第二章 一元微分学

第五节 函数零点或方程根的讨论

方程 $f(x)=0$ 根的讨论与函数 $f(x)$ 零点的讨论是等价的问题。所讨论的方程总可变成 $f(x)=0$ 这种形式。这里总假定函数 $f(x)$ 连续（在具体问题中，$f(x)$ 可以不连续，但一定是分段连续，此时只需在各个连续段上讨论。）

1． 这种问题用到的知识和方法主要有：连续函数的性质，中值定理，函数单调性、极值和最值的讨论等。
2． 常见类型有：（1）证明函数 $f(x)$ 在某区间内有零点。最常用的方法就是连续函数零点存在定理，有时会用到中值定理（主要是罗尔定理）。（2）证明函数 $f(x)$ 在某区间内有唯一零点。此时既要证存在性也要证唯一性，证唯一性，大多利用单调性，极值与最值，反证法等。（3）讨论方程 $f(x)=0$ 根的情况，此时需指明有根、无根及有几个根。若方程中含有参数，则需根据参数的不同取值情况进行讨论。(4) 证明方程 $f_n(x)=0$ 有唯一实根 x_n，并求极限 $\lim x_n$。
3． 讨论方程 $f(x)=0$ 根的问题和讨论曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点问题等价，因此讨论这种问题时尽量与函数作图问题联系起来，只是这里的作图不需考虑凹凸性、拐点、渐近线，而需考虑曲线的升降、极值或最值及自变量趋于区间端点时的极限或单侧极限。这里强调一句：很多问题可以从几何直观上寻找思路。

例 1：设有 n 次方程

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}=0$$

证明：当 n 为奇数时，方程恰有一个实根；当 n 为偶数时，方程无实根。

证明：令 $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\cdots+\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$

（1） 当 n 为奇数时

由于 $f(-\infty)=+\infty, f(+\infty)=-\infty$，及 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个零点，即方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个实根；

又 $f'(x)=-1+x-\cdots+(-1)^n x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{1+x^n}{1+x}, x\neq -1\\ -n, x=-1\end{cases}$

可见 $f'(x)<0$，从而知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调减少，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个

零点。即方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个实根；

综上知方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有一个实根；

（2）当 n 为偶数时

$$f'(x)=-1+x-\cdots+(-1)^n x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{1-x^n}{1+x}, x\neq -1\\ -n, x=-1\end{cases}$$

可见 $f'(1)=0,$ 当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内唯一的极值点且为极小值点，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值

且最小值为 $f(1)=1-1+\dfrac{1}{2}-\cdots+\dfrac{1}{n}=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1})+\dfrac{1}{n}>0,$

故对任意 $x\in(-\infty,+\infty), f(x)\geq f(1)>0$，从而知方程 $f(x)=0$ 无实根。

例 2．讨论三次方程 $x^3-3a^2x-6a^2+3a=0$ 的实根情况；并问 a 为何值时？方程只有一个实根且为正根。

解：$a=0$ 时，方程有且只有一个实根 $x=0$；

$a\neq 0$ 时

令 $f(x)=x^3-3a^2x-6a^2+3a$，则有 $f'(x)=3(x-|a|)(x+|a|)$

$f(x)$ 的单调性和极值情况如下表：

x	$(-\infty,-\|a\|)$	$-\|a\|$	$(-\|a\|,\|a\|)$	$\|a\|$	$(\|a\|,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $2\|a\|^3-6a^2+3a$	↘	极小值 $-2\|a\|^3-6a^2+3a$	↗

又 $f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$，所以

当 $2|a|^3-6a^2+3a<0$ 或 $-2|a|^3-6a^2+3a>0$ 时，原方程有且只有一个实根，

即 $a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},0)\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})\bigcup(0,\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2})$ 时，方程有且只有一个实根；

当 $2|a|^3-6a^2+3a=0$ 或 $-2|a|^3-6a^2+3a=0$ 时，原方程有二个实根，

即$a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$或$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$时，原方程有二个实根；

当$2|a|^3-6a^2+3a>0$且$-2|a|^3-6a^2+3a<0$时，原方程有三个实根，

即$a\in(-\infty,-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2})\bigcup(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})\bigcup(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},+\infty)$时，原方程有三个实根；

综上知

当$a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2})\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$时，方程有且只有一个实根；

当$a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$或$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$时，原方程有二个实根；

当$a\in(-\infty,-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2})\bigcup(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})\bigcup(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},+\infty)$时，原方程有三个实根。

由以上分析可知方程只有一个实根且为正根当且仅当$2|a|^3-6a^2+3a<0$，

即可知方程只有一个实根且为正根当且仅当$a\in(-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2},0)\cup(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$。

例 3．设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，

(1)证明:对任意正整数n，方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内有且只有一个根x_n；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

