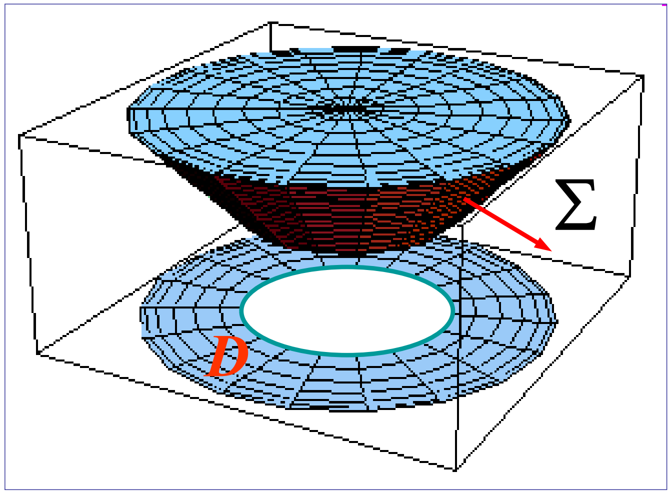
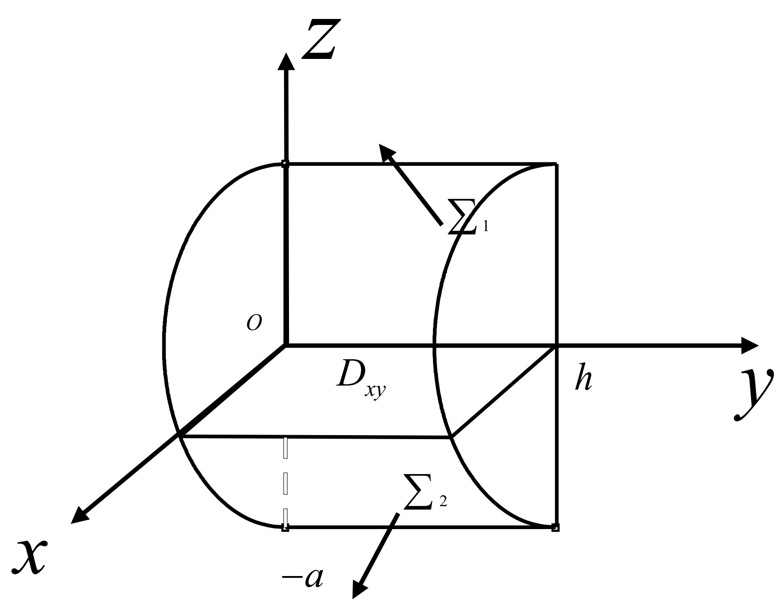
例 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.



例7. 计算$I=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$,其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geq 0$ 的一半被平面 $y=0$ 和 $y=h$ $(h>0)$ 所截下部分的外侧.



