课前练习 1. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 $z=1$ 以上部分 Σ 的质量 M .

解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$，故

$$M=\iint_{\Sigma}\mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)=13\pi$$

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

第五节

第二型曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

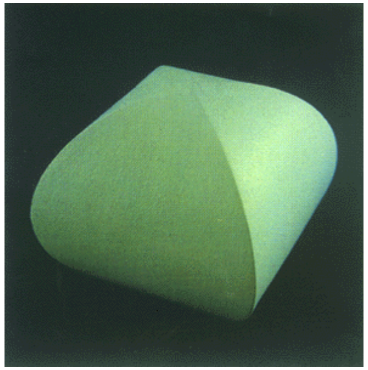
二、第二型曲面积分的概念与性质

三、第二型曲面积分的计算法

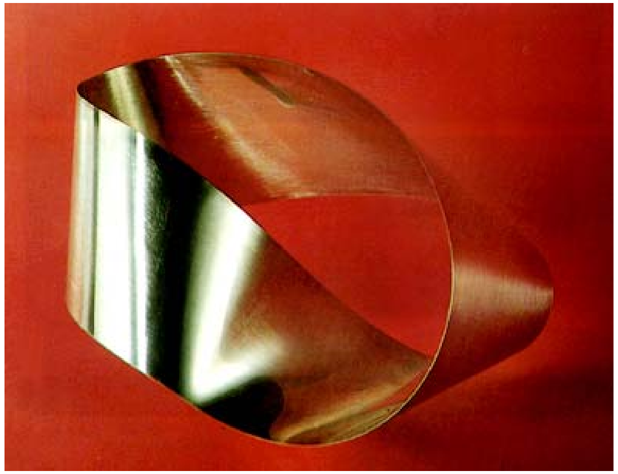
四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

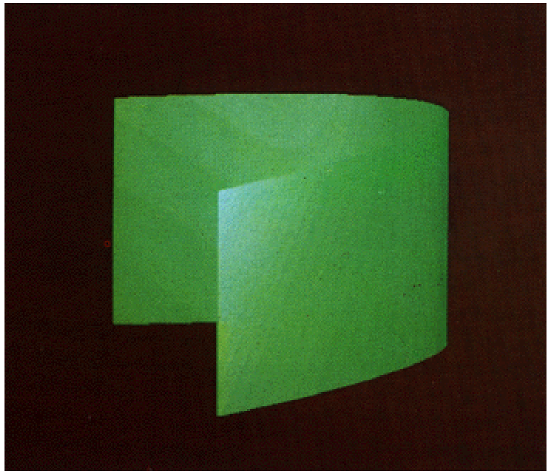


曲面分内侧和外侧

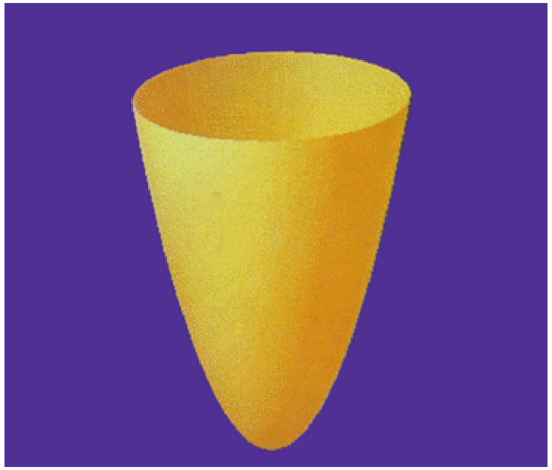


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向表示 :

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xoy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$, 则规定

$$\Delta S\cos\gamma=(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

类似可规定 $\Delta S\cos\alpha=(\Delta S)_{yz}$, $\Delta S\cos\beta=(\Delta S)_{zx}$

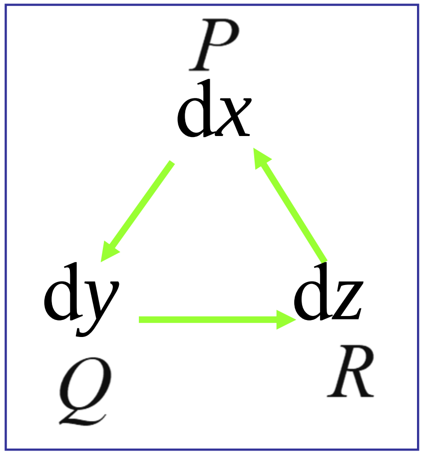
2. 定义. 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 若对$\Sigma$ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二型曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

P, Q, R 叫做**被积函数**; Σ 叫做**积分曲面**.



