小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x,\ y,\ z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

  如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

  $$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,z)=0$$

- 柱面

  如,曲面 $F(x,\ y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

  又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

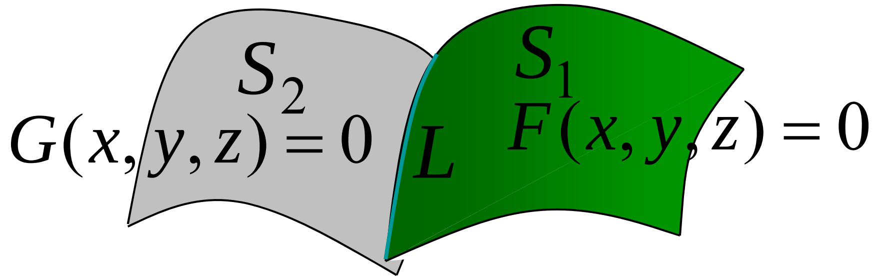
2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: 椭圆抛物面 双曲抛物面
  $(p,q$ 同号)
  $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$
- 双曲面: 单叶双曲面 双叶双曲面
  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



二、空间曲线的参数方程

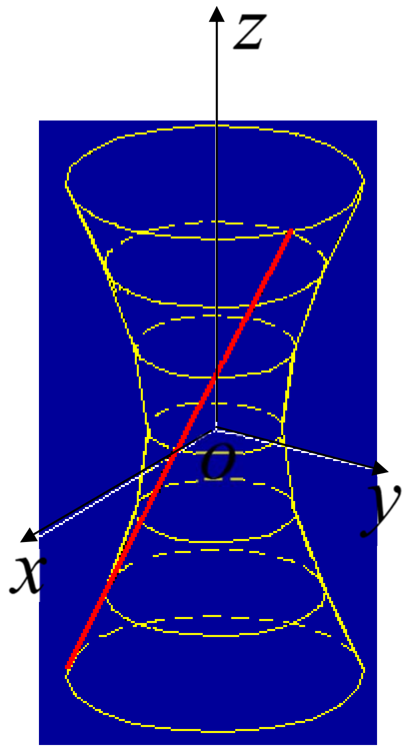
将曲线***C***上的动点坐标*x, y, z*表示成参数*t* 的函数:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.

例如， 直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{1+t^2}\,\sin\theta \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty < t < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$



消去 t 和 θ, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2 + y^2) - z^2 = 4$$

又如，*xoz* 面上的半圆周 $\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

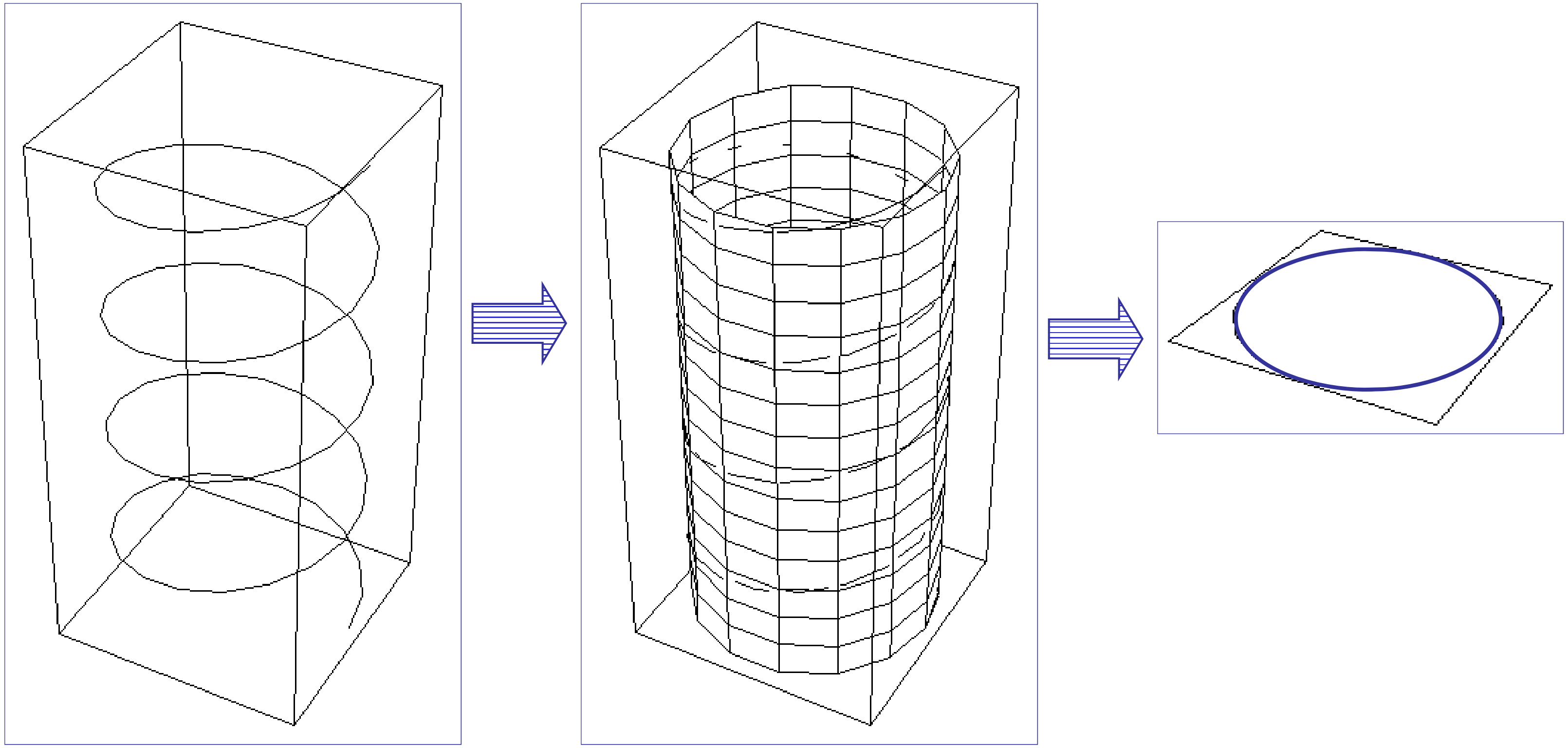
绕 z 轴旋转所得旋转曲面 (即球面) 方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

