第六章

定积分的应用

利用微分法解决:

定积分在几何上的应用

定积分在物理上的应用

第一节 定积分的微元法

一、什么问题可以用定积分解决？

二、如何应用定积分解决问题？

一、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间$[a , b]$上的某分布 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a , b]$ 具有可加性，即可通过

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

表示为 $U = \lim\limits_{\|\Delta x\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|\Delta x\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

二、如何应用定积分解决问题？

第一步 利用“化整为零，以常代变”求出局部量的近似值 ——— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“积零为整，无限累加”求出整体量的精确值 ——— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法称为**微元法.**

元素的几何形状常取为: 条, 带, 段, 环, 扇, 片, 壳 等

第二节

定积分在几何学上的应用

一、 平面图形的面积

二、已知平行截面面积函数的立体体积

三、 平面曲线的弧长

四、 旋转体的侧面积

第二节

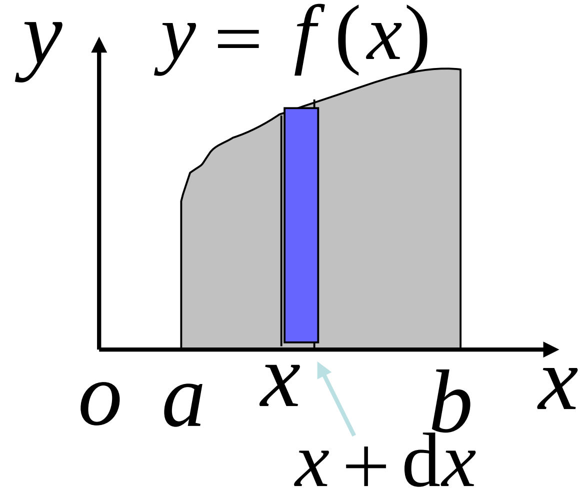
平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x)\,(\geq 0)$ 与直线 $x = a,\, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A, 则

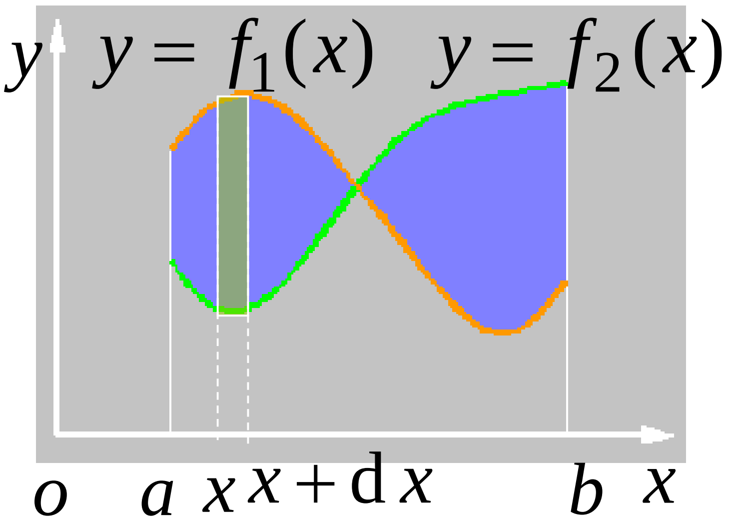
$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

