课前练习

1) 设曲面 $\Sigma: z=0,(x,y)\in D$,问下列等式是否成立?

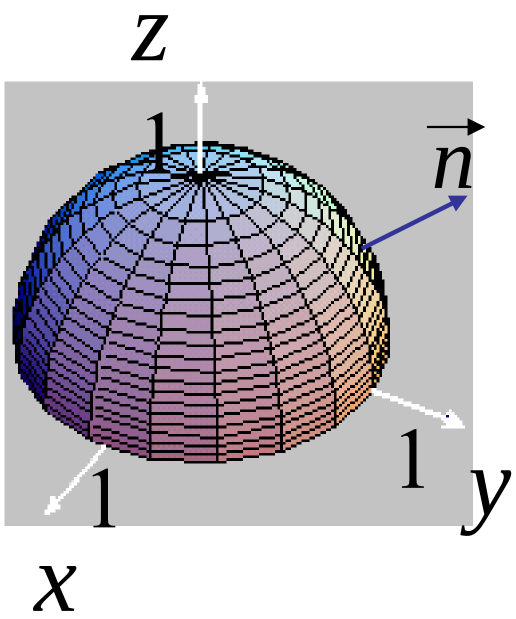
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \checkmark$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \times$$

不对！ 对坐标的积分与 Σ 的侧有关

例 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.

例5. 设$\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S.$



解:

$$I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

内容小结

1. 定义

- $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$
- $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} \right.$$

$$\left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \right]$$

性质: $$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

当 $\Sigma: z = z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取“+”, 下侧取“–”)

类似可考虑在 yoz 面及 zox 面上的二重积分转化公式 .

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

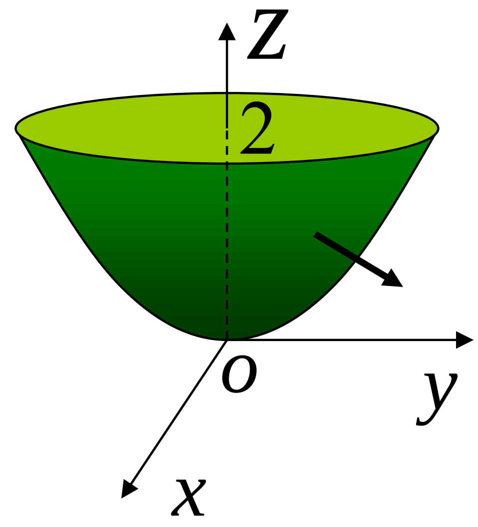
$$dS\cos\gamma = dxdy$$

$$dS\cos\beta = dzdx$$

$$dS\cos\alpha = dydz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{dydz}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{dxdz}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{dxdy}}{\cos\gamma}}$$

例6. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma (z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

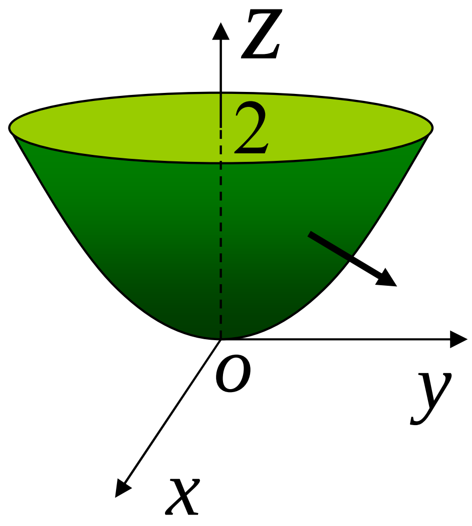
$$=\iint_\Sigma (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\iint_\Sigma\left[(z^2+x)(-x)-z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} [(z^2+x)(-x)-z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$\text{原式} = -\iint_{D_{xy}} \{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

