第三章 一元积分学

第二节 定积分计算及其他

一：定积分计算。

定积分与不定积分有密切联系（牛顿－莱布尼兹定理揭示了其联系）。但两者是两个完全不同的概念，有着很大的区别，从最后结果上看前者是一个数值而后者是一簇函数，而且定积分有明显的几何、物理等方面的实际意义，其内容非常丰富。我们首先要熟悉定积分的概念、性质、几何意义。定积分的计算方法也可分为基本方法和特殊方法。基本方法涉及牛－莱公式、换元法、分部法，其基本步骤和思路与不定积分有很多相似的地方，比如恒等变形、一些常用的凑微分、换元和分部积分的典型类型和原则。但与不定积分有很多不同的地方，比如定积分的结果与积分表达式中所用的符号（积分变量）无关而不定积分的结果必须是一簇以原积分变量为自变量的函数；定积分在换元时除了要换积分表达式同时还要换积分上、下限，定积分换元一定要符合换元公式的条件（否则就可能得出错误的结果)；周期函数、分段函数、奇偶函数等函数的定积分有其自身的特点，等等。

例1． 求下列定积分

(1) $\int_0^a \arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$ (2) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^{10}}})\sqrt{1+\cos 2x}dx$

解(1)分析:思路一：被积函数中有比较复杂的因子$\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$不好直接处理，可试一下将此因子换成一个变量：$t=\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$。思路二：被积函数可视为两类不同函数：幂函数$x^0=1$和反三角函数$\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$的积，可试一试分部法，按前面介绍的用分部法的原则应该是1与dx结合凑出$dv=dx$。思路三：将$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$变形为$\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}$，那么容易想到作三角代换：$x=a\cos t$．思路四：被积表达式中有$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，可试一试换元$t=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$．事实上以上几种思路都可行，下面给出按前两种思路的解答过程。

方法一：令$t=\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，则$x=\dfrac{a(1-\tan^2 t)}{1+\tan^2 t}=a\cos 2t$， $x=0$时$t=\dfrac{\pi}{4}$， $x=a$时$t=0$

$$\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 td(a\cos 2t)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} td(a\cos 2t)=-at\cos 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos 2t dt=\frac{a}{2}$$

方法二：
$$\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=x\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\Big|_0^a+\int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^a \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|_0^a=\frac{a}{2}$$

（２）分析：首先可以看出积分区间是关于原点对称的区间，此时应先看一看被积函数有无奇偶性，本题中被积函数无奇偶性，但是是奇函数与偶函数的和。下面给出解答过程

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+\frac{x^3}{\sqrt{1+x^{10}}})\sqrt{1+\cos 2x}dx=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|dx=4\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx)=8\sqrt{2}$$

注：本题的计算比较简单，但计算过程中涉及到定积分计算中的几个要注意的方面：（１）奇偶函数的积分的特点，（２）周期函数积分的特点，本题中有一步：$2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|dx$，这是因为$|\cos x|$是周期为$\pi$的周期函数。关于周期函数的积分有两个命题可以用：若 $f(x)$ 是周期为T 的可积的周期函数，则（i）$\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$， (ii) $\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$,(会证明吗？)

(3)本题还出现了$\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$,在不定积分中当出现$\sqrt{g^2(x)}$时可以按$\sqrt{g^2(x)}=g(x)$计算下去（虽不严谨，但不算错）．但在定积分中要特别小心,我们都按$\sqrt{g^2(x)}=|g(x)|$往下计算,当出现绝对值$|g(x)|$时我们要根据$g(x)$的正负情况将积分区间分段处理．绝对值函数实际上属于分段函数，对于分段函数（$\min(f(x),g(x)),\max(f(x),g(x))$也属于分段函数）都需分段处理．

例２．求下列定积分：

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$　　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

解：（１）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx==\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}xde^{x+\frac{1}{x}}$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$$

（２）作换元　$x=\pi-t$，则

$$I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}(-dt)=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

从而　$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}d(\cos t)=\frac{\pi}{2}(\pi-2)$

注：不定积分中介绍的裂项相消法、循环回归法等方法对定积分也适用．不定积分中一般通过分部积分达到目的，但在定积分中既可通过分部积分达到“回归”的目的也可通过换元达到“回归”的目的，本例的（2）就是如此（在教材中有类似的题）

