\theta$的范围分别是$\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$，$\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$，再由对称性可得$A = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin^2 3\theta d\theta$。

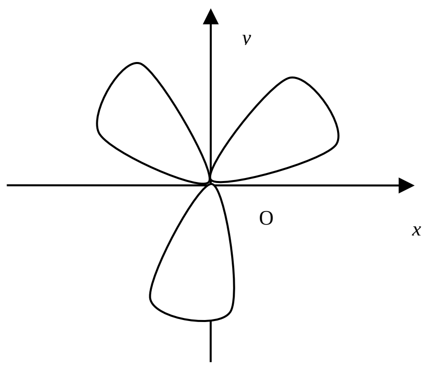

图 6-8