第一节 定积分的概念及性质

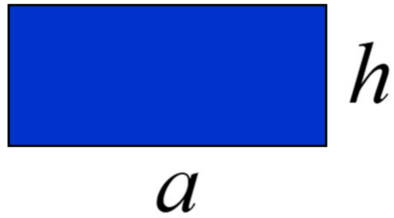
一、定积分问题举例

二、 定积分的定义

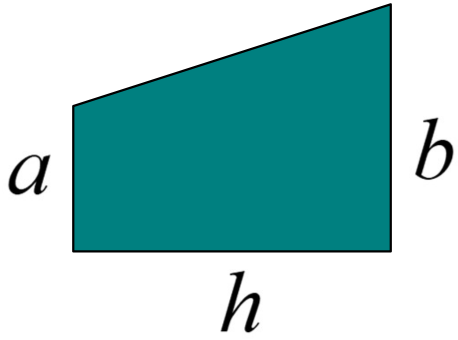
三、 定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= a h$



梯形面积 $= \dfrac{h}{2}(a+b)$



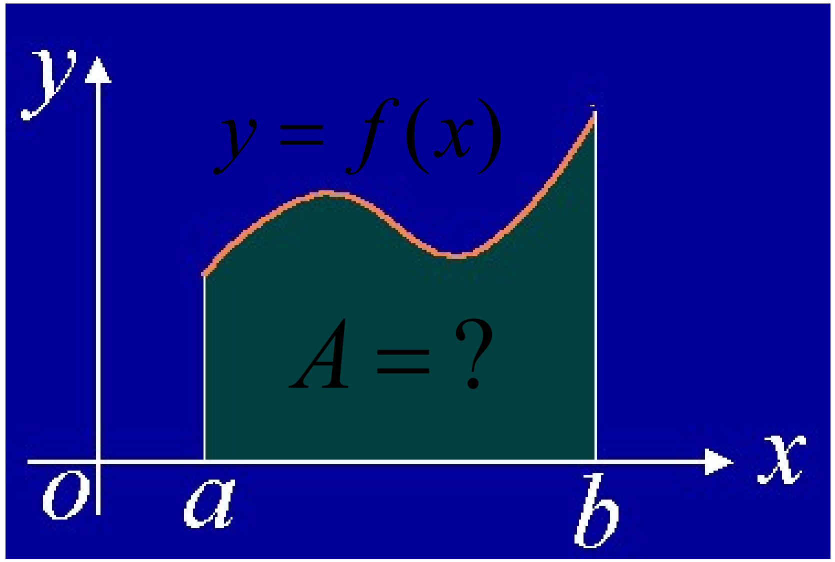
1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及 x 轴，以及两直线 $x = a, x = b$

所围成，求其面积 A .



2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$, 且 $v(t) \ge 0$, 求在运动时间内物体所经过的路程 s.

解决步骤:

1) **大化小.** 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点, 将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 Δs_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$

2) **常代变.** 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 近似和.

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

4) 取极限 .

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的**共性**:

- 解决问题的方法步骤相同 :

  "大化小 , 常代变 , 近似和 , 取极限 "

- 所求量极限结构式相同:　特殊乘积和式的极限

二、定积分定义

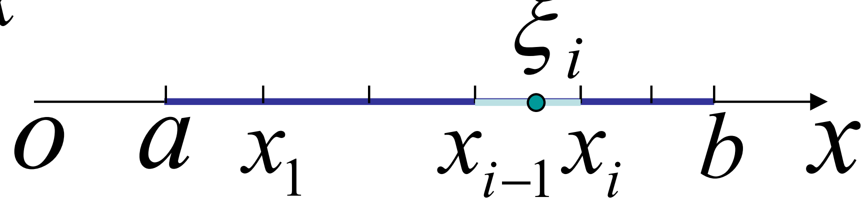
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, 若对 $[a,b]$ 的**任一种分法**

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，任取

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$，只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的**定积分**, 记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