（1）证明： $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$

令$F_n(x)=f_n(x)-\dfrac{1}{2}$，则有$F_n(0)=\dfrac{1}{2},F_n(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{2}$，又$F_n(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上连续，由连续函数性质知$F_n(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内有零点，即方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内有实根。另一面，由 $f_n(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上严格单调减少，所以方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内有且只一个实根x_n。

（2）(分析：如能把方程的根x_n求出来即写出x_n的表达式，那么可由x_n的表达式求出其极限。但大部分情况下无法求出根x_n的表达式，此时一般通过单调有界定理或夹逼定理去求。在本题中，可求出根x_n的表达式$x_n=\arccos(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}})$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$，另外（1）也可直接通过

求根得证，但由于这种情况很少出现，这种方法没有普遍性，因此下面介绍处理这种问题的一般方法。）

解：方法一（用单调有界定理）：由（1）知 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$，下面证数列 $\{x_n\}$ 单调增加，

对固定的 n，$F_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调减少，而对固定的 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，数列 $\{F_n(x)\}$ 单调增加，

因此有 $F_{n+1}(x_n) > F_n(x_n) = 0 = F_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n < x_{n+1}$。

综上知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \le \frac{\pi}{2}$

若 $a < \frac{\pi}{2}$，则 $0 < x_n \le a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < (1-\cos x_n)^n < (1-\cos a)^n \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x_n) = \frac{1}{2}$ 这与 $F_n(x_n) = 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 矛盾，所以 $a = \frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$。

方法二（用夹逼定理）：由 $F_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$，及 $F_n(\arccos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - (1-\frac{1}{n})^n > 0$ 及（1）知 $\arccos\frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$，那么由 $\lim \arccos\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$ 及夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$。

练习题：

1. 设 $p(x) = x^6 - 2x^2 - x + 3$.

(1) 分别把 $p(x)$ 表示成 $(x-1)$ 幂和 $(x+1)$ 幂的多项式;

(2) 求证：方程 $p(x) = 0$ 在 $|x| \ge 1$ 上无实根;

(3) 求证：方程 $p(x) = 0$ 无实根.

（通过计算 $p^{(k)}(\pm 1), k = 0, 1, \cdots, 6$，求解决（1）；在（1）基础上很容易证(2)；有了(2)的结论再证(3),只须证方程在 $(-1,1)$ 内无实根,方程变形为 $x^6 = 2x^2 + x - 3$,在 $(-1,1)$ 内左边非负,右边为负）

2．设 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \ne 0, n$ 为正整数)，且 $p(a) \ge 0, p^{(k)}(a) \ge 0,$ $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明方程 $p(x) = 0$ 没有大于 a 的实根.

（$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$）

3．（1）作函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的图形；

（2） 讨论方程 $e^x = ax^2$ 的实根情况，并指出每个根所在的区间.（$a \ne 0$ 时（2）中的方程

等价于 $x^2e^{-x}=\dfrac{1}{a}$，该问题等价于曲线 $y=x^2e^{-x}$ 与直线 $y=\dfrac{1}{a}$ 的交点情况的讨论．结论：$a\le 0$ 时无根；$0<a<\dfrac{e^2}{4}$ 时只有一个根且位于 $(-\infty,0)$；$a=\dfrac{e^2}{4}$ 时有二个根且其一位于 $(-\infty,0)$ 另一个根为 2；$a>\dfrac{e^2}{4}$ 时三个根且分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$，$(2,+\infty)$ 内．）

4．方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个根，求 k 的取值范围．

（答案 $k\le 0$ 或 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$）

5．讨论方程 $a^x=bx\,(a>1)$ 的实根情况．

（答案 $b<0$ 时有且只有一个根；$b>e\ln a$ 时有二个根；$0\le b\le e\ln a$ 时无根）

6．设 $a>0$，证明方程 $ae^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ 有且只有一个根．

(令 $f(x)=(1+x+\dfrac{x^2}{2})e^{-x}-a$)

7．讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数．

（答案 $k<4$ 时无交点；$k=4$ 时有且只有一个交点；$k>4$ 时有二个交点）

8．设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x$，

(1)证明：对任意正整数 $n\ge 2$，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内有且只有一个根 x_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

（本题方法与例 3 相似）

9．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且 $f(0)=f(1)=0,\ f''(x)<0$，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M>0$．

（1）证明：存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=M$；

（2）证明：对任意正整数 n，存在唯一的 $x_n\in(0,1)$，使得 $f'(x_n)=M/n$；

（3）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$．

（（1）中的唯一性可用反证法证明；（2）令 $F(x)=f(x)-\dfrac{M}{n}x$，用罗尔定理证明存在性，唯一性可用反证法证明；（3）可用单调有界定理证明．）