第一节 中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理

四、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

定理及关系	条　　件	结　　论
罗尔(Rolle)定理 f(a)=f(b),	f(x)在[a,b]上连续, 在(a,b)内可导, f(a)=f(b),	(a,b)内至少存在 一点ξ, $f'(\xi)=0\quad(a<\xi<b)$
拉格朗日定理 (Lagrange) f(a)=f(b)	f(x)在[a,b]上连续, 在(a,b)内可导	(a,b)内至少存在 一点ξ, $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
柯西 (Cauchy) 定理 g'(x)=x	f(x)，g(x)在[a,b]上连续,在(a,b)内可导, g'(x)≠0,	(a,b)内至少存在 一点ξ, $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例4 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$,

则 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

例5. **试证至少存在一点** $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证：法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x) = \sin \ln x, \qquad F(x) = \ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[\,1\,,\,e\,]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此 $$\frac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \xi \in (1, e)$$

即 $$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi \iff \frac{\sin \ln e - \sin \ln 1}{\ln e - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例5. **试证至少存在一点** $\xi \in (1,e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[\ 1\ ,\ e\ ]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1,e)$，使

$$f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$

第二节

洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$ 型不定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

三、其他不定式

微分中值定理 $\left\{\begin{array}{c}\text{函数的性态}\\ \downarrow\uparrow \\ \text{导数的性态}\end{array}\right.$


洛必达，G.-F.-A. de

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right.$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型$)$

$\Big\downarrow$ 转化

洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

一、$\dfrac{0}{0}$ 型不定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (洛必达法则)

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

证: 不妨假设 $f(a)=g(a)=0$，在指出的邻域内任取 $x\neq a$，则 $f(x), g(x)$ 在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件，故

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x, a \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \overset{3)}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

推论1. 定理 1 中$x \to a$ 换为

$$x \to a^+,\ x \to a^-,\ x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型,且 $f'(x), g'(x)$满足定理1条件, 则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注意： 不是不定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

$$=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

思考: 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数) ?

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \lim\limits_{x\to a}|g(x)| = \infty$

2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $g'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(洛必达法则)}$$

证: 仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在的情形加以证明 .

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$的情形

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{-1}{g^2(x)}g'(x)}{\dfrac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\frac{g'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore\quad 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

从而 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

说明: 定理中 $x \to a$ 换为

$$x \to a^{+}, \quad x \to a^{-}, \quad x \to \infty,$$

$$x \to +\infty, \quad x \to -\infty$$

之一，条件 2) 作相应的修改，定理仍然成立.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0).$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}\ (\alpha>0\ ,\lambda>0).$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

解: (1) $\alpha=n$ 为正整数的情形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}\ (\alpha>0\ ,\lambda>0).$

(2) α不为正整数的情形.

存在正整数k, 使当$x>1$时,

$$x^{k}<x^{\alpha}<x^{k+1}$$

从而

$$\frac{x^{k}}{e^{\lambda x}}<\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}<\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k}}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}=0$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}=0$$

说明:

1) 例3 , 例4 表明 $x\to+\infty$ 时,

$$\ln x,\ \ x^{\alpha}\ (\alpha>0)\ ,\ \ e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例如, $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \neq \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

$\boxed{\text{极限不存在}}$

$$\|$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1$$

三、其他不定式：$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0型

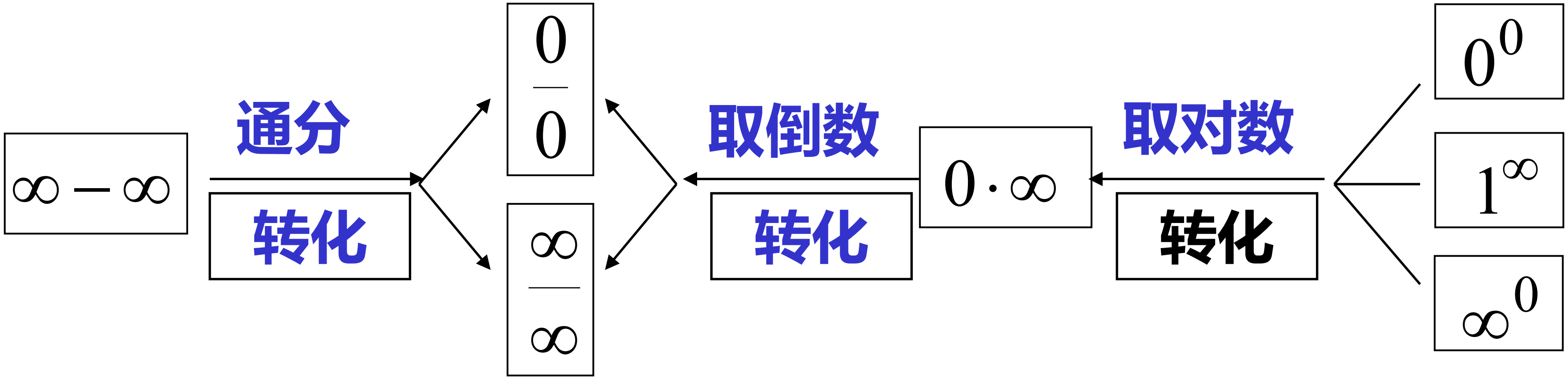
解决方法：

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{通分}} \boxed{\frac{0}{0}}\ \ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \xleftarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{取对数}} \boxed{0^0}\ \ \boxed{1^\infty}\ \ \boxed{\infty^0}$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha>0).$ $\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = 0$$



例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

$\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \left\{ \boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \right\} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \left\{ \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0} \right\}$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

$\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$$\Big\downarrow \ \boxed{\text{利用 例5}}$$

$$= e^0 = 1$$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

$$= \frac{1}{3}$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$. $\boxed{\infty\cdot 0\text{型}}$

法1 用洛必达法则

分析: 为用洛必达法则，必须改求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

但对本题用此法计算很繁！

法2 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ $\sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\to 1$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}\qquad \boxed{e^u-1\sim u}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$$

内容小结

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$ 型

$\infty - \infty$ 型

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

思考与练习

1. 设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是不定式极限，如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？ 举例说明 .

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad\frac{3}{2}\quad}$

$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$

分析: 原式 $= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{6} \quad}$

分析: 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x \sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\boxed{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

备用题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解： 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ $(令\, t=\frac{1}{x})$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty} t^{50}e^{-t} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$ (用洛必达法则)

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$ (继续用洛必达法则)

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$