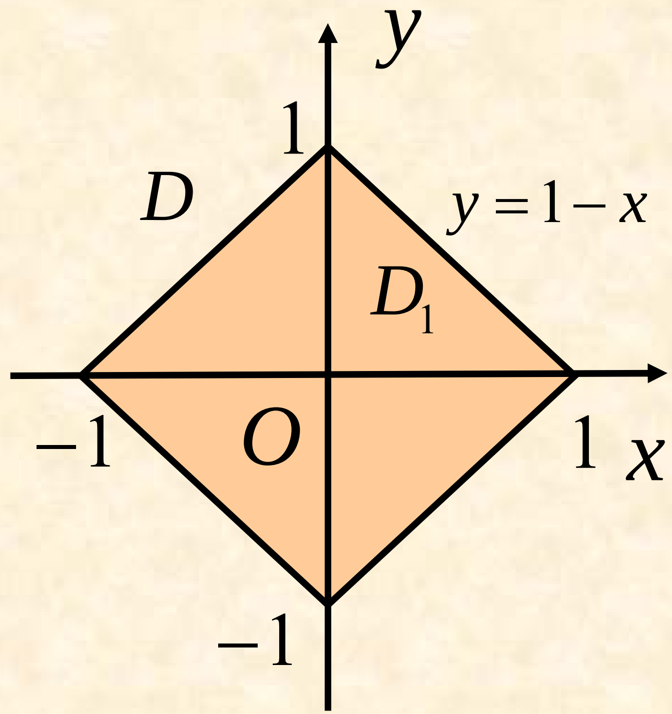
练习1. 有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\}$，其面密度为 $\mathrm{e}^{|x|+|y|}$，求该薄片的质量M。

解：根据二重积分的物理意义，$M=\iint_D \mathrm{e}^{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由于积分区域 D 关于x 轴，y 轴都对称，且被积函数关于 x,y 都是偶函数

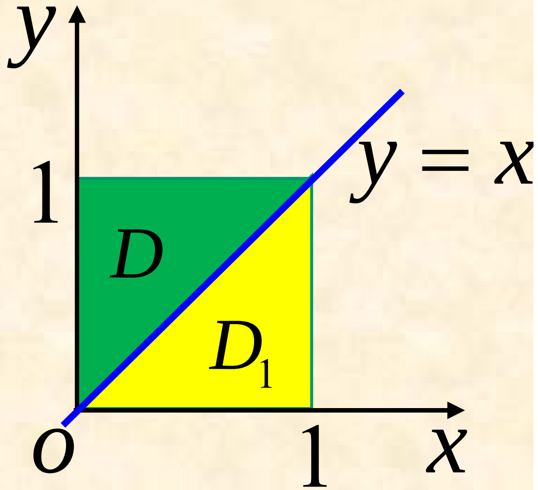


$$M=\iint_D \mathrm{e}^{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y=4.$$

练习2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$，

$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x) f(y)\,\mathrm{d}y$，求 I.



证明:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x) f(y)\,\mathrm{d}x = \iint_D f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} f(y) f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1,$$

$$\therefore\ I + I_1 = 2I = \iint_{D \cup D_1} f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x) f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = A^2, \quad I = \frac{A^2}{2}.$$

证毕

34. 求 $z=(1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x$ $\frac{\partial z}{\partial y}=e^y\cos x-(ye^y+e^y)=e^y(\cos x-y-1)$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$. $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得驻点 $(2k\pi,0)$ $((2k+1)\pi,-2)$ $k\in Z$

$f_{xx}=-(1+e^y)\cos x$. $f_{xy}=-\sin x e^y$ $f_{yy}=e^y(\cos x-y-1-1)=e^y(\cos x-y-2)$

① $f_{xx}(2k\pi,0)=-2$. $f_{xy}(2k\pi,0)=0$. $f_{yy}(2k\pi,0)=-1$. $AC-B^2=2>0$. $A=-2<0$.

故 z 在 $(2k\pi,0)$ 时有~~最大~~极大值为 2.

② $f_{xx}((2k+1)\pi,-2)=1+e^{-2}$. $f_{xy}((2k+1)\pi,-2)=0$. $f_{yy}((2k+1)\pi,-2)=-e^{-2}$.

$AC-B^2=-(e^{-2}+e^{-4})<0$. 故 z 在 $((2k+1)\pi,-2)$ 不存在极值.

