第三节

高阶导数

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

定义. 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导, 则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数， 分别记作

$$y''', \quad y^{(4)}, \quad \cdots, \quad y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}, \quad \cdots, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

例1. 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 求 $y^{(n)}$.

解:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2\cdot 1 a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

依次类推，可得

$$y^{(n)} = n! a_n$$

思考: 设 $y = x^{\mu}$ (μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

例2. 设 $y=\dfrac{1}{1+x}$, 求 $y^{(n)}$.

解:

$$y'=-1(1+x)^{-2}$$

$$y''=-1\cdot-2\cdot(1+x)^{-3}$$

$$y'''=-1\cdot-2\cdot-3(1+x)^{-4}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!(1+x)^{-n-1}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

类似可证:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}},\left(\frac{1}{b-ax}\right)^{(n)}=a^n\frac{n!}{(b-ax)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)}=\left(\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}}\right)^{(n)}=\frac{bc-ad}{c^2}\frac{(-1)^n n!}{(x+\frac{d}{c})^{n+1}}$$

例3. 设 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x}$， $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$， $y'''=(-1)^2\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$，

$\cdots$， $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

规定 $0!=1$

思考: $y=\ln(1-x)$， $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

例4. 设 $y=e^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

解: $y'=ae^{ax}$， $y''=a^2e^{ax}$， $y'''=a^3e^{ax}$，$\cdots$，

$y^{(n)}=a^ne^{ax}$

特别有: $\boxed{(e^x)^{(n)}=e^x}$

例5. 设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$= \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

一般地， $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

类似可证:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例6. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$， 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ **2** .

分析: $$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

又 $$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0$$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f'''_-(0)=12$， $f'''_+(0)=24$， $\therefore f'''(0)$ 不存在 .

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ （C为常数）

3. $$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

莱布尼兹(Leibniz) 公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2\,u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

用数学归纳法可证**莱布尼兹公式**成立 .

例7. $y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u=e^{2x}, v=x^2$, 则

$$u^{(k)}=2^k e^{2x} \quad (k=1,2,\cdots,20)$$

$$v'=2x,\quad v''=2,$$

$$v^{(k)}=0 \quad (k=3,\cdots,20)$$

代入莱布尼兹公式, 得

$$y^{(20)}=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}\,2^{18}e^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$$

例8． 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)y'=1$

$\Big\downarrow$ 用莱布尼兹公式求 n 阶导数

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+n\cdot 2x\,y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$，得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\,y^{(n-1)}(0)\quad(n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$，得 $y''(0)=0$，$y^{(4)}(0)=0$，$\cdots$，$y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$，得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$

内容小结

高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如，$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

(4) 利用莱布尼兹公式

思考与练习

1. 如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解: $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\geq 3$$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

提示： 令 $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}$

$$A(x-1)+B(x-2)=1$$

$$A=1, B=-1.$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

(4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$