第二章 一元微分学

第三节 Taylor 公式及应用

有关知识：

（1）Taylor 定理:

(I)设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有直至 $n+1$ 阶的导数,则对 $\forall x\in U(x_0)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0<\theta<1,\xi$ 介于 x_0 与 x 之间.

（II）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有直至 $n-1$ 阶的导数,且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

（2）记住几个简单函数 $e^x,a^x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha,\sin x,\cos x$ 的 Maclaurin 公式．一般而言，其他函数的 Taylor 公式可利用这几个简单函数的 Maclaurin 公式再结合某些运算得到.

（3）Taylor 定理的应用很广,技巧性强．用 Taylor 定理解决问题时,要掌握几个关键点（I）选择什么余项,（II）在哪点展开，展开哪点的函数值.（III）用一个展式，还是多个（主要是二个）展式,多个展式如何复合使用.

例 1：求 $f(x)=x\arcsin x$ 的 6 阶带皮亚诺余项的 Maclaurin 公式。

分析：由于该函数中已有因子 x，故只须将 $g(x)=\arcsin x$ 展到 x^5 项，又由 $\arcsin x$ 为奇函数，所以其 Maclaurin 展开式中没有偶数次幂项。如直接去计算 $g'(0),g'''(0),g^{(5)}(0)$ 也可以，但会很繁。

解：$g(x)=\arcsin x$，则 $g'(x)=(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$

从而 $g'(0)=1,g''(0)=0,g'''(0)=1,g^{(4)}(0)=0,g^{(5)}(0)=9$

故 $g(x)=x+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{9}{5!}x^5+o(x^5)$

所以 $f(x)=x\arcsin x=x^2+\dfrac{1}{3!}x^4+\dfrac{9}{5!}x^6+o(x^6)$

另解：由 $g(x)=\arcsin x$ 为奇函数且 $g'(0)=1$，因此它的 Maclaurin 公式的形式如下：

$$\arcsin x=x+ax^3+bx^5+o(x^5)$$

又 $x=\sin(\arcsin x)=\sin(x+ax^3+bx^5+o(x^5))$

$=(x+ax^3+bx^5+o(x^5))-\frac{1}{3!}(x+ax^3+bx^5+o(x^5))^3$

$+\frac{1}{5!}(x+ax^3+bx^5+o(x^5))^5+o(x^{5)}$

$=x+(a-\frac{1}{6})x^3+(b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{120})x^5+o(x^5)$

比较系数得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{3}{40}$，从而 $f(x)=x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{3}{40}x^6+o(x^6)$

例 2：求 $f(x)=\frac{1}{1-x}e^{e^x}$ 的 3 阶带皮亚诺余项的 Maclaurin 公式。

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$，

$e^{e^x}=e^{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$

$=e(e^{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=e[1+(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3]+o(x^3)$

$=e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3)+o(x^3)$

$f(x)=(1+x+x^2+x^3+o(x))e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3))=e+2ex+3ex^2+\frac{23e}{6}x^3+o(x^3)$

应用之一：用 Taylor 公式求极限和确定无穷小的阶

解决此类问题要知道：（1）选择皮亚诺余项，（2）当考虑 $x\to x_0$ 时，应在 x_0 处展开，当考虑 $x\to\infty$ 时，可作变换 $t=\frac{1}{x}$，化为 $t\to 0$。单侧极限也是如此

用 Taylor 公式求极限问题在前面已讲过，此处不再重复。用 Taylor 公式确定无穷小的阶在大多数情况下都会比用其它工具更方便。

设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}-e$, 当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 ax^k 为等价无穷小, 求 a,k 的值.

解：当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e$$

$$=e^{\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}-e=e^{1-\frac{1}{2}x+o(x)}-e$$

$$=e[e^{\frac{-1}{2}x+o(x)}-1]=-\frac{e}{2}x+o(x)$$

所以 $a=-\frac{e}{2},k=1$

另解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{kx^{k-1}}\times\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}\times(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1}{kx^{k-1}}\times\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

因此，$k=1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x^k}=-\dfrac{e}{2}$

故 $a=-\dfrac{e}{2},k=1$.

