第2章 极限与连续

研究函数的变化趋势，内容包括:

数列及其极限

函数极限

极限的运算和两个重要极限

连续函数

§ 2.1数列及其极限

定义1　称 $f: N_+ \to \mathbb{R}$ 为一个数列，记为

$$\{a_n = f(n) \mid n \in \mathbb{N}_+\},\quad \text{或}\quad a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

或 $\{a_n\}$,　　a_n 称为该数列的通项.

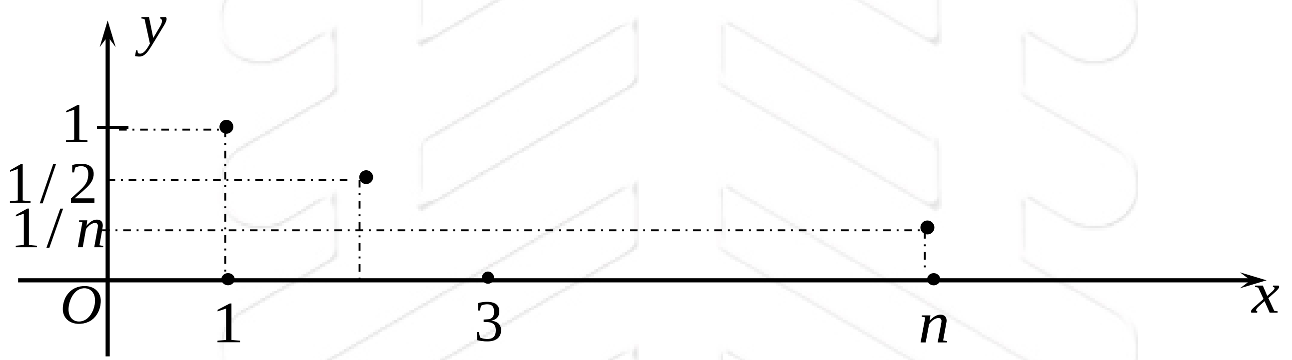
例　(1)　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$　记为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$,　$a_n = \frac{1}{n}$;

(2)　$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots,$ 记为 $\left\{(-1)^{n-1}\right\}$, $a_n = (-1)^{n-1}$;

(3)　数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, 即 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$ $a_n = \frac{1}{2^n}$.

数列的图像表示

数列可以在数轴或坐标平面有图像表示，以 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 为例.



有界性讨论

若$\exists K$, $st.\ a_n \le K, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称$\{a_n\}$ 有上界.

若$\exists k$, $st.\ a_n \ge k, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称$\{a_n\}$ 有下界.

若$\exists M > 0$, $st.\ |a_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称$\{a_n\}$ 有界.

易证 $\{a_n\}$有界 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$上有界且下有界

若对$\forall M > 0$, 总$\exists n_0 \in \mathbb{N}_+, st. |a_{n_0}| > M$, 则称$\{a_n\}$ 无界.

类似定义: 无上界, 无下界.

例 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 有界, $\{n\}$ 无界.

单调性讨论

若$a_n \le a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_+$， 则称$\{a_n\}$ 递增，

若$a_n \ge a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_+$， 则称$\{a_n\}$ 递减，

若$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_+$， 则称$\{a_n\}$ 严格递增，

若$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_+$， 则称$\{a_n\}$ 严格递减.

例 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 严格递减，$\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ 递减，

$\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 即 $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots$， 无单调性.

考察当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 变化趋势.

对数列 $\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

$$|a_n-2|=\left|2+\frac{(-1)^n}{n}-2\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

只要 n 充分大，它可以小于事先任给的正数.

对给定 $\dfrac{1}{10^k}$， 只要 $n>10^k$，就有 $|a_n-2|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{10^k}$，

对任给 $\varepsilon>0$， 只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$， 就有 $|a_n-2|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

ε 表示小正数.