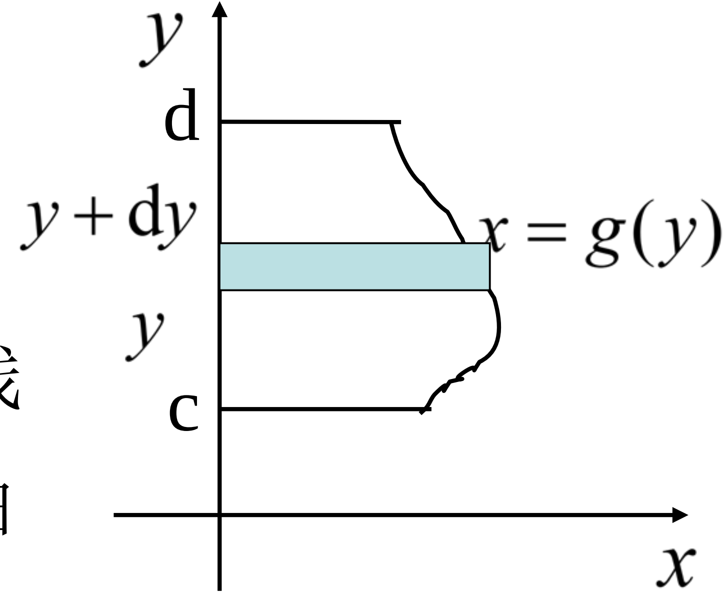


右下图所示图形面积为

$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



设曲线 $x = g(y)\,(\geq 0)$ 与直线 $y = c,\ y = d\ (c < d)$ 及 y 轴所围曲边梯形面积为 A, 则

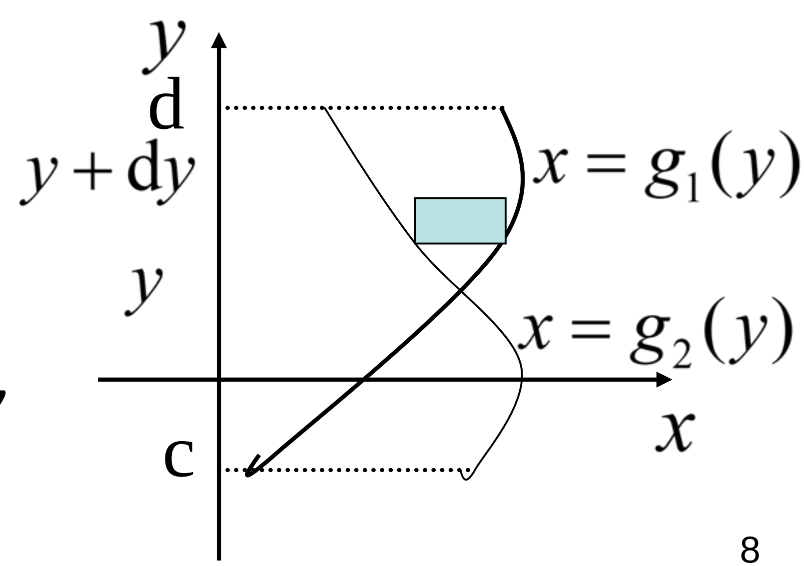


$$\mathrm{d}A = g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$A = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$$

右下图所示图形面积为

$$A = \int_c^d \left| g_1(y) - g_2(y) \right| \mathrm{d}y$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积 .

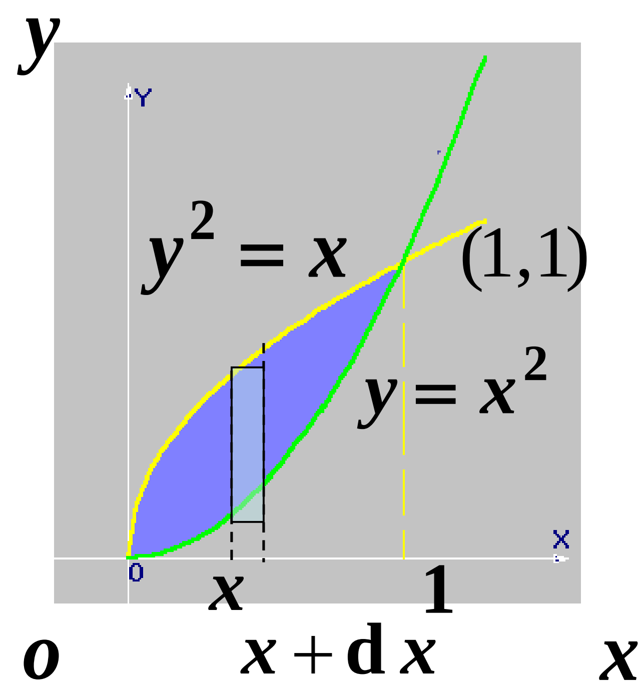
解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0, 0)$, $(1, 1)$

$$\therefore \quad A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3\right]_0^1$$

