第一章　函数、极限、连续

第四节　函数连续性

有关知识：

（1）连续与间断的概念及间断点分类.

（2）闭区间上连续函数性质及应用（中间值存在性证明及方程根存在性证明）.

（3） $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

例 1：设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且函数 $e^x f(x), e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单增函数，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

分析：欲证 $f(x)$ 在 $\forall x_0 \in (0,1)$ 处连续，需证左，右都连续

证明：对 $\forall x_0 \in (0,1)$，由题设知当 $x \in (x_0,1)$ 时，有

$$e^{x_0} f(x_0) \le e^x f(x),，\quad e^{-f(x_0)} \le e^{-f(x)}$$

所以　$e^{x_0-x} f(x_0) \le f(x) \le f(x_0)$

令 $x \to x_0^+$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处右连续

类似地，可证 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，于是得结论.

例 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x \in [a,b]$，存在 $y \in [a,b]$，使得 $|f(y)| \le \dfrac{1}{2}|f(x)|$，证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

分析：初一看无处下手，此时可试一试反证法。

证明：若对 $x \in [a,b]$，$f(x) \ne 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负，不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$，

则 $\exists x_0 \in [a,b]$，使得　$f(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m > 0$

对此 x_0，　存在 y，使得　$f(y) = |f(y)| \le \dfrac{1}{2}|f(x_0)| = \dfrac{m}{2}$

从而得出矛盾．故结论成立.

例 3 设 f 是定义在一个圆周上的连续函数，证明存在一条直径，使得 f 在直经的两端取相同值.

分析：首先要将问题用数学语言表达，设圆周的圆心为 O，取圆周上一点 A，B 为圆周上任一点，记 $\angle AOB = \theta, \theta \in [0,2\pi]$，则该问题用数学语言表达为：

已知 $f(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，且 $f(0) = f(2\pi)$，求证存在 $\theta_0 \in [0,\pi]$，使得 $f(\theta_0) = f(\theta_0 + \pi)$.

此问题的证明不困难：

令 $F(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$，则 $F(0)F(\pi)\le 0$，从而由连续函数的性质知 $\exists\theta_0\in[0,\pi]$，使得

$F(\theta_0)=0$，即可得结论.

或 令 $F(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$，则 $F(0)+F(\pi)=0$，从而由连续函数的性质知 $\exists\theta_0\in[0,\pi]$，使得

$F(\theta_0)=\dfrac{F(0)+F(\pi)}{2}=0$，即可得结论.

或 可用反证法证明，请同学们完成

练习题

1．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，则 $a=$ ________, $b=$ ________ .

(答案: 0， 1)

2．求 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ 的间断点，并确定其类型.

3．设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$，且已知 $x=e$ 为无穷间断点，$x=1$ 为可去间断点，则 $b=$ ________ .

(答案: e)

4．设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至只有第一类间断点，且对 $\forall x,y\in(a,b)$，有

$f(\dfrac{x+y}{2})\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

（任取 $x_0\in(a,b)$，由题设有 $f(\dfrac{x+x_0}{2})\le\dfrac{f(x)+f(x_0)}{2}$，令 $x\to x_0{}^+$，可得

$f(x_0+0)\le f(x_0)$，令 $x\to x_0{}^+$，可得 $f(x_0-0)\le f(x_0)$；

又 $f(x_0)=f(\dfrac{x_0+h+x_0-h}{2})\le\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}$，令 $h\to 0^+$，可得

$f(x_0+0)+f(x_0-0)\ge 2f(x_0)$， 所以有

$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$）

5．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，$f(x)$ 的最小值 $f(a)<a$，求证 $f(f(x))$

至少在两个不同的点处取得它的最小值.

（易见 $f(f(x))$ 的最小值为 $f(a)$，故只需证存在 $x_1 \neq x_2$，使得 $f(x_1) = f(x_2) = a$）

6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(f(x)) = x$，求证存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = \xi$.

（用反证法证明）