华东师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学试题　　共 3 页

考试科目代码及名称： 360 高等数学(A)

招生专业(领域)名称：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号).

一、填空题(本题 (共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$________________.

2. 设 $f(x)=\left(x^{2011}-1\right)g(x)$，$g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $g(1)=1$．则 $f'(1)=$________________.

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$ 在点 $M(1,1,\sqrt{2})$ 处的法平面方程是 ________________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\ \left(-\infty<x<+\infty\right)$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx\ (n=0,1,2,\cdots)$．则 $S(-\dfrac{5}{2})=$________________.

5. 微分方程 $xy'=y(\ln y-\ln x)$ 的通解是________________.

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$．则

$(E+B)^{-1}=$________________.

二、选择题 (本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

7. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的渐近线一共有 (　)

(A) 0 条；　(B) 1 条；　(C) 2 条；　(D) 3 条.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=1$．则 (　)

(A) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点；　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点；　(D) 不能断定 $x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点.

9．设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,则在点 $(0,0)$ 处（　）

(A) 连续，但偏导数不存在；　　(B) 偏导数存在，但是不可微；

(C) 可微；　　(D) 偏导数存在，且偏导数在(0,0)点连续.

10．设 $a_n=\cos n\pi\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$．下列结论中正确的是（　）

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 都发散；　　(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 都收敛；

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 发散；　　(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 收敛.

11．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$．令

$$I_1=\int_a^b f(x)dx,\qquad I_2=(b-a)f(b),\qquad I_3=\frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right].$$

则有(　)

(A) $I_1<I_2<I_3$；　　(B) $I_3<I_2<I_1$；

(C) $I_3<I_1<I_2$；　　(D) $I_2<I_1<I_3$.

12．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵．则（　）

(A) 当 $m>n$ 时必有行列式 $|AB|=0$；　　(B) 当 $m>n$ 时必有行列式 $|AB|\neq 0$；

(C) 当 $m<n$ 时必有行列式 $|AB|=0$；　　(D) 当 $m<n$ 时必有行列式 $|AB|\neq 0$.

三、解答题 (本题共 9 小题，满分 102 分)

13．(10 分) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\dfrac{\pi\sqrt{x}}{2}$ 不存在.

14．(10 分) 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

15．(10 分) 在平面 $2x+y-3z+2=0$ 和平面 $5x+5y-4z+3=0$ 所确定的平面束内．求两个互相垂直的平面，其中一个平面经过点(4,-3,1).

16．(12 分) 求 $I=\int_{\overset{\frown}{AOB}}\left(12xy+e^y\right)dx-\left(\cos y-xe^y\right)dy$，式中 $\overset{\frown}{AOB}$ 为由点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $O(0,0)$，再沿直线 $y=0$ 到点 $B(2,0)$ 的路径.

17．(12 分) 将 $f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\ 2^{2n+1}}$ 的和.

18．(12 分) 设 $f(u)$ 具有连续导数，试计算

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^2\right] dzdx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3\right] dxdy,$$

其中Σ为$x>0$的锥面$y^2+z^2-x^2=0$与球面$x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=4$所围立体表面外侧.

19． (12 分) 设函数$y=y(x)\ (x\geq 0)$二阶可导，且$y'(x)>0,\ y(0)=1$．过曲线$y=y(x)$上任一点$P(x,y)$作该曲线的切线及x轴的垂线，上述两直线与x轴所围成的三角形面积记为S_1，区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2，并设$2S_1-S_2$恒为 1．求此曲线$y=y(x)$的方程.

20．(12 分) 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ 2x_1+ax_2+5x_3=0 \\ 4x_1+(a+3)x_3=b+8 \end{cases}$ 有两个不同的解.

(1) 证明方程组系数矩阵A的秩$r(A)=2$；

(2) 求a、b的值，并求出方程组的通解.

21．(12 分) 设3阶方阵A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，它们对应的特征向量分别为

$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,4)^T$，$\alpha_3=(1,3,9)^T$．又向量$\beta=(1,1,3)^T$．

(1) 求矩阵A；

(2) 将向量β用α_1、α_2、α_3线性表示；

(3) 求$(A^*)^{20}\beta$，其中A^*为A的伴随矩阵.