36. 求函数 $z=f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ 在闭区域 $D: 0\le x\le \frac{\pi}{2}$, $0\le y\le \frac{\pi}{2}$ 上的最值.

解: $\begin{cases} f_x=-\sin x-\sin(x-y) \\ f_y=-\sin y+\sin(x-y). \end{cases}$

令 $f_x=0$. $f_y=0$. 故在闭区域 D 上无驻点

①. 当 $y=0$. $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时. $f(x,0)=2\cos x+1$

$x=0$. $f(x,0)_{max}=3$

$x=\frac{\pi}{2}$ $f(x,0)_{min}=1$.

②. 当 $y=\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时. $f(x,0)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

$x=0$. $\frac{\pi}{2}$. $f(x,\frac{\pi}{2})_{min}=1$

当 $x=\frac{\pi}{4}$. $f(x,\frac{\pi}{2})_{max}=\sqrt{2}$.

综上所述. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取最大值 3.

在 $(0,\frac{\pi}{2})$. $(\frac{\pi}{2},0)$. $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 取最小值 1.

38. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解：令P $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上一点.

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}.$$

∵椭圆与直线不相交

∴令 $F(x,y)=\dfrac{2x+3y-6}{\sqrt{13}}+\lambda(x^2+4y^2-4)$

$$\begin{cases} F_x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}+2\lambda x \\ F_y=\dfrac{3}{\sqrt{13}}+8\lambda y \\ F_\lambda=x^2+4y^2-4 \end{cases}$$

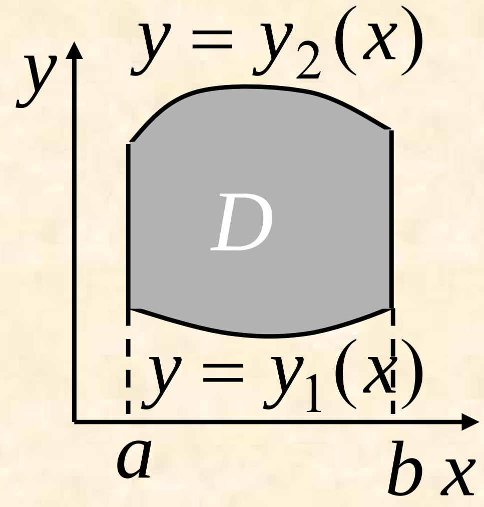
令 $F_x=0$ $F_y=0$ $F_\lambda=0$.

驻点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$. $(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$

$d(\frac{8}{5},\frac{3}{5})=\frac{1}{\sqrt{13}}$. $d(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})=\frac{11}{\sqrt{13}}$

故点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 到 $2x+3y-6=0$ 的距离最短

内容小结



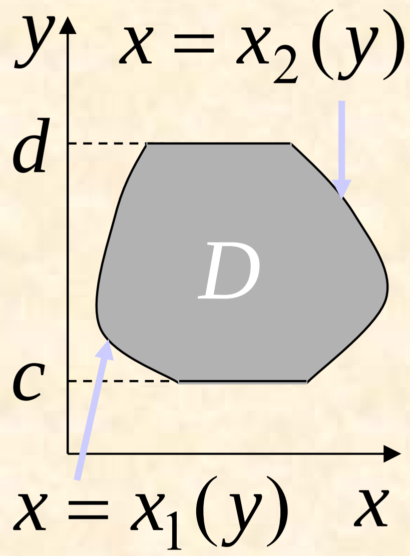
(1) 二重积分化为累次积分的方法

直角坐标系情形：

- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$



- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

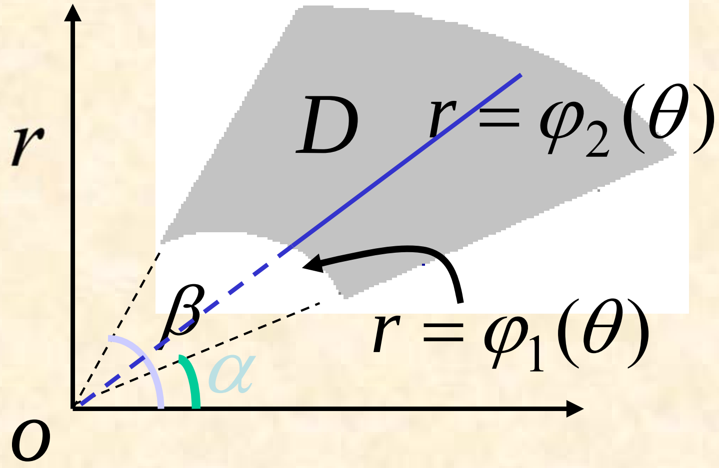
则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