利用对称性计算定积分

我们知道对于积分$\int_{-a}^{a} f(x)dx$，当$f(x)$具有奇偶性时可以简化计算．从几何上看这里有几个特点（1）积分区间的中点为$x=0$，（2）$f(x)$为偶函数时，其图象关于直线$x=0$对称，（3）$f(x)$为奇函数时，其图象关于原点$(0,0)$对称．我们把以上特点和方法推广至一般的积分$\int_a^b f(x)dx$，先介绍两个命题，其证明留在后面给出．

命题 1：$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$

命题 2：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}[\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

由此得出几个有用的推论：

推论 1：$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$，$\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^a[f(x)+f(a-x)]dx$

推论 2：若$f(x)$的图象关于点$(\frac{a+b}{2},0)$对称，即$f(\frac{a+b}{2}-x)=-f(\frac{a+b}{2}+x)\,(x\in[0,\frac{b-a}{2}])$，或$f(a+b-x)=-f(x)\,(x\in[a,b])$，则$\int_a^b f(x)dx=0$．（比如$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx=0$）．

推论 3：若$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称，即$f(\frac{a+b}{2}-x)=f(\frac{a+b}{2}+x)\,(x\in[0,\frac{b-a}{2}])$，或$f(a+b-x)=f(x)\,(x\in[a,b])$，则$\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx=2\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-x)dx$（比如$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$）．

推论 4：如果$f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)=l\,(x\in[0,\frac{b-a}{2}])$或$f(a+b-x)+f(x)=l\,(x\in[a,b])$，则$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}l$．（比如对于积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$，其中$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$，由于$f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=1$，故$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$）

例 3．求下列定积分：

(1)$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$　　(2)$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$　　　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx$

解:(1)分析:这里积分上、下限的和为$\frac{\pi}{2}$,而且被积函数中有$\cos x$,试一试上面介绍的命题.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}[\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}+\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)2x}]dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x})dx=\frac{\ln 2}{\pi}$$

(2)分析:被积函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(\pi-x)$,故$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx=0$

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln\sin x+\ln\sin(\frac{\pi}{2}-x)]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin 2x-\ln 2)dx$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2xdx=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin tdt=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt$$

$$=\frac{-\pi\ln 2}{4}+\frac{I}{2}$$

所以$I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$

注：本题用了推论 1，也用了对称性：$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$，中间有一步换元：$t=2x$，最后达到循环回归的目的。本题也可以先用命题 1。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-2x)dx-\frac{\pi}{4}\ln 2$$

令$\frac{\pi}{2}-2x=t$，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=\frac{1}{2}I$

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}+\frac{1}{1+\tan^{\alpha}(\frac{\pi}{2}-x)}]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{4}$

注意：以上这些方法与积分区间有密切联系。
定积分计算还可以利用二重积分、递推等方法。
例 4．求下列定积分：

（1）$\int_0^1 \frac{(x^b - x^a)\sin(\ln x)}{\ln x}dx \quad (b > a > 0)$，

（2）设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f'(x)=\frac{\sin x}{\pi - x}$, 求 $\int_0^{\pi} f(x)dx$。

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nxdx$，（$n$ 为正整数）

解：（1）由于 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$

$$\int_0^1 \frac{(x^b - x^a)\sin(\ln x)}{\ln x}dx = \int_0^1 (\sin\ln x \int_a^b x^y dy)dx = \int_a^b (\int_0^1 x^y \sin(\ln x)dx)dy$$

令 $x = e^t$，则 $\int_0^1 x^y \sin\ln xdx = \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t}\sin tdt = -\frac{1}{1+(y+1)^2}$

$$\int_0^1 \frac{(x^b - x^a)\sin\ln x}{\ln x}dx = \int_a^b \frac{-1}{1+(y+1)^2}dy = \arctan(a+1) - \arctan(b+1)$$

（2）由题设知 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dtdx = \int_0^{\pi}\int_t^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t}dxdt = \int_0^{\pi}\sin tdt = 2$$

注：本题也可用分部法去解：$\int_0^{\pi} f(x)dx = xf(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx$，下面的过程由学生完成。化为二重积分计算的两关键步骤：（1）将被积函数或其中一部分表示为积分，（2）交换积分次序

（3）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nxdx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xd\sin nx = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nxd\cos^n x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin nx\sin xdx$$

$$2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x\cos nx + \cos^{n-1} x\sin nx\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\cos x\cos nx + \sin x\sin nx)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos(n-1)xdx = I_{n-1}$$

于是得 $I_n = \frac{1}{2}I_{n-1}$，又 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos xdx = \frac{\pi}{4}$，故 $I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

例 5.

