一、 填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=$ ________。

2. 已知 $h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)=$ _______。

3. 写出 e^x 的 n 阶麦克劳林公式 ____________________。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$，则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$ ________。

5.

设 $f(x)$ 可微，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^4}=$ __________。

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

6． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\sin^2 x}=$ ______。

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

7. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x=$ ______。

(A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $-\dfrac{2}{5}$ (D) $-\dfrac{4}{5}$

8. 函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是 _______。

(A) $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$ (B) $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$

(C) $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$ (D) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$

9. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 _______。

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(a)f'(b)<0$. 下述命题

（1） 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

（2） 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

（3） 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

（4） 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]$.

其中正确的个数为 _______。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

三、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分)

11.（10分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点。

12.（10 分）

1. 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解。

2. 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$。

13.（10 分）

13.（1）求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的导函数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

（2） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

14、（10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0, g(0)=2$

求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$。

15、（10 分）

15（1）设 $0<a<b$，证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$。

（2） 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$0<f(x)<1$ 且 $f'(x)\neq 1$，

证明：方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根。

16.（10分） $F(x)=\begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 有连续的导数，且 $f(0)=0$.

（1） 研究 $F(x)$ 的连续性；

（2） 求 $F'(x)$，并研究 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

本科生高等数学（一）期末考试A卷答案

一、 填空题（每题4分，共20分）：

1. $\underline{-1}$

2. $\underline{-\ln 2-1}$

3. $\underline{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)}$

4. $\underline{\frac{7}{3}-\frac{1}{e}}$

5. $\underline{\frac{1}{4}}$

二、选择题（每题4分，共20分）：

6---10: DBDAA

10. 选A.

只有（3）是正确的，证明如下：

不妨设 $f'(a)<0, f'(b)>0$

由 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0, \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$

以及保号性，

则存在 $x_1\in(a,b)$ 使 $f(x_1)-f(a)<0$， $x_2\in(a,b)$ 使

$f(x_2)-f(b)<0$

因此 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值在 (a,b) 内部，

故存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$

若 $f'(a)>0, f'(b)<0$，其证明类似

（1）（2）（4）都是错误的，反例：$f(x)=x^2-x, x\in[0,1]$

有 $f'(0)=-1, f'(1)=1, f'(0)f'(1)<0$

但当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(0)=f(1)=0$

三、计算（每题10分，共60分）：

11、解：由题设条件得 $y'(t)=t^2-1$，$x'(t)=t^2+1$，

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{x'(t)}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}$，

令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=0$，得 $t=\pm1$.

当 $t=-1$时，$x=-1$，且 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1}=-\dfrac{1}{2}<0$

由此知 $y=1$是函数的一个极大值，当 $t=1$时，$x=\dfrac{5}{3}$，且 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{5}{3}}=\dfrac{1}{2}>0$

从而 $y=-\dfrac{1}{3}$是函数的一个极小值，

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}=0$得 $t=0$

即点 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$是拐点的可疑点，又当 $t<0$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$，此时 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$；

当 $t>0$时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$，此时 $x\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，

即当 $t<0$也就是 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$时，曲线是凸的；

即当 $t>0$也就是 $x\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$时，曲线是凹的；由拐点定义知 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$是拐点.

12.（共 2 小题，每小题 5 分）

(1)解：由题设知，齐次方程对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，

解得特征根为：$r_1=1, r_2=2$.

于是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$的通解为：

$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$（C_1，C_2是任意常数）.

由条件知原方程的一个特解可设为：$y_1=x(ax+b)e^x$

(其中 a,b为待定系数)

则 $y_1'=\left[ax^2+(2a+b)x+b\right]e^x$，$y_1''=\left[ax^2+(4a+b)x+2a+2b\right]e^x$.

将 y_1，y_1'，y_1''代入原方程并整理得

$y_1''-3y_1'+2y_1=(2a-b-2ax)e^x=2xe^x$

比较等式两端 x同次幂的系数得

$\begin{cases}-2a=2\\2a-b=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$.

于是特解 $y_1=-x(x+2)e^x$.

故原方程通解为 $y=Y+y_1=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$（$C_1$，$C_2$是任意常数）.

