仅供参考

# 东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 17-18-3 得分

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

姓名______ 学号______ 密 封 线

一．（30%）填空题

1. 设方阵 $A$ 满足 $A^2+2A+2E=O$, 则 $A+3E$ 的逆矩阵 $(A+3E)^{-1}=$ $\frac{1}{5}(E-A)$.

2. 设 3 阶方阵 $A$ 的特征值为 $2,\ 1,\ -1$, $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，则矩阵 $A^*-A^{-1}$ 的行列式 $|A^*-A^{-1}|=$ $27/2$.

3. 设向量空间 $R^2$ 中两组基 $\alpha_1=(3,\ 4)^T,\alpha_2=(2,\ 3)^T;\beta_1=(1,\ 1)^T,\beta_2=(0,\ 1)^T$，已知 $R^2$ 中向量 $\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2$ 下坐标是 $(1,\ 1)^T$, 则 $\alpha$ 在基 $\beta_1,\beta_2$ 下坐标是 $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

4. 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的元素都是 $k(\neq 0)$, 则 $A$ 的特征多项式是 $\lambda^{n-1}(\lambda-nk)$

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ x & 1 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似, 则 $(x,\ y)=$ $(\pm 2, 4)$.

6. 设 3 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\gamma\\ -\alpha+\beta+2\gamma\\ \alpha-\beta-3\gamma\end{pmatrix}$, 则行列式 $|AB^{-1}|=$ $-\frac{1}{3}$.

7. 如果向量 $(k,\ 1,\ 4)$ 可由向量组 $(1,\ 2,\ -1)$, $(3,\ -1,\ 1)$ 线性表示，则参数 $k$ 满足条件 $k=32$.

8. 如果实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+(\lambda+1)x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_3$ 是正定二次型，则参数 $\lambda$ 满足条件 $0<\lambda<1$.

9. 设 $a(\neq 0)$ 是 3 阶实对称矩阵 $A$ 的二重特征值，$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 0,\ -1)^T$ 是 $A$ 的对应特征值 $a$ 的特征向量。如果 $A$ 不可逆，则 $A$ 的另一个特征值是 $0$，相应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, k\neq 0$.

10. 设 $\alpha$ 是 3 维列向量，$\alpha^T\alpha=k$, $k\in(1,+\infty)$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(E-\alpha\alpha^T)X$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

二．（12%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\q\end{pmatrix}$ 的秩为 2，

1．求参数 $p$，$q$ 的值；

2．求该向量组的一个极大线性无关组，并且将向量组中的其余向量用极大线性无关组表示出来。

解：1. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow[\text{行}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&1&1&-2\\0&0&-p+3&2p+q-3\end{pmatrix}$

$\because r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$ $\therefore$ $p=3$，$q=-3$.

2. 由上得 $\alpha_1,\alpha_2$ 是该向量组的一个极大无关组

计算得 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=3\alpha_1-2\alpha_2$

三（12%）线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+5x_2+px_3=5\\3x_1+px_2+3x_3=2\end{cases}$

讨论参数 $p$ 取何值时，线性方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求其通解。

解：设A为系数矩阵 $|A|=-(p-2)(p-3)$.

(1) 则当 $p\neq2$ 且 $p\neq3$ 时 有唯一解.

(2) 当 $p=3$ 时 $r(A)=2\neq r(A,b)$ 则无解.

(3) 当 $p=2$ 时 $(A,b)\xrightarrow[\text{行}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=r(A,b)=2<3$ 此时有无穷多解.

解得 $x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $k$为任意数.

四（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，

如果 $AXA^* = 6E + AX$，求矩阵 $X$.

解：$\because |A| = 2 \neq 0 \quad \therefore A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1}$

$\therefore AX(2A^{-1}) = 6E + AX$

等号两边右乘 $A$ 得 $2AX = 6A + AXA$

再左乘 $A^{-1}$ 得 $2X = 6E + XA$

$\therefore X(2E - A) = 6E$

$\because 2E-A$ 可逆 $\therefore X = 6E(2E-A)^{-1}$

$= 6(2E-A)^{-1}$

计算得 $(2E-A)^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

五（10%）设向量 $\eta=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & x & 0\\ 4 & y & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

1. 求参数 $x$，$y$ 的值；
2. 问：矩阵 $A$ 是否相似于对角矩阵？说明理由。

解：1. 设 $\eta$ 对应的特征值为 $\lambda$. 则 $A\eta = \lambda\eta$. 得 $\lambda = 1$, $x = -1$, $y = -8$

2. $|\lambda E - A| = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$.

二重特征值 1 的几何重数为 $3 - r(E-A) = 1 < 2$

故 $A$ 不相似于对角阵.

六（14%）设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

1. 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵;

2. 求正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

解 1. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

2. $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$. ∴ A的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$.

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ 单位化得 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$.

$(\lambda_2 E-A)X=0$ 得基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 标准正交化得 $\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. 则正交变换 $X=QY$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $3y_2^2+3y_3^2$.

七（10%）证明题:

1. 设 $\eta_1,\eta_2$ 是 $n$ 维列向量，$A$ 是 $s\times n$ 矩阵，$A$ 的秩为 $n-2$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 的每个解向量都可由 $\eta_1,\eta_2$ 线性表示，证明 $\eta_1,\eta_2$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系。

证: 设 $V=L\{\eta_1,\eta_2\}$. $\underbrace{\because r(A)=n-2}_{\therefore \dim K(A)=n-r(A)=2}$ ∴ $K(A)=L\{\xi_1,\xi_2\}$, $\xi_1,\xi_2$ 线性无关.

∵ $\xi_1,\xi_2$ 可由 $\eta_1,\eta_2$ 线性表示 ∴ $2=r\{\xi_1,\xi_2\}\le r\{\eta_1,\eta_2\}=2$

∴ $\xi_1,\xi_2$ 为V的一组基 ∴ $\xi_1,\xi_2$ 与 $\eta_1,\eta_2$ 等价 ∴ $\eta_1,\eta_2$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

2. 设 $n$ 阶实矩阵 $A$ 满足 $A^2=A$，证明存在 $n$ 阶对称矩阵 $P,Q$，使得 $A=PQ$.

证: ∵ $A^2-A=0$ ∴ $\underbrace{\text{A的特征值为 0 或 1.}}^{\varphi(x)=x(x-1)\text{ 为A的一个零化多项式}}$

∴ $A(E-A)=0$ ∴ A的最小多项式无重因式

~~∴ $r(A)+r(E-A)\le n$ 又∵ $r(A)+r(E-A)\ge n$.~~

~~∴ $r(A)+r(E-A)=n$.~~ ~~(省略)~~ ∴ $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}$, $r\ge0$



∴ ∃可逆阵 s.t. $A=B\Lambda B^{-1}=BB^TB^{-T}\Lambda B^{-1}$ 令 $P=BB^T$, $Q=B^{-T}\Lambda B^{-1}$