三、第二型曲面积分的计算法

定理： 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧，$R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证： $\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$\because \Sigma$ 取上侧，$\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$,则有

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

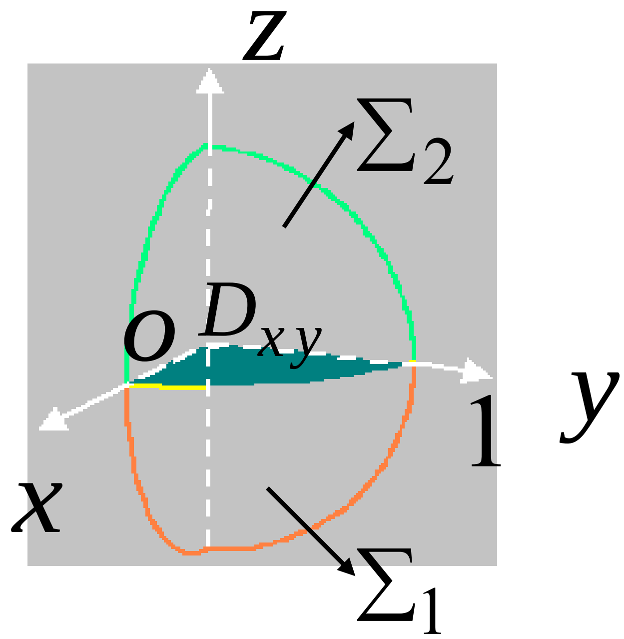
- 若 $\Sigma: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$,则有

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 x^2+ $+y^2+z^2=1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:



$$\boxed{\text{根据对称性} \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0}$$

解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x,y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} xy\,(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$

计算第二型曲面积分也可以利用对称性：

设有向曲面Σ关于xOy平面对称 (包括曲面方向对称)，

当 $f(x, y, z)$ 是 z 的<u>奇函数</u>时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中Σ_1为 Σ 中 $z \geq 0$的部分；当 $f(x, y, z)$是z 的<u>偶函数</u>时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

在有向曲面Σ关于zOx 及关于yOz 对称时， 有类似的结果.

特别注意，由于曲面的方向性，对称性与以往是不同的！

例2. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x+y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

解： 因Σ关于yOz 平面对称， y^2, z^3 关于 x 都是偶函数,

所以 $\oiint_{\Sigma}(y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$. 设 Σ_1 为Σ中 $x\geq 0$ 的部分,

D_{yz} 为 Σ_1 在 yOz 上的投影，根据对称性，有

$$\oiint_{\Sigma}(x+y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

例3. 设S 是球面$x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算

$$I=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

解: 易证 $\iint_S \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}=0$

$$\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},$$

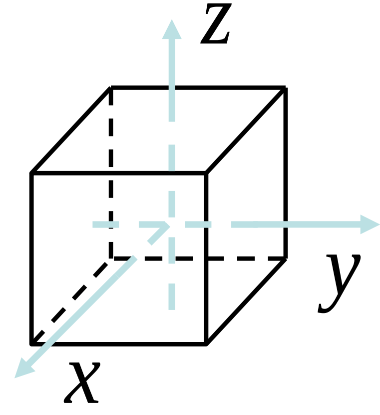
$$\therefore I=\iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}=-4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\tan 1$$

例4. 计算$\iint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$\text{原式}=3\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取下侧

$$=3\left[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3\left[\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3a^3$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$dS\cos\gamma = dxdy$$

$$dS\cos\beta = dzdx$$

$$dS\cos\alpha = dydz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dxdz}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}}$$