第 1 章 基本知识

1. 求函数 $y = \arccos\frac{3x}{x^2+1}$ 的定义域.

2. 设 $f(x)$ 是以2为周期的偶函数, 且当 $x \in [2,3]$ 时, $f(x) = x$, 求当 $x \in [-2,0]$ 时 $f(x)$ 的函数表达式.

3. 证明下列函数是定义域上的有界函数:
(1) $y = 1 - \sin x + 7\cos^3 x$; (2) $y = \frac{\arctan x}{1+x^2}$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}1, |x|\le 1,\\ 0, |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

5. 引进中间变量, 指出下列函数是如何由基本初等函数经过四则运算和复合运算得到的:
(1) $y=\sin^2 2x$; (2) $y=\log_a \sin e^{-x}$ $(a>0,\ a\ne 1)$; (3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

第 2 章 极限与连续

1.证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff$ 对任意的$\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项 x_n 在 a 的 ε 领域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外.

2.用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4n} = \frac{2}{3}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0, (q > 1).$

3. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a,\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a,$
试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

4.设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,试用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a.$

5.设 $x_1 > -6$， $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}(n = 1, 2, \cdots)$， 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

6.计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+2^n}{3\cdot 4^n-3^n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)]$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2})^n$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

7.用函数极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)=12$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+1}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

8.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3+2x^2+x}{4x^2+3x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2}{5x^4+2x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+1}{5x^3-3x+2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$.

9.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\tan x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos 3x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\arctan 3x^2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{2x+1}{2x+3})^{x}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^{5x}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x+1}{1-x})^{\frac{5}{x}}$.

10.将下列 $x\to 0^+$ 的无穷小按低阶到高阶的次序排列

(1)$\sin\sqrt{x}$　(2)$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1$　(3)$\cos(x^2)-1$　(4)$\tan(x^3)$

11.当 $x\to 0^+$ 时，下列函数分别是 x 的几阶无穷小：

(1)$1-\cos x$　(2)$x+x^2$　(3)$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$　(4)$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

12.求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{2x+3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\tan^2 3x}{x^2\ln(1-2x)}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\arctan^2\frac{2}{x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x|<1$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)$.

13.函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界？当 $x \to +\infty$ 时这个 函数的极限是否为无穷大？为什么？

14.若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，求 a 的值。

15.求出下列函数的间断点并给出间断点的类型：

(1)$y = \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2(x-1)}$.

(2)$y = \arctan \frac{1}{x}$.

(3)$y = \frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

(4)$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & x < -1, \\ \frac{1}{x}, & x \geq -1. \end{cases}$

16. 证明方程$x - 2\sin x = 0$ 在 $(0, +\infty)$内有实根。

17. 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性。

18. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2}<x<0\\ a, & x=0\\ x^2+b, & 0<x\le 1\end{cases}$

求 a,b使得 $f(x)$在 $x=0$连续。

19.设函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)连续，且$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1,x_n]$上必存在ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

20.若 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，其中 $a>0$ 且 $f(0)=f(2a)$，试证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根。

21.设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续， 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，证明: $f(x)$ 在 $(a+\infty)$ 上有界。

第 3 章 导数与微分

1. 设 $f(x) = \ln[1+\sin(x-a)] + (x-a)\arctan^2\sqrt[3]{x}$，按定义求 $f'(a)$。

2. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0} = A$, 求 $f'(x_0)$。

3. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0$, 试证 $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$ 在 $x = 0$ 处可导。

4. 求下列函数的导数：

(1) $y = 4x^3 + 2x$.

(2) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 4$.

(3) $y = 2e^x + 3\tan x$.

(4) $y = 3\ln x + 4\lg x + \ln 5$.

(5) $y = \sin x \ln x$.

(6) $y = x^2 e^x \cos x$.

(7) $y = \frac{5x^2+3x}{1+x^2}$.

(8) $y = \frac{x^2-\ln x}{x^2+\ln x}$.

5. 求 a 为何值时曲线 $y=\ln x$ 与曲线 $y=ax^2$ 相切.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(3x-2)^{10}$.

(2) $y=\sin(4x+1)$.

(3) $y=e^{-x^2}$.

(4) $y=\ln(3x^2+2)$.

(5) $y=\arcsin(x^2)$.

(6) $y=(\arcsin x)^2$.

(7) $y=\ln\sin 2x$.

(8) $y=\sqrt{a^2+x^2}\cos x$.

(9) $y=e^{3x}\sin(5x+1)$.

(10) $y=\arccos\sqrt{x+1}$.

(11) $y=\ln(\sec x-\tan x)$.

(12) $y=a^{a^x}+a^{x^a}+a^{a^a}$.

