一、 格林公式

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

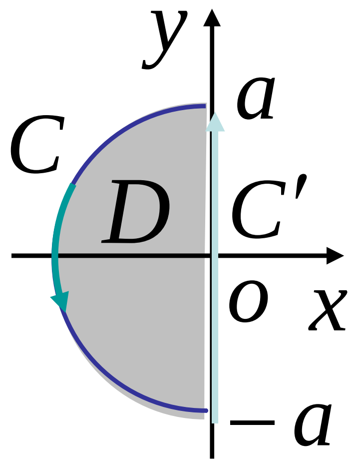
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （格林公式）

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

例1. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \underline{\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}\,\mathrm{d}x + [\underline{ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})}\,]\mathrm{d}y$$



解: 添加辅助线如图 ,利用格林公式 .

$$\text{原式} = \int_{C+C'} - \int_{C'}$$

$$= \iint_D \left[a + \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}} - \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}} \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$- \cancel{\int_{-a}^{a} (2y\ln a)\,\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^3$$

例2. 质点M 沿着以AB为直径的半圆, 从 $A(1,2)$ 运动到点$B(3, 4)$, 在此过程中受力 $\vec{F}$ 作用, $\vec{F}$ 的大小等于点 M 到原点的距离, 其方向垂直于OM, 且与y 轴正向夹角为锐角, 求变力 $\vec{F}$ 对质点M 所作的功. (90考研)

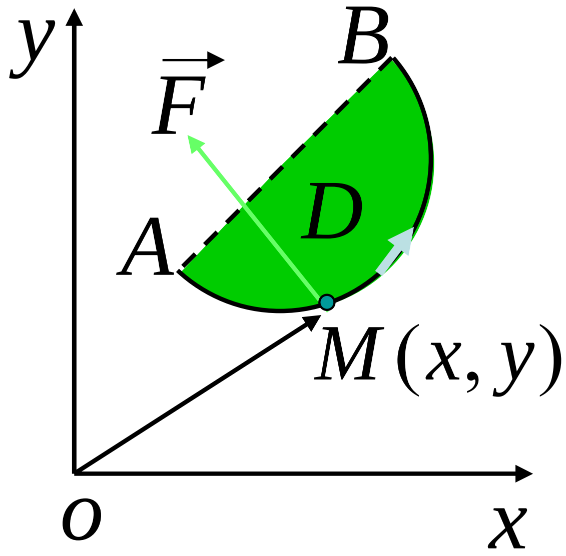
解: 由图知 $\vec{F}=(-y,x)$, 故所求功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\Big(\int_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}\Big)(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

$$=2\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_1^3[-(x+1)+x]\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi-2$$



$\overline{AB}$的方程

$$y=2+\frac{4-3}{3-1}(x-1)$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D 是单连通域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$

(2) 对D 中任一分段光滑曲线 L，曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关，只与起止点有关.

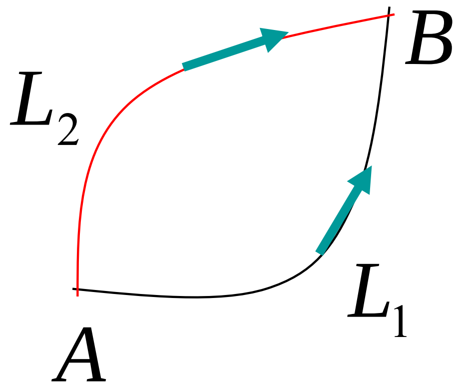
(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分，

即 $$\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为 D 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$

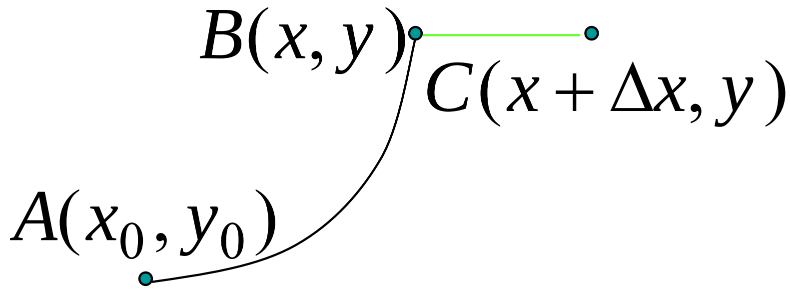
$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数



$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则 $$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$$

$$= \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 因此有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

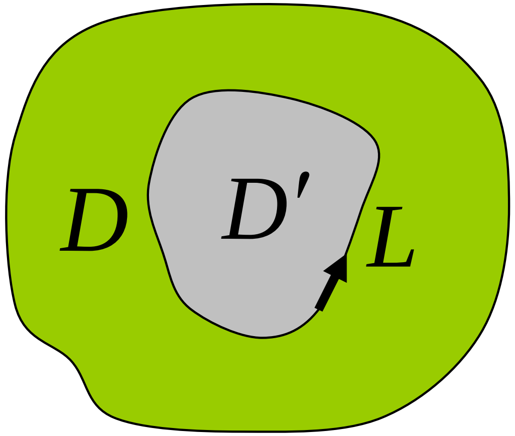
P, Q 在 D 内具有连续的偏导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为 $D' \subset D$ (如图), 因此在 D' 上



$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

利用**格林公式**, 得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0$$

证毕