说明: 一般曲面的参数方程含两个参数 , 形如

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

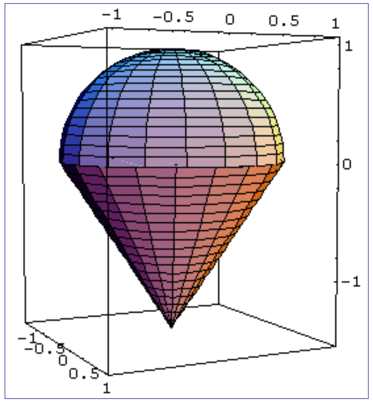
三、空间曲线在坐标面上的投影

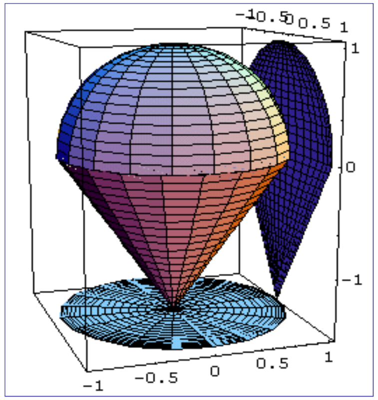


空间曲线　　投影柱面　　投影曲线

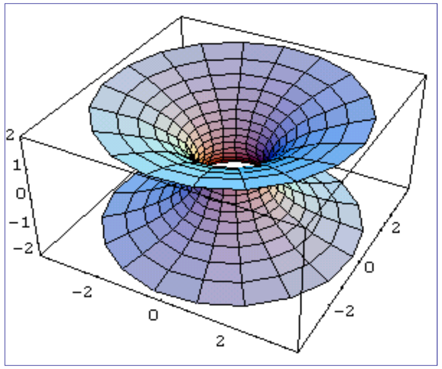
空间立体或曲面在坐标面上的投影.

