

考试科目代码及名称： 高等数学 A

招生专业：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。

一. 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $f(x) = x|x(x-1)|$ ，则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $z = z(x, y)$ 由 $x + y - z = e^z$ 确定，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 微分方程 $y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y(1+x^2)}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, 且 $|A| = 2$, $|B| = -7$, 则行列式 $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

二. 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续， $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，又 $f(a) \neq 0$ ，则 $\underline{\hspace{2cm}}$ (A) $\varphi(f(x))$ 在 $x=a$ 处间断; (B) $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处间断;(C) $(\varphi(x))^2$ 在 $x=a$ 处间断; (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断.8. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$, $g(x) = \sin x - x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $\underline{\hspace{2cm}}$ (A) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小; (B) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小;(C) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小; (D) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小.9. 设 $f(x) > 0$, 单调上升且连续, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$

(A) $\int_0^{\frac{1}{5}} f(x) dx < 4 \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} f(x) dx$; (B) $\int_0^{\frac{1}{5}} f(x) dx < 4 \int_0^{\frac{1}{10}} f(x) dx$;

$$(C) \int_0^{\frac{1}{5}} f(x)dx > \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} f(x)dx; \quad (D) \int_0^{\frac{1}{5}} f(x)dx > \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx.$$

10. 以下等式成立的是_____

$$(A) \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int_0^{-1} \frac{dt}{1-t^2}; \quad (B) \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt$$

$$(C) \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^{+\infty} e^{-t} dt; \quad (D) \int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int_2^0 \frac{dt}{2+t^2}$$

11. 设 L 为椭圆 $Ax^2 + \frac{y^2}{B} = 1$, 此椭圆周长为 2, 则 $\oint_L (2xy + Bx^2 + \frac{y^2}{A}) ds =$ _____

$$(A) 2AB; \quad (B) \frac{2B}{A}; \quad (C) \frac{2A}{B}; \quad (D) (A)、(B)、(C) 都不正确.$$

12. 设 A^* , A^{-1} 分别为 n 阶方阵 A 的伴随阵和逆阵, 则 $|A^* A^{-1}| =$ _____

$$(A) |A|^n; \quad (B) |A|^{n-1}; \quad (C) |A|^{n-2}; \quad (D) |A|^{n-3}.$$

三. 解答题.

13. (10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq x_0 \\ ax+b & x > x_0 \end{cases}$ 在 $x = x_0$ 处可导, 求 a, b 的值.

14. (10 分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可微, $x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

15. (10 分) 求 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

16. (12 分) 求 $\int_1^5 dy \int_y^5 \frac{dx}{y \ln x}$.

17. (12 分) 求 $\iint_{\Sigma} yz \, dz dx + dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的外侧, 在 $z \geq 0$ 部分.

18. (12 分) 将 $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开成麦克劳林级数.

19. (12 分) 曲线 $f(x, y) = 0$ 满足方程 $y^2 y'' + 1 = 0$. 此曲线过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且在此点的切线与曲线 $y = x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ 在该点的切线重合. 求此曲线方程.

20. (12 分) 问 k 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解? 无解? 有无穷多组解? 并求出有唯一解时的解.

21. (12 分) 已知向量 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 求常数 k 的值.