一、 格林公式

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （**格林公式**）

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D 是单连通域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价:

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

(2) 对D 中任一分段光滑曲线 L，曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起止点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分，

即 $$\mathrm{d}\,u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

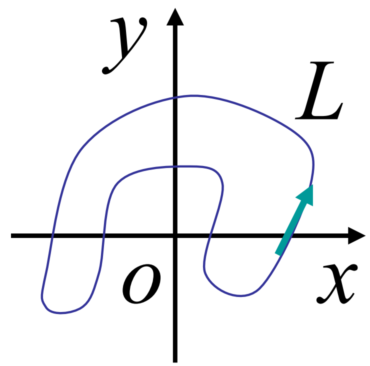
例. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

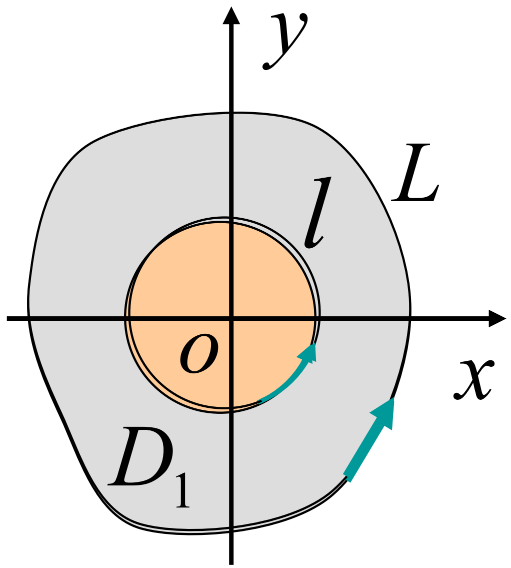
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时, 在D 内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1 , 对区域 D_1 应用格林公式 , 得



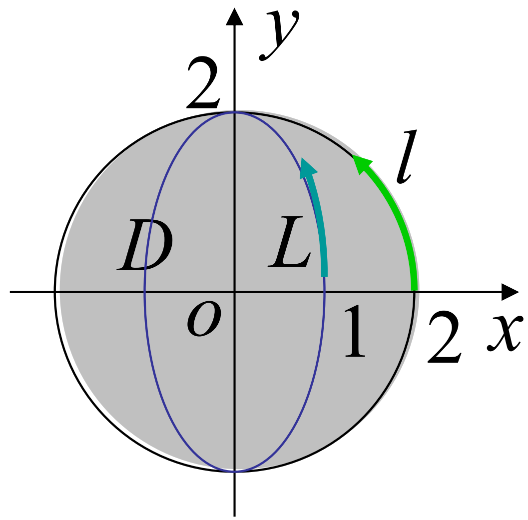
$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\therefore \quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

思考与练习



1. 设 $L: x^2+\frac{1}{4}y^2=1,\ l: x^2+y^2=4$，

且都取正向，问下列计算是否正确？

(1) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\pi$$

(2) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\pi$$

提示: $x^2+y^2\neq 0$时

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}$

(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

第四节 对面积的曲面积分

一、第一型曲面积分的概念与性质

二、第一型曲面积分的计算法

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d} S$$

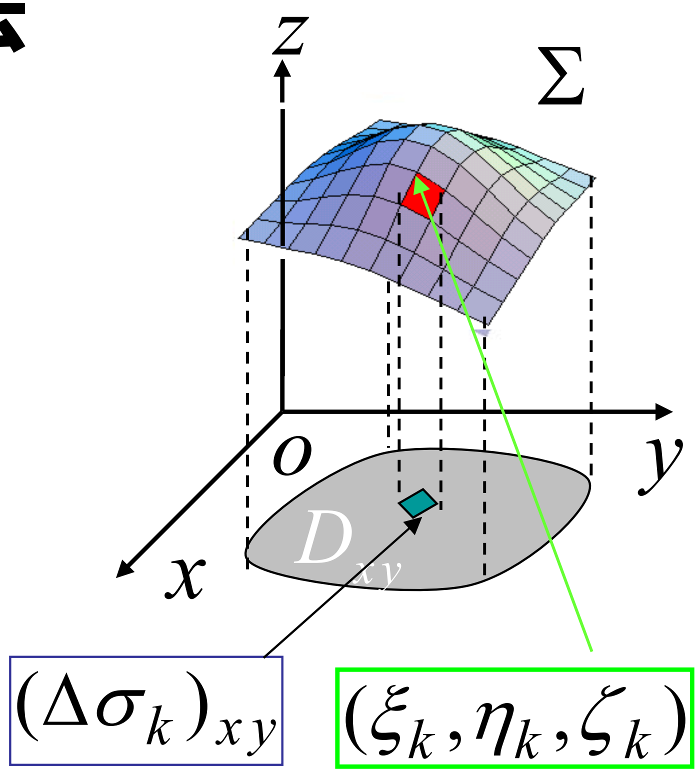
都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) \mathrm{d} S$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d} S$