极坐标系情形：若积分区域为

$$D=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\}$$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



(2) 一般换元公式

在变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ 下

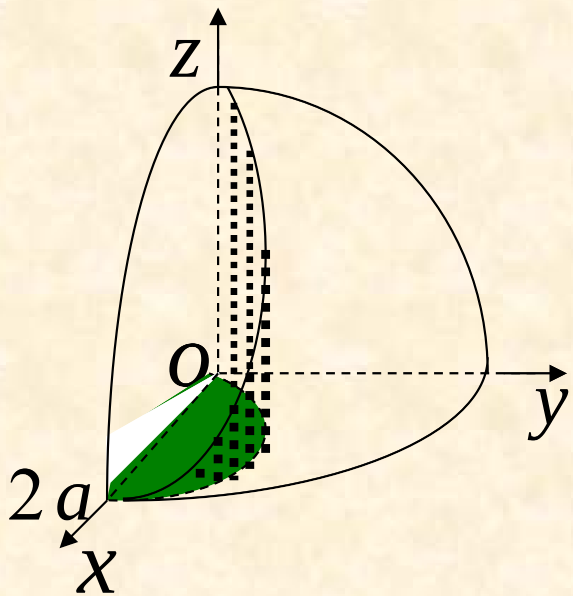
$$(x,y)\in D\longleftrightarrow(u,v)\in D',\ \text{且}\ J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$$

