东南大学考试卷(A卷)答案

课程名称	线性代数A	考试学期	14-15-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______

密 封 线

一. （30%）填空题

1. 设3维行向量 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 满足 $xA=(x_1+x_3,2x_1-x_2)$，则 $A=\underline{\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&0\end{pmatrix}}$；

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$，则伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}$；

3. 若3阶行列式 $|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=2$，$|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_3|=3$，则 $|2\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3+\beta_3|=\underline{-10}$；

4. 若向量组 $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性相关，则 a,b 满足 $\underline{b=-2a}$；

5. 向量空间 $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \,\middle|\, \begin{cases}2x-y+3z=0\\x+y-2z=0\end{cases}\right\}$ 的维数等于 $\underline{1}$；

6. 将 4×3 矩阵 A 的第3列的 -2 倍加到第2列得到矩阵 AP，则 $P=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}}$；

7. 若二次型 $f(x_1,x_2)=ax_1^2-2x_2^2+4ax_1x_2$ 的负惯性指数为2，则 a 满足 $\underline{-\frac{1}{2}<a<0}$；

8. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$，以下矩阵中与 A 相似但不合同的是 $\underline{\quad B\quad}$：

$B=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

9. 设方阵 A,B 满足 $A-B=AB$，则 $(A+E)^{-1}=\underline{E-B}$；

10. 若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$，其中 $P=(\alpha,\beta)$。取 $Q=(\alpha+\beta,\alpha)$，则 $Q^{-1}AQ=\underline{\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}}$。

二．（10%）求行列式$D=\begin{vmatrix}3&1&9&27\\-1&1&1&-1\\2&1&4&8\\-2&1&4&-8\end{vmatrix}$的值。

解：$D=-\begin{vmatrix}1&3&9&27\\1&-1&1&-1\\1&2&4&8\\1&-2&4&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&3^2&3^3\\1&-1&(-1)^2&(-1)^3\\1&2&2^2&2^3\\1&-2&(-2)^2&(-2)^3\end{vmatrix}$

$=-(-2-3)(-2+1)(-2-2)(2-3)(2+1)(-1-3)$

$=240$

三．（14%）设线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=b+4\\-x_1-2x_2+ax_3=2\\4x_1+5x_2-2x_3=c\end{cases}$，

8

1. 问：当a,b,c满足什么条件时，方程组有唯一解；无解；有无穷多解？

2. 当方程组有无穷多解时，求其通解。

2' 解：1. $(A,\beta)=\begin{bmatrix}2&1&2&b+4\\-1&-2&a&2\\4&5&-2&c\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}-1&-2&a&2\\0&-3&2a+2&b+8\\0&0&2a-4&c-b\end{bmatrix}$，

2 所以当$2a-4\neq 0$，即$a\neq 2$时，$r(A,\beta)=r(A)=3$，此时方程组有唯一解；

2 当$a=2$但$b\neq c$时，$r(A,\beta)=3\neq r(A)=2$，此时方程组无解；

当$a=2$且$b=c$时，$r(A,\beta)=r(A)=2$，此时方程组有无穷多解；

2

6 2. 当$a=2$且$b=c$时，

3 $(A,\beta)=\begin{bmatrix}2&1&2&b+4\\-1&-2&2&2\\4&5&-2&b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&\frac{1}{3}(2b+10)\\0&1&-2&-\frac{1}{3}(b+8)\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

3 所以$\begin{cases}x_1\quad+2x_3=\frac{1}{3}(2b+10)\\x_2-2x_3=-\frac{1}{3}(b+8)\end{cases}$，故通解为：$x=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(2b+10)\\-\frac{1}{3}(b+8)\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix},(k\in R).$

$\begin{pmatrix}\frac{2b+4}{3}\\-\frac{b+2}{3}\\1\end{pmatrix}$

四. （12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\3&2&4\end{pmatrix}$。求矩阵 X 使得 $A+X=XA$。

解：由$A+X=XA$得$X(A-E)=A$，所以$X=A(A-E)^{-1}$.

$$(A-E,E)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&-1&2\\0&1&0&3&0&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{pmatrix},$$

所以$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\3&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$,故$X=A(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\3&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$.