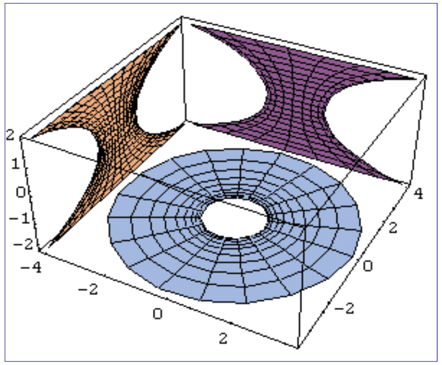
空间立体





曲面

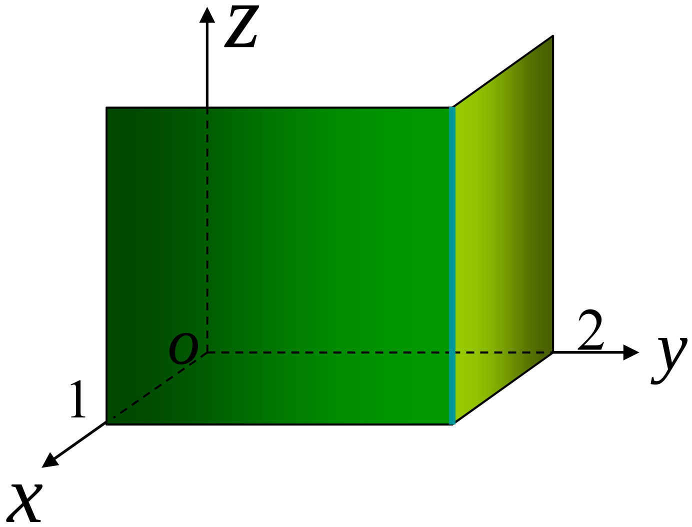




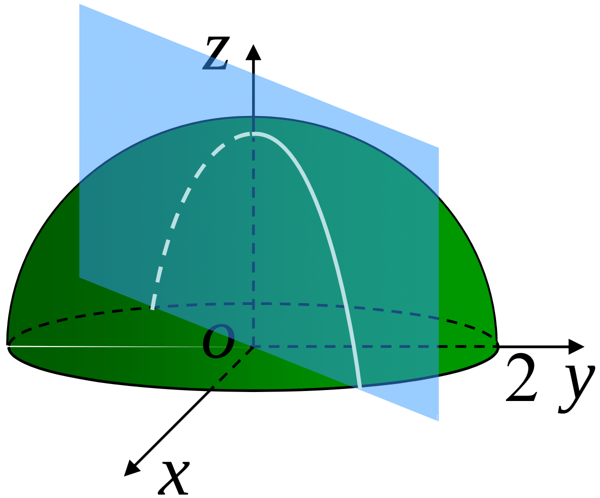
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

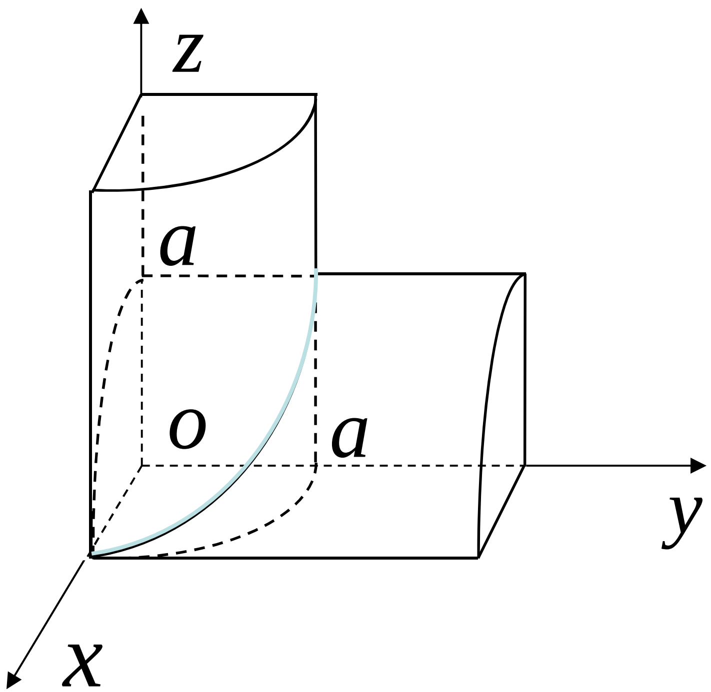
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



