第九章 重积分

1. 计算重积分的一般步骤是什么？

答：计算重积分一般可以遵循以下步骤。

(1) 画出积分区域 D 的草图，便于确定积分区域的类型，选择积分次序和确定定积分限；

(2) 若积分区域和被积函数具有对称性时，将重积分化简.

(3) 选择坐标系：坐标系的选取既与积分域的形状又与被积函数有关，对于二重积分，当积分域为圆域、环域、扇域或与圆域有关的区域，而被积函数为 $f\left(x^2+y^2\right)$， $f\left(xy\right)$， $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$等形式时，宜选择极坐标系，其余可考虑选直角坐标系；对于三重积分，当积分区域在坐标面上的投影是圆形区域或与圆形区域有关的区域，而被积函数中含有 x^2+y^2 项时，宜选用柱坐标；若 Ω 的边界曲面与球面有关，而被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 项，宜选用球面坐标，其余可选用直角坐标。

(4) 选择积分次序，确定单积分的上下限。选择积分次序的原则首先是要使累次积分中每个积分都能计算出来，其次使积分区域分得尽量简单。在极坐标系中，一般选“先 r 后 θ”的积分次序。在柱面坐标系中一般选“先 z 再 r 最后 θ”的积分次序，在球面坐标系中一般选“先 z 再 φ 最后 θ”的积分次序。化为累次积分后，最后所求的定积分的上下限必须为常数；先求定积分的积分上下限为后求定积分的积分变量的函数，或为常数；下限小于上限。

(5)计算累次积分。

2．交换二次积分的积分次序要注意什么？

答：通常是先根据给定的二次积分写出相应的二重积分的积分区域的表达式（联立不等式组），根据积分域的边界线画出积分域的草图，再按照所得的积分区域写出另一个次序的二次积分。

交换二次积分的顺序，需要注意两次定积分的上下限。求定积分时，积分下限不一定小于上限。而在计算重积分时，由重积分化成的二次积分，其上限一定不能小于下限，这是有重积分的定义决定的。所以在交换积分次序时，当给定的二次积分出现下限大于上限时，应该将上下限顺序颠倒过来，同时改变二次积分的符号，然后再交换积分次序。请看下例。

例 交换二次积分的顺序:$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$.

解 注意，在二次积分和二重积分的相互转换中，首先应该保证二次积分中的定积分上限要不小于下限。否则应先颠倒积分的上下限，同时改变二次积分的符号，然后再化为二重积分。

本题中，不能保证当$0\le x\le 2\pi$时，内层积分上限$\sin x$永远不小于下限。故应将 D 分为两部分分别去做，以保证上限都不小于下限。根据以上分析，有

$$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f\left(x,y\right)dy$$
$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}f\left(x,y\right)dy+\int_{\pi}^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f\left(x,y\right)dy$$
$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}f\left(x,y\right)dy-\int_{\pi}^{2\pi}dx\int_{\sin x}^{0}f\left(x,y\right)dy$$
$$=\iint\limits_{D_1}f\left(x,y\right)dxdy-\iint\limits_{D_2}f\left(x,y\right)dxdy$$
$$=\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f\left(x,y\right)dx-\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f\left(x,y\right)dx.$$

3. 在什么情况下,二重积分等于两个独立的定积分之积?

在直角坐标系下，当积分区域为两组对边分别平行于两坐标轴的矩形区域，且被积函数可分解为两个单独变量的函数之积，即 D 为$\begin{cases}c\le y\le d\\a\le x\le b\end{cases}$, $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\bullet f_2\left(y\right)$时，二重积分就等于二个完全独立的定积分的乘积：

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_{D_1}f_1\left(x\right)\bullet f_2\left(y\right)dxdy$$
$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy$$
$$=\left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\bullet\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]$$

如果在极坐标系下，当积分区域由不等式组 $a\le r\le b,\alpha\le\theta\le\beta$ 给出，且 $f\left(r,\theta\right)=f_1\left(r\right)\bullet f_2\left(\theta\right)$时，有

$$\iint\limits_{D}f_1\left(r\right)\bullet f_2\left(\theta\right)drd\theta=\left[\int_{\alpha}^{\beta}f_2(\theta)d\theta\right]\bullet\left[\int_a^b f_1(r)rdr\right]$$ 。

4. 如何利用积分区域和函数的特点化简二重积分的计算?

