2011—2012 学年第一学期高等数学 B 试卷（A 卷）答案

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

（1）$e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)dx$；（2）1；（3）$x=2$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$（$-1<x<1$）；（5）$\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}$.

二、计算下列极限（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$　　4 分

（2）解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$　　2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}$

$=\frac{1}{2}$　　4 分

（3）解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}\left(x-\sin x\right)}$　　2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{2}x^2}$

$=6$　　4 分

（4）解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\cos\left(x^4\right)\cdot 2x}{10x^9}$　　2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^4\right)}{5x^8}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^8}{5x^8}$

$=\frac{1}{10}$　　4 分

三、求下列积分（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\int\left(2^x+x^2\right)dx=\int 2^x dx+\int x^2 dx$　　2 分

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3+C$$ 4 分

（2）解 $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^x\cdot 2xdx$ 2 分

$$=x^2e^x-2\int xde^x=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$ 4 分

（3）解 令 $t=\sqrt{1+x}$，则

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t}{t+t^3}dt$$ 2 分

$$=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$ 4 分

（4）解 $\int_{-1}^2\left|x^2-x\right|dx=\int_{-1}^0\left(x^2-x\right)dx-\int_0^1\left(x^2-x\right)dx+\int_1^2\left(x^2-x\right)dx$ 2 分

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^0-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{11}{6}$$ 4 分

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8 分，每小题 4 分）

（1）解 $\because\int_0^{1-\varepsilon}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$，且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\right)=1$ 2 分

$\therefore$广义积分$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$收敛，且$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 4 分

（2）解 $\because\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln b-\ln\ln 2$，且 $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b-\ln\ln 2\right)=+\infty$ 2 分

$\therefore$广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$发散 4 分

五、判别下列级数的敛散性，并说明理由（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+3}=1\neq0$ 2 分

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+3}$发散 4 分

（2）解 $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 收敛 4 分

（3）解 $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$ 2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛 4 分

（4）解 $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}}{2\arctan n}=\frac{1}{\pi}<1$ 2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n(\arctan n)^n}$ 收敛 4 分

六、（12 分，每小题 6 分）

（1）解 $\because \sin\frac{1}{n}>\sin\frac{1}{n+1}$，且 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$

$\therefore$ 由莱布尼兹判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 收敛 3 分

又 $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 条件收敛. 6 分

（2）解 收敛域为 $[-3,3)$

当 $-3<x<3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{3^{n-1}}t^{n-1}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^{n-1}dt$

$$=\int_0^x \frac{1}{1-\frac{t}{3}}dt=-3\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$$ 4 分

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}x^n\Big|_{x=2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[-3\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)\right]\Big|_{x=2}=\ln 3$$ 6 分

七、（10 分，每小题 5 分）

（1）解 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点为 $(1,1)$ 和 $(-1,1)$

$\therefore$ 所求的旋转体积 $V=\int_{-1}^{1}\pi dx-\int_{-1}^{1}\pi x^4 dx$ 3 分

$$=2\pi-\frac{\pi}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{8\pi}{5}$$ 5 分

（2）所求的弧长 $s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$ 3 分

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$ 5 分

八、（7 分）

解 $\because \int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$$\int_0^x f(x-t)dt\underset{x-t=u}{=}-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$$ 3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du+f(x)}$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$ 7 分