东南大学考试卷(A 卷)答案

课程名称	线性代数A	考试学期	16-17-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

线

封

密

姓名______

学号______

一. （30%）填空题

1. 设$\alpha=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$, 则 $A^{10}=$ ______ $\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ ______.

2. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=3$, 则$\begin{vmatrix}A & B\\ O & C\end{vmatrix}=$ ______ **3** ______.

3. 设$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,4,t)^{\mathrm{T}}$, 若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的维数是 2, 则$t=$ ______ **4** ______.

4. 设α_1,α_2是向量空间V的一组基, $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$. 若向量$\eta\in V$在$\alpha_1,\alpha_2$下的坐标是$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, 则$\eta$在$\beta_1,\beta_2$下的坐标是______ $\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$ ______.

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & a\end{pmatrix}$, 若存在矩阵$B\neq O$使得$AB=O$, 则$a=$ ______ **4** ______.

6. 设 A 是 n 阶方阵, 向量α,β 是非齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=b$的两个不同的解, 则 A 的属于特征值λ的一个特征向量为______ $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ ______.

7. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$相似, 则$|A|=$ ______ **6** ______.

8. 若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2+2x_2^2+4x_3^2$正定, 则$t$的取值范围是______ $\boldsymbol{t\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})}$ ______.

9. 设三阶矩阵 A 的特征值为$1,2,3$, A_{ij} 是行列式$|A|$中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $|A|^{-1}(A_{11}+A_{22}+A_{33})=$ ______ **11/6** ______.

10. 下列 4 个命题中, **正确**命题的**个数**是______ **2** ______个:

①若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关;

②无论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关, 向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$总线性相关;

③若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中任意两个向量都线性无关, 则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关;

④若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 则其中任一向量可由其余两个向量线性表示.

二. （10%）计算行列式$D=\begin{vmatrix}2&0&1&7\\3&6&0&3\\5&-1&1&4\\2&2&1&5\end{vmatrix}$.

解: $D=\begin{vmatrix}2&0&1&7\\3&6&0&3\\5&-1&1&4\\2&2&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&7\\0&3&6&3\\1&5&-1&4\\1&2&2&5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2&0&7\\0&1&2&1\\1&5&-1&4\\1&2&2&5\end{vmatrix}$

$=3\begin{vmatrix}1&2&0&7\\0&1&2&1\\0&3&-1&-3\\0&0&2&-2\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&0&7\\0&1&2&1\\0&3&-1&-3\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&0&7\\0&1&2&1\\0&0&-7&-6\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=78$.

三. （14%）已知方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$与$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2bx_1+x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$同解,

1. 求参数a,b,c的值;
2. 求方程组的通解.

解: 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&b&c\\2b&1&c+1\end{pmatrix}$. 由$Ax=0$与$Bx=0$同解可知$r(A)=r(B)$.

又$r(A)\geq 2$，$r(B)\leq 2$，故$r(A)=r(B)=2$. 因此$|A|=0$，故$a=2$.

由此求得$Ax=0$的通解为$k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},k\in\mathrm{R}$.

由于$Ax=0$的解是$Bx=0$的解，将$x_1=-1,x_2=-1,x_3=1$代入$Bx=0$，求得$b=1,c=2$.
经验证，当$b=1,c=2$时，$Ax=0$与$Bx=0$同解.
综上所述,
1. 参数的取值为$a=2,b=1,c=2$.
2. 方程组的通解为$k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},k\in\mathrm{R}$.

四. （12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, 且 $XA-B=2X$, 求 X.

解: 由已知得 $X(A-2E)=B$, 故 $X=B(A-2E)^{-1}$.

计算得 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, 因此 $X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

五. （14%）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\k&0&1\end{pmatrix}$,

1. 求 A 的所有特征值和特征向量;
2. 根据参数 k 的取值, 判断矩阵 A, B 是否相似. 若相似, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$; 若不相似, 说明理由.

解: 1. 由 $|\lambda E-A|=0$, 得 A 的所有特征值为 $1,1,-1$.

对 $\lambda=1$, 求解 $(E-A)x=0$ 得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda=1$ 的所有特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$, 其中 k_1,k_2 是不全为 0 的实数.

对 $\lambda=-1$, 求解 $(-E-A)x=0$ 得基础解系 $\eta_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda=-1$ 的所有特征向量为 $k_3\eta_3$, 其中 k_3 是不为 0 的实数.

2. 当 $k=0$ 时, A 与 B 相似. 令 $P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=B$.

当 $k\neq 0$ 时, A 与 B 不相似. 原因如下:
由 1 知, A 有三个线性无关的特征向量 η_1,η_2,η_3, 因此 A 与对角矩阵相似.
由 $|\lambda E-B|=0$, 得 B 的所有特征值为 $1,1,-1$. 而对二重特征值 $\lambda=1$, 矩阵 B 仅有

$3-r(E-B)=1$个线性无关的特征向量，因此B不与对角矩阵相似. 由相似关系的传递性可知，A与B不相似.

六. （12%）设$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，其中A是三阶实对称矩阵，A不可逆，并且A的属于特征值$\lambda=2$的特征向量有$\alpha_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

1. 求二次型$f(x)$的表达式;
2. 用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换.

解: 由于A不可逆，A必有一个特征值为 0. 设属于特征值$\lambda=0$的一个特征向量是α_3，由于A实对称，故$\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle=0$，$\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle=0$，因此可取$\alpha_3=(-1,0,1)$.

令$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\alpha_3$；

再令$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，则有$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$，

故$A=Q\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

因此可得

1. 二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$.
2. 经正交变换$x=Qy$，二次型f化为标准形$2y_1^2+2y_2^2$.

七. （8%）证明题:

1. 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2$，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关. 向量$\beta$是齐次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\end{cases}$的非零解，证明$\alpha_1,\alpha_2,\beta$线性无关.

证明: 设有三个数k_1, k_2, k_3, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta = 0 \text{-------------(1)}$$

由于β是齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$的非零解, 故$\langle \alpha_1, \beta \rangle = 0$, $\langle \alpha_2, \beta \rangle = 0$, 因此

$$\langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_3\beta \rangle = 0 \text{-------------(2)}$$

由(1)知, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = -k_3\beta$, 代入(2)得$\langle -k_3\beta, k_3\beta \rangle = 0$, 因而$k_3\beta = 0$. 而$\beta \neq 0$, 故$k_3 = 0$.

代入(1)得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$, 又因为$\alpha_1, \alpha_2$线性无关, 故$k_1 = k_2 = 0$.

因此$\alpha_1, \alpha_2, \beta$线性无关.

2. 设A是可逆实对称矩阵, 证明对任意自然数N, $\sum\limits_{k=-N}^{N} A^{2k+1}$与$A$合同.

证明: 由于A实对称, 故存在正交矩阵Q, 使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值. 由于$A$可逆, 故$\lambda_i \neq 0, \forall i$.

设$f(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} x^{2k+1}$, 则$f(A) = \sum\limits_{k=-N}^{N} A^{2k+1}$. 容易验证, $f(A)$实对称, 且

$$Q^{\mathrm{T}}f(A)Q = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

若$\lambda_i > 0$, 则$f(\lambda_i) > 0$; 若$\lambda_i < 0$, 则$f(\lambda_i) < 0$. 所以$f(A)$与A有相同的秩和正惯性指数, 因而合同.