（1）设 $f(x)$ 连续,，且 $F'(x) = f(x), F(0)=1, F(2)=3, F'(2)=-2,$ 则 $\int_0^1 xf'(2x)dx =$ ____ 。

（2）已知 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(\pi)=2, \int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx = 5$，则 $f(0)=$ ____ 。

（3）已知$\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$，则$a=$____。

解：（1）令$t=2x$，则$\int_0^1 xf'(2x)dx=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)dt=\frac{1}{4}\int_0^2 tdf(t)=\frac{1}{4}[tf(t)|_0^2-\int_0^2 f(t)dt]$

$=\frac{1}{4}\times 2f(2)-\frac{1}{4}F(t)|_0^2=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

下面解法错在哪里？$\int_0^1 xf'(2x)dx=\int_0^1 xdf(2x)=xf(2x)|_0^1-\int_0^1 f(2x)dx=\cdots$

（2）$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx+\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx$

而

$$\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx=\int_0^{\pi}\sin xdf'(x)=-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx=-\int_0^{\pi}\cos xdf(x)=f(0)+f(\pi)-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx$$

所以$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=f(0)+f(\pi)=2+f(0)=5\Rightarrow f(0)=3$

（3）令$t=\sqrt{e^x-1}$, 则$x=\ln(1+t^2), dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$

$\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_b^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+t^2}dt=2(\arctan\sqrt{3}-\arctan b)=\frac{2\pi}{3}-2\arctan b$，其中$b=\sqrt{e^a-1}$

由$\frac{2\pi}{3}-2\arctan b=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \arctan b=\frac{\pi}{4}\Rightarrow b=1\Rightarrow a=\ln 2$

或 $\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_a^{2\ln 2}\frac{e^x}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx=2\int_a^{2\ln 2}\frac{d(\sqrt{e^x-1})}{1+(\sqrt{e^x-1})^2}=\frac{2\pi}{3}-2\arctan\sqrt{e^a-1}$

注：方法一符合我们前面提到的思路：把复杂的因式设为一个变量。方法二也是常见的：当被积函数只是指数函数的函数$f(e^x)$时，总可以凑成$\int f(e^x)dx=\int\frac{f(e^x)}{e^x}de^x$，然后用换元等方法去解。

练习题:

1．求下列不定积分：

（1）$\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$　　（2）$\int_0^{100}(x-[x])dx$　　（3）$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$　　（5）$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$　　（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin xdx$

（7）$\int_0^1\frac{\ln(1+x)dx}{(2-x)^2}$　　（8）$\int_1^3 f(x)dx,\quad f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x}, x\ge 0\end{cases}$

（答案：（1）$-\frac{\pi}{12}$（小心：很容易出现错误答案$\frac{\pi}{12}$），（2）50，（3）$n^2\pi$，（4）$\frac{\ln 2}{4}$， （5）$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$，（6）$\ln 2-1$，（7）$\frac{\ln 2}{3}$，（8）$\frac{7}{3}-e^{-1}$）

2．求下列不定积分：

（1）$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ 及 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$　（3）$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx$

（4）$\int_{-2}^{2}x\ln(1+e^x)dx$　（5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}dx$　（6）$\int_0^1\frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx$

（答案:（1）$\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$（用对称性中的推论 1），（2）$\frac{\pi}{8}\ln 2$（用对称性中的推论 1）

（3）0（可用对称性中的命题 2；或换元 $t=\cos x$，然后由奇偶性），

（4）$\frac{8}{3}$（方法与(1)类似，(5) $2^{\frac{3}{4}}e^{\frac{\pi}{8}}-2$ (用裂项相消法),(6) $\frac{1}{2\sqrt{e}}(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}})$）

3.（1）求 $\int_0^1 x^2 f(x)dx,\ f(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

（2）设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f'(x)=\arcsin(x-1)^2$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$。

（答案:（1）$-\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$，（2）$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$）

4．设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且满足 $f(x)=f(a-x),g(x)+g(a-x)=c$，证明：

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{c}{2}\int_0^a f(x)dx$$

5．设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx$，试建立 I_n 的推递式.