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

例5. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

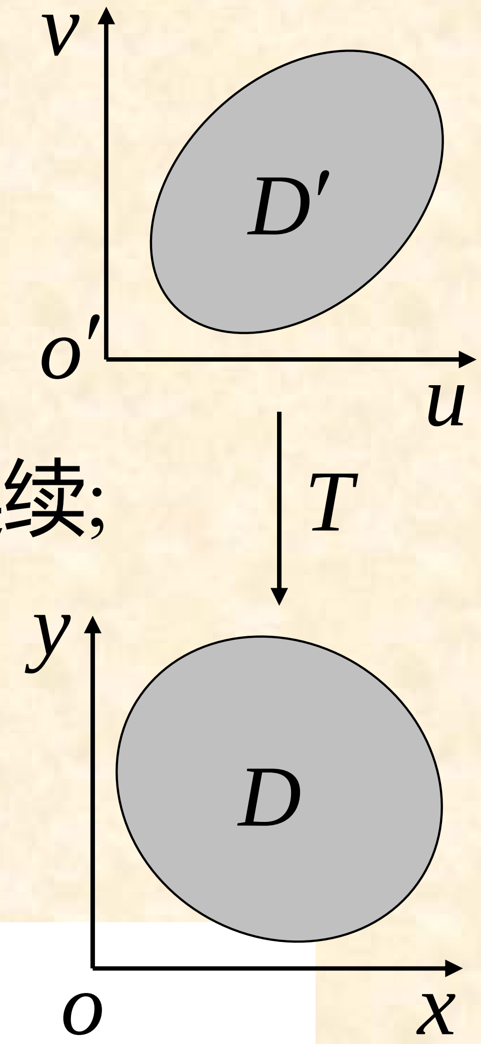
复习

$$2.\quad J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

三、二重积分换元法

定理： 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的,

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

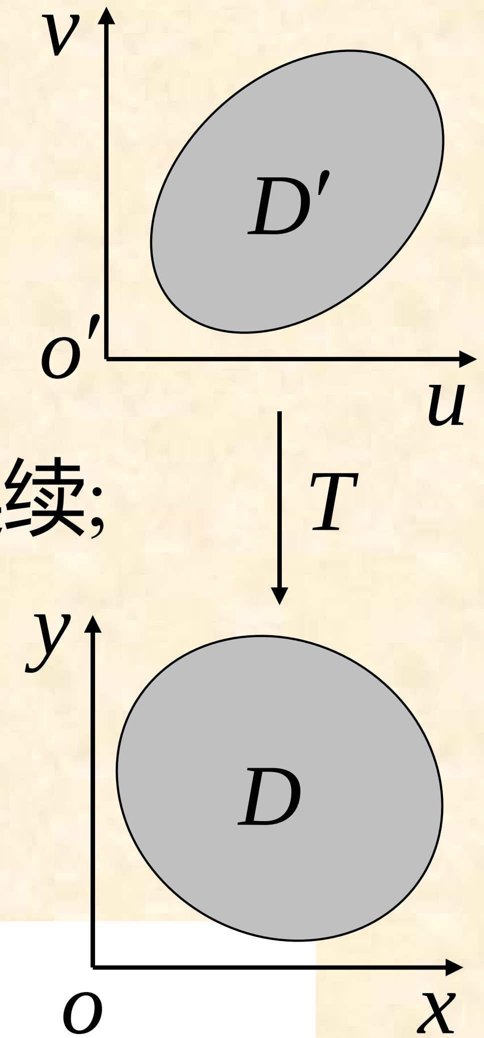
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

三、二重积分换元法



定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$

满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

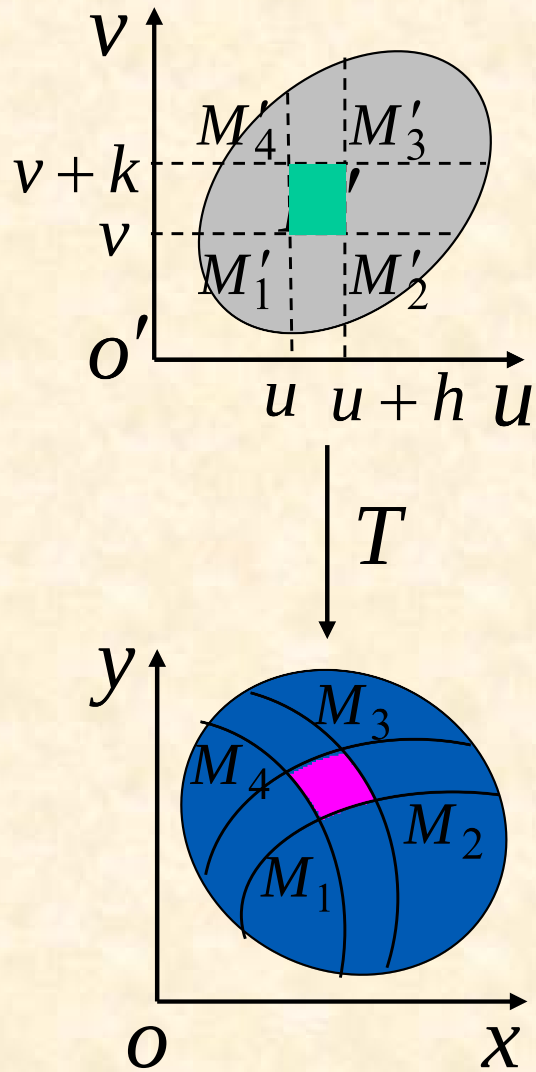
$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的 ,

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在 $uo'v$ 坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域 D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为



$$M_1'(u,v), \qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k), \quad M_4'(u,v+k).$$

通过变换T, 在 xoy 面上得到一个四边形, 其对应顶点为$M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u,v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $$y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k充分小时,曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}| = \left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$\approx \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}h & \frac{\partial y}{\partial u}h \\ \frac{\partial x}{\partial v}k & \frac{\partial y}{\partial v}k \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| hk = |J(u,v)|\, hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = \left|J(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|J(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

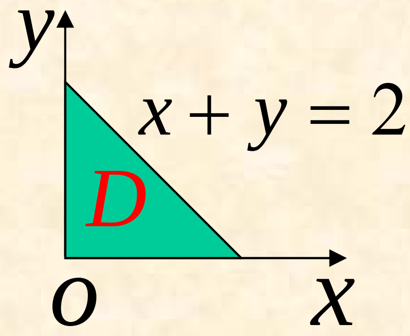
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

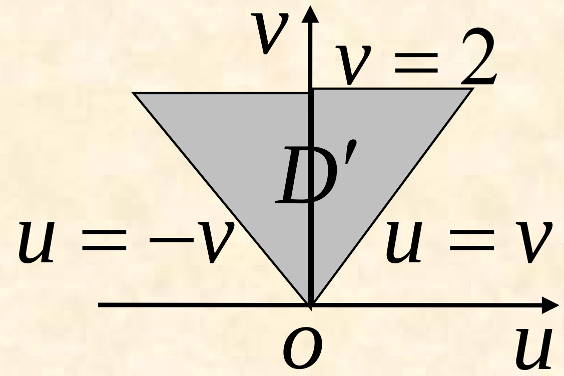
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例8. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$是$x$轴$y$轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.



