东南大学考试卷 A 卷

课程名称	线性代数 A	考试学期	18-19-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名__________ 学号__________

密 封 线

一．(30%)填空题（E 表示单位矩阵）

1. 设 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，$B=(\beta,\gamma,\alpha)$，而 $|A|=2$，则 $|A+B|=$________________；

2. 若 α 是 3 维列向量，$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$________________；

3. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 $Q=$________________；

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 B，使得 $AB=O$，则 $t=$____________；

5. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是__________；

6. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&1\\1&b&1\end{vmatrix}$，求此行列式的所有代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{3}A_{ij}=$____________；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}5&7\\0&7\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$ 相似且 $a>0$，则 $B=$________________；

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正惯性指数为____；

9. 设 A 是 3 阶实对称阵且满足 $A^2+3A=O$，若 $kA+2E$ 是正定矩阵，则 k 必满足____；

10. 设 A 是 3 阶实正交矩阵，矩阵 A 的第 1 行第 3 列元素 $a_{13}=1$，$b=(2,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 有一解为________________________。

二． （**10%**）验证：$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的一组基，并求向量 $\beta_1=(5,0,7)^T$ 在这组基下的坐标。

三． （**14%**）设线性方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+kx_3=3, \\ x_1+kx_2+3x_3=2, \end{cases}$ 问：k 取何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

四．（**12%**）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，且 $AX = A^T + X$，求矩阵 X。

五．（**12%**）设向量 $\alpha_1=(-1,0,1)^T, \alpha_2=(1,2,0)^T, \alpha_3=(1,2,1)^T$，方阵 A 满足

$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2, A\alpha_3=-\alpha_3$，

（1）求矩阵 A，

（2）求矩阵 $(A-E)^{100}$ 的秩。

六. （12%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都是 1，

（1）求 a 的值；（2）用正交变换把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

七. （10%）证明题：

1. 设 A 是 n 阶方阵，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量，且 $\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

2. 设 A,B 分别为 n 阶矩阵，且 A 有 n 个互不相同的特征值，已知 $AB=BA$，证明：存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都为对角阵。