二、第一型曲面积分的计算法

定理： 设有光滑曲面



$$\Sigma: z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: 由定义知

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k',\eta_k')+z_y{}^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\underline{\xi_k,\eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})+z_y{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k,\eta_k)+z_y{}^2(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$$

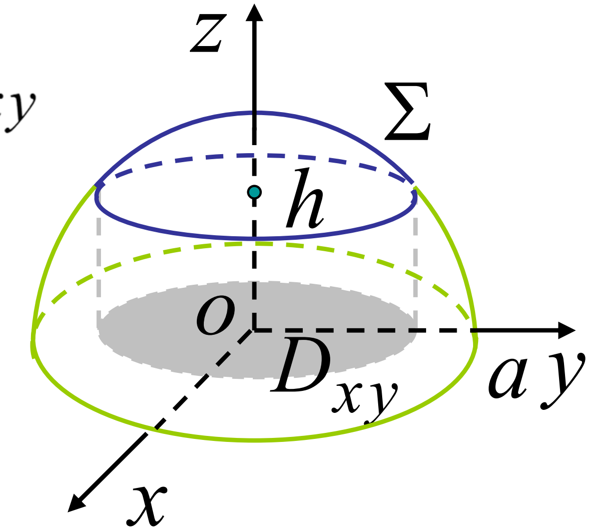
或 $$y = y(x,z),\ (x,z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下$\mathrm{d}S$的表达式 , 也可将第一型曲面积分转化为对参数的二重积分. (见本节后面的例4, 例5)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\sum : z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

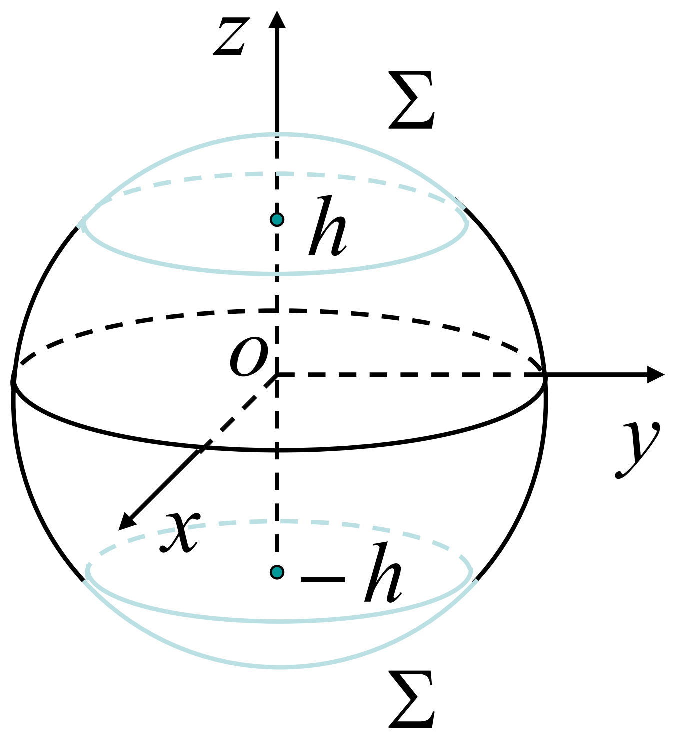
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