解: 先计算 $I_1=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

把 Σ 分为上下两部分

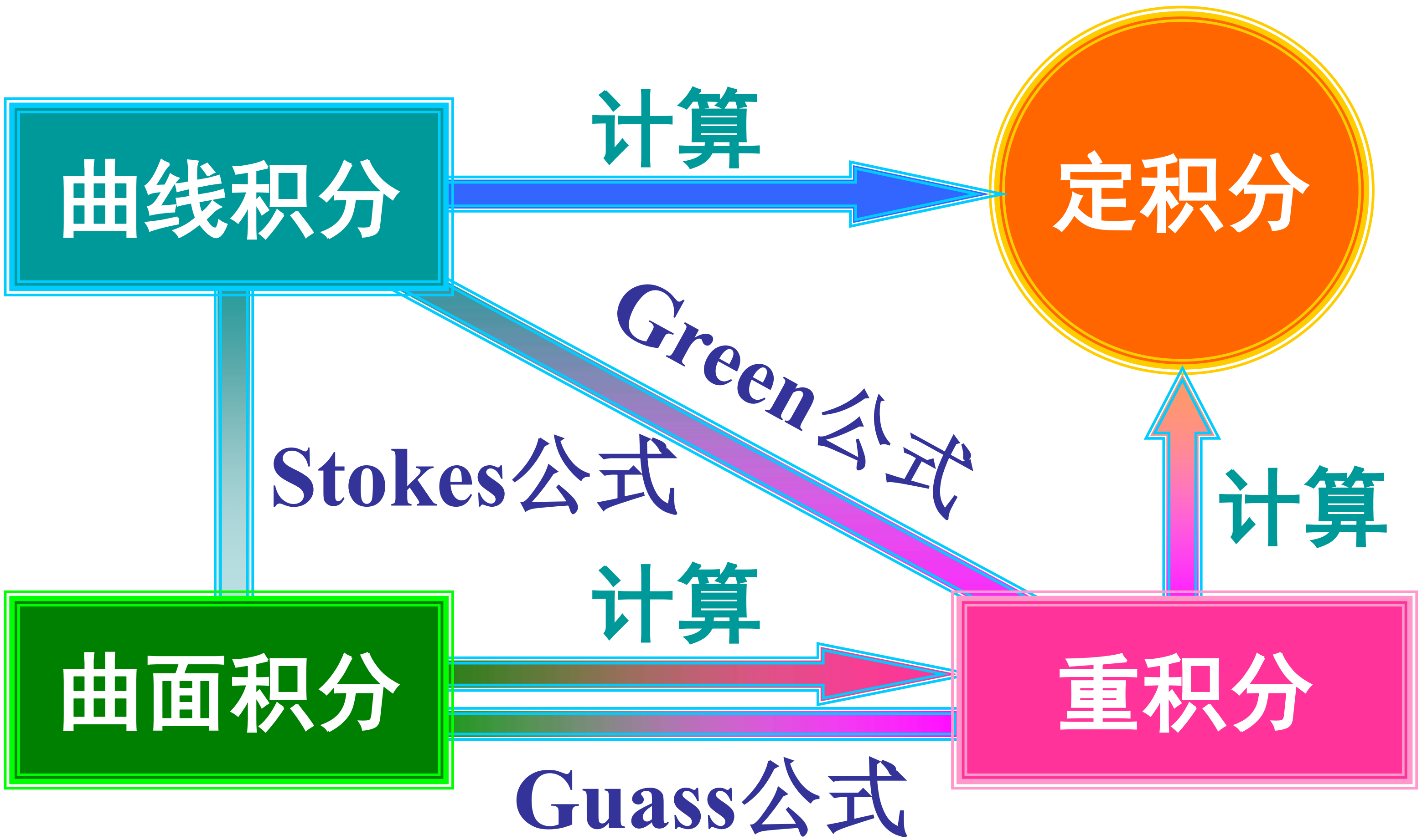
$$\begin{cases}\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2},\\ \Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2},\end{cases}$$

$$(x,y)\in D_{xy}:\ 0\leq x\leq a,0\leq y\leq h,$$

根据对称性，有

$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（二）各种积分之间的联系



	曲面积分	
	对面积的曲面积分	对坐标的曲面积分
定义	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$	$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$
联系	$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$	
计算	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds$ $= \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 一代,二换,三投(与侧无关)	$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$ $= \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ 一代,二投,三定向 (与侧有关)

向量形式：

若记 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$$\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

合一投影法

将三种类型的积分转化为同一个坐标面上的二重积分.

如果Σ的方程为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$,函数$P(x,y)$, $Q(x,y),R(x,y)$在Σ上连续,那么

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_{D_{xy}}\{P[x,y,z(x,y)][-z_x(x,y)]$$

$$+Q[x,y,z(x,y)][-z_y(x,y)]+R[x,y,z(x,y)]\}\mathrm{d}\sigma$$

积分前的符号当Σ取上侧时为正,取下侧时为负.

证 (1) 如果$\Sigma: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= \pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}\right),$$

由于$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S$,

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}S = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (-z_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}S = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (-z_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm\iint\limits_{\Sigma} [P \cdot (-z_x) + Q \cdot [-z_y] + R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

积分前的符号当Σ取上侧时为正,取下侧时为负.