数列极限的定义

定义2 (ε—N定义) 设有数列 $\{a_n\}$，常数 a,

若对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得当自然数 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限(值)为 a,

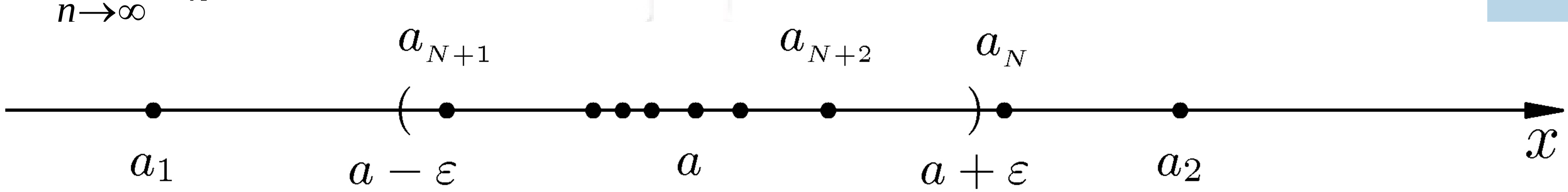
或称 $\{a_n\}$ 收敛于 a，并记

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad a_n \to a \ (n \to \infty).$$

否则称 $\{a_n\}$ 是发散数列.

极限的几何意义

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的图像表示:



任给 $U(a;\varepsilon)$ 后, 能聚 $\{a_n\}$ 中某项后所有点, 而外面有有限个.

$\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 能几乎都聚在 2 的任何事先邻域内.

$\left\{(-1)^{n-1}\right\}$ 不能几乎聚在 1 处, 故 1 非其极限(值).

它也不能几乎聚在 处, 故 也非其极限(值).

定义中的 "存在自然数 N", 在实题中需由 $|a_n - a| < \varepsilon$ 解出.

数列极限的例子

例1　求数列 $\{1,1,1,\cdots,1,\cdots\}=\{a_n\}$ 的极限.

解：　这个数列的极限为 $a=1$.

验证　对任意 $\varepsilon>0$, 要使 $|a_n-a|=|1-1|=0<\varepsilon,$

只要取 $N=1$，则当 $n>N$ 时, 有

$$|1-1|=0<\varepsilon,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}1=1.$$

同理可证 $$\lim_{n\to\infty}C=C.$$

数列极限的例子

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon,$

只要 $n^2>\frac{1}{\varepsilon},$ 即 $n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}},$ 取 $N=\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right],$

则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0,$ $\alpha>0$ 是常数.

数列极限的例子

例3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0.$

证明　对任意 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon,$

只要 $n\lg\dfrac{1}{2}<\lg\varepsilon,$ 即 $n>-\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 2},$　取 $N=\left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right],$

则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0.$

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,$　$|q|<1$ 是常数.

例4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^2}=0.$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$

由于 $\left|\dfrac{n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{n}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n},$ 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$ 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon},$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],$ 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^2}=0.$

本题意: 无需最小 $N.$

数列极限的例子

例5　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\cos n}{n}=1.$

证明　对任意 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n+\cos n}{n}-1\right|<\varepsilon,$

由于 $\left|\dfrac{n+\cos n}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\cos n}{n}\right|\le\dfrac{1}{n},$　只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$　即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon},$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],$ 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{n+\cos n}{n}-1\right|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\cos n}{n}=1.$

数列 $\{n^2\}$ 无界发散. 但有趋势 趋向于无穷大.

定义3 (**G—N**定义) 设有数列 $\{a_n\}$,

若对任意 $G>0$, 存在自然数 N, 使得当自然数 $n>N$ 时有

$$|a_n|>G,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 也称 $\{a_n\}$ 为无穷大量.

记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty, \quad 或 \quad a_n\to\infty \quad (n\to\infty).$$

无穷大量

若定义中的 $|a_n| > G$ 换为 $a_n \geq G$ (或 $a_n \leq -G$),

则称 $\{a_n\}$ 是正(负)无穷大数列, 也称正(负)无穷大量.

记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty), \text{ 或 } a_n \to +\infty(-\infty)(n \to \infty).$$

例 $\{2^n\}$ 是正无穷大量,

$\{-n\}$ 是负无穷大量,

$\{(-1)^n 2^n\}$ 是无穷大量.

3. 收敛数列的性质

定理1(唯一性) 若 $\{a_n\}$ 收敛，则极限唯一.

证 反证法，假设 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, b\ (a > b)$，取 $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a-b}{2}, \quad \Rightarrow a_n > \frac{a+b}{2} (*),$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N_2$ 时，有

$$|a_n - b| < \varepsilon = \frac{a-b}{2}, \quad \Rightarrow a_n < \frac{a+b}{2} (**),$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 则当 $n > N$ 时(*)与(**)矛盾. 得证.

有界性

定理2(有界性) 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1,$$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

令 $$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a| + 1\},$$

则对任意n, $|a_n| \le M$, 所以 $\{a_n\}$ 有界.