（$I_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}I_{n-1}$）

6．设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，试建立 I_n 的推递式.

（$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$）

7．设 $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

（先建立 I_n 的推递式 $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$）

8.设 $f(x)\ge 0$ 且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且满足 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$,则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值为________.

（$F(x)=\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)F'(x)=\sin^4 x$，两边积分可得结果 $\dfrac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}$）

二：变限积分函数

变限积分函数也是函数，那么上一章中用导数讨论函数的方法和问题对变限积分函数同样适用，同样也存在求导、求极限、单调性、极值、最值、介值问题、泰勒展开等一系列问题，与微分方程问题也有联系．又由于变限积分函数是通过积分表达的，因此又有积分学的特点．我们首先熟悉两点：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

（2）变限积分函数的求导公式：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x),\psi(x)$ 连续可导，则

$(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$，$(\int_x^b f(t)dt)'=-f(x)$，$(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$，$(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$.

例 6．（1）设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$，则 $F'(x)=$______，$F''(x)=$______．

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x[\int_t^2 e^{-u^2}du]dt}{(x-2)^2}=$______．

（3）设 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$______．

（4）设 $f(x)=x^2-2\int_0^x f(x)dx$，则 $f(x)=$______．

（5）设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(xt)dt=f(x)+x\sin x$，且 $f(x)$ 可导，则 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=$_____．

解：（1）换元 $u=x-t$，那么

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-u)f(u)(-du)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

从而 $F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$，$F''(x)=f(x)$

注：遇到积分变限函数问题时，要分清积分变量和函数变量。对于函数 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,t)dt$ 的求导问题，被积函数中还有函数变量 x，我们一般先换元变成如下形式：

$$\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)dt \quad 或 \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)h(x)dt=h(x)\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)dt$$

再求导。

（2）用洛比达法则计算（涉及积分变限函数的未定式的极限，往往用洛比达法则）

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x[\int_t^2 e^{-u^2}du]dt}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{\int_x^2 e^{-u^2}du}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-e^{-x^2}}{2}=-\frac{e^{-4}}{2}$$

（3）令 $c=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=x^2+cx$，从而 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2+cx)dx=\frac{1}{3}+\frac{c}{2}$

故 $c=\frac{1}{3}+\frac{c}{2}\Rightarrow c=\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)=x^2+\frac{2x}{3}$

（4）两边求导得微分方程 $f'(x)=2x-2f(x)$，并且 $f(0)=0$，解此微分方程得

$\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$

注：注意（3)，（4）的区别，（3）其实与积分变限函数没关系，题设中出现的积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 是一个常值。（4）中出现的积分 $\int_0^x f(x)dx$ 是一个函数，是一个积分方程问题，我们总是通过对方程两边求导以达到消掉积分的目的(必要时要对方程变形以方便求导)，从而得到一个微分方程，另外还需从原方程中找出初始条件，再解微分方程.

（5）令 $u=xt(x\neq 0)$，则 $\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，

故 $\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=f(x)+x\sin x$，变形得

$\int_0^x f(u)du=xf(x)+x^2\sin x$，两边求导得

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$，从而得

$f'(x)=-2\sin x+x^2\cos x$

注：本题可进一步求出 $f(x)$，但求不出特解.

例 7．设 $F(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$，求 $F'(0)$

分析：$x\neq 0$ 时，$F'(x)=\cos\frac{1}{x}$，而由于被积函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续，不能套用前面的公式去求导．因此只能用导数定义 $F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$ 去求.

解：$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}$

$\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt=-\int_0^x t^2d(\sin\frac{1}{t})=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt$

从而 $F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(-x\sin\frac{1}{x})+2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt}{x}=2\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

例 8． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b], f(x)\geq 0, f(x)\leq\int_a^x f(t)dt$，证明：$f(x)=0, x\in[a,b]$

分析：若令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$，则有 $F'(x)=f(x)$，则 $F'(x)-F(x)\leq 0\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'\leq 0$，由此再想办法证得结论。

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$，则有 $F'(x)=f(x)$，令 $G(x)=e^{-x}F(x)$

依题设有 $G'(x)=e^{-x}[F'(x)-F(x)]\leq 0$

从而对 $\forall x\in[a,b]$，$G(x)\leq G(a)=0$，又由题意可知 $G(x)\geq 0$

所以对 $\forall x\in[a,b]$，$G(x)=0$，即 $\int_a^x f(t)dt=0, x\in[a,b]$

两边求导得 $f(x)=0, x\in[a,b]$

练习题:

