高等数学练习卷(Ⅲ)

一、求函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$ 的定义域.

二、计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x+2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{3x}{\sqrt{n}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\sqrt{1-x^2}}}{x\ln(1+x)}$.

三、求下列函数的导数或微分

（1） 设 $y=2^x+x^2+\sin\dfrac{\pi}{4}$，求 y'；

（2）设 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，求 y'；

（3） 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，求 dy；

（4）设 $y=e^x\cos 2x$，求 y'；

（5）设 $y=x^{\arcsin x}$，$0<x<1$，求 y'.

四、设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=x^2$， 求 $f\left[\varphi'(x)\right]$， $f'\left[\varphi(x)\right]$，$\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'$.

五、

（1）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-ax}{2x^2+3a}\right)^x=e^{-1}$，求常数 a 的值；

（2）设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^3}-1$ 与 $\sin^3 x$ 是等价无穷小量，求常数 a 的值.

六、

（1）求曲线 $\begin{cases}x=3e^{-t}\\ y=2e^{t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程；

（2）设 y=y(x)是由方程$e^y + xy = e$所确定的隐函数，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

七、已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{e^x - 1} = 5$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

八、试确定常数 a、b、c 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 + b\sin x + c, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$$

在$x=0$处一阶导数连续，但二阶导数不存在。

高等数学练习卷(Ⅲ)答案

一、求函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须 $x-2\geq 0$， $x-3\neq 0$ 且 $5-x>0$，由此得：$2\leq x<5$ 且 $x\neq 3$

∴所求函数的定义域为 $[2,3)\cup(3,5)$.

二、计算下列极限

（1）解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x+2}=-\dfrac{1}{2}$

（2）解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$

（3）解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

（4）解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{3x}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{3x}{\sqrt{n}}=3x$

（5）解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\sqrt{1-x^2}}}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}\left(e^{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot 2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=e$$

三、求下列函数的导数或微分

（1） 设 $y=2^x+x^2+\sin\dfrac{\pi}{4}$，求 y'；

解 $y'=2^x\ln 2+2x$

（2）设 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，求 y'；

解 $y'=\dfrac{-2x\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$

（3） 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，求 dy；

解 $dy=\dfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2xdx=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

（4）设 $y=e^x\cos 2x$，求 y'；

解 $y'=e^x\cos 2x-e^x\sin 2x\cdot 2=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$

（5）设 $y=x^{\arcsin x}$，$0<x<1$，求 y'.

解 取对数，得

$$\ln y=\arcsin x\ln x$$

在上式两边关于 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}$$

$$\therefore y'=y\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)=x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

四、设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=x^2$， 求 $f[\varphi'(x)]$， $f'[\varphi(x)]$，$\{f[\varphi(x)]\}'$.

解 $f[\varphi'(x)]=\sin 2x$ $\quad f'[\varphi(x)]=\cos x^2$ $\quad \{f[\varphi(x)]\}'=(\sin x^2)'=2x\cos x^2$

五、

（1）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-ax}{2x^2+3a}\right)^x=e^{-1}$，求常数 a 的值；

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{2x^2-ax}{2x^2+3a}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{2x^2-ax}{2x^2+3a}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-ax-3a}{2x^2+3a}=-\dfrac{a}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-ax}{2x^2+3a}\right)^x=e^{-\frac{a}{2}}$$

由条件得 $-\dfrac{a}{2}=-1$，因此 $a=2$

（2）设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^3}-1$ 与 $\sin^3 x$ 是等价无穷小量，求常数 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+ax^3}-1}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}ax^3}{x^3}=\dfrac{a}{4}$

另外，由条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+ax^3}-1}{\sin^3 x}=1$

$\therefore \dfrac{a}{4}=1$，因此 $a=4$

六、

（1）求曲线$\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t} \end{cases}$在$t=0$处的切线方程和法线方程；

解 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\left.\dfrac{2}{3}e^{2t}\right|_{t=0}=-\dfrac{2}{3}$，且$t=0$对应的点为$(3,2)$

$\therefore$所求的切线方程为

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-3) \quad 即 \quad 2x+3y-12=0$$

法线方程为

$$y-2=\frac{3}{2}(x-3) \quad 即 \quad 3x-2y-5=0$$

（2）设 y=y(x)是由方程$e^{y}+xy=e$所确定的隐函数，求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

解 在方程两边关于 x 求导，得

$$e^{y}\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^{y}+x}$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=-\frac{\dfrac{dy}{dx}\left(e^{y}+x\right)-y\left(e^{y}\dfrac{dy}{dx}+1\right)}{\left(e^{y}+x\right)^{2}}=\frac{y\left(2e^{y}+2x-ye^{y}\right)}{\left(e^{y}+x\right)^{3}}$$

七、已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{e^{x}-1}=5$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^{2}}$.

解 方法 1

由条件知，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\arcsin x}=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{e^{x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{2}}$$

再由条件，得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^{2}}=5$

方法 2

$$\because \lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{e^{x}-1}=5$$

$$\therefore \frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\arcsin x}\right)}{e^x-1}=5+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}=\left[e^{(5+\alpha(x))\left(e^x-1\right)}-1\right]\cdot\frac{\arcsin x}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[e^{(5+\alpha(x))\left(e^x-1\right)}-1\right]\cdot\frac{\arcsin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(5+\alpha(x))\left(e^x-1\right)}{x}=5$$

八、试确定常数 a、b、c 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b\sin x+c, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在.

解 1）由条件知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$\therefore c=0$

2）当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2ax+b\cos x$

当 $x=0$ 时，$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2+b\sin x}{x}=b$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$\therefore$当 $b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，且

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+\cos x, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0 \end{cases}$$

3）$\because \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2ax+\cos x-1}{x}=2a$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x}=-1$$

$\therefore$当 $2a\ne -1$ 即 $a\ne -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数不存在.

华东师范大学化学与分子工程学院
2015级本科生化学班团支部
宣
祝愿大家明天考出好成绩！

【彩蛋】将本行文字截图发给曾晋哲，第一位可领取￥11.11双十一大礼包；
第二位、第三位可获得￥1.11双十一小礼包。