第一章 基本知识

1、实数理论与微积分有什么关系？

答：18 世纪是数学史上辉煌的时代，尽管微积分学缺乏逻辑上的基础，却有了很大的发展。不过自微积分诞生之日起为微积分理论建立一个逻辑基础的动作就一直没停止过。19 世纪时，柯西将微积分建立在极限理论之上，严格定义并建立函数、极限、连续、导数和积分概念。他的工作激励了更多人对此问题的投入。魏尔斯特拉斯第一个认识到分析工作的严密化的先决条件是实数系统的严密化，为此他从有理数基础上导出了无理数的概念。最终有戴德金、康托尔、佩亚诺完成了实数系的逻辑结构。至此，微积分理论在实数完备性理论的基础上终于建成。

虽然教科书上都是先介绍实数理论，历史的发展却是为寻找微积分理论的逻辑基础而导致了实数理论的建立。

2、如何判断函数的有界性或无界性？

答：判断函数 $f\left(x\right)$ 的有界性可以直接由定义出发，也可由函数及其运算性质来判断。

例：证明 $f\left(x\right)=5+\sin x+\cos x+\arctan x$ 为有界函数。

证：因 $\left|\sin x\right|\le 1,\quad \left|\cos x\right|\le 1,\quad \left|\arctan x\right|\le \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 5-1-1-\dfrac{\pi}{2}\le f\left(x\right)\le 5+1+1+\dfrac{\pi}{2}$ 或 $0<f\left(x\right)<10$

注意：找某一函数的界，不一定要找出其上确界（或下确界），因为有一个上（下）界就有无穷多个上（下）界，适当对函数放缩，可使计算容易。这里关键是界的“存在”性。

证明函数无界一般可按定义证。

例：证明 $f\left(x\right)=x\sin x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上无界。

证：任取 $M>0$，存在正整数 m，使 $2m\pi>M$，取 $x_m=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$

则 $f\left(x_m\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi>M$

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上无界。

3、单调函数存在反函数，存在反函数的函数是否一定单调？

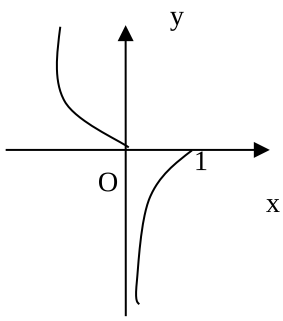
答：不一定。函数的单调性只是函数存在反函数的一个充分条件。一个函数存在反函数，取决于它的对应规则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应关系。如果是一一对应，则必有反函数，否则就没有反函数。

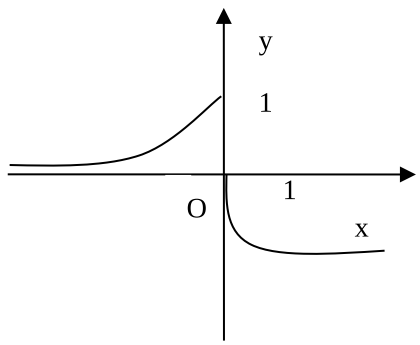
例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1\le x\le 0 \\ \ln x & 0<x\le 1 \end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调。如图，但它却有反函数（图）

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} e^x & -\infty<x\le 0 \\ -\sqrt{x} & 0<x\le 1 \end{cases}$$





4、分段函数一定不是初等函数吗？

答：初等函数是初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算和有限次复合运算所得到的能用一个解析表达式表示的函数。若分段函数能用一个解析表达表示出来，则它也是初等函数。例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

也可以写成 $f(x)=\sqrt{x^2}$，因此这 $f(x)$ 是初等函数。

5、如何正确地写出否命题。

答：在理解一些概念和进行逻辑推理时，有时要求写出否命题。判定否命题是否正确的方式是：在任何情况下，命题与其否命题，必须也只能有一个是正确的。一般来说在写命题的否命题时相当于进行“否操作”。即把$\forall$（任给）改为$\exists$（存在），把$\exists$改为$\forall$，把最后判断词中$=,\le,<$等改为$\ne,>,\ge$即可。

例：命题 $f(x)$ 在数集 D 上单调增：$\forall x_1,x_2\in D,\quad x_1<x_2$ 有 $f(x_1)\le f(x_2)$。

其否命题为 $f(x)$ 在 D 上不单调增：$\exists x_1,x_2\in D,\quad x_1<x_2$ 有 $f(x_1)>f(x_2)$。

命题 $f(x)$ 在对称于原点的数集 D 上为奇函数：$\forall x\in D,\quad f(-x)=-f(x)$

其否命题：$f(x)$ 在 D 上不为奇函数：$\exists x\in D,\quad f(-x)\ne -f(x)$

命题 $f(x)$ 在 D 上有界：$\exists M>0,\quad \forall x\in D,\quad |f(x)|\le M$

其否命题：$f\left(x\right)$在D上无界：$\forall M>0,\quad \exists x\in D,\quad \left|f\left(x\right)\right|>M$

命题$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上是周期函数：$\exists T>0,\quad \forall x,\quad f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$

其否命题：$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上不是周期函数：$\forall T>0,\quad \exists x,\quad f\left(x+T\right)\neq f\left(x\right)$