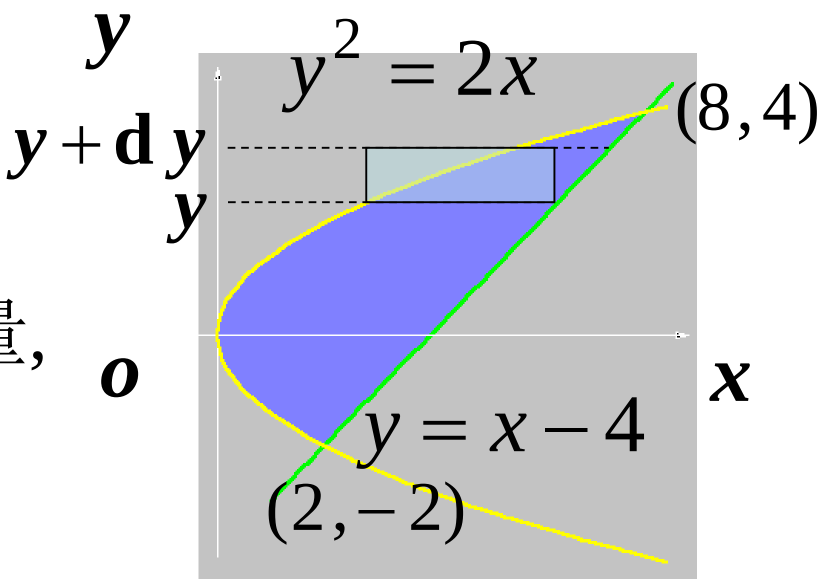
$$= \frac{1}{3}$$



例2. 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点

$(2, -2), (8, 4)$



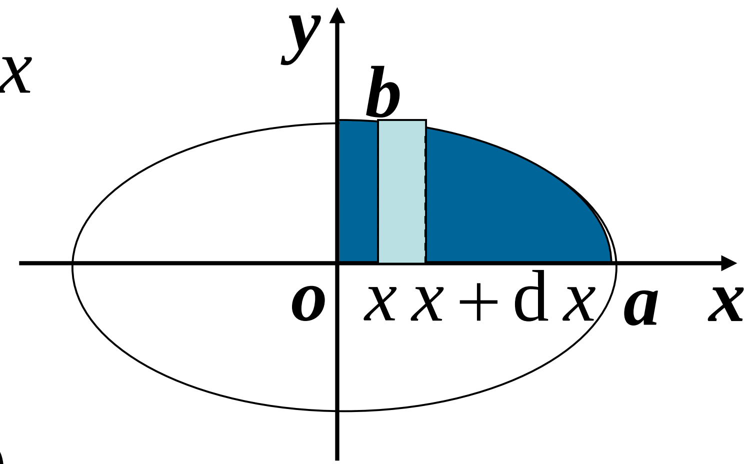
为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

$$\therefore \quad A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \tfrac{1}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} y^2 + 4y - \tfrac{1}{6} y^3 \right]_{-2}^{4} = 18$$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性，有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$



$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a = b$ 时得圆面积公式

一般地，当曲边梯形的曲边L由参数方程

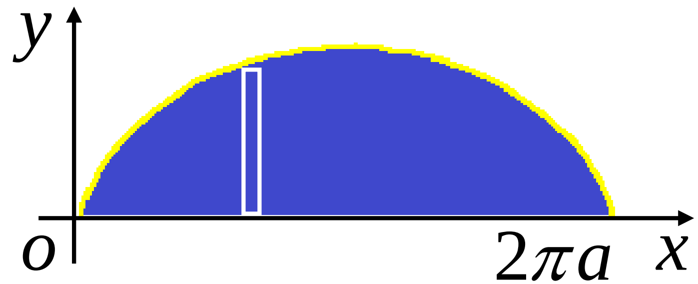
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，求由曲线L与直线$x = a, x = b$和x轴所围成的曲边梯形的面积A.

若记$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, 设$\varphi$单调, 则所求面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \left|\psi(t)\right| \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

例4. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .



解: $A=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}\,t$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}\,t$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u \qquad (令\ u=\frac{t}{2})$$

$$=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u$$

$$=16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2$$

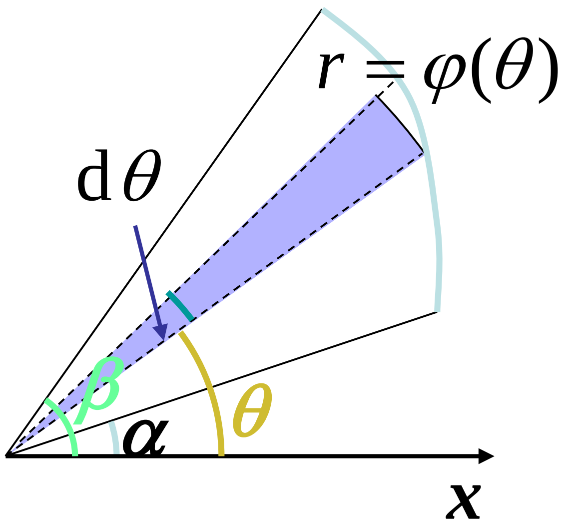
2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha,\beta], \varphi(\theta) \ge 0$，求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$



所求曲边扇形的面积为

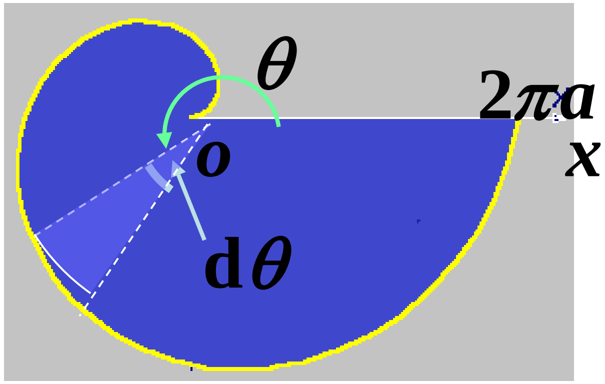
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

例5. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a > 0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .

解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

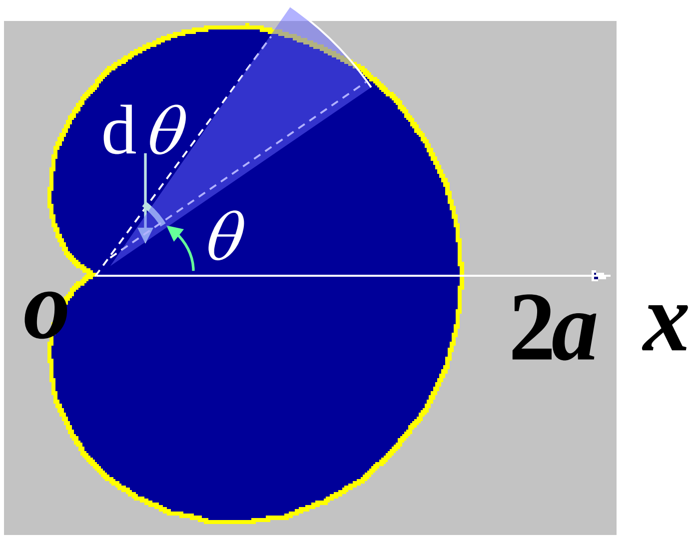


点击图片任意处播放开始或暂停

例6. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$ 所围图形的面积 .

解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta\,)^2 \,\mathrm{d}\theta$

(利用对称性)



$$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

例7. 计算心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r=a$ 所围图形的面积 .

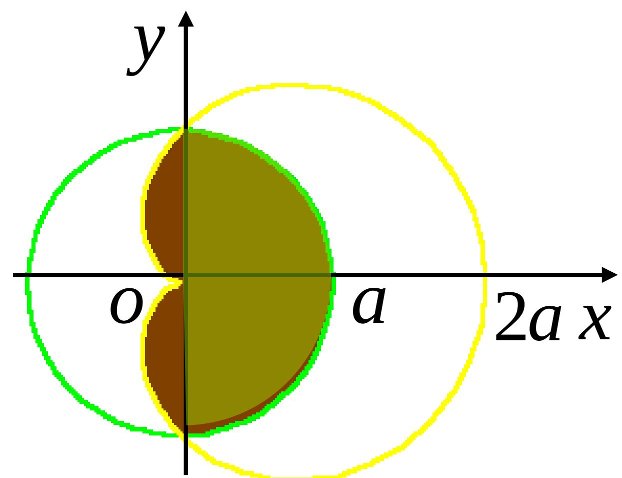
解: 利用对称性，所求面积

$$A=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2(\frac{3}{4}\pi-2)$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^2-2a^2$$



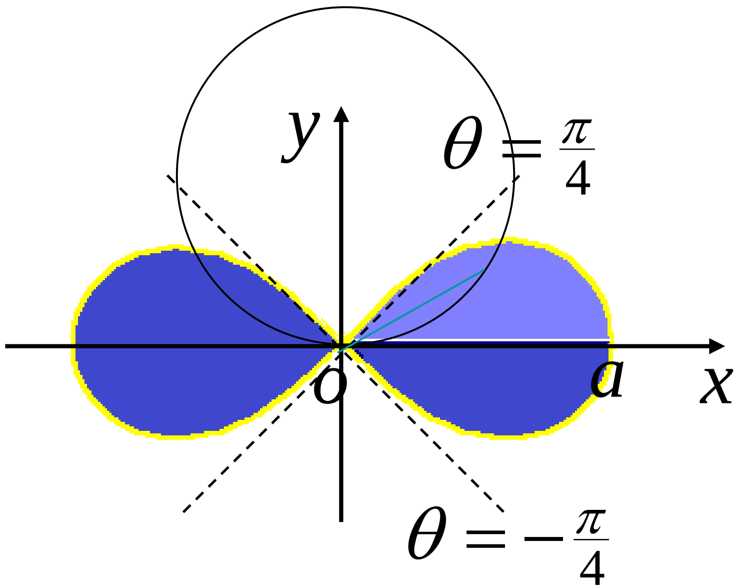
例8. 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性 , 则所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \,\mathrm{d}(2\theta)$$