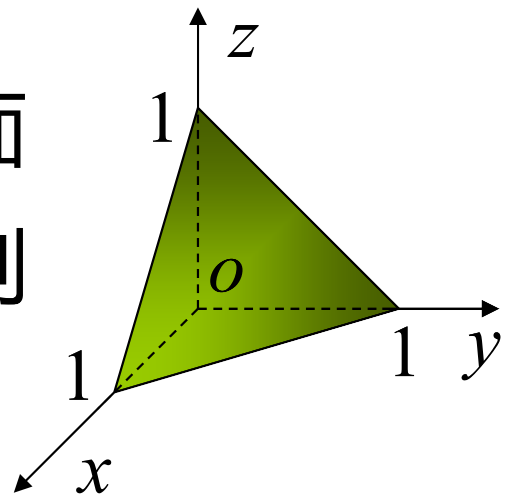
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad 0 \qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{\mathrm{h}}\quad)$$



例2. 计算$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

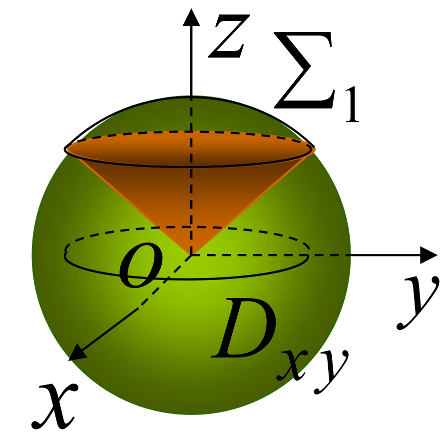
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4: z = 1-x-y,\quad (x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} 0\le y\le 1-x \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2, z^2=\frac{1}{2}a^2$.

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$,则

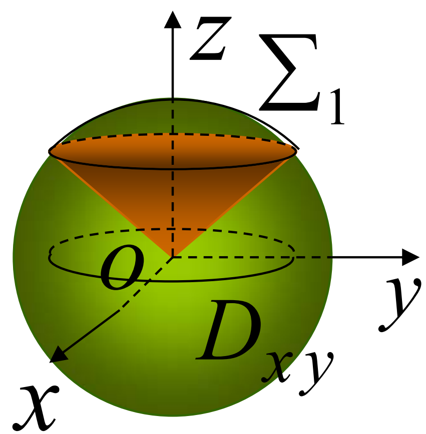
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$



思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & 当 |z|\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & 当 |z|<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

计算结果如何 ?

例4. 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的重心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $x_G=y_G=0$, 而

$$z_G=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

用球坐标

$$z=R\cos\varphi$$

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

思考题: 例 3 是否可用直角坐标计算 ?

例5. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R)$, $\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: 取球面坐标系, 则 $\Sigma: z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi}{\lambda-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\varphi)}{\lambda-R\cos\varphi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

例6. 计算 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\cdot x_G\cdot\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\cdot1\cdot4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

利用重心公式

$$x_G=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S\Big/\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

试试用球面坐标计算！

例7. 计算$I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面

$z=0, z=H$之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)

两片, 则计算较繁.

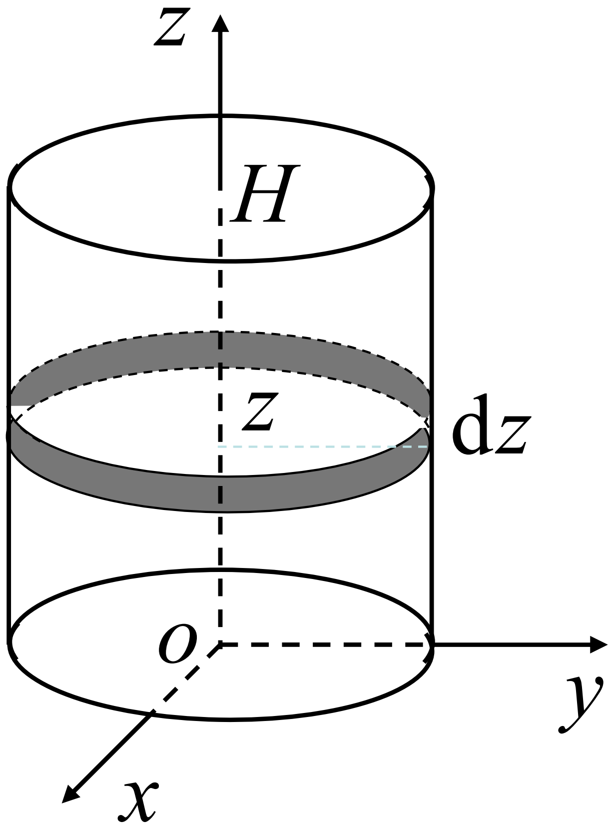
解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$



例8. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xoy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S .