解: 令 $u=y-x,\ v=y+x$,则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$



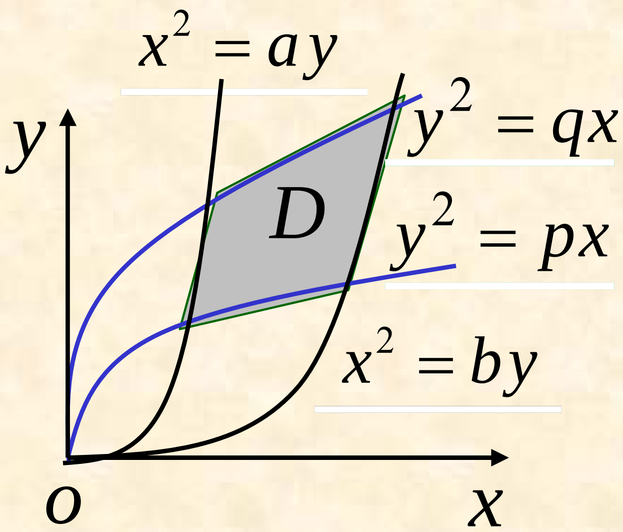
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

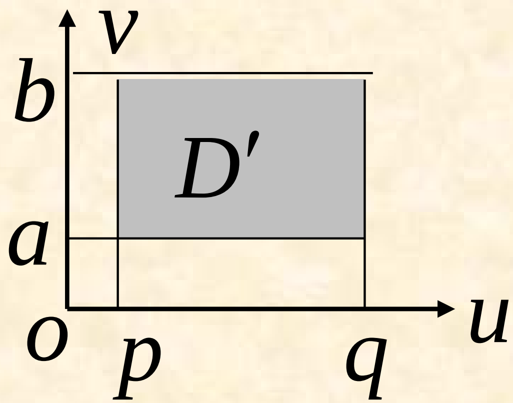
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})v\,\mathrm{d}v=e-e^{-1}$$

例9. 计算由 $y^2 = px\,,\, y^2 = qx\,,\, x^2 = ay,\, x^2 = by$ $(0 < p < q\,, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S .

解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x}\,, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则



$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_{D'} |J|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}\,u \int_a^b \mathrm{d}\,v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例10. 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解: 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\,r\cos\theta$, $y=b\,r\sin\theta$, 则D 的原象为

$$D':r\le 1,\,0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,r$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_{D}\sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\,abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r=\frac{4}{3}\pi\,abc$$

二、小结

1. 作什么变换主要取决于积分区域 D 的形状，同时也兼顾被积函数 $f(x,y)$ 的形式.

基本要求：变换后定限简便，求积容易.

2. $$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

第三节 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

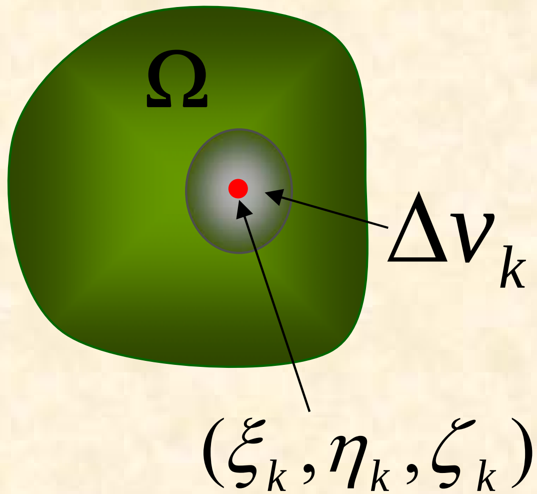
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得

$$M=\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$



定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$,下列 “乘积和式” 极限

$$\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$在有界闭域 Ω 上连续, V 为Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1．投影法 (“先一后二”)

方法2．截面法 (“先二后一”)

方法3．三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.