(2)解：解法一：令 $\arcsin e^{x}=t$，则 $x=\ln\sin t, dx=\dfrac{\cos t}{\sin t}dt$.

$$\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx=\int\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt=-\int t\cdot d\left(\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$=-\frac{t}{\sin t}+\int\frac{1}{\sin t}dt=-\frac{t}{\sin t}+\ln\left|\csc t-\cot t\right|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}+\ln\left|\frac{1}{e^{x}}-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^{x}}\right|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}+\ln\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right)-x+C.$$

解法二：$\displaystyle\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx=-\int\arcsin e^{x}d(e^{-x})=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}+\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

在 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$中，令 $\sqrt{1-e^{2x}}=t$,则 $dx=\dfrac{-t}{1-t^{2}}dt$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=-\int\frac{1}{1-t^{2}}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}\right|+C$$

于是 $\displaystyle\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}--\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}\right|+C$

13、（共 2 小题，每题 5 分）

解：(1)由参数方程所确定的函数的求导公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^{2}}}{\frac{1}{1+t^{2}}2t}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+t^{2}}2t}=\frac{1+t^{2}}{4t}.$$

(2) 利用 e^x，$\cos x$ 具有佩亚诺型余项的泰勒公式，

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

14、解：由 $f'(x) = g(x)$ 得 $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$. 于是有

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$$

解之得 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$. 又

$$\int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx = \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx = \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$= \int_0^\pi d\,\frac{f(x)}{1+x} = \frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^\pi = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - f(0) = \frac{1+e^\pi}{1+\pi}.$$

15、（共 2 小题，每题 5 分）

(1) 证明：先证右边不等式.

设 $\varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}, (x > a > 0)$，

因为 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}}\right) = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0$，

故当 $x > a$ 时，$\varphi(x)$ 单调减少，又 $\varphi(a) = 0$，

所以，当 $x > a$ 时，$\varphi(x) < \varphi(a) = 0$，

即 $\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$，

从而当 $b > a > 0$ 时，$\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

再证左边不等式.

证法一：设函数$f(x)=\ln x(x>a>0)$,由拉格朗日中值定理知，

至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},$$

由于$0<a<\xi<b$,故$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$,

从而$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$

证法二：设$f(x)=\left(x^2+a^2\right)(\ln x-\ln a)-2a(x-a),(x>a>0)$

因为$f'(x)=2x(\ln x-\ln a)+(x^2+a^2)\frac{1}{x}-2a$

$=2x(\ln x-\ln a)+\frac{(x-a)^2}{x}>0,$

故当$x>a$时$f(x)$单调增加，又$f(a)=0,$

所以当$x>a$时，$f(x)>f(a)=0,$

即$(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0$

从而当$b>a>0$时，有

$(b^2+a^2)(\ln b-\ln a)-2a(b-a)>0$

即$\frac{2a}{b^2+a^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$

(2)证明：设$F(x)=f(x)-x$，在$[0,1]$上连续，

由$0<f(x)<1$,知$F(0)=f(0)-0>0,F(1)=f(1)-1<0$

由连续函数根的存在性定理知至少存在一点$\xi\in(0,1)$

使得$F(\xi)=0$，即$f(x)=x$在（0，1）上存在根.

下证根的唯一性：

设有两个根$x_1,x_2\in(0,1)$,使得$f(x_1)=x_1,f(x_2)=x_2,$

即$F(x_1)=0,F(x_2)=0$，又$F(x)$在$(0,1)$可导，

由罗尔定理知存在$\eta\in(0,1)$,

使得$F'(\eta)=0$，即$f'(\eta)=1$,与$f'(x)\neq1,x\in(0,1)$矛盾

所以$f(x)=x$只有唯一的根.

16.解：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{f(0)}{2}=0=F(0)$

故 $F(x)$在 $x=0$连续.

（2） 由定义知 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}-0}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

$=\dfrac{1}{3}f'(0).$

$F'(x)=\dfrac{x^3 f(x)-2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4}(x\neq 0)$

故 $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3 f(x)-2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4} & (x\neq 0)\\ \dfrac{1}{3}f'(0) & (x=0)\end{cases}$

因 $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(x)-2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^3 f'(x)}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{4x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f'(x)}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f'(x)}{12x^2}+\dfrac{f'(0)}{4}=\dfrac{1}{3}f'(0)=F'(0)$

故 $F'(x)$在 $x=0$连续.