9.（1）设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln u}{1+u}du$，则 $f(x)+f(\frac{1}{x})=$______.（答案：$\frac{1}{2}\ln^2 x$）

（2）设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$x\to 0$ 时，$\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，则 $f'(0)=$______.（答案：$\frac{1}{2}$）

（3）$f(x)=\int_0^1 t|t-x|dt$ 的最小值点为________.（答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$）

（4）设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=\frac{1}{2}$，则 $\int_1^2 f(x)dx=$______.（答案：$\frac{1}{2}$）

（5）$x\to 0$ 时，$\int_0^x\arcsin t^2dt$ 是关于 x 的______阶无穷小；$\int_0^{x^2}\arcsin tdt$ 是关于 x 的______阶无穷小.（答案：3,4）

（6）设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(1)=1$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt}{x^{2n}}=$____.（答案：$\frac{1}{2n}$）

10．设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du$，(i)证明 $f(x)$ 为周期函数；(ii)求 $f(x)$ 的最大值和最小值.(答案:$\sqrt{2},2-\sqrt{2}$)

１１．设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t^{1+\alpha}}dt\ (\alpha>0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$x\to+\infty$ 时 $F(x)$ 与 $\frac{c}{x^{\alpha}}$ 为等价无穷小，求 c．（答案：$\frac{1}{\alpha}$）

１２．设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调减少，证明：$f(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$

三：积分等式的证明

例 9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：

（１）$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$

（２）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}[\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

证：（１）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$，

换元 $x=\frac{a+b}{2}-t$，得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{b-a}{2}}^0 f(\frac{a+b}{2}-t)(-dt)=\int_0^{\frac{b-a}{2}}f(\frac{a+b}{2}-t)dt=\int_0^{\frac{b-a}{2}}f(\frac{a+b}{2}-x)dx$$

同样地，换元 $x=\frac{a+b}{2}+t$，得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}f(\frac{a+b}{2}+t)dt=\int_0^{\frac{b-a}{2}}f(\frac{a+b}{2}+x)dx$$

所以 $\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(\frac{a+b}{2}-x)+f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$

（２）$I=\int_a^b f(x)dx$，换元 $x=a+b-t$，得

$$I=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$2I=\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$$

命题得证．

例１０．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，证明：

（１）$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$

（２）$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f''(x)(x-a)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)(x-b)^2dx$

证明：（１）$\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx=\int_a^b (x-a)(x-b)df'(x)=-\int_a^b f(x)(2x-a-b)dx$

$=-\int_a^b (2x-a-b)df(x)=-(b-a)(f(a)+f(b))+2\int_a^b f(x)dx$

从而得结论．

注：本题也可左边推出右边，同学们去试一试．（２）的证明留给同学们去完成．这两个结论与后面几个题有联系．

总结：这类问题的解决主要用分部、换元及积分区间的分段处理，另外也可用利用导数证明恒等式的方法去证明积分恒等式（比如练习题１６）。

练习题：

１３．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且 $f(\frac{a^2}{x})=f(x)$，$a>0$ 为常数，试证：

（１）$\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$

（２）$\int_1^a\frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$

（３）$\int_1^a g(x^2+\frac{a}{x^2})\frac{1}{x}dx=\int_1^a g(x+\frac{a}{x})\frac{dx}{x}$，其中 $g(x)$ 为连续函数．

（（１）作换元 $x=\frac{a^2}{t}$ 可得结论，（２）先作换元 $t=x^2$，积分区间变为 $[1,a^2]$，再将该区间分成两个区间 $[1,a],[a,a^2]$ 并利用（1）可得结论,(3)是(2)的特例.）

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(\frac{ab}{x})=f(x)$，$a>0$ 为常数，试证：

$$\int_a^b\frac{f(x)\ln x}{x}dx=\frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$$

15．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)\cos x dx$

（左边$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\sin 2x)\cos x+f[2(\frac{\pi}{2}-x)]\cos(\frac{\pi}{2}-x))dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)(\cos x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)d(\sin x-\cos x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(1-t^2)dt$

$=\int_0^1 f(1-t^2)dt$）

１６．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，且 $f(0)=0, f'(x)>0$，$y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，证明：

