内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数收敛判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

↓ 满足

比式判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根式判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ $\xrightarrow{\text{用它法判别}}$ 不定 $\begin{cases} \text{比较判别法} \\ \text{部分和极限} \\ \text{积分判别法} \end{cases}$

$\rho < 1$ ↓ 收 敛

$\rho > 1$ ↓ 发 散

思考与练习

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

提示: $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$

1. 判别级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

不是 p–级数

解: $(1)\ \because\ \ln(n+1)<n,\quad \therefore\ \dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

$(2)\ \because\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

第2-3节

常数项级数的收敛准则

一、正项级数及其收敛准则

二、交错级数及其收敛准则

三、绝对收敛与条件收敛

二、交错级数及其收敛判别法

设 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数**.

定理6. (Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

证: $\because S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$
$$-u_{2n}\leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S\leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$

故级数收敛于S, 且 $S\leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\leq u_{n+1}$$

用Leibnitz **判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

若原级数收敛，但取绝对值以后的级数发散，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 .

例如：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 , 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$, 根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 收敛

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

例7. 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$.

证: (1) $\because \left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \dfrac{1}{n^4}$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \text{ 收敛}$$

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) 令 $u_n=\dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

一般项级数敛散性总结

- 绝对收敛 $\Longrightarrow$ 收敛, 反之不真.
- 如果用比式判别法或根式判别法得出绝对值级数发散, 则原级数一定发散.
- 所有判别法都有局限性, 不能用判别法判定时, 只能用部分和列是否收敛来判定.

绝对收敛级数与条件收敛级数具有完全不同的性质.

定理8. 绝对收敛级数不因改变项的位置而改变其和.

(绝对收敛级数重排不影响其和.条件收敛级数重排影响其敛散性与和。)

例: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots=A$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{A}{2}$$