解: $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

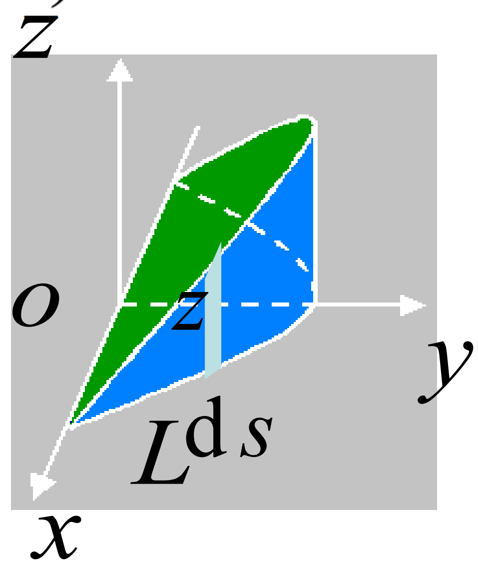
$L: x=\sqrt{5}\cos t\ ,\ y=3\sin t\quad(0\le t\le\pi\ )$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$

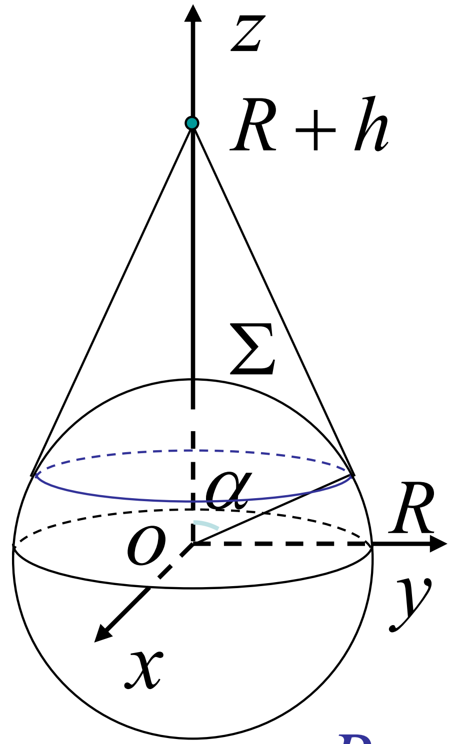
$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$



例9. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面高度 $h = 36000$ km, 运行的角速度与地球自转角速度相同, 试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比. (地球半径 $R = 6400$ km)



解: 建立坐标系如图, 覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α, 利用球坐标系, 则

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

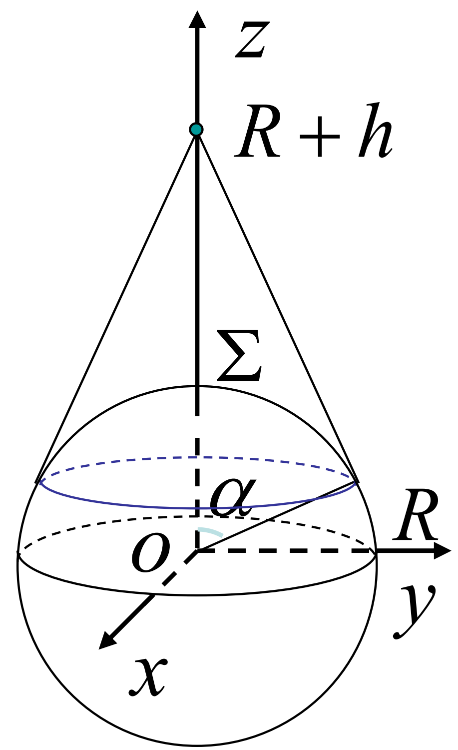
$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2} = \frac{h}{2(R+h)}$$

$$= \frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6} \approx 40.5\,\%$$



由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $\frac{1}{3}$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $\frac{2\pi}{3}$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A.

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$,则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.