多元积分学 (2021. 10)

1. 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$, $D:\ x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$. $(=\frac{16}{15})$

2. 计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 为以$(1,0)$ 为中心, $R(R\neq 1)$ 为半径的正向圆周. (上半圆呢?) (2π)

3. 122 计算 $\iint_\Sigma \dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$ 的上侧 (常数 $a>0$). $(=-\frac{\pi}{2}a^3)$

4. 已知常向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 满足 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$.
   (1) 证明：$\mathrm{rot}[(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{b}]=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$;
   (2) 求向量 $\overrightarrow{A}=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{b}$沿闭曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ (从 z 轴正向看去逆时针方向) 的环流量. $\left(=\sqrt{3}\pi\right)$

5. 6216 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A>0$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 及其边界上连续且 $f(x,y)>0$, 证 $I_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma\right)^n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

6. 524 设 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$, $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, 其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有二阶连续偏导, 若 $\forall x,y$, 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明 $I\le\frac{A}{4}$.

7. 证明：$\iint_D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})d\sigma=\oint_L\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}ds$. 其中$u(x,y)\in C^2(D)$, 光滑曲线 $L=\partial D$, $\overrightarrow{n}$ 为 L 的外法向.

8. 设$f(x,y)\in C^2(D)$, $D:x^2+y^2\le 1$, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$. 证: $\iint_D(xf_x+yf_y)d\sigma=\frac{\pi}{2e}$.

9. 316 证明: $\iint_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du$, 其中 $f\in C$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

10. 716 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导, $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 证明 $\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)d\sigma\right|\le\frac{\sqrt{M}}{4}\pi$.

11. 216 设函数 $\varphi(y)$ 连续可导, 且已知在围绕原点的任意逐段光滑简单闭曲线 C 上的曲线积分 $\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值恒为同一常数.
    (1) 设 L 为正向曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明 $\oint_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$;
    (2) 求 $\varphi(x)$ 的表达式; $\left(=-x^2\right)$
    (3) 设 L 为任一围绕原点的逐段光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

12. 525 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导，$P = Q = R = f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$，有向曲面 Σ 为圆柱体 $x^2+y^2 \le t^2$，$0 \le z \le 1$ 的表面外侧. 记 $I(t) = \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{I(t)}{t^4}$. $\left(= \frac{\pi}{2} f'(0)\right)$

(以下为课外演练题.)

13. 设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导，且 $f(1,y) = f(x,1) = 0$, $\iint_D f(x,y)dxdy = a$, D : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，求 $\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$. $(= a)$

14. 516 设 $I_a(r) = \oint_L \frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$,其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^+xy+y^2 = r^2$, 取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$. $(= 0(a>1),\ -\infty(a<1),\ -2\pi(a=1))$

15. 416 设函数 $f(x)$ 连续, 区域 Ω 由抛物面 $z = x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2 = t^2(t>0)$ 所围成. $F(t) = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dV$. 求导数 $F'(t)$. $(= \pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\,)tf(t^2))$

16. 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1$, Ω : $x^2+y^2 = t^2\ (t>0), 0 \le z \le h$, 又 $F(t) = \iiint_\Omega (z^2+f(x^2+y^2))dv$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$. $\left(= \pi(h+\frac{1}{3}h^3)\right)$

17. $f(x,y)$ 定义于 D : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，$f(0,0) = 0$, 且 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 处可微. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$. $\left(= f_y(0,0)\right)$

18. 设$f(x)$在 $[0,1]$ 上连续且单减, $f(x) > 0$. 证:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

19. 设f, $g \in C[a,b]$, 且同为单增(减), 证明:

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

20. 设 P_0 是半径为 R 的球体表面上的一点, 已知该球体上任一点处的密度与它到 P_0 的距离成正比（比例系数为 $k>0$）. 求球体的重心位置. $\left(= \left(-\frac{R}{4}, 0, 0\right)\right)$

21. 813 某物体所在立体区域为 Ω : $x^2+y^2 \le x+y+2z$. 密度为 $x^2+y^2+z^2$. 求质量 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$. $(= \frac{3+2\sqrt{2}}{6}\pi)$

22. 215 设 l 过原点, 方向为 (α,β,γ), (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$)的直线, 均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ $(a>b>c>0$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

    1) 求其转动惯量.

    2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值与最小值. $(J_e = \frac{4}{15}abc\pi((1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma)^2c^2))$. $(J_{max} = \frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2),\ J_{min} = \frac{4abc\pi}{15}(b^2+c^2))$

23. 设函数 $f(u)$ 连续可导. 试计算

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3\right] dzdx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3\right] dxdy,$$

其中 Σ 为锥面 $x = \sqrt{y^2+z^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体的表面外侧. $\left(= \frac{93\pi}{5}(2-\sqrt{2})\right)$

24. 614 (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-)h^2$, 球冠的面积为$2\pi Rh$;

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 W. 记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydzydzdxzdxdy$.

25. 求 $I = \iint_{\Sigma} rot\overrightarrow{F} \cdot dS$, 其中 $\overrightarrow{F} = (x-z, x^3+yz, -3xy^2)$, $\Sigma: z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ $(z \geq 0)$, 取上侧. $(= 12\pi)$

26. 设 $u = u(x,y,z) \in C^2$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 试求 $\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$, $\overrightarrow{n}$ 为该球面的外法向量. $\left(= \frac{8}{5}\pi\right)$

27. 设对于半空间 $x > 0$ 内的任意光滑有向封闭曲面 S 都有

$$\oiint_{S} xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$. 求 $f(x)$ 的表达式. $\left(= \frac{e^x}{x}(e^x - 1)\right)$

28. 515 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 取外侧, 第二型曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^3 - x)dydz + (2y^3 - y)dzdx + (3z^3 - z)dxdy.$$

试确定曲面 Σ, 使得 I 的值最小, 并求出最小值. $(\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1,\ I_{min} = \frac{4}{15}\sqrt{6}\pi)$

29. 225 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=0, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 $z \geq 0$, 取上侧, Π 是 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示的正法向的方向余弦. 计算：
(1) $\iint\limits_{S} \frac{z}{\rho(x,y,z)} dS$; (2) $\iint\limits_{S} z(\lambda x, 3\mu y, \nu z)dS$.

30. 626 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数, 若极限 $I = \lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leq t^2} f(x,y)d\sigma$ 存在, 则称广义积分 $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I.
(1) 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续, 且 $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I. 证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{-t\leq x,y\leq t} f(x,y)d\sigma$ 存在且收敛于 I;
(2) 若 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{ax^2+bxy+cy^2} d\sigma$ 收敛于 I, 其中实二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 在正交变换之下的标准型为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$. 证明 λ_1, λ_2 均小于 0.