(2) $\Sigma : y = y(z, x), \quad (z, x) \in D_{zx}, P, Q, R \in C(\Sigma).$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm\iint_{D_{zx}} \{P[x, y(z,x), z][-y_x(z,x)]$$
$$+ Q[x, y(z,x), z] + R[x, y(z,x), z][-y_z(z,x)]\}\mathrm{d}\sigma$$

积分前的符号当Σ取右侧时为正,取左侧时为负.

(3) $\Sigma: x = x(y,z), \quad (y,z) \in D_{yz}, P, Q, R \in C(\Sigma).$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm\iint_{D_{yz}} \{P[x(y,z), y, z] + Q[x(y,z), y, z][-x_y(y,z)]$$
$$+ R[x(y,z), y, z][-x_z(y,z)]\}\mathrm{d}\sigma$$

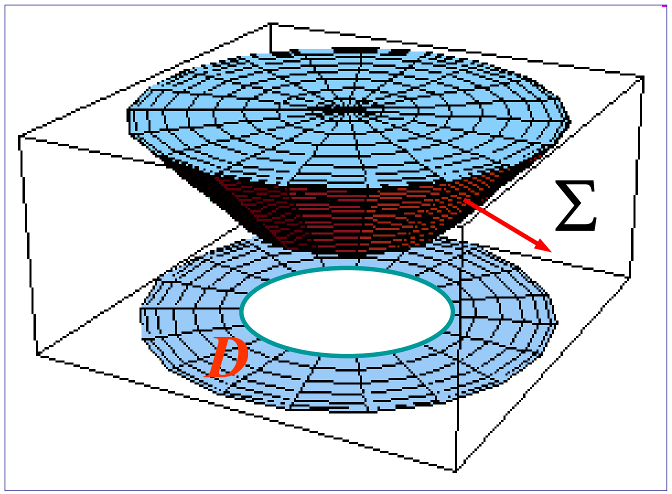
积分前的符号当Σ取前侧时为正,取后侧时为负.

例 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} ydydz-xdzdx+z^2dxdy$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

解 利用向量点积法

$$\because f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$



$$I = \iint \{y, -x, z^2\} \cdot \left\{ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\} dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} z^2 dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) dxdy \qquad [D_{xy}: \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4]$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cdot r dr \quad = -\frac{15}{2}\pi.$$

一、高斯（Gauss）公式

高斯，C.F.

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

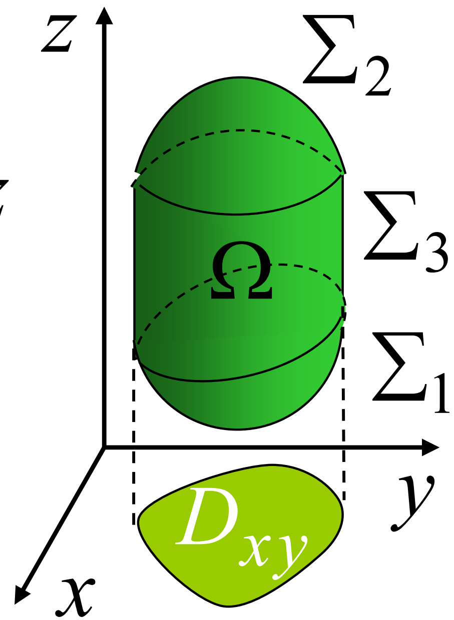
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

证明: 设$\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

为XY型区域，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$，$\Sigma_1: z = z_1(x,y)$，

$\Sigma_2: z = z_2(x,y)$,则



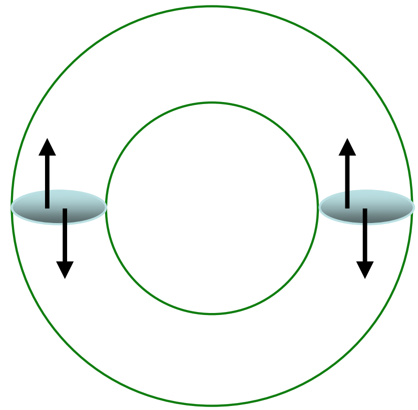
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域, 在辅助面正反两侧面积分正负抵消, 故上式仍成立 .