(13) $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(14) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$.

7. (1) 设 $y=f(e^{\sin^2 2x})$, 其中 $f(x)$ 可导, 求y'.

(2) 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$处可导，函数 $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求复合函数 $F(g(x))$ 在 $x=0$ 处的导数.

8. 用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=(\cos x)^{\cos x}$;

(2) $y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+1}(3-x)^3}{(x+2)^4}$.

9. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y = x^3 + \cos x$.

(2) $y = (1 + x^2)\arctan x$.

(3) $y = xe^{-x^2}$;

(4) $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

10. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式.

(1) $y=\frac{1}{x^2+4x-12}$.

(2) $y=\cos^4 x$.

(3) $y=x^2e^{2x}$.

(4) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$.

11. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$;

(2) $e^{xy} + y^2 = \cos x$.

12. 求由下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $y = x + \arctan y$.

(2) $y = 1 + xe^y$.

13. 求下列参数方程所确定的函数的导数$\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases} x = 2t - \cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + e^t = 5. \end{cases}$

14. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x = \sin t - t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t. \end{cases}$

15. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点$(0,1)$处的切线方程和法线方程.

16. 溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中.开始时漏斗中盛满了溶液.已知当溶液在漏斗中深为12cm时, 其表面下降的速率为1cm/min, 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

17. 求下列函数的微分:

(1) $y=(x+1)^x+\arctan\ln x$.

(2) $y=\arctan\sqrt{2-x}$.

(3) $y=[g(x)]^{x+1}$, ($g(x)$有一阶导数, $g(x)>0$).

(4) $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$.

18. 求由方程$2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$的微分dy.

19. 计算下列各式近似值（精确到0.0001）：

(1) $\sin 1^{o}$.

(2) $\sqrt[3]{998}$.

20. 求曲线$y=x^2$上一点$P_0(x_0,y_0)$, 使得过P_0的切线与$2x-6y+5=0$ 垂直.

第 4 章 微分中值定理与导数的应用

1. 验证函数$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, 0 \le x \le 1. \\ 1-x^2. -1 \le x \le 0. \end{cases}$ 在$-1 \le x \le 1$ 上是否满足拉格朗日定理条件？如满足, 求出满足定理的 ξ.

2. 若 $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + a_0 = 0$, 求证: 方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ 在$(0,1)$内至少有一实根.

3. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 连续, 在(a,b) 二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$.

4. 设函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明在(a,b)内至少存在一点ξ,使$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(\xi)-\varphi(a)}{b-\xi}$.

5. 若$a\cdot b>0$,证明在a,b之间存在一点ξ, 使得$ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^{\xi}$.

6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导, 求证:$f(x)$的两个相异零点之间一定有$f(x)+f'(x)$ 的零点.

7. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}}$.

(9) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

8. 利用泰勒公式求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$.

9. 求函数$f(x)=\sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式。

10. 证明: (1) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5})+\circ(x^6),(x\to 0)$.

(2) $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\circ(x^2),(x\to 0)$.

11. 设$f(x)$ 在点$x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=1$, 试求 $f(0), f'(0)$ 及$f''(0)$ 的值.

12. 判定函数$y=\sqrt{2}x+\sin x+\cos x$ 的单调性.

13. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

(2) $y = \frac{1}{x}\ln^2 x$.

14. 设$a > e$, 求证$a\ln(a+x) < (a+x)\ln a, \quad (x > 0)$.

15. 设$b > a > 0$, 求证$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$.

16. 证明当 $x > 1$ 时, $0 < \ln x + \frac{4}{x+1} - 2 < \frac{1}{12}(x-1)^3$.

17. 求$y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$的极值.

18. 求$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$在$x > 0$上的最小值.

19. 求 $f(x) = x^2\sqrt{b^2 - x^2}(0 \leq x \leq b)$ 的最大、最小值.

20. 求下列曲线的拐点及上凸和下凸区间:

(1) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

(2) $y = 2x^2 - \ln x$.

21. 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

22. 证明 $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln(\frac{x+y}{2})$, $\quad (x > 0, y > 0, x \neq y)$.

23. 描绘函数 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

24. 描绘函数 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ 的图形.

25. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的曲率半径.

第 5 章 积分

1. 比较下列各定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 x^2 dx$; (2) $\int_1^2 x dx$ 与 $\int_1^2 x^2 dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ 与 $\int \sin x dx$; (4) $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

2. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$在 $[a,b]$上连续，$f(x) \leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. 试证在 $[a,b]$ 上 $f(x) = g(x)$.

3. 试证存在 $\xi \in [0,2]$, 使得 $\int_0^2 \frac{1}{2} \sin x dx = \sin \xi$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

5. 求下列函数的导数

(1) $y=\displaystyle\int_x^0 e^{t^2}dt$.

