第七节 广义积分

常义积分 $\begin{cases} \text{积分限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

$\Big\downarrow$ 推广

广义积分

一、无限区间上的广义积分

二、无界函数的广义积分

说明: 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点,则本质上是常义积分, 而不是广义积分.

例如, $\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{x-1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x+1) \mathrm{d}x$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的的计算表达式：

若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意: 若瑕点 $c \in (a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

例4. 计算广义积分$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解: 显然瑕点为 a , 所以

$$\text{原式} = \left[\ \arcsin\frac{x}{a}\ \right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例5. 讨论广义积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[\ -\frac{1}{x}\ \right]_{-1}^{0^-} + \left[\ -\frac{1}{x}\ \right]_{0^+}^{1} = +\infty + \infty$

所以广义积分$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例6. 证明广义积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q \neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 该广义积分发散 .

例7. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

解： $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，故 I 为广义积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

内容小结

1. 广义积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{a^{1-p}}{(p-1)}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

说明: **(1)** 有时通过换元 , 广义积分和常义积分可以互相转化 .

例如 , $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \quad$ (令 $x = \sin t$)

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \quad (\text{令 } t = x - \frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类广义积分时, 可划分积分区间, 分别讨论每一区间上的广义积分.