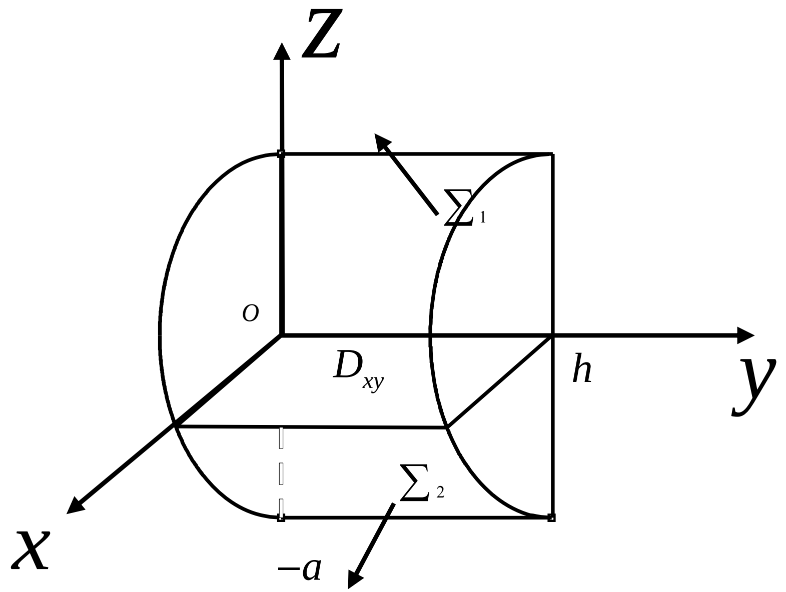
$$= \iint_{D_{xy}} [x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= 8\pi$$

例7. 计算$I=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$,其中 Σ是圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geq 0$ 的一半被平面 $y=0$ 和 $y=h$ ($h>0$) 所截下部分的外侧.



解: 先计算 $I_1=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases}\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2},\\ \Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2},\end{cases}$$

根据对称性，有

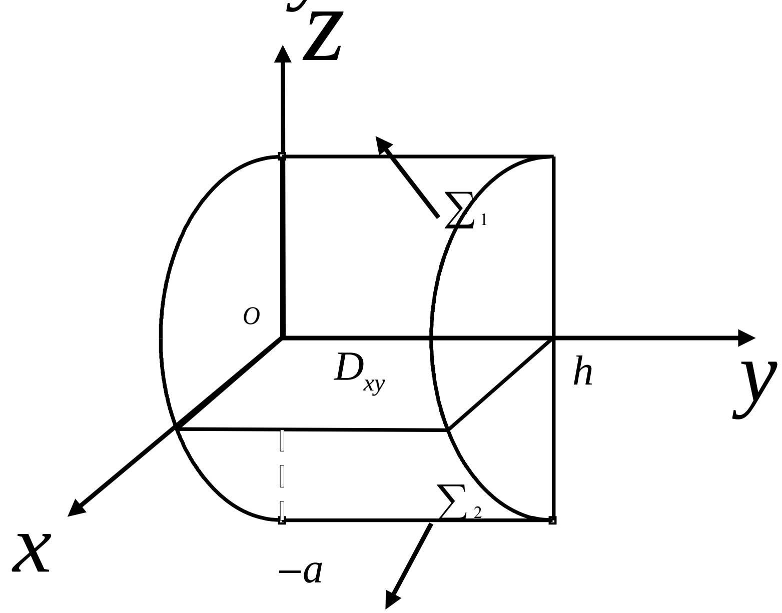
$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_1 = 2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^h xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^h y\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}h^2 a^3.$$



Σ在 yOz 平面上的投影区域为

$D_{yz}: 0 \le y \le h, -a \le z \le a$，$\Sigma$的正侧为前侧，故

$$I_2 = \iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} z\sqrt{a^2 - z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

注意到积分区域 D_{yz} 关于 y 轴对称，被积函数是z 的奇函数，于是 $I_2 = 0.$

$$I_1 = \frac{1}{3}h^2a^3, \qquad I_2 = 0.$$

Σ在 zOx 平面上投影为一曲线，　$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0$, 因此

$$I_3 = \iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0.$$

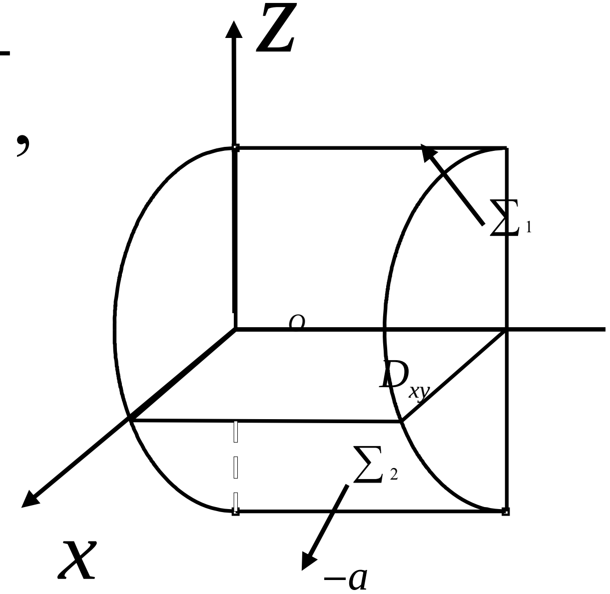
最终得到：

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3}h^2a^3 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{3}h^2a^3$$