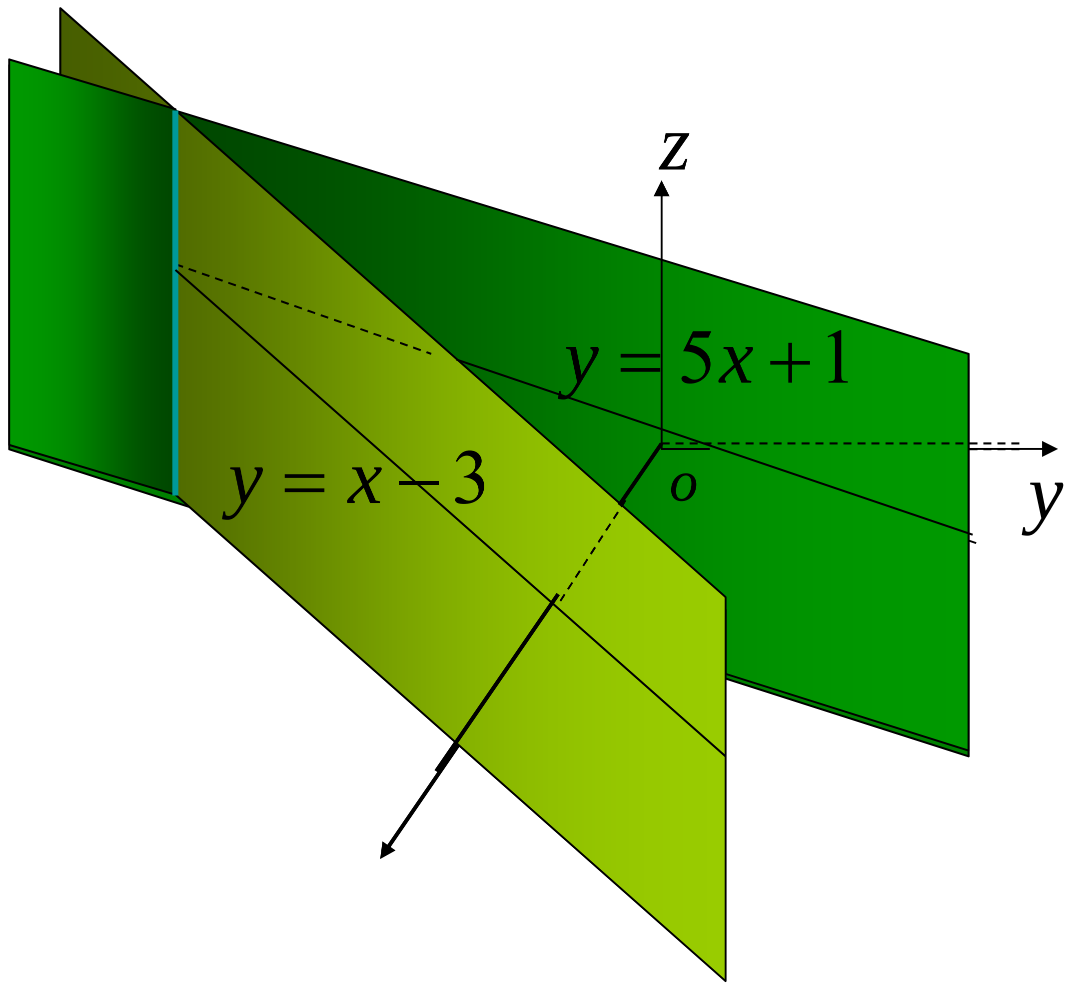
(2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$



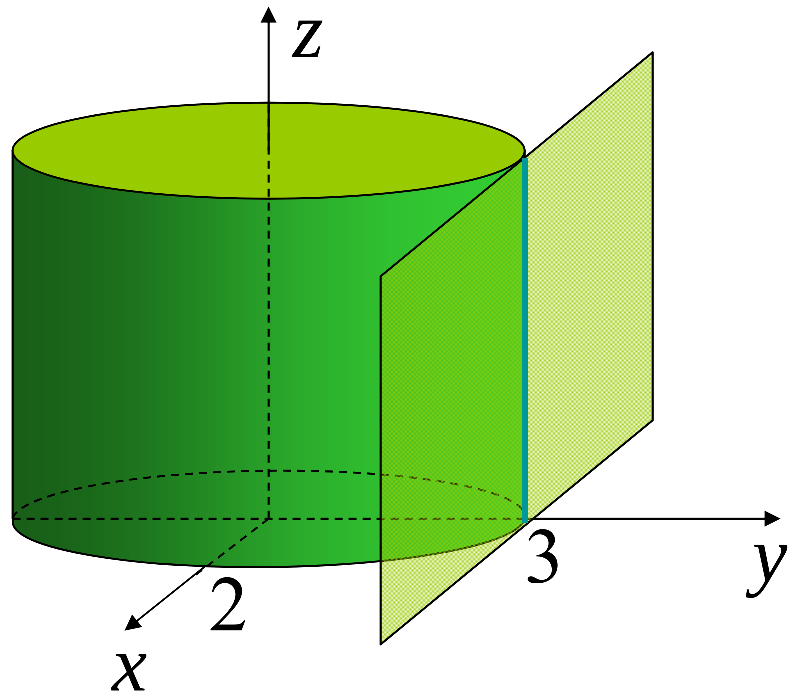
(3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$



(4) $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$



(5) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$



思考： 对平面 $y = b$

当 $|b| < 3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b| > 3$ 时, 交线情况如何?