(2) $y=\displaystyle\int_{\cos^2 x}^{2x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

(3) $y=\displaystyle\int_{x^2}^0 x\cos^2 t dt$.

6. 求由 $\displaystyle\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^x \cos t^2 dt=0$ 所决定的隐函数 $y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

7. 设 $f(x)$ 具有连续的导函数，试计算 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)dt$.

8. 求下列不定积分

(1) $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^2e^x}{x^2}dx.$

(2) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx.$

(3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx.$

(4) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx.$

(5) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx.$

(6) $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx.$

9. 用第一类换元法求下列不定积分

(1) $\int \sin 3x dx.$

(2) $\int (5x+4)^{10} dx.$

(3) $\int x\sqrt{2+3x^2} dx.$

(4) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dx.$

(6) $\displaystyle\int \cos x e^{\sin x} dx.$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4-\ln x)}.$

(8) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx.$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}.$

(11) $\int \tan^3 x dx.$

(12) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

(13) $\int \sec^4 x dx.$

(14) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt[3]{\cos x + \sin x}} dx.$

(15) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx.$

(16) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx.$

(17) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

(18) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx.$

(19) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}dx.$

(20) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx.$

10. 用第二类换元法求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx, (a>0).$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}+1}$.

(8) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}dx$.

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

(10) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

11. 用分部积分法求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

(3) $\displaystyle\int x^2\cos x dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

(5) $\displaystyle\int e^{3x}\sin 2x dx.$

(6) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 x dx.$

(7) $\displaystyle\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

(8) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$

(9) $\displaystyle\int \cos(\ln x) dx.$

(10) $\displaystyle\int x f''(x) dx.$

12.求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

13.求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}dx.$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}.$

(7) $\displaystyle\int x^2 \arccos x dx.$

(8) $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

(10) $\displaystyle\int \frac{\cot x dx}{1+\sin x}$.

(11) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$.

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{x^2+1}}dx.$

(13) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx.$

(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

14.计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^2 (4-2x)(3+x^2)dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^2 (3|x| + \frac{2}{|x|+1})dx.$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max\{x, x^2\} dx.$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx.$

15.计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx.$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx.$

(6) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}dx.$

16.利用函数奇偶性计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx.$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx (ab \neq 0).$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx.$

17. 当n为正整数时, 证明:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数}, \\ 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

18. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} x^3 e^{x^2} dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$

(5) $\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx.$

(6) $\int_0^1 x \arctan x dx.$

(7) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$

19. 求 $\int_0^x f(t)dt$,其中 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le 1, \\ x \ln x, & 1 \le x \le 2, \\ 1. & x > 2. \end{cases}$

20. 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty + \infty)$ 上以 T 为周期的连续函数. 证明对任何实数 a 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

21. 判别下列各广义积分的敛散性, 若收敛则计算广义积分的值:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx.$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx.$

(5) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{x}{\sqrt{5-x}} dx.$

$\boxed{(6)}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx.$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

$\boxed{(9)}$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx.$

$\boxed{(10)}$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx.$

22. 利用定积分定义计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{k}{n}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2}\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\ldots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}\right)$.

23. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$; (2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

24.计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{1 - \sin x - \cos x}dx$.

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且单调不增, 证明

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)dx (0 < \alpha < 1).$$

26. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx.$$

27. 设 $f(x) = x - \int_0^\pi f(x)\cos x dx$, 求$f(x)$.

28. 求 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$.

29. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\leq 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明: 在 (a,b) 内有 $F'(x)\leq 0$.

30. 求函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

31. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, 又 $f(a)=f'(a)=0$, 证明

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_b^a f''(x)(x-b)^2dx.$$

32. 设 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx = 0$, 求常数 a,b 的值.

33. 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$. 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第 6 章 定积分的应用

1. 求下列各曲线所围图形的面积：

（1）$y=\sqrt{2-x^2}$, $y=0$.

（2）$y=x+1$, $y=x+2$, $x=1$, $x=2$.

（3）$y=1-x^2$, $y=-1-x^2$, $x=-1$, $x=1$.

（4）$x=y^3$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

（5）$x=-y+4,\ x=-y+3,\ y=1,\ y=2.$

2. 求由曲线$ax=y^2$ 和 $ay=x^2(a>0)$ 所围平面图形的面积.

3. 求由抛物线$y^2=x$ 与$y^2=-x+4$ 所围图形的面积.

4. 求由曲线$y=x,\ y=x\ln x,\ y=0$ 所围成的图形面积.