五. （12%）已知向量组$\alpha_1=(0,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,-2,1)^T$。

1．利用 **Schmidt** 正交化方法求与α_1，α_2，α_3等价的标准正交向量组；

2．记$A=(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)$，求一正交阵$Q$和上三角阵$R$，使得$A=QR$。

解：1. 令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$,

再令$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{bmatrix}0\\-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{bmatrix}\sqrt{6}/3\\-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\end{bmatrix}$,

所以γ_1，γ_2，γ_3即为所求.

2. 由1的求解过程可知，$\alpha_1=\beta_1=\|\beta_1\|\gamma_1=\sqrt{2}\gamma_1$，$\alpha_2=\beta_2=\|\beta_2\|\gamma_2=\sqrt{3}\gamma_2$,

$\alpha_3=\frac{3}{2}\beta_1+\beta_3=\frac{3}{2}\|\beta_1\|\gamma_1+\|\beta_3\|\gamma_3=\frac{3}{2}\sqrt{2}\gamma_1+\frac{\sqrt{6}}{2}\gamma_3$,

则$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\frac{3}{2}\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}=QR$,其中$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$为正交阵.

六.（**14%**）已知3×3矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -a-2 & 0\\ 0 & a-3 & 0\\ 4-a & b & -2\end{pmatrix}$有一个二重特征值，且$A$可相似对角化。

1. 求参数a,b的值；
2. 求一可逆阵P及对角阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$。

解：1. 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & a+2 & 0\\ 0 & \lambda-a+3 & 0\\ a-4 & -b & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-a+3)(\lambda+2)$,

所以A的特征值为$1,2,a-3$.

当$\lambda_1=1(2\text{重}),\lambda_2=-2$，此时$a=4$.但$3-r(E-A)=1\neq2$，即$A$不可相似对角化.

当$\lambda_1=1,\lambda_2=-2(2\text{重})$，此时$a=1$.再由$3-r(E-A)=2$可得$b=-3$，符合题意.

2. 由1知$a=1,b=-3$，且A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-2(2\text{重})$.

由$(E-A)x=\theta$求出基础解系为$\xi_1=(1,0,1)^{\mathrm T}$；

由$(-2E-A)x=\theta$求出基础解系为$\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm T},\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm T}$.

取$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$.

七.（**8%**）证明题：

1. 设A是3阶方阵，ξ是3维列向量，已知$A^3\xi=\theta,A^2\xi\neq\theta$，记$P=(\xi,A\xi,A^2\xi)$，证明：方阵$P$可逆。

证明：若$k_1\xi+k_2A\xi+k_3A^2\xi=\theta$,两边左乘以$A^2$得，$k_1A^2\xi=\theta$，因为$A^2\xi\neq\theta$，所以$k_1=0$，

则有$k_2A\xi+k_3A^2\xi=\theta$，两边左乘以A得，$k_2A^2\xi=\theta$，则$k_2=0$.于是$k_3A^2\xi=\theta$，则$k_3=0$.

这样$\xi,A\xi,A^2\xi$线性无关，即$r(P)=r\{\xi,A\xi,A^2\xi\}=3$,所以$|P|\neq0$,即$P$可逆.

2. 设A是$n\times n$实对称矩阵，证明：若$E-A^2$是正定的，则$\begin{pmatrix}E & A\\ A & E\end{pmatrix}$也是正定的。

证明：设$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix},(\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\neq\theta)$,则有$A\xi_2=(\lambda-1)\xi_1,A\xi_1=(\lambda-1)\xi_2$,

不妨设$\xi_1\neq\theta$.于是$A^2\xi_1=(\lambda-1)A\xi_2=(\lambda-1)^2\xi_1$,即$(E-A^2)\xi_1=(2\lambda-\lambda^2)\xi_1$.因为$\xi_1\neq\theta$,

所以$2\lambda-\lambda^2$为$E-A^2$的特征值，又$E-A^2$为正定阵，故$2\lambda-\lambda^2>0$,即$0<\lambda<2$,

则$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}$的特征值全大于0，易见其为是实对称阵，故$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}$为正定阵.

证法二. ① 易见$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}$是实对称矩阵

② 令$P=\begin{bmatrix}E & 0\\ -A & E\end{bmatrix}$，则P可逆，且

$P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}E-A^2 & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}$

这说明$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}E-A^2 & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}$

由于$E-A^2$正定，故$\begin{bmatrix}E-A^2 & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}$的特征值全大于0，因而正定，所以$\begin{bmatrix}E & A\\ A & E\end{bmatrix}$正定.