§4 特殊类型初等函数的不定积分

1 有理函数的积分

有理分式函数 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)},$

$P_n(x), Q_m(x)$ 分别是 n, m 次多项式，且没有公因式，

这时 $R(x)$ 称为既约分式.

当 $n<m$ 时，称 $R(x)$ 为有理真分式;

当 $n\ge m$ 时，称 $R(x)$ 为有理假分式.

有理假分式可以分解成: 多项式+有理真分式.

有理假分式的分解

例如分解式 $\dfrac{x^5+2x^4+x^2+1}{x^3+1}=x^2+2x-\dfrac{2x-1}{x^3+1},$

多项式除法的步骤如下:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 \quad +2x \\ \cline{2-2}
x^3+\quad+\quad+1 \big) & x^5+2x^4+\quad+x^2+\quad+1 \\
 & x^5+\qquad\qquad\quad +x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2x^4 \\
 & \qquad 2x^4+\qquad\quad +2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -2x+1
\end{array}
$$

有理真分式的分解

设 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 是实系数既约真分式，则代数学理论知:

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\gamma}\cdots(x^2+sx+t)^{\mu},$$

及 $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots\frac{C_\gamma x+D_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma}+\cdots.$$

例如 $$\frac{x^5-5}{(x-2)^3(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{(x-2)^3}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

有理函数的积分

对有理函数的积分可分解成对多项式的积分, 及

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^m}, \qquad \int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x \; (p^2-4q<0).$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^m} = \begin{cases} \ln|x-a|+C, & m=1, \\ \dfrac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C, & m>1. \end{cases}$$

对第二部分，分解 $Cx+D=\dfrac{C}{2}(2x+p)+D-\dfrac{pC}{2},$

$$\int \frac{(2x+p)\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \begin{cases} \ln|x^2+px+q|+C, & n=1, \\ \dfrac{1}{(1-m)(x^2+px+q)^{n-1}}+C, & n>1. \end{cases}$$

有理函数的积分

对常数部分，先配方

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+a^2,$$

转换成求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(t^2+a^2)^n},$

这个积分可以用递推公式

$$I_n=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

和下式求出.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

实际解题时，**(1)** 分解 $Q_m(x)$， **(2)** 分解分式， **(3)** 逐个积分.

积分举例

例1 求 $\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{3x+4}{x^2+x-6} = \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2}.$

等式两边乘以 $(x+3)(x-2)$,

$$3x+4 = A_1(x-2) + A_2(x+3) = (A_1+A_2)x + (-2A_1+3A_2),$$

比较系数得 $\begin{cases} 3 = A_1 + A_2, \\ 4 = -2A_1 + 3A_2. \end{cases}$ 解得 $A_1 = 1, A_2 = 2.$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x+3| + 2\ln|x-2| + C.$$

另一个解 A_1, A_2 的方法是在 $3x+4 = A_1(x-2) + A_2(x+3)$

中令 $x=-3$ 得 $A_1 = 1,$ 令 $x = 2$ 得 $A_2 = 2.$

例2 求 $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

等式两边乘以 $(x+1)^2(x-1),$

$$1=A(x^2-1)+B(x-1)+C(x+1)^2,$$

令 $x=1$ 得 $C=\dfrac{1}{4},$ 令 $x=-1$ 得 $B=-\dfrac{1}{2},$

再比较 x^2 的系数得 $A+C=0,$ $A=-\dfrac{1}{4}.$

$$\int\frac{1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|x-1|+C.$$

例3 求 $\int \frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

等式两边乘以 $x^3-1,$ $1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1),$

令 $x=1$ 得 $A=\frac{1}{3},$ 令 $x=0$ 得 $C=-\frac{2}{3},$

再比较 x^2 的系数得 $A+B=0,$ $B=-\frac{1}{3}.$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例4 求 $\int \frac{2x^3+5x^2+12x+6}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x.$

解 设 $\frac{2x^3+5x^2+12x+6}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{B_1x+D_1}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{B_2x+D_2}{x^2+2x+5},$

等式两边乘以 $(x^2+2x+5)^2,$

$$2x^3+5x^2+12x+6=B_1x+D_1+(B_2x+D_2)(x^2+2x+5)$$

$$=B_2x^3+(2B_2+D_2)x^2+(B_1+5B_2+2D_2)x+D_1+5D_2,$$

比较系数得 $B_2=2, D_2=1, B_1=0, D_1=1.$

即得 $\frac{2x^3+5x^2+12x+6}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{2x+1}{x^2+2x+5}.$

积分举例

$$\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+5}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \frac{x}{x^2+2x+5} - \int \frac{-x(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2x+5} + \int \frac{2(x^2+2x+5)-(2x+2)-8}{(x^2+2x+5)^2}dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2x+5} + 2\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2} - \int \frac{8}{(x^2+2x+5)^2}dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2x+5} + 2\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx + \frac{1}{x^2+2x+5} - \int \frac{8}{(x^2+2x+5)^2}dx,$$

所以 $$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx\right)$$

积分举例

$$\int \frac{2x+1+\frac{1}{8}}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \frac{7}{8}\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx \qquad \frac{2x+1+\frac{1}{8}}{x^2+2x+5}$$

$$= \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{8}\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1)$$

$$= \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

所以 $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+12x+6}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} + \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

2. 三角函数有理式的不定积分

三角函数有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算生成的函数类.

例如 $\dfrac{1}{3+5\cos x}$, $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

基本方法是用万能代换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 即 $x=2\arctan t$.

这时 $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 代入后成为有理函数的积分.

例5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{1}{4-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.$$

3. 简单无理函数的不定积分

讨论 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 和 x 的有理式，作变换 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 使其成为 t 的有理式.

例6 求 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$，则 $t^2=\dfrac{x+2}{x-2}$，$x=\dfrac{2(t^2+1)}{t^2-1}$，

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(t^2-1)t}{2(t^2+1)}\frac{-8t}{(t^2-1)^2}dt=\int\frac{4t^2}{(t^2+1)(1-t^2)}dt$$

$$=2\int(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2})dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C$$

$$=\ln\left|1+\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right|-\ln\left|1-\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C.$$

例7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

解 由于 $\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} = (x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}$,

令 $t^3 = \frac{x-1}{x+2}$, 则 $x = \frac{1+2t^3}{1-t^3}$, $\mathrm{d}x = \frac{9t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}} = \int \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1+2t^3}{1-t^3}+2\right)\cdot t^2} \cdot \frac{9t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{3}{1-t^3}\mathrm{d}t$$

积分举例

$$=\int\frac{3}{1-t^3}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\int\frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+t)^2}$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t+t^2|+\sqrt{3}\arctan\frac{1+2t}{\sqrt{3}}+C'$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}|+\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+2}+2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}+C.$$