例 3：设 $a_n=\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n}$， $n=1,2,\cdots$， a_n 是关于 $\dfrac{1}{n}$ 的几阶穷小？并求它的一个等价无穷小。

解：

$$a_n=n(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}})=n[1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})-(1+\frac{1}{3}(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})-\frac{1}{9}(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})^2+o(\frac{1}{n^2})]$$

$$=n(-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=-\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n})$$

所以 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 为同阶穷小，且 a_n 与 $-\dfrac{1}{6n}$ 为等价无穷小。

注：本题考虑的是数列，其极限过程一定是 $n\to\infty$，因此 $\dfrac{1}{n}\to 0$，从而用 Taylor 公式时，以 $\dfrac{1}{n}$ 为自变量在 $x=0$ 处作 Taylor 展开。下面展开式是错误的：

$$\sqrt{1+n}=1+\frac{1}{2}n+\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)}{2!}n^2+o(n^2)$$

用 Taylor 公式求极限或确定无穷小的阶时，该展开到几阶？这需在具体场合去尝试。下面例子更能说明这一点。

例 4：确定 a,b，使得当 $x\to 0$ 时， $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 为尽可能高阶的无穷小，并指出是 x 的几阶无穷小。

分析：首先可以看出对任意的 a,b，当 $x\to 0$ 时， $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 都是无穷小。其阶数与 a,b 的具体值有关。这种关系用 Taylor 展开就能看得很清楚:

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+\cdots)=1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(ab^2-b^3)x^6+\cdots$$

$$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=(b-a-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{4!}-b^2+ab)x^4+(b^3-ab^2-\frac{1}{6!})x^6+\cdots$$

可见当 $b-a-\frac{1}{2}\neq 0$ 时，$f(x)=(b-a-\frac{1}{2})x^2+o(x^2)$ 为 x 的 2 阶无穷小；当 $b-a-\frac{1}{2}=0$ 时，$f(x)$ 至少为 x 的 4 阶无穷小；$b-a-\frac{1}{2}=0$ 且 $\frac{1}{4!}-b^2+ab=0$ 时，$f(x)$ 至少为 x 的 6 阶无穷小，此时 $a=-\frac{5}{12},b=\frac{1}{12}$，且 $b^3-ab^2-\frac{1}{6!}\neq 0$，故此时 $f(x)$ 为 x 的 6 阶无穷小．因此本题的答案是：$a=\frac{-5}{12},b=\frac{1}{12}$，且为 x 的 6 阶无穷小．解答过程学生自己完成。

注：展开式中的“⋯”，一则表示是它前面一项的高阶无穷小，二则为方便“尝试”。

练习题

1．确定 a,k，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\cos(\sin x)-\cos x$ 与 ax^k 为等价无穷小．（答案：$\frac{1}{6},4$）

2．确定 a,b，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 为尽可能高阶的无穷小．（答案：$\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$）

3．设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sec x$ 与二次多项式 $p_2(x)$ 的差为 x^2 的高阶无穷小，则 $p_2(x)=$ ___ ．（答案：$1+\frac{1}{2}x^2$）

4．设 $a_n=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n$，$n=1,2,\cdots$，$a_n$ 是关于 $\frac{1}{n}$ 的几阶穷小？（答案：2）

应用之二：用 Taylor 公式证明介值问题．

这种问题一般涉及二阶或更高阶的导数．有含介值的等式和不等式两类．要注意：（1）选择拉氏余项，（2）常需二个展开式．

例 5：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

分析：本题涉及三阶导，可用 Taylor 公式试一下，又欲证的结论中出现了 $f(a),f(b),f'(\frac{a+b}{2})$，故可以想到在同一点 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开两点 $x=a,x=b$ 处的函数值 $f(a),f(b)$，得到两个展开式，对两个展开式复合使用．

证明：由 Taylor 公式知，$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{b-a}{2})^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(\frac{b-a}{2})^3$$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{a-b}{2})^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(\frac{a-b}{2})^3$$

两式相减得

$$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^3}{24}$$

由达布定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$

所以 $f(b)=f(a)+f'(\dfrac{a+b}{2})(b-a)+\dfrac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$

例 6：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0,$ 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证明：（将 $f(\dfrac{a+b}{2})$ 分别在 a,b 两点展开）由 Taylor 公式知 $\exists\xi_1,\xi_2(a<\xi_1<\xi_2<b)$，使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 \qquad （1）$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2 \qquad （2）$$

（1）－（2）得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}$$

那么 $|f(b)-f(a)|=\dfrac{(b-a)^2}{4}\dfrac{|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|}{2}\leq\dfrac{(b-a)^2}{4}\dfrac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$

取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, & |f''(\xi_1)|\geq|f''(\xi_2)|\\ \xi_2, & |f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|\end{cases}$