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)}g(x)dx=a\ f(a)$$

（证法一：令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx+\int_0^{f(x)} g(t)dt-x\ f(x)$，那么 $F(0)=0, F'(x)=0, x\in[0,a]$，从而得结论，证法二：令 $t=g(x)$，那么 $x=f(t)$，则 $\int_0^{f(a)} g(x)dx=\int_0^a tdf(t)$，再分部即可．本题还可用定积分定义去证．本题的条件“ $f'(x)>0$ ”是为了保证 $f(x)$ 有反函数，而条件“ $f(x)$ 可导”是为了证明方便（可以求导)，而事实上条件改为“设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且严格单调”时结论仍成立，此时严格证明只能用定积分的定义。该结论的几何意义是什么？此结论可导出一个不等式　：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可导，且 $f(0)=0, f'(x)>0$，$y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，证明：

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(b)} g(x)dx\geq a\ f(b)$$）

四：涉及定积分的介值问题

例１１．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，不恒为常数，且 $f(a)=f(b)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\int_a^\xi f(x)dx=(\xi-a)f(\xi)$

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(x)$，则 $F(b)=\int_a^b f(t)dt-(b-a)f(b)$

$=\int_a^b (f(t)-f(b))dt>0$

又由题设知　$\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max f(x)>f(a)$

所以 $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt-(x_0-a)f(x_0)=\int_a^{x_0}(f(t)-f(x_0))dt<0$，

由连续函数的零点存在定理，知 $\exists\xi(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即得结论．

例１２．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx$

证明：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点，使得　$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

证明：（证法一：用罗尔定理）令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x)$，$F(0)=F(\pi)=0$

又 $0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$

从而知 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)\sin x_0=0$，即 $F(x_0)=0$

由罗尔定理知　$\xi_1\in(0,x_0), \xi\in(x_0,\pi)$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．

证法二：（用反证法）由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$　知 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有这个零点，则由连续函数性质知 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 必定异号，又

$\cos x-\cos x_0$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 异号，从而 $f(x)(\cos x-\cos x_0)$ 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 同号．故必有 $\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos x_0)dx\neq 0$，

又由题设知 $\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos x_0)dx=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx-\cos x_0\int_0^{\pi} f(x)dx=0$

于是得出矛盾，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点．即得结论．

总结：这类问题的解决主要用连续函数的介值性质、微分中值定理（含泰勒公式，可对被积函数用微分中值定理或泰勒公式，也可对积分变限函数用微分中值定理或泰勒公式）及积分中值定理。在教材里面介绍的积分中值定理的结论是这样的：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$。而事实上该可改为：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，用拉氏微分中值定理很容易证明该结论。以上结论的前提条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

练习题：

17．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单调增加，证明：存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

１８．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上正值连续，证明：

（１）存在唯一的 $a\in(0,1)$，使得 $\int_0^a f(x)dx=\int_a^1 \frac{1}{f(x)}dx$

（２）对任意正整数 n，存在唯一的 $x_n\in(0,1)$，使得 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx=\int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

（为证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，先说明 $\{x_n\}$ 单减且有界）

１９．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)\sin xdx=0,\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx$

证明：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

（仿例１２的证法二）

２０．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)dx=0,\int_a^b f(x)xdx$

证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在２个不同的零点．

（例１２的二种证法都可以用，本题可推广：若 $\int_a^b x^k f(x)dx=0\ (k=0,1,\cdots,n)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在 $n+1$ 个不同的零点）

２１．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$$

（方法一利用例１０的（２）及积分中值定理，方法二：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处分别展开 $F(a),F(b)$ 的值（实际上就是第二章第三节的例５））

２２．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)}{2}(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

（$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$，再利用例１０的（１）及积分中值定理）

五：与定积分有关的极限

例 13．设 $f(x),g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续正值函数，令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x),d_n=\int_a^b g(x)[f(x)]^n dx$，

证明：（１）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=M$　　（２）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$

证明：（１）$\sqrt[n]{d_n}\le M[\int_a^b g(x)dx]^{\frac{1}{n}}\to M$

另一面，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得　$f(x)\ge M-\varepsilon,x\in[\alpha,\beta]$，因此

$$\sqrt[n]{d_n}\ge[\int_\alpha^\beta g(x)f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}}\ge(M-\varepsilon)[\int_\alpha^\beta g(x)dx]^{\frac{1}{n}}\to M-\varepsilon$$

综上得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=M$

（２）(分析:先介绍一个命题:设 $a_n>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

那么如能证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在，则由上面命题及（1）便知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$）

$$d_n^2=[\int_a^b\sqrt{g(x)f^{n-1}(x)}\sqrt{g(x)f^{n+1}(x)}dx]^2\le\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)dx\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)dx=d_{n-1}d_{n+1}$$

故有 $\frac{d_n}{d_{n-1}}\le\frac{d_{n+1}}{d_n}$,即 $\{\frac{d_n}{d_{n-1}}\}$ 单调增加.