注: 有界是收敛的必要条件. 如 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但发散.

推论 若 $\{a_n\}$ 无界, 则 $\{a_n\}$ 发散.

不等式性质

定理3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ \ a > b,$

则 $\exists N \in \mathbb{N}_+,$ 当 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n.$

(严)大极限→(严)大数列

证 取 $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0,$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}_+,$ 当 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a-b}{2},\quad \Rightarrow a_n > \frac{a+b}{2}(*),$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}_+,$ 当 $n > N_2$ 时，有

$$|b_n - b| < \varepsilon = \frac{a-b}{2},\quad \Rightarrow b_n < \frac{a+b}{2}(**),$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 则当 $n > N$ 时，有 $a_n > \dfrac{a+b}{2} > b_n.$

保号性

推论1(保号性)　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad a>0,$

则 $\exists N\in\mathbb{N}_+,$ 当 $n>N$ 时，有 $a_n>\dfrac{a}{2}>0.$

对于**a < 0,** 类似有 $a_n<\dfrac{a}{2}<0.$

推论2　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$

且 $\exists N\in\mathbb{N}_+,$ 当 $n>N$ 时，有 $a_n\ge b_n,$　则 $a\ge b.$

这个结果对严格不等式不成立.

例　$a_n=\{1+\dfrac{1}{n}\},\quad b_n=\{1\}.$

追敛性与单调有界准则

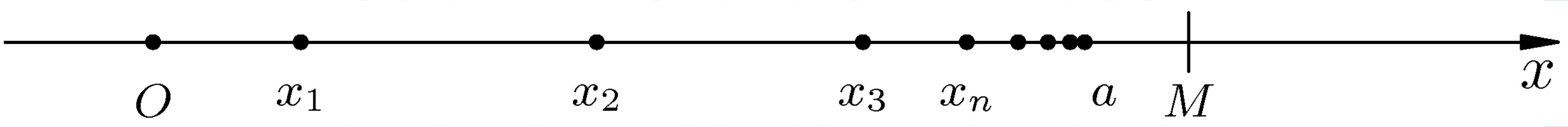
定理4 (追敛性) 设$\{a_n\},\{b_n\}$的极限都是a, 若 **$\{c_n\}$** 满足:

$\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时，有 $a_n\le c_n\le b_n$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a.$

定理5(单调有界准则) 单调有界数列必有极限,

当公理用.



例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 记 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n>1,\quad (n>1)$

$$n=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,\qquad 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

$$1<1+h_n=\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}})=1,$ 迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

同样可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C}=1.$

例7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

证 设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 二项式展开

$$a_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

极限举例 e

第三项起，a_n 对应项 < a_{n+1} 对应项, 且a_{n+1} 多一项

因此 $a_n < a_{n+1}$，即(严格)递增．又

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

故 $\{a_n\}$ 有界.

由"单调有界准则"知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在, 记为 e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2.71828182\cdots$$

对数 $\log_e x$ 称为自然对数，记为 $\ln x$.

极限的四则运算

定理6(四则运算) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0);$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \cdot a,$ k 是常数.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k$ k 是正整数.

例8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}\right)$;

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0+0=0.$

例9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9n-1}{3n^2+4}$;

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{9}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{9}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{3}.$

极限举例

例10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n}\dfrac{n+2}{n}\right)$;

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(3+\dfrac{1}{n})\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})=3.$

例11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}$;

解 原式 $=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(\dfrac{2}{3})^n}{1+(\dfrac{2}{3})^{n+1}}=\dfrac{1}{3}.$

极限举例

例12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

解 $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

例13 证明 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}, \cdots$ 收敛，并求其极限.

证 记 $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，则

(1) $\{x_n\}$ 单调递增，因为

$$x_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n+1\text{个根号}} > \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}} = x_n,$$

(2) 数学归纳法证有界，

(i) 当 $k=1$，有 $x_1 = \sqrt{2} < 2$，成立，

(ii) 假设 $k=n$ 时，成立 $x_n < 2$，

则当 $k=n+1$ 时，有 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2,$

故 $\{x_n\}$ 有界.

由“单调有界准则”知 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \quad \Rightarrow x_{n+1}^2=2+x_n,$$

两边取极限，$a^2=2+a,$ 解为 $a=-1, a=2.$

由 $x_n>0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2.$