两个级数相加，得

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{3A}{2}$$

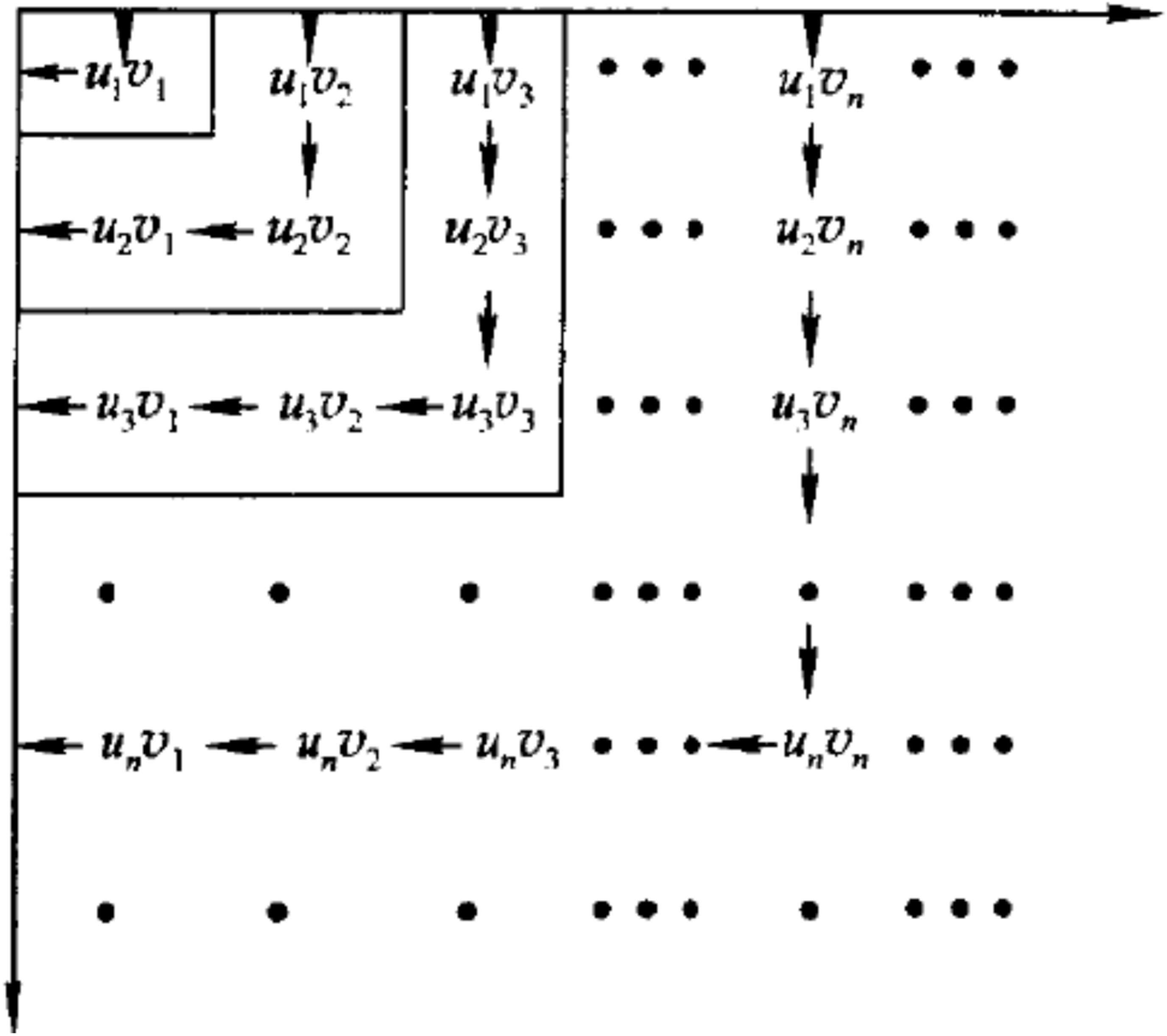
定理9.（绝对收敛级数的乘法）

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都绝对收敛, 其和分别为S, σ,

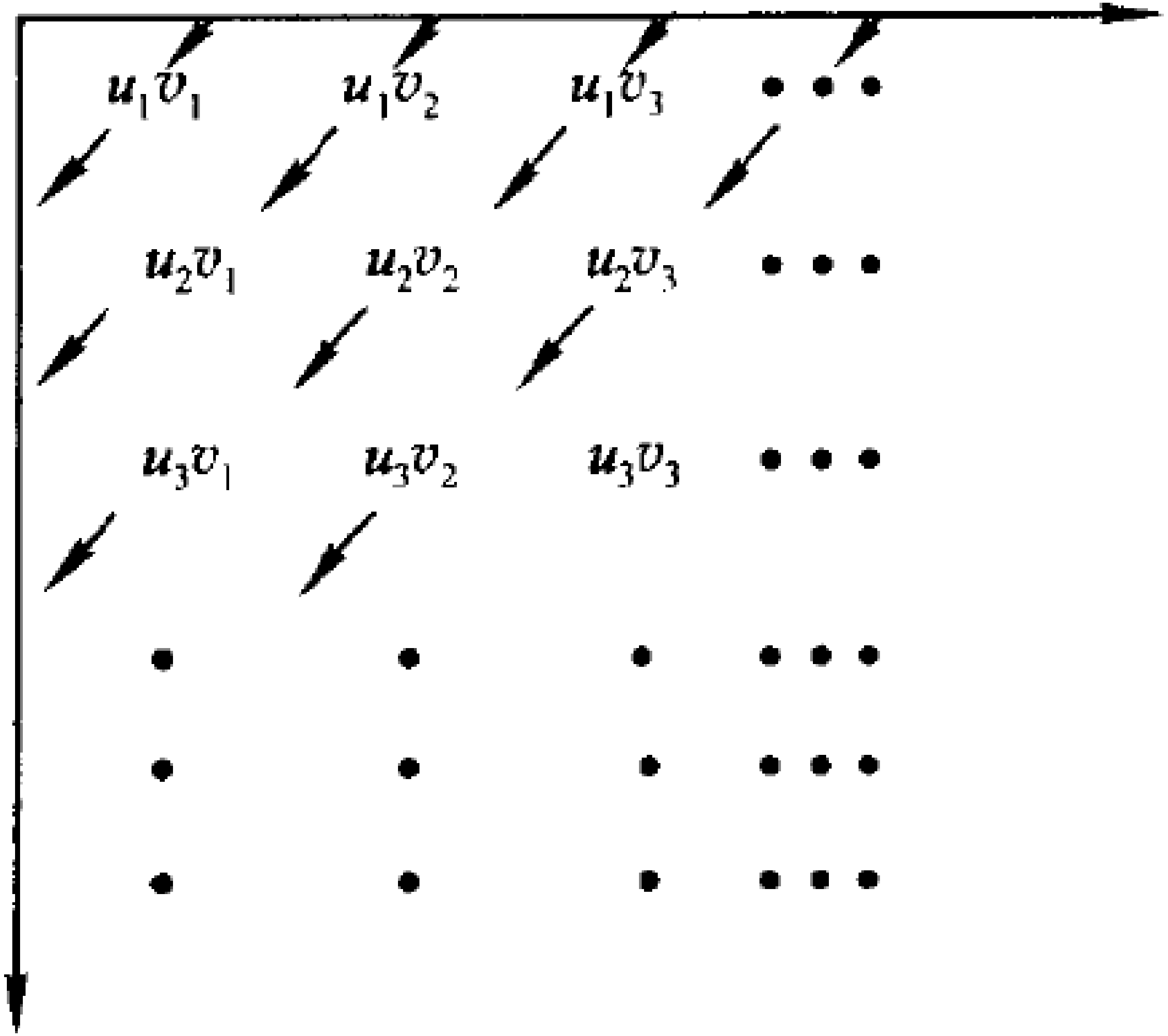
则对所有乘积$u_i v_j$按任意顺序排列得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

