一、求下列函数的导数或微分（16分，每小题4分）

（1）设 $y = 5^x + x^5 + 5^5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$;

解 $$\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5 + 5x^4.$$

（2）设 $y = \sqrt{1+x^4}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$;

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^4\right)'$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}.$$

（3）设 $y=x^2+\arctan x,$ 求 $dy;$

解 $\dfrac{dy}{dx}=2x+\dfrac{1}{1+x^2},$ $dy=\left(2x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx.$

（4）设 $\begin{cases} x=3t^2+2t \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases},$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}.$

解 $dx=(6t+2)dt,$

$e^y\sin t dy+e^y\cos t dt-dy=0,$ $dy=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}dt,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}.$$

$t=0$ 时，$y=1,$ 所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{e}{2}.$

二、计算下列极限（16分，每小题4分）

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$;

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}$;

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{6}{x^2+x-2}\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{6}{x^2+x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x+2)-6}{(x-1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x+2}=\frac{5}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\dfrac{1}{2e}.$

三、求下列积分（20分，每小题4分）

(1) $\int\left(2e^x+\sqrt{x}\right)dx;$

解 $\int\left(2e^x+\sqrt{x}\right)dx=2e^x+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$

(2) $\int\left(2e^x+1\right)^3 e^x dx;$

解 $\int\left(2e^x+1\right)^3 e^x dx=\dfrac{1}{2}\int\left(2e^x+1\right)^3 d\left(2e^x+1\right)$

$$=\frac{1}{8}\left(2e^x+1\right)^4+C.$$

(3) $\int x\cos 2x\,dx;$

解 $\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int xd\sin 2x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx;$

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} x\sin x\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} x\,d\cos x$$

$$= -\frac{4}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx.$

解 $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx \overset{x=\sec t}{==} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan t}{\sec^3 t} \cdot \sec t \tan t dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}.$$

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8分，每小题4分）

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{1+x^4}dx;$

解 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{2x}{1+x^4}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{1+(x^2)^2}dx^2=\lim\limits_{A\to+\infty}\arctan x^2\Big|_0^A=\frac{\pi}{2},$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{1+x^4}dx$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2}.$

(2) $\int_0^5\frac{1}{(5-x)^6}dx.$

解 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{5-\varepsilon}\frac{1}{(5-x)^6}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{5}(5-x)^{-5}\Big|_0^{5-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{5}\left(\varepsilon^{-5}-5^{-5}\right)=+\infty,$

所以 $\int_0^5\frac{1}{(5-x)^6}dx$ 发散.

五、判别下列级数的敛散性，并说明理由（16分，每小题4分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n+1}$;

解 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n+1}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi \neq 0,$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$;

解 $\left|\frac{\sin^2 n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛,

所以，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$ 收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

解 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!2^n}{2^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$,

所以，由比式判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ 发散.

六、（10分，每小题5分）

（1）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{1}{n}$ 是绝对收敛、条件收敛或发散；

解 因为 $u_n=\tan\frac{1}{n}>\tan\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tan\frac{1}{n}=0,$

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{1}{n}$ 收敛.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

所以，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\tan\frac{1}{n}\right|$ 发散.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{1}{n}$ 条件收敛.

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-2x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并计算 $f^{(n+1)}(0)$.

解 $f(x)=\dfrac{x}{1-2x}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n,$

收敛域为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}).$

因为 $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}=2^n,$

所以 $f^{(n+1)}(0)=2^n(n+1)!.$

七、（6分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin^2 x}{1-\cos x}=1$，

求 $f(0), f'(0), \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin^2 x}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$=1+2=3.$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

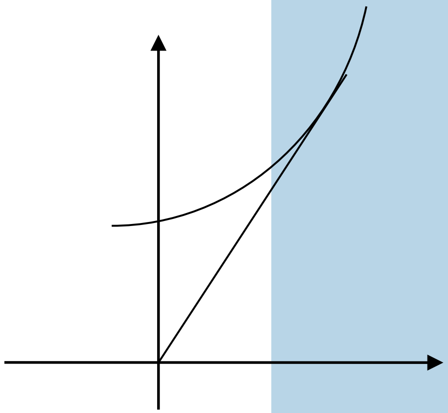
$$=3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

八、（8分）过点原点作曲线 $C: y=e^x$ 的切线，这切线与曲线 C 及 y 轴围成一平面图形，求此图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 设切点为 $(x_0, y_0=e^{x_0})$, 则切线方程为 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$,

由于原点在切线上 $0-y_0=e^{x_0}(0-x_0)$, 所以 $x_0=1, y_0=e.$

切线方程为 $y=ex.$ 所求的旋转体体积为



$$V=\pi\int_0^e\left(\frac{y}{e}\right)^2dy-\pi\int_1^e(\ln y)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{3e^2}y^3\Big|_0^e-\pi y(\ln y)^2\Big|_1^e+\pi\int_1^e y\left(2\ln y\right)\frac{1}{y}dy$$

$$=\frac{\pi e}{3}-\pi e+2\pi\int_1^e\ln y\,dy=-\frac{2\pi e}{3}+2\pi[y\ln y\Big|_1^e-\int_1^e dy]$$

$$=-\frac{2\pi e}{3}+2\pi[e-(e-1)]=2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right).$$