仅供参考

东南大学考试卷 A 卷

课程名称 线性代数 A　考试学期 18-19-3　得　分

适用专业 非电类专业　考试形式 闭　卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

学号______ 姓名______ 密　封　线

一． (30%)填空题（E 表示单位矩阵）

1. 设 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，$B=(\beta,\gamma,\alpha)$，而 $|A|=2$，则 $|A+B|=$ 4；

2. 若 α 是 3 维列向量，$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ 3；

3. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 $Q=$ $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 B，使得 $AB=O$，则 $t=$ -3；

5. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$；

6. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&1&1\\1&b&1\end{vmatrix}$，求此行列式的所有代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}=$ $1-a-b+ab$；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}5&7\\0&7\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$ 相似且 $a>0$，则 $B=$ $\begin{pmatrix}6&1\\1&6\end{pmatrix}$；

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正惯性指数为 2；

9. 设 A 是 3 阶实对称阵且满足 $A^2+3A=O$，若 $kA+2E$ 是正定矩阵，则 k 必满足 $k<\frac{2}{3}$；

10. 设 A 是 3 阶实正交矩阵，矩阵 A 的第 1 行第 3 列元素 $a_{13}=1$，$b=(2,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 有一解为 $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$。

二. （**10%**）验证：$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的一组基，并求向量 $\beta_1=(5,0,7)^T$ 在这组基下的坐标。

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\because |A|\neq 0$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

又 $\because \dim R^3=3$. $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\subseteq R^3$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一组基.

解 $Ax=\beta$ 得 $x=A^{-1}\beta$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

三. （**14%**）设线性方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\ 2x_1+3x_2+kx_3=3,\\ x_1+kx_2+3x_3=2,\end{cases}$ 问：k 取何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

解 $(A,b)\xrightarrow[\text{行}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & k+2 & 1\\ 0 & 0 & (k+3)(2-k) & 2-k\end{pmatrix}$

(1) 当 $k\neq -3$ 且 $k\neq 2$ 时，有唯一解；

(2) 当 $k=-3$ 时，无解；

(3) 当 $k=2$ 时有无穷多解，$x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意数

四． （12%）已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}$，且 $AX=A^T+X$，求矩阵 X。

解：由条件 $(A-E)X=A^T$ $\because |A-E|\neq 0$ $\therefore A-E$ 可逆

$\therefore X=(A-E)^{-1}A^T$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&3\\3&2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&3\\1&5&-5\end{pmatrix}$$

五． （12%）设向量 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(1,2,0)^T,\alpha_3=(1,2,1)^T$，方阵 A 满足

$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=-\alpha_3$，

（1）求矩阵 A，

（2）求矩阵 $(A-E)^{100}$ 的秩。

解：(1) 由条件 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\because |B|\neq 0$ $\therefore B$ 可逆

$\therefore A=B\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}B^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\-1&1&-1\\1&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

(2). 由(1)得 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

$\therefore (A-E)^{100}\sim(\Lambda-E)^{100}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&(-2)^{100}\end{pmatrix}$

$\therefore r(A-E)^{100}=r(\Lambda-E)^{100}=1$

六．（12%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都是 1，

（1）求 a 的值；（2）用正交变换把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

解：二次型 f 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}$ 由条件 $r(A)=2$ ∴ $|A|=a^2+a-2=0$

(1) ∴ $a=1$ 或 $a=-2$

当 $a=1$ 时 $r(A)=1\neq 2$ 故 a 只能为 -2.

(2). A 的特征多项式 $c(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$ ∴ A 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$

解线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\theta$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 单位化得 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}\sqrt3/3\\\sqrt3/3\\-\sqrt3/3\end{pmatrix}$

$(\lambda_2E-A)x=\theta$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 单位化得 $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\0\\\sqrt2/2\end{pmatrix}$

$(\lambda_3E-A)x=\theta$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ 单位化得 $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}-\sqrt6/6\\\sqrt6/3\\\sqrt6/6\end{pmatrix}$

令 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

作正交变换 $x=Qy$

得 $f(x_1,x_2,x_3)$

$=3y_2^2-3y_3^2$

七．（10%）证明题：

1. 设 A 是 n 阶方阵，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维列向量，且 $\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

证：由条件得 $(A-E)\alpha_1=\theta$，$(A-E)\alpha_2=\alpha_1$，$(A-E)\alpha_3=\alpha_2$

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$ ① 下证 $k_i=0$，$i=1,2,3$.

在①式两边左乘 $A-E$ 得 $k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=\theta$ ②

在②式两边左乘 $A-E$ 得 $k_3\alpha_1=\theta$ ③

∵ $\alpha_1\neq\theta$ 由③得 $k_3=0$ 再代入②得 $k_2\alpha_1=\theta$ ∴ $k_2=0$ k_1,k_2 代入 由① 得 $k_1\alpha_1=\theta$ ∴ $k_1=0$

2. 设 A,B 分别为 n 阶矩阵，且 A 有 n 个互不相同的特征值，已知 $AB=BA$，证明：存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都为对角阵。

证：∵ A 有 n 个不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

∴存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

∵ $AB=BA$

∴ $P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$

∴ $\Lambda(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)\Lambda$

∵ λ_i 两两不等 $i=1,2,\cdots,n$ ∴ $P^{-1}BP$ 为对角阵