类似可证 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

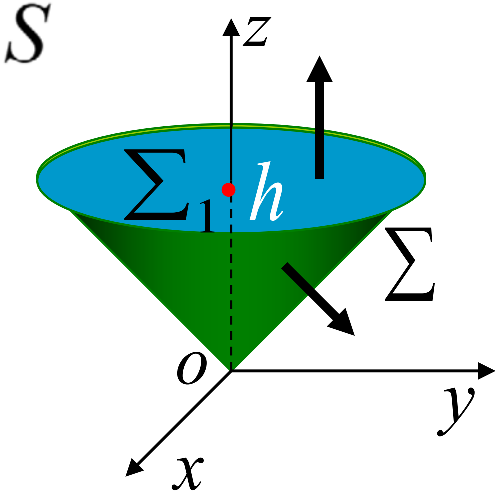
三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\ \text{取上侧}$$

记 Σ,Σ_1所围区域为Ω, 则

$$\boxed{\text{在 } \Sigma_1 \text{ 上 } \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=0}$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

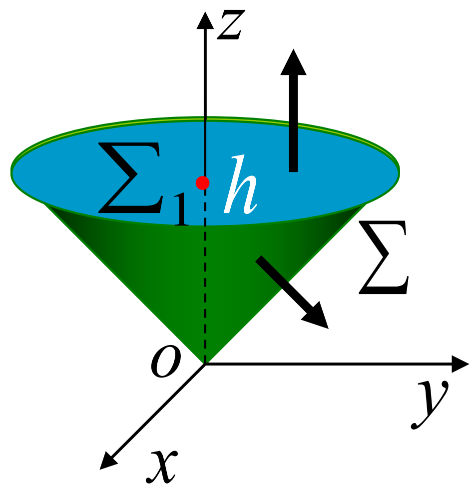
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用重心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z \cdot \pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

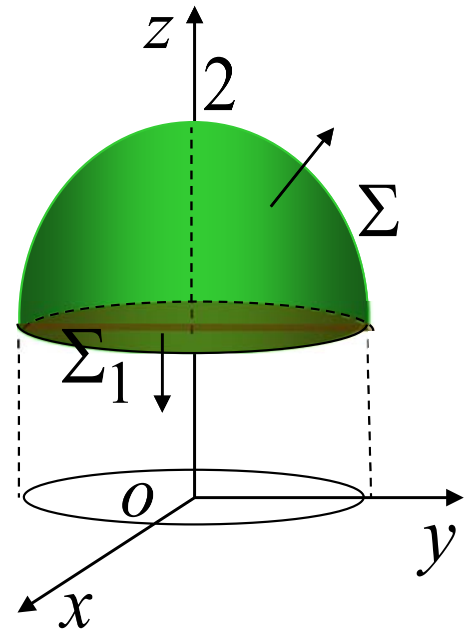
$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$



例3. 设Σ 为曲面$z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面



$$\Sigma_1: z=1\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

例 5 计算曲面积分

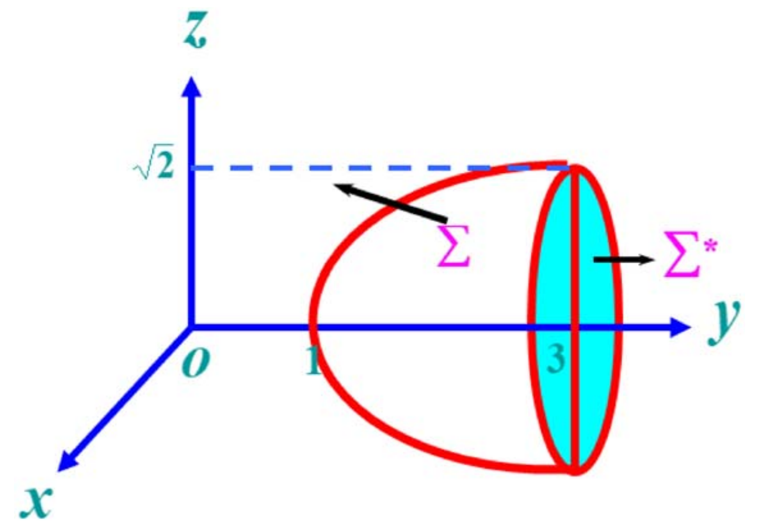
$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\,dydz+2(1-y^{2})dzdx-4yz\,dxdy,$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转一周