也绝对收敛, 其和为$S\sigma$.

级数乘积的排列方式：正方形



级数乘积的排列方式：对角线（柯西乘积）



一般项：$w_n = \sum\limits_{i+j=n+1} u_i v_j$

条件收敛级数柯西乘积不一定收敛.

例如，$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散.

$$w_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n-2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left|w_n\right|>\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}w_n$发散.

内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数收敛判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发 散

满足

比式判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根式判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow{\rho = 1}$ 不定 用它法判别 $\begin{cases} \text{比较判别法} \\ \text{部分和极限} \\ \text{积分判别法} \end{cases}$

$\rho < 1$ 收 敛

$\rho > 1$ 发 散

3. 任意项级数收敛判别法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{收敛，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{收敛}$$

思考题. 设 $u_n \neq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ （ C ）.

(A) 发散；　　(B) ~~绝~~对收敛;

(C) 条件收敛；　(D) 收敛性根据条件不能确定.

分析: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$，$\therefore$ (B) 错；

又
$$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_4}}+\frac{1}{u_5}\right)$$
$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$
$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

第4节

幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数及其收敛域

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ **为定义在区间 I 上的函数**，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的 函数项级数.

对 $x_0 \in \mathrm{I}$， **若常数项级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ **收敛，** 称 x_0 **为其收敛点，所有收敛点的全体称为其收敛域；**

若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ **发散**，称 x_0 **为其发散点，所有发散点的全体称为其发散域.**

在收敛域上,函数项级数的和是x 的函数 S(x)，称它为函数项级数的和函数，并写成

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

和函数的定义域就是函数项级数的收敛域。

若用 $S_n(x)$ **表示函数项级数前 *n* 项的和, 即**

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

例1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

分析: 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\right|$

解 由比值判别法 $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{1}{n+1}\left|\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right| \Big/ \frac{1}{n}\left|\frac{1}{(1+x)^n}\right|$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{|1+x|}\to\frac{1}{|1+x|}\quad(n\to\infty)$$

(1) 当 $\frac{1}{|1+x|}<1$, $\Rightarrow |1+x|>1$,

即 $x>0$ 或 $x<-2$ 时, **原级数绝对收敛.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

(2) 当 $\frac{1}{|1+x|} > 1, \quad \Rightarrow |1+x| < 1,$

即 $-2 < x < 0$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\right|$ 发散

原级数发散.

(3) 当 $|1+x| = 1, \quad \Rightarrow x = 0$ 或 $x = -2,$

当 $x = 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

当 $x = -2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

故级数的收敛域为 $(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.