2010级高数上册期末试题

一 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）设 $s>0, I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx (n=1,2,\cdots)$，则$I_n=$_____.

（2）若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点（$-1,0$），则$b=$_____.

（3）曲线$y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$的渐近线方程为_____.

（4）当$0\le\theta\le\pi$时，曲线$r=e^{\theta}$的弧长为_____.

（5）设$f'(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan)}{x}=$_____.

二 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

(1) 下列命题正确的是

(A) $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导

(B) 若 $f'(x)=x^2$ (偶函数)，则 $f(x)$ 必是奇函数

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ (常数)，则 $f'(0)=a$

(D) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln(1-x^2)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=-1$

D

(2) 设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

(3)曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，则$a=$(　　)

(A)4e　　(B)3e

(C)2e　　(D)e

（4）积分$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$(　　)

(A)0　　(B)$\dfrac{4}{3}$

(C)1　　(D)-1

（5）函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为（　　）

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)无穷多个

三 解答题（共 70 分。其中：5 学分的 7 道题全做，每题 10 分；4 学分的（7）题为必做题 10 分，然后再任选 5 道题，每题 12 分）

(1)设$f(u,\ \upsilon)$具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}=1$，又$g(x,\ y)=f[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

(2)设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

问a为何值时，$f(x)$在$x=0$连续；a为何值时，$x=0$是$f(x)$的可去间断点？

(3)设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\dfrac{e^u}{u}\mathrm{d}u\ (t>1)\end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|x=9$

(4)设$f(x)$有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)>0$，又设$u=u(x)$是曲线$y=f(x)$在点$(x,\ f(x))$处的切线在x轴上的截距，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}$.

(5)已知$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，且$f(0)=g(0)=0$，试求$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}]$.

(6) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在（0,1）上可导，$f(0)=0,f(1)=1$,

试证：对任意给定的正数a,b,在（0,1）内存在不同的ξ，η,

使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

(7) 证明函数$z=(1+e^y)\cos x-ye^y$有无穷多个极大值点，但无极小值点。

高等数学参考答案

一 填空题（每小题 3 分，共 15 分） (平时成绩 20 分,期末成绩 80 分)

（1） $\frac{n!}{s^{n+1}}$ **（2）3（3）** $y=2x$ **（4）** $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$ **（5）2**

二 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

（1） D（2）C（3）C （4）B（5）C

三 解答题（共 70 分，每题 10 分）

(1) 解 因为 $\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$, $\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$……………………………………(2分)

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \upsilon}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \upsilon}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$………………………………………(8分)

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial g^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}=x^2+y^2$……………………(10分)

(2) $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=-6a$

$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$

$=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}=2(a^2+2)$………………………………(6分)

$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$

得 $a=-1$ 或 $a=-2$

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点…………….(10分)

(3) 解：由 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}.\frac{2}{t}=\frac{2et}{1+2\ln t}$, $\frac{dx}{dt}=4t$

得 $\frac{dy}{dx}=\frac{e}{2(1+2\ln t)}$,…………………………………………………………………….(4分)

所以 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e}{2}\cdot\frac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$…………(8分)

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=9}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\Big|_{t=2}=-\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$………………………………….(10分)

(4)

在 (x_0, y_0) 处的切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

它在 x 轴上的截距是 $\dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$

$u(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)} \qquad (x \neq 0)$…………………………………………………(5分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{u(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{xf'(x) - f(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) + xf''(x)}{xf''(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}[1 + \frac{f'(x)}{x}\frac{1}{f''(x)}]$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x}\frac{1}{f''(x)}$$

$= 1 + \dfrac{f''(0)}{f''(0)} = 2$……………………………………………………………………………(10分)

(5) 解　由 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 知，$f(x) = \int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$，

又 $f(0) = 0$，代入表达式有 $C = 0$，故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$，

由 $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ 及 $g(0) = 0$ 知 $g(x) = \ln(1 + x)$……………………………………………(2分)

于是 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{g(x)}] = \lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)}]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x) - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\ln(1 + x)\cdot\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} \xlongequal{\ln(1 + x) \sim x} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x) - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$……(6分)

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$，

即 $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \sim x\,(x \to 0)$，

故　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x) - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1 + x)\sqrt{1 + x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - (1 + x)}{x}$……………………………………………(8分)

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} - 1) \xlongequal{\text{分子有理化}} \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} - 1) = -\dfrac{1}{2}$………………(10分)

（6）

由条件知：$0<\dfrac{a}{a+b}<1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

由连续函数的介值定理可知存在 $c\in(0,1)$,

使得 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$……………………………………………………………………（4分）

对 $f(x)$ 在 $[0,\ c]$ 及 $[c,1]$ 上分别用拉格朗日定理得

$f(c)-f(0)=f'(\xi)\cdot c,(0<\xi<c)$……(1)

$f(1)-f(c)=f'(\eta)\cdot(1-c),(c<\eta<1)$……(2)……………………………………（8分）

由(1)式得：$c=\dfrac{f(c)}{f'(\xi)}=\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}$……(3)

由(2)式得：$1-c=\dfrac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=\dfrac{1-\frac{a}{a+b}}{f'(\eta)}$……(4)

由(3)(4)两式相加并简化得：$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$…………………………(10分)

（7）

证：此题不妨求出函数 z 的极值以验证之

解 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=(1+e^{y})(-\sin x)=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y}(\cos x-1-y)=0\end{cases}$ ……………………………………………………………(4分)

得无穷多个驻点：

$x=k\pi,\ y=\cos k\pi-1,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

又 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(1+e^{y})(-\cos x)$

$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin x\cdot e^{y}$

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^{y}+(\cos x-1-y)e^{y}$…………………………………………………………（8分）

所以当 $x=k\pi,\ y=\cos k\pi-1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

即 $y=0$ 时有判别式 $B^2-AC=0+(1+e^{-2})e^{-2}>0$

因而函数 z 不取极值.

综上所述，即得证函数 z 有无穷多个极大值点但无极小值点……………（10分）