第3章 导数与微分

本章讨论函数关于自变量的变化率—导数

例1 变速直线运动的瞬时速度

设时刻 t 时，质点的位移为 $s = s(t).$

对时间增量 $\Delta t \neq 0,$ 位移增量为 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0),$

平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

切线斜率

例2 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 上两点

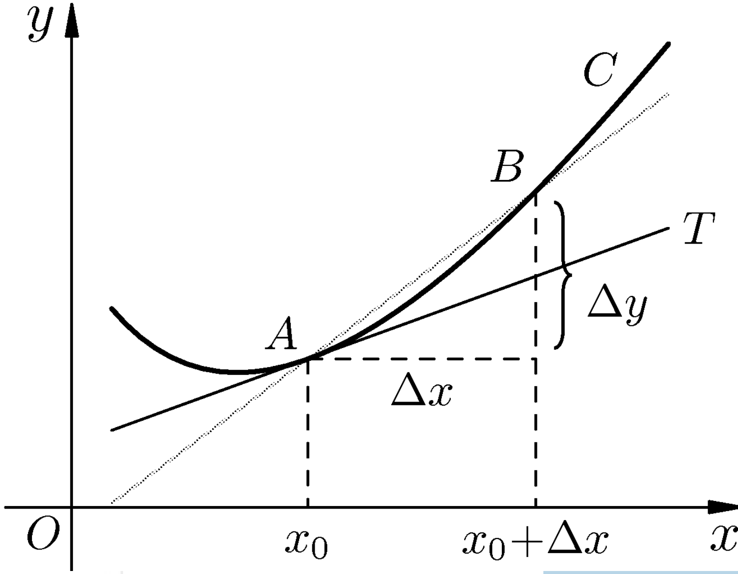
$A(x_0, f(x_0)), B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

处的割线斜率

$$\overline{k}_{割} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$A(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率

$$k_{切} = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



导数的定义

定义1 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，

并称此极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

若此极限不存在，则称函数 $f(x)$在 x_0 处不可导.

如果它为无穷大量，且 $f(x)$ 在 x_0 处连续， 则称

$f(x)$ 在 x_0 处的导数为无穷大，记为 $f'(x_0)=\infty$.

单侧导数

定义2 若 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\text{或}\Delta x\to 0^-)}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\text{或}\Delta x\to 0^-)}} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,

则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右(左)导数，记为 $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$).

右导数、左导数统称为**单侧导数**.

定理1 $f'(x_0)$ 存在的充要条件为 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等.

左、右导数举例

例1 讨论 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处的左、右导数、导数.

解 因为 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0, \\ 1, & \Delta x > 0. \end{cases}$

$$f_-'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

$$f_+'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

由于 $f_-'(0) \neq f_+'(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

导函数

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点处都可导(在端点处存在相应的单侧导数)，则称 $f(x)$ 为 I 上的可导函数.

这时对每一点 $x \in I$, 有唯一确定的导数值 $f'(x)$ (在端点是单侧导数)与之对应, 这样就定义了一个函数.

称它为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导函数, 简称导数, 记为:

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

注意: 在求极限过程中把 x 当作常量, Δx 当作变量.

定理2 (可导必连续) 若 $f(x)$ 在 x 处可导, 则在 x 处连续.

证 由 $f'(x)$ 存在, 得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0.$$

所以 $f(x)$ 在 x 处连续.

注 这是必要条件，非充分的. 例 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导.

$f(x)$ 在点 x 处的**有限增量公式:**

由 $f'(x)$ 存在, 得 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha,$ α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量.

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

求导的例子

例2 求 $y = C$ 的导数.

解 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

例3 求 $y = x^2$ 的导数.

解 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

求导的例子

例4 求 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解 $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

$$= a^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (1+t)} = a^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\log_a (1+t)^{1/t}}$$

$$= a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

特别的 $(e^x)' = e^x.$

求导的例子

例5 求 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别的 $$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

求导的例子

例6 求 $y=\sin x$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos x.$$

同理可证 $(\cos x)'=-\sin x.$

求导的例子

例7 设 $f'(1)=2$, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2h)}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2h)}{h}=\lim\limits_{-2h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot 2$

$$=f'(1)\cdot 2=2\cdot 2=4.$$

例8 证明 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0\quad, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导.

证 因为 $\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x-0}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

3. 几何意义

$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

α 是切线关于 x 轴的倾角, 则

$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的

切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$

法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

若 $f'(x_0)=\infty$, 又在 x_0 处连续, 则在 P 处的

切线方程为 $x-x_0=0,$

法线方程为 $y-f(x_0)=0.$

例9 求 $y=\ln x$ 在点 $P(x_0,\ln x_0)$处的切线与法线方程.

解 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x},$

所求切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0),$

法线方程为 $y-\ln x_0=-x_0(x-x_0).$

例10 求 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线与法线方程.

解 $y'|_{x=0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=\infty,$

$y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0,0)$ 处连续,

所以所求切线方程为 $x=0,$ 法线方程为 $y=0.$