2012-2013 学年 上 学期 高等数学（一）

得分	阅卷人

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）。

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$ 等于_________。

2、设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$ ______

3、$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=$ _______。

4、微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$ 满足初始条件 $y(2)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的特解是________。

5、$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$, 则 $\int\frac{1}{f(x)}dx=$ ______。

得分	阅卷人

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6、设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}$ 为（　）

（A）等于 2　（B）等于 4　（C）等于 6　（D）等于 8

7、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\pi x}{1+(2x)^{2n}}$, 则 $f(x)$ 的间断点（　）

（A）有三个　（B）有两个　（C）有一个　（D）不存在

8、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在4阶导数，又设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x-\sin x}=1$, 则（　）

（A）$f'(0)=1$（B）$f''(0)=1$　（C）$f'''(0)=1$（D）$f^{(4)}(0)=1$

9、若 $3a^2-5b<0$, 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 根的个数为（　）

（A）1（B）3（C）5（D）0

10、设 $f(x)$是连续函数，满足$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$,则$f(x)=$（   ）

（A）$3x^2+C$（B）$x^3-\frac{10}{3}$（C）x^3+C （D）$3x^2-\frac{10}{3}$

得分	阅卷人

三、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分）

11、（10 分）

求微分方程$y''+2y'-3y=xe^x$的通解。

（12）(10分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶导数，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=2$，

求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$.

得分	阅卷人

13.（10 分）

$f(x)$在$[0,1]$上可微且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$,证明:存在$\xi\in(0,1)$,

使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

得分	阅卷人

14、（10 分）。

设$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$,证明：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

得分	阅卷人

15、（10 分）

$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且当$x\ge 0$时，$f(x)\cdot F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$,已知$F(0)=1$，$F(x)>0$, 求$f(x)$

得分	阅卷人

16、（10 分）

设直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$所围成图形的面积为S_1,它们与直线

$x=1$所围成的图形面积为S_2，并且$a<1$,

（1）试确定a的值，使S_1+S_2达到最小，并求出最小值。

（2）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积。

高数期末考试答案（20130114）

一、　填空题：（共 20 分）

1. $\underline{-\frac{1}{6}}$

2. $\underline{-3}$

3. $\underline{\frac{a^2}{4}\pi}$

4. $\underline{\sin\frac{y^2}{x}=\frac{\sqrt{2}}{4}x \text{或} y=\sqrt{x\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}x}}$

5. $\underline{-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C}$

二、选择题：（共 20 分）

6.C　7.B　8.C　9.A　10.D

三、计算与证明：（共 60 分）

11. 解：微分方程 $y''+2y'-3y=xe^x$ 对应齐次方程组的特征根为 $r_1=1, r_2=-3$，故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$，设原非齐次方程的一个特解为

$y^*=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+Bx)e^x$，用待定系数法求得 $A=\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{16}$

从而 $y^*=(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x)e^x$，原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x)e^x$。

12.解：$f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶导数，

$f(x)$ 在 0 点的二阶泰勒展开式为：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)$，

$\ln(1+x)$ 在 0 点的三阶泰勒展开为：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(0)+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2}x^3+o\left(x^3\right)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x[f(0)-1]+x^2\left[f'(0)+\frac{1}{2}\right]+x^3\left[\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3}\right]}{x^3}=2$$

从而必须有 $f(0)-1=0,\ f'(0)+\frac{1}{2}=0,\ \frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3}=2$，

所以 $f(0)=1,\ f'(0)=-\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{14}{3}$。

13. 证明：设

$F(x)=xf(x)$,由积分中值定理知 $\exists\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使 $\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)\mathrm{d}x=F(\eta)\frac{1}{2}$

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2F(\eta)\frac{1}{2}=F(\eta)$$

$\therefore F(1)=f(1)=F(\eta)$

$\because F(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$可导，由罗尔定理知

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

14. 先证左边。令

$\varphi(x)=(x-a)f(\frac{a+x}{2})-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 有 $\varphi(a)=0,\varphi'(x)=f\left(\frac{a+x}{2}\right)+\frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2})-f(x)$

$$=\frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2})-\left(f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(x-a)\left[f'(\frac{a+x}{2})-f'(\xi)\right]$$

其中$\frac{a+x}{2}<\xi<x$，由于 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$严格单调增加，从而

$f'(\frac{a+x}{2})<f'(\xi)$。

于是$\varphi'(x)<0$，所以当$x>a$时$\varphi(x)<0$，有$\varphi(b)<0$，左边证毕。

再证右边。令

$\psi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}(x-a)(f(a)+f(x))$, 有 $\psi(a)=0$,

$\psi'(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(a)+f(x)]-\frac{1}{2}(x-a)f'(x)$

$=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{1}{2}(x-a)f'(x)=\frac{1}{2}(x-a)[f'(\eta)-f'(x)]$

其中$a<\eta<x$由于$f''(x)>0$，所以$f'(\eta)<f'(x)$，从而$\psi'(x)<0$，于是当$x>a$时，

$\psi(x) < 0$，故$\psi(b) < 0$。证毕。

15. 解：因为 $f(x) = F'(x)$，所以 $F'(x) \cdot F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，又

$\because \left[F^2(x)\right]' = 2F(x) \cdot F'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$，

$\therefore F^2(x) = \int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \dfrac{e^x}{1+x} + C$，由 $F(0) = 1$知，$C = 0$ 从而

$F(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}}$ $(\because F(x) > 0)$，故 $f(x) = F'(x) = \dfrac{x\sqrt{e^x}}{2\sqrt{(1+x)^3}}$。

16、解：（1）当$0 < a < 1$时，

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^a \left(ax - x^2\right)dx + \int_a^1 \left(x^2 - ax\right)dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

令 $S' = a^2 - \dfrac{1}{2} = 0$，得 $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，又 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$，

则 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 是极小值即最小值，其值为 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{6\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$。

当$a \le 0$时，$S = S_1 + S_2 = \int_a^0 \left(ax - x^2\right)dx + \int_0^1 \left(x^2 - ax\right)dx = -\dfrac{a^3}{6} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{3}$

$S' = -\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(a^2 + 1\right) < 0$，$S$ 单调减少，故 $a = 0$ 时，S 取得最小值，此时 $S = \dfrac{1}{3}$。

综上所述，当$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$时$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$为所求最小值，最小值为$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$。

（2）

$$V_x = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^4\right)dx + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$$