又 $d_n=\int_a^b g(x)[f(x)]^n dx\le M\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)dx=Md_{n-1}\Rightarrow\frac{d_n}{d_{n-1}}\le M$,即 $\{\frac{d_n}{d_{n-1}}\}$ 有界,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在,再由(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=M$．

注：取 $g(x)=1$，可得 $[\int_a^b f^n(x)dx]^{\frac{1}{n}} \to M$

例14．设 $f(x),g(x)$ 为 $[0,T]$ 上的连续，$g(x)$ 为周期为 T 的周期函数且 $g(x)\ge 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\int_0^T g(x)dx$$

证明：$g(nx)$ 为周期为 $\frac{T}{n}$ 的周期函数，记 $c=\int_0^T g(x)dx$，那么 $\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} g(nx)dx=\frac{c}{n}, i=1,2,\cdots,n$

$$\int_0^T f(x)g(nx)dx=\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int_{\frac{i-1}{n}T}^{\frac{i}{n}T} g(nx)dx=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{c}{n}$$

$$=\frac{c}{T}\sum_{i=1}^n\frac{T}{n}f(\xi_i)\to\frac{c}{T}\int_0^T f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_0^T f(x)dx$$

例15．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))-\int_a^b f(x)dx$，求

$\lim_{n\to\infty} nA_n$.

分析：显然 $A_n\to 0$ 即为无穷小，那么就有讨论该无穷小的阶的问题，本题就是此问题.

解：$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))-\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}[f(a+\frac{i}{n}(b-a))-f(x)dx$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(\xi_i)(a+\frac{b-a}{n}i-x)dx$$

记 $M_i=\max_{x\in I_i} f'(x)$，$m_i=\min_{x\in I_i} f'(x)$，其中 $I_i=[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)]$

则有 $\frac{b-a}{2}\sum_{i-1}^n\frac{b-a}{n}m_i\le nA_n\le\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n\frac{b-a}{n}M_i$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2}\sum_{i-1}^n\frac{b-a}{n}m_i=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n\frac{b-a}{n}M_i=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$

练习题：

23．求（1）$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n\frac{n}{n^2+j^2}$　　　（2）$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$，$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx$

（（1）化为定积分 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n\frac{n}{n^2+j^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$， （２） $\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \frac{1}{1+x^2} dx \le \frac{n}{n^2+j^2} \le \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \frac{1}{1+x^2} dx$，两边极限均为 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

（３）的答案为０， $f(1)$，后一问用一下分部法）

２４．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \ln(1+x)|\sin nx|\,dx$．

２５．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续，且严格单调增加，由积分中定理知存在 $x_n \in [a,b]$，使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx$$

证明： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

（可利用例１３的结论）

２６．设 $A_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$，求：

（１） $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$；

（２） $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2 - A_n)$．

（（１）是简单的，答案是 $\ln 2$．（２）实际上是例１５的特例，答案是 $\frac{1}{4}$）

六：从积分中提取信息

例 16．设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{x-1} f(x)dx$，证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

分析：这是介值问题，先要作辅导函数，根据题设及欲证的结论容易想到辅导函数：

$F(x) = e^{x-1} f(x)$，题设中通过积分给了我们信息，由积分中值定理知 $f(1) = e^{x_0 - 1} f(x_0)$，从而

$F(x_0) = F(1)$，在 $[x_0,1]$ 对 $F(x)$ 用罗尔定理便可得结论。证明过程略。

例 17．设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$

（1） 证明： $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \ge 3$

（2） 又若 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，证明： $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \ge 3(2+\sqrt{2})$

证明：（1）记 $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$，则 $|\int_0^1 x^2 f(x)dx| \le \int_0^1 x^2 |f(x)|dx \le M\int_0^1 x^2 dx = \frac{M}{3}$