积分上限　　$[a,b]$ 称为积分区间

$$\int_a^b \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

积分下限　被积函数　被积表达式　积分变量　积分和

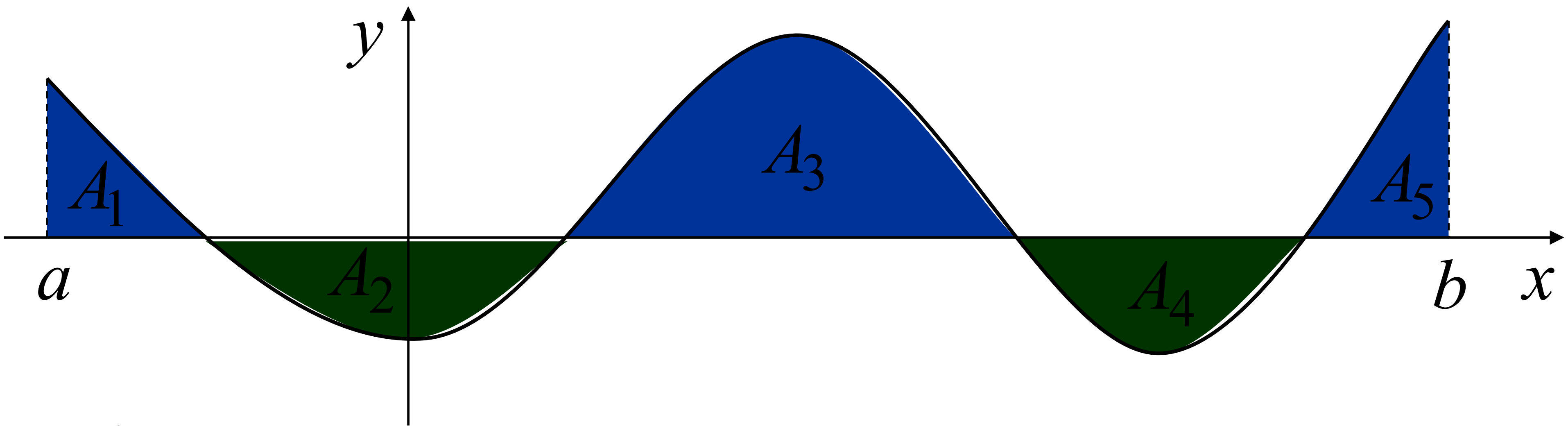
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

定积分的几何意义:

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$　　曲边梯形面积

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$　曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

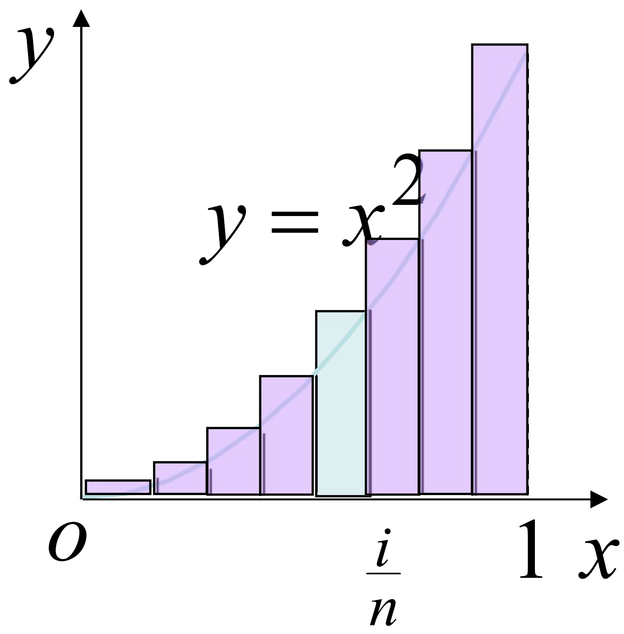
可积的充分条件:

定理1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

定理2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点

$\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. (证明略)

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.



解: 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则 $$f(\xi_i)\Delta x_i = \xi_i^2 \Delta x_i = \frac{i^2}{n^3}$$

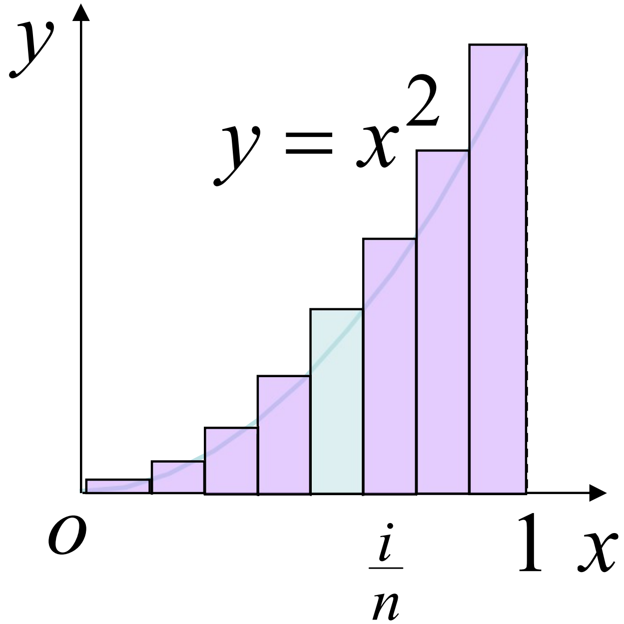
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2}\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{3}$$