则 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

另解：若 $f(a)=f(b)$，结论成立

若 $f(a)\neq f(b)$，不妨设 $f(a)<f(b)$，$c=\dfrac{a+b}{2}$

（1）若 $2f(c)\geq f(a)+f(b)$

$f(c)=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(c-a)^2$

$|f(b)-f(a)|=f(b)-f(a)\le 2[f(c)-f(a)]=f''(\xi)(\frac{b-a}{2})^2\Rightarrow$结论；

或：令 $F(x)=f(x)-\frac{k}{2}(x-a)^2(k=\frac{4(f(b)-f(a))}{(b-a)^2})$

$F'(a)=0,F(c)\ge F(a)$

$0\le F(c)-F(a)=\frac{1}{2}F''(\xi)(c-a)^2\Rightarrow$结论

（2）若 $2f(c)<f(a)+f(b)$，同样可得结论，过程略。

例 7：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0,\ \max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=2$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$f''(\xi)\le -16$

分析：由题设知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值在 $(0,1)$ 内的某点 x_0 取得，从而 $f(x_0)=2, f'(x_0)=0$，

结合题设我们知道： $f(0)=f(1)=0, f(x_0)=2, f'(x_0)=0$，因此想到在同一点 x_0 处展开

$x=0,x=1$ 两点处的函数值 $f(0),f(1)$

证明：由题设知 $\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=\max f(x)=2$，从而 $f'(x_0)=0$.

由 Taylor 公式知 $\exists\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,1)$，使得

$$f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2 \qquad (1)$$

$$f(1)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \qquad (2)$$

由（1）得 $f''(\xi_1)=-\frac{4}{{x_0}^2}$，由（2）得 $f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-x_0)^2}$

若 $x_0\in(0,\frac{1}{2}]$，则 $f''(\xi_1)\le -16$，若 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，则 $f''(\xi_2)\le -16$

综上知 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\le -16$

注：仔细体会一下以上三个例子在用 Taylor 公式时相似的地方和不同的地方.

应用之三：用 Taylor 公式说明导数的界.

这类问题一般是已知低阶和高阶导数的界，估计中间阶导数的界．要注意：（1）选择拉氏余项，（2）常需二个展开式，且经常是在任意点 x 处展开某两点的函数值.

例 8：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f(x)|\le 1,|f''(x)|\le 2, x\in[0,1]$，证明：对任意 $x\in[0,1]$，有： $|f'(x)|\le 3$。

分析：这里给出了 $f(x), f''(x)$ 的界，要估计 $f'(x)$ 的界，由于 Taylor 公式涉及函数值及各阶导，所以考虑用 Taylor 公式.

证明：对于 $\forall x\in[0,1]$，由 Taylor 公式知 $\exists \xi_1,\xi_2$，使得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2 \qquad (1)$$

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(-x)^2 \qquad (2)$$

（1）－（2）得

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2$$

所以 $|f'(x)|=|f(1)-f(0)-\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2|$

$$|f'(x)|\le|f(1)|+|f(0)|+|\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2|+|\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2|\le 2+(1-x)^2+x^2$$

由于对 $\forall x\in[0,1]$，总有 $(1-x)^2+x^2\le 1$

故对任意 $x\in([0,1]$，有 $|f'(x)|\le 3$.

例 9：设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导，$M_0=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f(x)|<+\infty, M_2=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f''(x)|<+\infty$，证明：$M_1=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

证明：对 $\forall x\in(0,+\infty)$，任取 $h>0$，由 Taylor 公式知 $\exists\xi$，使得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

从而 $|f'(x)|h\le 2M_0+\frac{h^2}{2}M_2$

故 $|f'(x)|\le 2M_0/h+\frac{h}{2}M_2$

上式中 h 是任意正数，取 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，得 $|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

应用之四：用 Taylor 公式求介值的极限.

例１０：设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶连续导数，且 $f''(0)\neq 0,$ 对于 $\forall x\in(-1,1)$，由拉氏中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x)=f(0)+x\,f'(\theta\,x)$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

解：由 Taylor 公式有

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{f''(\theta_1\,x)}{2}x^2 \qquad (1)$$

$$f'(\theta\,x)=f'(0)+f''(\theta_2\theta\,x)\theta\,x$$

从而

$$f(x)=f(0)+x(f'(0)+f''(\theta_2\theta\,x)\theta\,x) \qquad (2)$$

比较（1),（2）可得

$$\frac{1}{2}f''(\theta_1\,x)x^2=f''(\theta_2\theta\,x)\theta\,x^2$$

即 $\dfrac{1}{2}f''(\theta_1\,x)=f''(\theta_2\theta\,x)\theta$

上式两端令 $x\to 0$ 再又 $f''(x)$ 连续及 $f''(0)\neq 0,$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

注：本例也可用皮亚诺余项的 Taylor 公式去解决:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

$$f'(\theta\,x)=f'(0)+f''(0)\theta\,x+o(x)$$

从而

$$f(x)=f(0)+x(f'(0)+f''(0)\,\theta\,x+o(x))$$

比较得 $\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=f''(0)\theta\,x^2+o(x^2)$

即 $\dfrac{1}{2}f''(0)+o(x^2)/x^2=f''(0)\theta$,令 $x\to 0$ 得结果.