由题设 $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$，可得 $\frac{M}{3} \ge 1 \Rightarrow M \ge 3$

（3） 由题设可得 对任意实数 a ，有 $\int_0^1 x(x-a) f(x)dx = 1$。

记$M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，那么　$1=\left|\int_0^1 x(x-a)f(x)dx\right|\le M\int_0^1 x|x-a|dx$

当$0\le a\le 1$时，$\int_0^1 x|x-a|dx=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$

即对$\forall a\in[0,1]$，有$M(\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3})\ge 1$，取$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，可得$\frac{2-\sqrt{2}}{6}M\ge 1\Rightarrow M\ge 3(2+\sqrt{2})$

例１８．设$f(x)$为$[-a,b](a>0,b>0)$上的非负连续，且已知$\int_{-a}^b x\ f(x)dx=0$，证明：

$\int_{-a}^b x^2 f(x)dx\le ab\int_{-a}^b f(x)dx$

分析：条件$\int_{-a}^b x\ f(x)dx=0$该怎么用？先看欲证的结论

$$\int_{-a}^b x^2 f(x)dx\le ab\int_{-a}^b f(x)dx\Leftrightarrow\int_{-a}^b(x^2-ab)f(x)dx\le 0$$

再由条件$\int_{-a}^b x\ f(x)dx=0$，可知对任意实数c，有

$$\int_{-a}^b(x^2-ab)f(x)dx\le 0\Leftrightarrow\int_{-a}^b(x^2+cx-ab)f(x)dx\le 0$$

取一个适当的c，使得$x^2+cx-ab=(x+a)(x-b)$，就会有

$(x^2+cx-ab)f(x)=(x+a)(x-b)f(x)\le 0, x\in[-a,b]$，结论就出来了。

证明：由题设知

$$\int_{-a}^b(x^2-ab)f(x)dx=\int_{-a}^b(x+a)(x-b)f(x)dx$$

又由题设知，当$x\in[-a,b]$时，$(x+a)(x-b)f(x)\le 0$

所以　$\int_{-a}^b(x^2-ab)f(x)dx=\int_{-a}^b(x+a)(x-b)f(x)dx\le 0\Rightarrow\int_{-a}^b x^2 f(x)dx\le ab\int_{-a}^b f(x)dx$。

练习题：

２７．设$f(x)$为$[0,1]$上可导，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=2\xi\ f(\xi)$$

２８．设$f(x)$为$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\cdots=\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=0$，

$\int_0^1 x^n f(x)dx=1$，证明：$\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\ge 2^n(n+1)$

（考虑积分　$\int_0^1(x-\frac{1}{2})^n f(x)dx$）

２９．设$f(x)$为$[-1,1]$上可导，$|f'(x)|\le M$，且存在$a\in(0,1)$，满足$\int_{-a}^a f(x)dx=0$，

证明：$|\int_{-1}^{1} f(x)dx| \le M(1-a^2)$

（由题设知　存在 $c\in[-a,a]$，满足 $f(c)=0 \Rightarrow |f(x)| \le M|x-c|$

$|\int_{-1}^{1} f(x)dx| = |\int_{-1}^{-a} f(x)dx + \int_{a}^{1} f(x)dx| \le \int_{-1}^{-a} M(c-x)dx + \int_{a}^{1} M(x-c)dx$.）

３０．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \le M$，$\int_a^b f(x)dx = 0$，记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

（１）证明：对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|F(x)| \le \frac{M(b-a)^2}{8}$

（２）又若 $f(a)=f(b)=0$，证明：对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|F(x)| \le \frac{M(b-a)^2}{16}$

（易见 $F(a)=F(b)=0, F'(x)=f(x)$，（１）实际上要证明 $A=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)| \le \frac{M(b-a)^2}{8}$，

若 $A=0$，结论成立，若 $A>0$，必存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $|F(x_0)|=A$，那么 x_0 必是 $F(x)$ 的极值点，从而 $F'(x_0)=f(x_0)=0 \Rightarrow |f(x)| \le M|x-x_0|$，

$A=|F(x_0)|=|\int_a^{x_0} f(x)dx| = |\int_{x_0}^{b} f(x)dx|$，再按 $x_0\in[a,\frac{a+b}{2}], x_0\in[\frac{a+b}{2},b]$ 两种情况讨论。）