内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性 .

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比式法或根式法,

也可通过换元化为标准型再求 .

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与

乘法运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

思考与练习

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答： 根据Abel 定理可知，级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散．故收敛半径为 $R = |x_0|$.

2. 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 中,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}3/2, & n\text{ 为奇数}\\ 1/6, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

能否确定它的收敛半径不存在 ?

答: 不能. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}$$

当 $|x|<2$ 时级数收敛 , $|x|>2$ 时级数发散 , $\therefore R=2.$

说明: 可以证明

比式判别法成立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 根式判别法成立

3 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$，其中 $a>1$.

$$S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$$

例4. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

第5节 函数的幂级数展开式

两类问题：在收敛域内

$$\text{幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数 } S(x)$$

本节内容：

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

一、泰勒（Taylor）级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 n **阶泰勒公式**，其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$（ξ 在 x 与 x_0 之间）

称为**拉格朗日余项**.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为$f(x)$ 的**泰勒级数**.

当$x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为**麦克劳林级数**.

待解决的问题:

1) 对此级数, 它的收敛域是什么?

2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?

定理1． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\bigcup(x_0)$内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

证明: $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ , \quad x\in\bigcup(x_0)$$

$$\Big\Updownarrow$$

令 $$S_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\,f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0\,, \quad x\in\bigcup(x_0)$$

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则 $$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots; \qquad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots; \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots; \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\left\{\begin{array}{l}\text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{的函数展开}\end{array}\right.$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下:

第一步 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值;

第二步 写出麦克劳林级数, 并求出其收敛半径 R;

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x 之间)

故 $\quad e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

类似可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中m为任意常数 .

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\ ,\ \cdots$$

于是得 级数 $$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$$

因此对任意常数 m, 级数在开区间 (－1, 1) 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为$F(x), -1 < x < 1$

则 $$F(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$F'(x) = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x), \quad F(0) = 1$$

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{m}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln F(x) - \ln F(0) = m\ln(1+x)$$

$$F(x) = (1+x)^m$$

$(1+x)F'(x)=mF(x)$的推导：

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_m^n x^n$$

$$\frac{(1+x)}{m}F'(x)=\frac{(1+x)}{m}\sum_{n=1}^{\infty}nC_m^n x^{n-1}=\frac{n}{m}\sum_{n=1}^{\infty}C_m^n x^{n-1}(1+x)$$

$$=\frac{n}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_m^n x^{n-1}+C_m^n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{m-1}^{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{m-1}^{n-1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{m-1}^{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{m-1}^{n-1}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{m-1}^{n}+C_{m-1}^{n-1}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_m^n x^n\left(C_{m-1}^{n}+C_{m-1}^{n-1}=C_m^n\right)$$

由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为**二项展开式** .

说明:

(1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关 .

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的**二项式定理**.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$