答：利用对称性可以简化重积分的计算，它与定积分中利用函数奇偶性来简化计算的原理是一样的。由于重积分的积分区域和被积函数都比较复杂，在利用性质时要同时考虑积分区域和被积函数两个方面的对称性。归纳起来主要有下面几种情况：

(1) 若积分区域D关于y轴对称，被y轴分为对称的左、右两部分D_1和D_2，那么

①当 $f\left(-x,y\right)=f\left(x,y\right)$（关于变量$x$是偶函数）时,

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}f\left(x,y\right)d\sigma=2\iint\limits_{D_2}f\left(x,y\right)d\sigma.$$

②当 $f\left(-x,y\right)=-f\left(x,y\right)$（关于变量$x$是奇函数）时,

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)d\sigma=0.$$

(2) 若 D 关于 x 轴对称，也有类似的结论。

(3) 如果 D 关于原点对称，对 $(x,y)\in D$，

①若 $f(-x,-y)=-f(x,y)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$

②若 $f(-x,-y)=f(x,y)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

其中, $D_1+D_2=D$，且 D_1 和 D_2 关于原点对称。

(4) 若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$

特别地 $\iint\limits_D \varphi(x)d\sigma=\iint\limits_D \varphi(y)d\sigma$。

5. 下面是重积分计算时几个容易犯的错误：

（1）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$，其中积分区域 D 为 $|x|+|y|\le 1$。

误 利用积分区域的对称性，

令 $D_1:|x|+|y|\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,$ 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{x+y}dxdy&=4\iint\limits_{D_1} e^{x+y}dxdy\\&=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{x+y}dy\\&=4\int_0^1 e^x dx\int_0^{1-x} e^y dy\\&=4\int_0^1\left(e-e^x\right)dx\\&=4.\end{aligned}$$

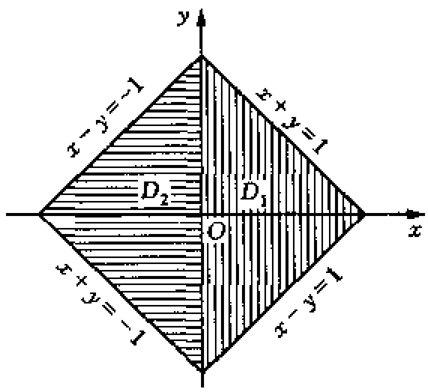

图 9-24

错误分析 上面解法错在简化二重积分的计算时，只考虑了积分区域 D 的特点：关于 x 轴、y 轴都对称，忽略了被积函数应满足 $f(-x,y)=f(x,y)$ 且 $f(x,-y)=f(x,y)$，即被积函数 $f(x,y)$ 关于变量 x,y 都要为偶函数，因此造成了计算错误。

正 设 $D=D_1+D_2$ (如图 9-24 所示),

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)dxdy&=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy\\&=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-x-1}^{1+x} e^{x+y}dy\\&=\int_0^1\left(e-e^{2x-1}\right)dx+\int_{-1}^0\left(e^{2x+1}-e^{-x}\right)dx\\&=e-e^{-1}.\end{aligned}$$

(2) 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$，其中$D$是由$x^2+y^2=Rx$所围成的区域。

误 采用极坐标计算：

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy&=\iint\limits_D \sqrt{R^2-r^2}\bullet rdrd\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\bullet rdr\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}R^3-\frac{1}{3}R^3\sin^3\theta\right]d\theta\\&=\frac{1}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

错误分析 上述解法错在忽略了函数$\sin\theta$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上要变号，即在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$上$\sin\theta<0$，在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上,$\sin\theta\geq 0$。所以

$$\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}=\frac{R^3}{3}\left(1-\left|\sin\theta\right|^3\right)=\begin{cases}\frac{R^3}{3}\left(1+\sin^3\theta\right),\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\\\frac{R^3}{3}\left(1-\sin^3\theta\right),\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

正 用极坐标计算，有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy&=\iint\limits_D \sqrt{R^2-r^2}\bullet rdrd\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\bullet rdr\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}R^3-\frac{1}{3}R^3\left|\sin\theta\right|^3\right]d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta\\&=\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

(3) 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z^3dxdydz$，其中积分区域$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$。

误　采用“先二后一”方法计算：

$$\iiint_{\Omega} z^3 dxdydz = \int_0^{2R} dz \iint_{D_z} z^3 dxdy \text{。}$$

而 $D_z : x^2 + y^2 \le R^2$，因此

$$\iiint_{\Omega} z^3 dxdydz = \int_0^{2R} z^3 \cdot \pi R^2 dz = \pi R^2 \int_0^{2R} z^3 dz = 4\pi R^6 \text{。}$$

错误分析　此题解法的错误在于用“先二后一”方法计算时，把 D_z 当成 D_{xy} 进行计算了. 实际上, 前者表示纵坐标为 z 的平面 $z = z$ 截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域，后者表示空间闭区域 Ω 在平面 xOy 上的投影区域。对本题来说，

$$D_Z : x^2 + y^2 \le 2Rz - z^2 \text{，} \quad D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2 \text{。}$$

正　采用“先二后一”方法计算：

$$\iiint_{\Omega} z^3 dxdydz = \int_0^{2R} dz \iint_{D_z} z^3 dxdy = \int_0^{2R} z^3 dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^{2R} z^3 S(z) dz .$$

其中 $S(z)$ 表示 D_z（$D_z : x^2 + y^2 \le 2Rz - z^2$）的面积。于是

$$\int_0^{2R} z^3 S(z) dz = \int_0^{2R} z^3 \pi \left(2Rz - z^2\right) dz = \frac{32}{15} \pi R^6 \text{。}$$