第八章

多元函数微分学
及其应用

一元函数微分学

$\Big\downarrow$ 推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

第一节 多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一、 区域

1. 邻域

点集$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$,称为点 P_0 的δ邻域.

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

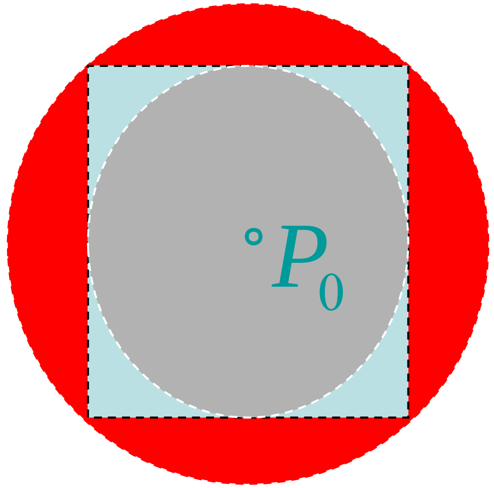
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

说明：若不需要强调邻域半径δ，也可写成$U(P_0)$.

点 P_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域，因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

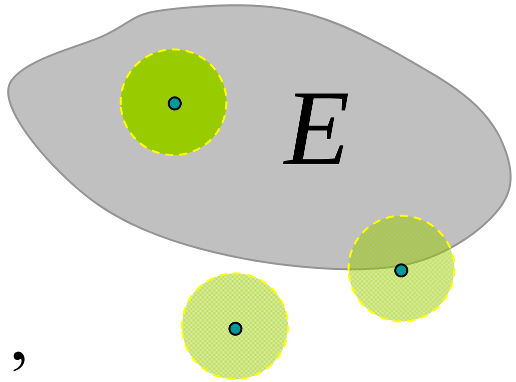


平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid |x-x_0| < \delta,\ |y-y_0| < \delta\}$$

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点



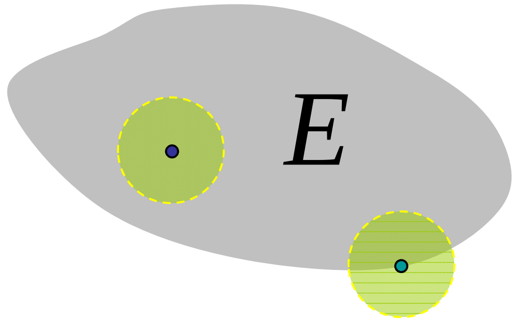
设有点集 E 及一点 P:

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的**外点** ;
- 若对点 P 的**任**一邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点 , 则称 P 为 E 的**边界点** .

显然, E 的内点必属于 E , E 的外点必不属于 E , E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

(2) 聚点

若对任意给定的δ，点P的去心邻域$U^{\circ}(P,\delta)$内总有E中的点，则称P是E的**聚点**.

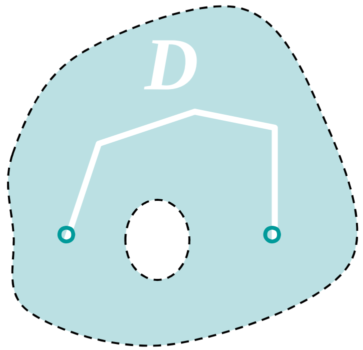


聚点可以属于E，也可以不属于E (因为聚点可以为E的边界点)

E的内点一定是E的聚点，外点一定不是聚点，边界点可能是聚点，也可能不是聚点。

(3) 开区域及闭区域

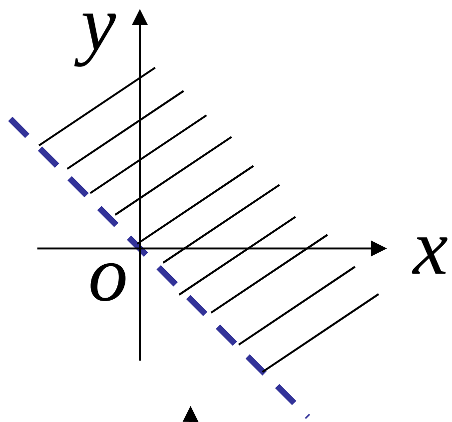
- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作 ∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集;
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域 ;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