这种方法无须二阶导连续，只需一阶导连续， $f''(0)$ 存在且不为零．此题有两形式的推广：见练习题１０，１１。

应用之五：证明不等式．这部分内容在不等式一节中再讲，要注意的是：用 Taylor 公式证明不等式时一定选择拉氏余项.

其它。

例１１：证明e是无理数。

证明：由 Taylor 公式有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\theta\in(0,1)$$

$$n!(e-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}))=\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

假设e为有理数，则$e=\frac{p}{q}$，p,q为整数，当$n>q$时，上式左端为整数，而右端当$n>2$时为非整数。因此e是无理数。

练习题

５．设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$$

（有两方法可用：（１）用 Taylor 公式证明，可参照例５，不同的是本题要将两个展式相加.

（２）用拉氏中值定理，$F(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$，二次用拉氏中值定理）

６．设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

（若令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，本题实际上就是例４）

７．设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0,\ \min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\geq 8$.（仿例７）

８．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，$|f(x)|<M_0,|f''(x)|<M_2,x\in(-\infty,+\infty+$，证明：$|f'(x)|\leq\sqrt{2M_0M_2},x\in(-\infty,+\infty)$.

（对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，任取$h>0$，作两个展式：$f(x+h)=\cdots,f(x-h)=\cdots$）

９．若火车从起点到终点共用了t秒时间，两地相距s米，则途中必有一个时刻，其加速度的绝对值不低于$\frac{4s}{t^2}$米／秒^2。（设两地铁路线是直的）。

（本题实际上就是例６）

１０．设$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有n阶连续导数，且$f^{(k)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0,$对于$\forall h(0<|h|<\delta)$，由拉氏中值定理知$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n}}$ 。

１１．设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶连续导数，且 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在并且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0,$ 对于 $\forall h(0<|h|<\delta)$，由 Taylor 公式知 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$ 。

１２．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 三阶连续可导,且对任意 x,h 有

$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$,$\theta\in(0,1)$ 与 $x,\ h$ 无关

证明: $f(x)$ 为一次或二次函数.

(本题是某年的一道考题,基本思路就是要证明 $f(x)$ 的二阶导或三阶导恒等于零．下面用 Taylor 公式证明此题．此题实际上与例 9 有联系．

若 $f''(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$,则 $f(x)$ 为一次函数,否则 $\exists x_0$,使得 $f''(x_0)\neq 0$,由例１０知 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$,而 θ 为常数,从而 $\theta=\dfrac{1}{2}$ 及 $f(x+h)-f(x)=f'(x+\dfrac{h}{2})h$.由 Taylor 公式有

$f'(x+\dfrac{h}{2})=f'(x)+\dfrac{h}{2}f''(x)+\dfrac{f'''(x)}{2}(\dfrac{h}{2})^2+o(h^2)$ 代入上式得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(x)}{8}h^3+o(h^3)$$

又 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)}{2}h^2+\dfrac{f'''(x)}{3!}h^3+o(h^3)$

比较上面两式得

$$\frac{f'''(x)}{6}-\frac{f'''(x)}{8}=o(h^3)/h^3$$

令 $h\to 0$,得 $f'''(x)=0$,又由 x 的任意性,知 $f(x)$ 为二次函数.

另解:两边对 h 求导得 $f'(x+h)=f'(x+\theta h)+\theta hf''(x+\theta h)$

$$\frac{f'(x+h)-f(x+\theta h)}{(1-\theta)h}=\frac{\theta}{1-\theta}f''(x+\theta h)$$

令 $h \to 0$,得 $f''(x) = \dfrac{\theta}{1-\theta} f''(x)$

若 $\theta \neq \dfrac{1}{2}$,则 $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow f(x)$ 为一次函数.

若 $\theta = \dfrac{1}{2}, \cdots)$

9．证明：$\sin 1$是无理数.

（参照例１１）