一、 求下列数列和函数的极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n);$

解: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 49}$;

解： $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 49} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{(2x+1)(x-7)}{(x+7)(x-7)}$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{2x+1}{x+7} = \frac{15}{14}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$;

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2^x(\ln 2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln 2)^3}=0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{2^x}+\dfrac{x^2}{2^x}+\dfrac{1}{2^x}}{1+\dfrac{x^3}{2^x}}=0,$$

$|\sin x+\cos x|\le 2,$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$;

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{5}}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5}(1+x)^{\frac{3}{5}-1}}{1}=\frac{3}{5}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解： $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{\csc^2 x}{\cot x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x} = -1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$.

一、 求下列函数的导数或微分:

1. $y = a^x + x^a + a^a$， 求 $y'$;

解： $y' = a^x \ln a + ax^{a-1}.$

2. $y = e^{\pi - 3x} \cos 3x$， 求 $dy|_{x=\pi/3}$;

解：$y' = e^{\pi-3x}(-3)\cos 3x + e^{\pi-3x}(-\sin 3x)3$

$$= -3e^{\pi-3x}(\cos 3x + \sin 3x).$$

$$y'(\frac{\pi}{3}) = -3e^{\pi - 3\frac{\pi}{3}}(\cos\pi + \sin\pi) = 3,$$

所以 $dy|_{x=\pi/3} = 3dx.$

3. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)$ 确定，求 $y'$；

解：
$$\frac{\dfrac{y'x-y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2},$$

$$y'x-y=2x+2yy',$$

$$y'(x-2y)=2x+y,$$

所以
$$y'=\frac{2x+y}{x-2y}.$$

4. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^{t}, \\ y=3e^{-t} \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$;

解:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3e^{-t}}{2e^{t}}=-\frac{3}{2}e^{-2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{3}{2}e^{-2t}(-2)}{2e^{t}}=\frac{3}{2}e^{-3t}.$$

5. $y=\dfrac{x^3}{1-x}$, 求 $y^{(100)}$.

解: $y=\dfrac{x^3}{1-x}=\dfrac{x^3-1+1}{1-x}=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$,

$$y^{(100)}=\left(-2x-1+\frac{1}{(1-x)^2}\right)^{(99)}=\left(-2+\frac{2}{(1-x)^3}\right)^{(98)}$$

$$=\left(\frac{3!}{(1-x)^4}\right)^{(97)}=\cdots=100!(1-x)^{-101}.$$

三、函数导数的应用.

**1.** 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$;

证 令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$,

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0\ (当x>0),$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递减.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{2}=0,$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$, 即 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

2. 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty,$ 所以 $x=-1$ 是一条渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1,$$

所以 $y=x-1$ 是另一条渐近线.

**3.** 求 $f(x)=(x^2+3x-3)e^{-x}$ 在 $[-4,+\infty)$ 内的最大值和最小值.

解 $f'(x)=(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x-3)e^{-x}$

$$=-(x^2+x-6)e^{-x}=-(x-2)(x+3)e^{-x},$$

$x_1=-3, x_2=2$ 为驻点.

$$f(-4)=e^4,\quad f(-3)=-3e^3,\quad f(2)=7e^{-2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-3}{e^x}=0.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-4,+\infty)$ 内的最大值为 $f(-4)=e^4$,

最小值为 $f(-3)=-3e^3$.

四、求常数 $a,b,$ 使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x^2+b, & x>0\end{cases}$

在 $x=0$ 处连续.

解 $$\lim_{x\to0^{-1}} f(x)=\lim_{x\to0^{-1}}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^{-1}}\frac{\dfrac{2}{1+2x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}$$

$$=2=f(0)=a,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+b)=b,$$

所以 $a=b=2.$

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$f(0)=1, f(1)=e^{-1}$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

证明：令 $F(x)=f(x)-e^{-x}$,

它在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=0=F(1),$$

由罗尔中值定理知：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

六、已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 $y$ 轴上的截距为 $-1$,

**(1)** 求 $f'(1)$, **(2)** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+f(1+\frac{1}{n}))^n$.

解 **(1)** 曲线在 $(1,0)$ 处的切线为 $y-0=f'(1)(x-1)$.

所以 $-f'(1)=-1$ 即 $f'(1)=1$.

**(2)** 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，故连续，

$$\lim_{n\to\infty} f(1+\frac{1}{n})=f(1)=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+f(1+\frac{1}{n}))^n=\lim_{n\to\infty}(1+f(1+\frac{1}{n}))^{\frac{1}{f(1+\frac{1}{n})}f(1+\frac{1}{n})n}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{1/n}}=e^{f'(1)}=e.$$