$$= a^2 \big[\sin 2\theta\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



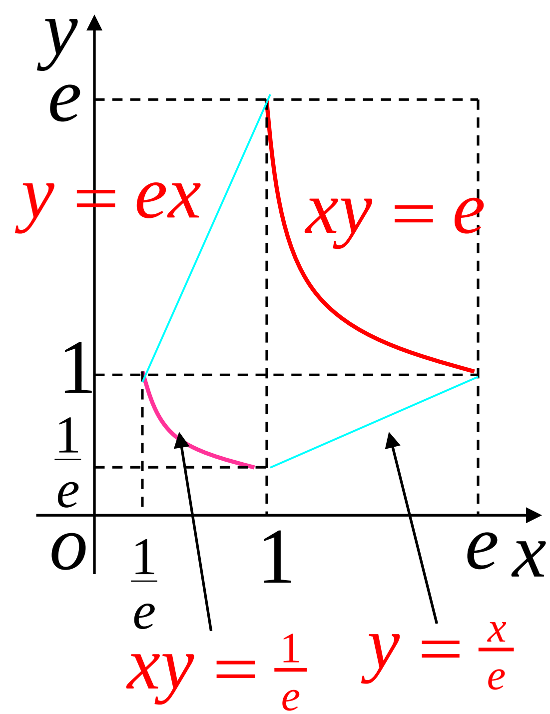
思考: 用定积分表示该双纽线与圆 $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ 所围公共部分的面积 .

答案: $A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right]$

思考题 1. 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围图形的面积.

解： 显然 $|\ln x|\le 1,\ |\ln y|\le 1$

$$\Longrightarrow\quad e^{-1}\le x\le e,\ e^{-1}\le y\le e$$



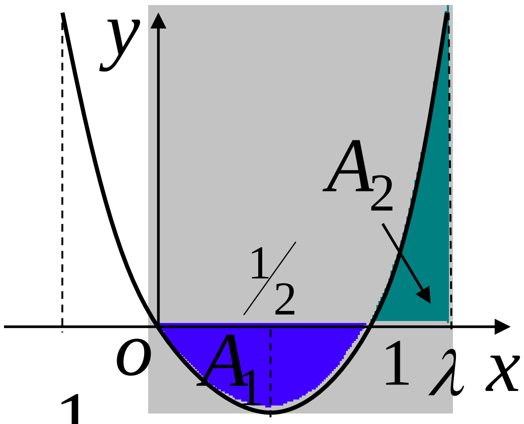
又 $|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & 1\le x\le e\\ -\ln x, & e^{-1}\le x\le 1\end{cases}$

$|\ln y|=\begin{cases}\ln y, & 1\le y\le e\\ -\ln y, & e^{-1}\le y\le 1\end{cases}$

故在区域 $\begin{cases}e^{-1}\le x\le 1\\ e^{-1}\le y\le 1\end{cases}$ 中曲线为 $xy=\dfrac{1}{e}$, 同理其它.

面积为 $$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(ex-\frac{1}{ex}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\left(\frac{e}{x}-\frac{x}{e}\right)\mathrm{d}x=e-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$$

2. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.



解: $y=x(x-1)$ 与 x 轴所围面积

$$A_1=\int_0^1 -x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$\lambda\geq 0$时,

$$A_2=\int_1^\lambda x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{6}$$

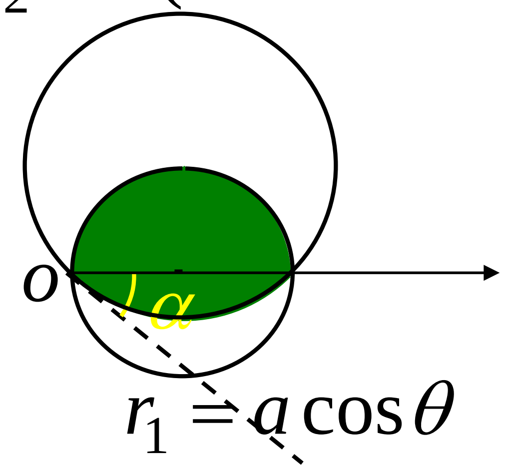
由 $A_1=A_2$, 得 $\lambda^2(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{2})=0$, 故

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\quad \lambda_2=0$$

由图形的对称性 , $\lambda_3=-\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$ 也合于所求.

3. 求曲线 $r_1 = a\cos\theta$ 与 $r_2 = a(\cos\theta + \sin\theta)$ 所围成图形的公共部分的面积 .

解: 令 $r_2(\theta) = 0$, 得 $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$



所围区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} [r_2(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\cos\theta + \sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{8}a^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{a^2(\pi - 1)}{4}$$