在例7中，将Σ的方程看成 $x=\sqrt{a^2-z^2}$，

取前侧，则有（将Σ投影到yOz平面）



$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(yz\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}+z\sqrt{a^2-z^2}+z^2\cdot 0\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h y\,\mathrm{d}y\int_{-a}^{a} z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^2a^3.$$

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)//\left(1,0,x_z=\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

例8. 设函数 $f(x,y,z)$连续，$\Sigma:\ x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧. 试求

$$I=\iint_{\Sigma}(f+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2f+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(f+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: Σ 的方程为$z=1-x+y$, $n\,/\!/\,(1,-1,1)$, D_{xy}为 Σ 在xOy平面上的投影，于是

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\left[(f+x)+(2f+y)(-1)+(f+z)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

一、高斯 (Gauss) 公式


高斯，C.F.

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

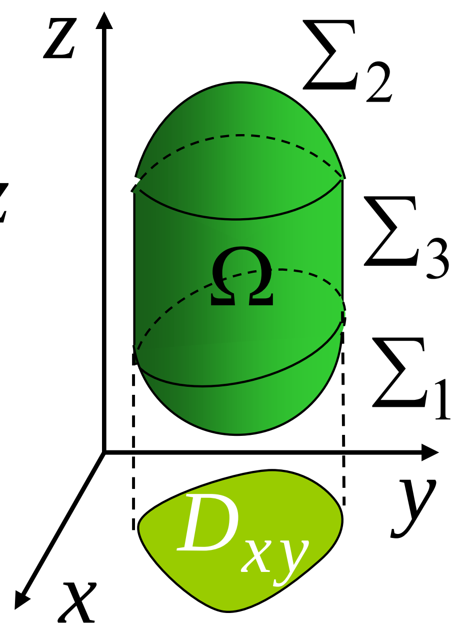
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

证明: 设$\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$

为XY型区域, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1: z = z_1(x,y)$,

$\Sigma_2: z = z_2(x,y)$,则



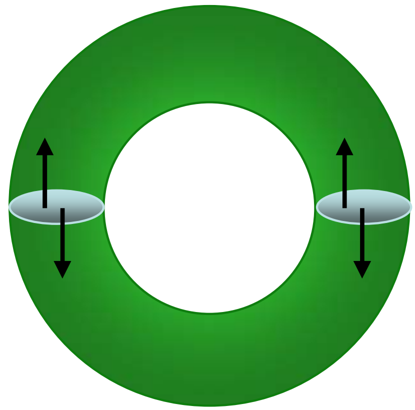
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,\ z_2(x,y)) - R(x,y,\ z_1(x,y)) \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域，在辅助面正反两侧面积分正负抵消，故上式仍成立 .

类似可证 $$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加，即得所证 Gauss 公式：

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

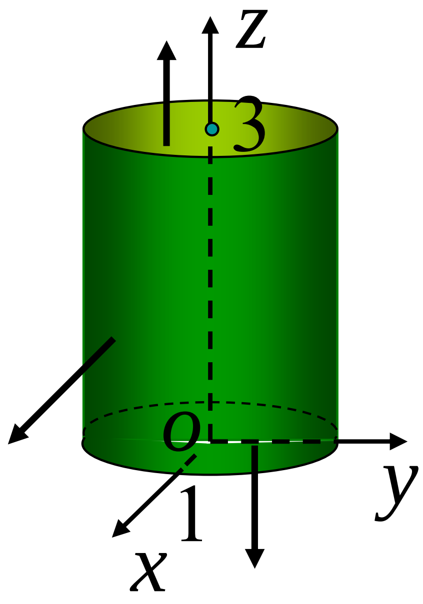
解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(用柱坐标)}$$

$$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$



思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?