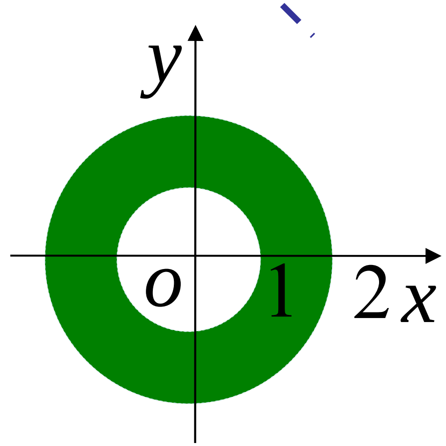


例如，在平面上

- ♣ $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- ♣ $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

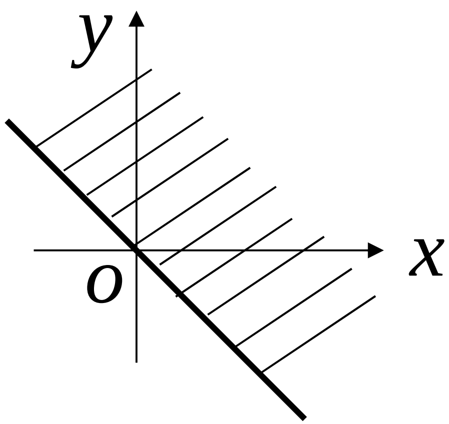
开区域

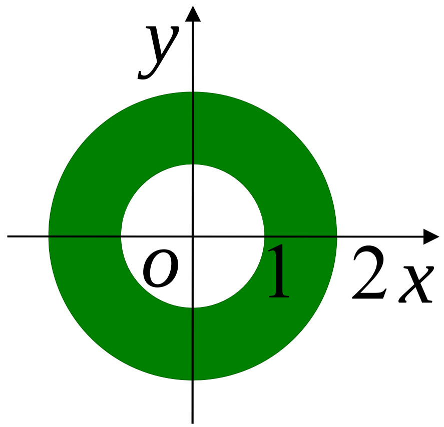




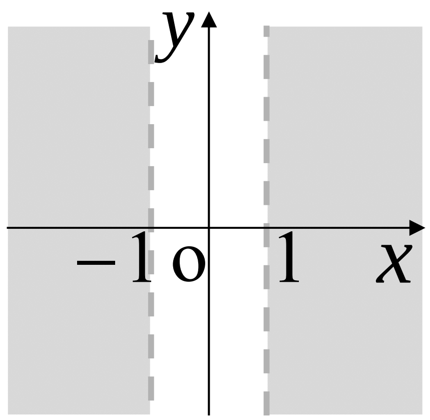
- ♣ $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- ♣ $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域





- ♣ 整个平面 是最大的开域，
  也是最大的闭域;
- ♣ 点集 $\{(x,y) \mid |x|>1\}$ 是开集，
  但非区域 .



- 对区域 D, 若存在正数 K, 使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$, 则称 D 为**有界域**, 否则称为**无界域** .

3. *n* 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 ***n* 维空间**, 记作 R^n,即

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$$
$$= \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n \}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为空间中的一个**点**, 数 x_k 称为该点的第 k 个**坐标** .

当所有坐标 $x_k = 0$ 时，称该元素为 R^n 中的零元,记作 O .

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与点$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的**距离**记作$\rho(x,y)$或$\|x-y\|$，规定为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零元O的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当$n=1,2,3$时，$\|x\|$通常记作$|x|$.

R^n中的变元x与定元a满足$\|x-a\|\to 0$记作$x\to a$.

R^n中点a的$\boldsymbol{\delta}$**邻域**为

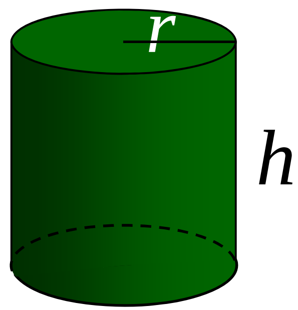
$$U(a,\delta)=\{\,x\,|\,x\in\mathrm{R}^n,\rho(x,a)<\delta\,\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$



- 三角形面积的海伦公式 ($p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$