[注] 利用 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$，得

$$\begin{cases} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \end{cases}$$

两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

即

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

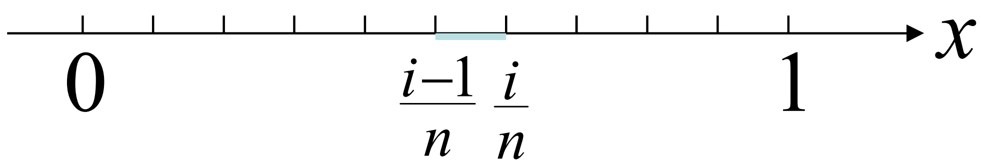
$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

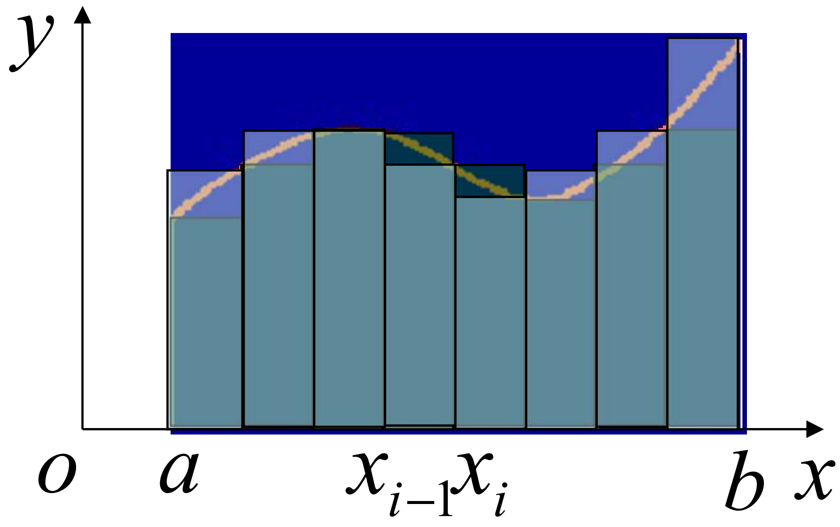
$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

说明: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 存在, 根据定积分定义可得如下近似计算方法:

将 $[a\,,b]$ 分成 n 等份: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$,

$$x_i=a+i\cdot\Delta x\ (i=0,1,\cdots,n)$$

记 $f(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$

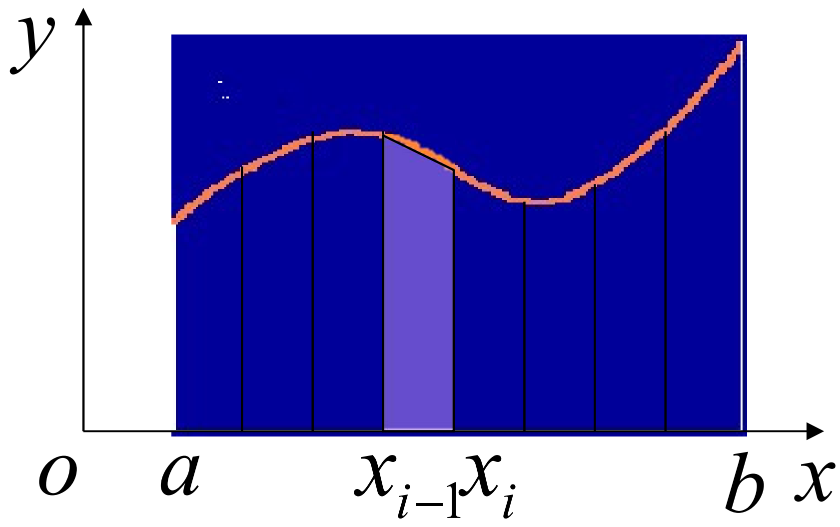


1. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$$
$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$ (左矩形公式)

2. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_1\Delta x+y_2\Delta x+\cdots+y_n\Delta x$$
$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$ (右矩形公式)

$$3.\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}[y_{i-1} + y_i]\Delta x$$



$$= \frac{b-a}{n}\left[\ \frac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1})\ \right]$$ (梯形公式)

为了提高精度, 还可建立更好的求积公式, 例如辛普森公式, 复化求积公式等, 并有现成的数学软件可供调用.