5. 求由极坐标表示的曲线所围图形的面积：

（1）$r = a\cos\theta + b,\ (b \geq a > 0)$；

（2）三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta,\ a > 0.$

6. 求用参数方程表示曲线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),\ (0 \leq t \leq 2\pi,\ a > 0)$$

所围图形的面积.

7. 求圆柱面$x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2(a>0)$ 所围空间立体体积.

8. 求椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

9. 求由 $y=\sin x, y=0, x=0, x=\pi$ 所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得立体的体积.

10. 求由曲线$y=\frac{1}{x}$, 直线$y=4x, x=2, y=0$ 所围平面图形绕x 轴旋转所成旋转体的体积.

11. 求由曲线$y=3-|x^2-1|$ 与x 轴所围封闭图形绕直线$y=3$ 旋转所成旋转体的体积.

12. 设平面图形A 由$x^2+y^2\leq 2x$ 与$y\geq x$ 所确定, 求图形A 绕直线$x=2$ 旋转一周所得的旋转体体积.

13. 求曲线$y=\ln(1-x^2)$ 上相应于$0\leq x\leq\frac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

14. 求曲线$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, 1 \le y \le e$ 的弧长.

15. 求曲线$\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = \frac{3}{2}t^2 - 1, \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$ 的弧长.

16. 求曲线$\begin{cases} x = a\cos^4 t, \\ y = a\sin^4 t, \end{cases}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ a > 0)$ 的弧长.

17. 求曲线$r=\frac{1}{1+\cos\varphi}(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$ 的弧长.

18. 求下列旋转曲面的面积：

（1）$y^2=2x, 0\le x\le a$, 绕x 轴；

（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕$x$ 轴；

（3）星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le\pi,\ a>0)$，绕x 轴.

19. 若曲线$y = \cos x(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$与$x$ 轴和y 轴所围图形的面积被曲线$y = a\sin x, y = b\sin x(a > b > 0)$ 三等分, 求a, b 的值.

第 7 章 空间解析几何

1. 设三角形ABC 中D,E,F 分别为各边中点, AD,BE,CF 分别是各边上的中线, 这三条中线交于G , 试用向量证明$\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GF}$.

2. 已知向量$\overrightarrow{AB}$ 在坐标轴上投影依次为$5\overrightarrow{i}$, $-4\overrightarrow{j}$, $8\overrightarrow{k}$, B 点坐标为$(3,-2,6)$, 求A 点的坐标.

3. 已知两点$A(2,0,4),B(3,1,-2)$, 求向量$\overrightarrow{AB}$ 的长度、方向余弦与方向角, 并求平行于$\overrightarrow{AB}$ 的单位向量.

4. 设$\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\perp 7\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\perp 7\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$, 求$\overrightarrow{a}$ 与$\overrightarrow{b}$ 的夹角.

5. 已知$\overrightarrow{x}$ 与$\overrightarrow{\alpha_1} = \{1,1,0\}$, $\overrightarrow{\alpha_2} = \{0,1,1\}$,$\overrightarrow{\alpha_3} = \{1,0,1\}$ 的数量积分别是3,4,5, 求$\overrightarrow{x}$.

6. 设$\overrightarrow{a} = \{3,2,1\}$, $\overrightarrow{b} = \{2,\frac{4}{3},k\}$, 试分别求k , 使得$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

7. 设 $\overrightarrow{a} = \{2,-3,1\}$, $\overrightarrow{b} = \{1,-2,5\}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$, 且$\overrightarrow{c} \cdot \{1,2,-7\} = 10$, 求$\overrightarrow{c}$.

8. 设平行四边形两对角线分别为$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$, 其中$|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, 求平行四边形的面积$S$.

9. 求过点$(1,1,0),(2,0,1)$ 并与平面$x+y+z=0$ 垂直的平面方程.

10. 求过点$(1,0,1),(2,3,0),(3,1,1)$ 的平面方程.

11. 求过x 轴及点$(3,4,5)$ 的平面方程.

12. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

13. 求过点$(1,-1,1)$ 且与平面$x+2y+3z-5=0$ 及平面$2x+y=1$ 都平行的直线方程.

14. 求过点$(2,1,3)$ 且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ 垂直相交的直线方程.

15. 求过点 $(1,0,-2)$, 与平面 $3x-y+2z+3=0$ 平行且与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$ 相交的直线方程.

16. 求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ 与直线$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ 的公垂线方程.

17. 求过二平行直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ 及$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$ 的平面方程.

18. 求过平面$x+5y+z=0$与$x-z+4=0$的交线且与平面$x-4y-8z+12=0$相交成$\frac{\pi}{4}$角的平面方程.

19. 求直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面$2x+y+z-6=0$之间的夹角.