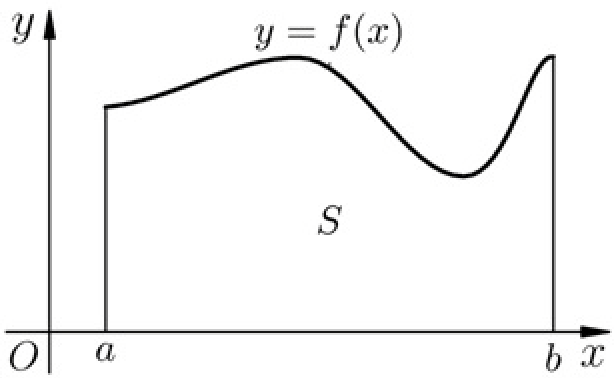
§1 定积分概念



例1 曲边梯形的面积

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$,

由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b, y = 0$

围成的平面图形 S 称为 $[a, b]$ 以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形.

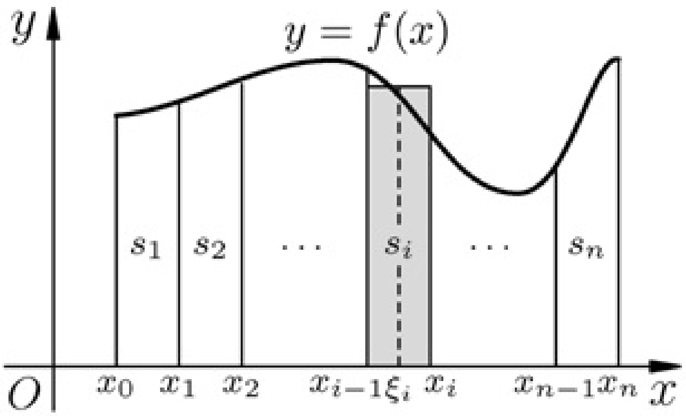
求面积的设想:

(1) 在 $[a, b]$ 内任插 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

将$[a, b]$ 分为 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots [x_{i-1}, x_i], \cdots [x_{n-1}, x_n]$.

曲边梯形的面积



(2) 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$,

面积近似于 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$.

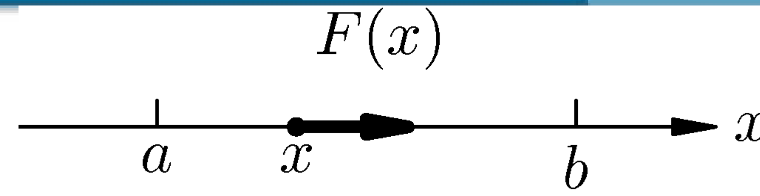
(3) 作和 $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

(4) 取极限，当 $\|\Delta x\| = \max_i \{\Delta x_i\} \to 0$ 时,

若 $\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，则称曲边梯形 S 可求面积,

称 $A = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为曲边梯形 S 的面积.

连续变力作功



例2 连续变力所作的功

(1) 在 $[a,b]$ 内任插 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

将$[a,b]$ 分为 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots[x_{i-1},x_i],\cdots[x_{n-1},x_n].$

(2) 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$,

其上作功近似于 $\Delta W_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i.$

(3) 作和 $I_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$

(4) 取极限，当 $\|\Delta x\| = \max_i \{\Delta x_i\} \to 0$ 时,

$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$ 就是变力 $F(x)$ 所作的功.

定积分定义

定义1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数,

在 $[a,b]$ 内任插 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

即将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$, 其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\ (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$,

作和式 $$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

若不论 $[a,b]$ 如何分法及 ξ_i 如何取法, 只要 $\|\Delta x\|=\max\limits_i\{\Delta x_i\}\to 0$ 时,

$I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 总有确定的极限值 I,

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的.

定积分定义

称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，

a,b 称为积分下限与上限，$[a,b]$ 称为积分区间.

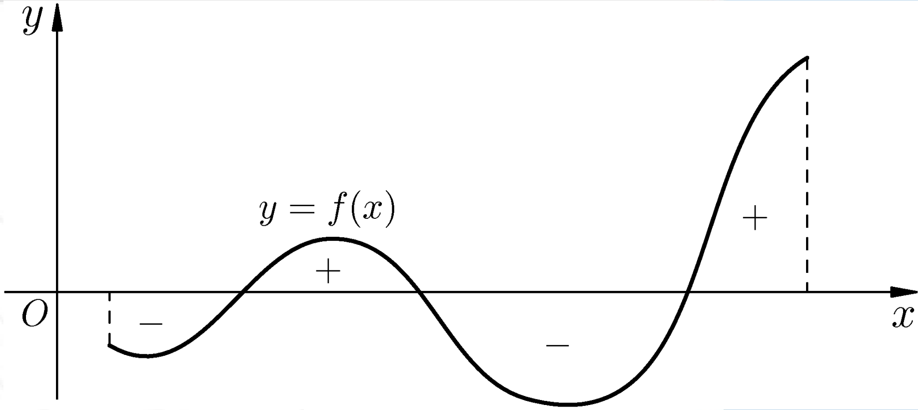
定理1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的可积.

定积分的几何意义

注 1 规定 $\int_a^a f(x)dx = 0,$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$



注 2 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义：

当 $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ 表示 X 轴上方曲边梯形的面积,

当 $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ 表示 X 轴下方曲边梯形面积的相反数,

当一般 $f(x)$, $\int_a^b f(x)dx$ 表示 X 轴上下方曲边梯形面积的代数和.

注 4 积分只与函数 $f(\cdot)$, 区间 $[a, b]$ 有关, 与积分变量符 X 无关!

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

积分举例

例3 按定义求 $\int_a^b x\mathrm{d}x.$

解 因为 $f(x)=x$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $\int_a^b x\mathrm{d}x$ 存在.

将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，取 $\xi_i=(x_{i-1}+x_i)/2$,

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{1}{2}(x_n^2-x_0^2)=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

所以 $\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$

同理，当 $f(x)=1$ 时，$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=b-a.$

即 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a.$

积分举例

例4 按定义求 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$

解 因为 $f(x)=e^x$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以 $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ 存在.

将 $[0,1]$ n 等分为小区间 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$， 取 $\xi_i=\frac{i}{n}$,

$$I_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} =\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

所以 $$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}-1.$$

定积分表示极限

例4 用定积分表示极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$