所成的曲面，它的法向量与y轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

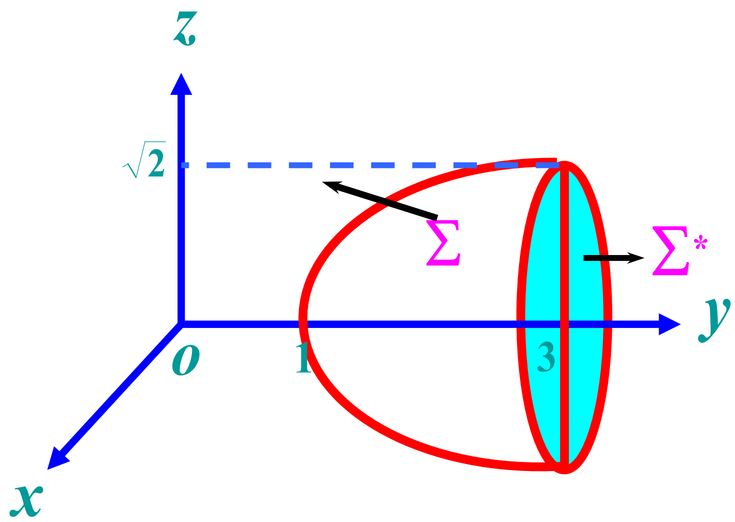
解 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转面方程为

$$y-1=z^{2}+x^{2}$$



欲求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\,dydz+2(1-y^2)dzdx-4yz\,dxdy$

且有 $I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}$



$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(8y+1-4y-4y)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}dxdz\int_{1+z^2+x^2}^{3}dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{1+\rho^2}^{3}dy$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^3)d\rho=2\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}=2\iint\limits_{\Sigma^*}(1-3^2)dzdx=-32\pi,$$

故 $I=2\pi-(-32\pi)$

$=34\pi.$

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型　设有空间区域 G，

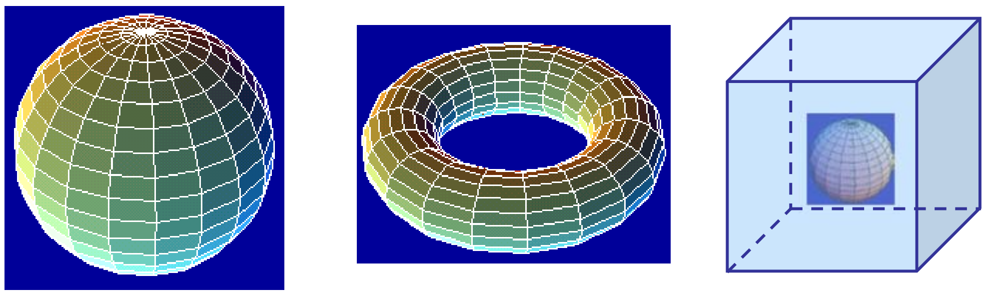
• 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G, 则称 G 为空间二维单连通域；

• 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为空间一维单连通域 .

例如, 球面所围区域既是一维也是二维单连通区域；

环面所围区域 是二维但不是一维单连通区域；

立方体中挖去一个小球所成的区域 是一维但不是二维单连通区域 .



2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在空间二维单连通域$G$内具有连续一阶偏导数, Σ为G内任一闭曲面, 则

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\,,\quad (x,y,z)\in G \qquad ②$$

证: "充分性". 根据高斯公式可知②是①的充分条件.

"必要性". 用反证法已知①成立, 假设存在$M_0\in G$, 使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}\neq 0$$

因P, Q, R 在G内具有连续一阶偏导数，则存在邻域$\bigcup(M_0)\subset G$,使在$\bigcup(M_0)$上,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$$

设$\bigcup(M_0)$的边界为Σ' 取外侧,则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma'} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\bigcup(M_0)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\neq 0$$

与①矛盾，故假设不真. 因此条件②是必要的.