§2 定积分的基本性质

下面设 $f(x), g(x)$ 等均为**连续函数**.

性质 1 $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

证 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

作和 $$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i]$$

$$= \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

所以 $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定积分的基本性质

性质 2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, k 为常数.

证 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$,

作和 $$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

所以 $$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定积分的基本性质

性质 3 设 $a<c<b$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

证 将 $[a,b]$ 分成小区间时，把 c 作为分点，而增加一个分点只会使 $\|\Delta x\|$ 更小，作和

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

取极限得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

实际上，当 $a<b<c$ 时，上式也成立，因为

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 4 若 $f(x) \le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

证 将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

由于 $f(\xi_i) \le g(\xi_i), \quad \Delta x_i > 0,$

$$f(\xi_i)\Delta x_i \le g(\xi_i)\Delta x_i,$$

作和 $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

取极限得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

命题* 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)\not\equiv 0$，

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$

证 设 $f(x_0)>0$，由保号性，存在 $\delta>0$，使得当

$$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b) \text{ 时，有 } f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x = f(x_0)\delta>0.$$

定积分的基本性质

推论 设 $f(x), g(x)$在$[a,b]$ 上连续, $f(x) \geq g(x)$, 且 $f(x) \not\equiv g(x)$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

例1 求证 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x > \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x.$

证明 因为当 $x \in [0, \pi/2]$ 时,

$$\sqrt{1+\sin^2 x} \geq \sqrt{1+\sin^3 x},$$

且不恒等, 所以

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x > \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x.$$

定积分的基本性质

性质 5 若 $m \le f(x) \le M$，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$

证 性质 4 知 $\int_a^b m\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b M\mathrm{d}x,$

计算得 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$

性质 6 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$

证 由于 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

由性质 4 知 $-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$

所以 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$

性质7 **(积分中值定理)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，存在 $\xi\in[a,b]$，

使得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以最大最小值 $f(x_1), f(x_2)$，

即 $$f(x_2)\le f(x)\le f(x_1),$$

由性质 5 知 $$f(x_2)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le f(x_1).$$

由连续函数的介值定理知存在 $\xi\in[a,b]$，使得

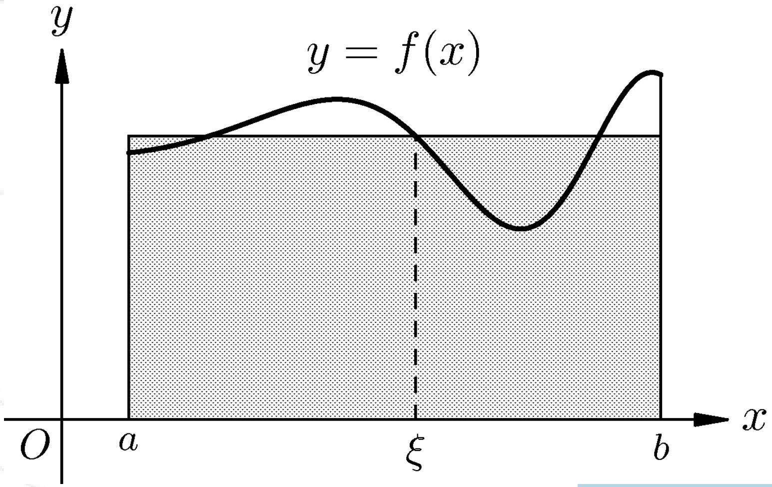
$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

中值定理的几何意义

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.



例2 估计 $\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

解 设 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, 则

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 0,\quad x\in[1,2],$$

所以 $\frac{2}{5}=f(2)\le f(x)\le f(1)=\frac{1}{2}$, 并且不恒等,

积分得 $\frac{2}{5}<\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}.$

柯西—施瓦茨不等式

例3　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

证　若 $g(x)\equiv 0$, 则不等式两边都为零.

当 $g(x)\not\equiv 0$, 由命题*得 $\int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x > 0.$

另外 $\int_a^b [\lambda g(x)+f(x)]^2\mathrm{d}x \ge 0,$

即 $\lambda^2\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b [f(x)g(x)]\mathrm{d}x + \int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x \ge 0.$

则此一元二次不等式的判别式

$$\Delta = \left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x \le 0,$$

所以 $$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

中值定理举例

例4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(1)-3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x)dx=0,$

证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi).$

证 由积分中值定理知，存在 $\eta\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, 使得 $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x)dx=\frac{1}{3}e^{1-\eta^2} f(\eta).$

从而 $e^{1-\eta^2} f(\eta)=f(1).$

令 $F(x)=e^{1-x^2} f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，且

$$F(\eta)=e^{1-\eta^2} f(\eta)=f(1)=F(1).$$

由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0,$

$$F'(x)=-2xe^{1-x^2} f(x)+e^{1-x^2} f'(x),$$

所以存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi).$