

第三章 一元积分学

第四节 定积分的应用及广义积分

一. 定积分的应用

积分有着广泛的应用。在这里我们要掌握(1)直接用公式计算(主要是面积、弧长、体积的公式)(2)用元素法计算。遇到具体问题时,如能直接用公式,我们就用公式去做,如没有现成的公式可用或公式忘了,我们可用元素法去解。元素法同样适用于重积分的应用问题,还可以用元素法建立微分方程,所以说掌握了元素法就可以做到以不变应万变。

例1.(1) 曲线 $y = 2e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为_____。

(2) 曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长为_____。

解:(1) 所求的面积为 $A = \int_0^{+\infty} |2e^{-x} \sin x| dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 2e^{-x} |\sin x| dx$

而 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 2e^{-x} |\sin x| dx = 2e^{-k\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = e^{-k\pi} (1 + e^{-\pi})$

$$A = (1 + e^{-\pi}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi} = \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}$$

(2) 弧长为 $l = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 4$

例2. 过点(4,0)作曲线 $y = \sqrt{(x-1)(3-x)}$ 的切线,

(1) 求切线方程;

(2) 求由这切线与该曲线及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解:(1) $y' = \frac{2-x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

设切点为 (x_0, y_0) , 则有 $\frac{2-x_0}{\sqrt{(x_0-1)(3-x_0)}} = \frac{y_0-0}{x_0-4} = \frac{\sqrt{(x_0-1)(3-x_0)}}{x_0-4}$

解得 $x_0 = \frac{5}{2}$, 那么切线的斜率为 $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

切线方程为 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$, 即 $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$

(3) 旋转体的体积为

$$V = \pi \int_{\frac{5}{2}}^4 \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4) \right]^2 dx - \pi \int_{\frac{5}{2}}^3 (x-1)(3-x) dx = \frac{\pi}{6}$$

下面介绍一下元素法

我们先看一个例子

例3. 求曲线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = 0$ 围成的图形绕直线 $x = 3$ 旋转一周的旋转体的体积。

分析：求旋转体的体积是我们熟悉的问题，但本题没有现成的公式好用，应考虑用元素法将所求的体积化为一个积分，然后计算积分得结果。在学习定积分概念时，讲过将曲边梯形的面积化为一个定积分的几个步骤：分割、近似、求和、取极限。用元素法将所求的量化为一个定积分的步骤稍微简化一点：分割、近似后得元素、积分（以得到的元素为被积表达式在相应区间上积分）得结果。先要选好积分变量并确定积分区间，本题中可选 x 也可选 y 。若

选 y 为积分变量，则积分区间为 $[0,1]$ ，分割：在 $[0,1]$ 上任取一个小区间 $[y, y+dy]$ ，近似：

该小区间对应的一小片绕直线 $x=3$ 旋转一周的旋转体的体积 ΔV 近似为 $\Delta V \approx \pi[(2+\sqrt{1-y})^2 - (2-\sqrt{1-y})^2]dy = 8\pi\sqrt{1-y}dy$ ，从而得体积元素

$dV = 8\pi\sqrt{1-y}dy$ ，积分得结果： $V = \int_0^1 dV = \int_0^1 8\pi\sqrt{1-y}dy = \frac{16}{3}\pi$ 。若选 x 为积分变量，

则积分区间为 $[0,2]$ ，分割：在 $[0,2]$ 上任取一个小区间 $[x, x+dx]$ ，近似：该小区间对应的小曲边梯形绕直线 $x=3$ 旋转一周的旋转体的体积 ΔV 近似为

$$\Delta V \approx \pi y[(3-x)^2 - (3-x-dx)^2] = 2\pi(x^3 - 5x^2 + 6x)dx - \pi y(dx)^2$$

$\approx 2\pi(x^3 - 5x^2 + 6x)dx$ ，从而得体积元素 $dV = 2\pi(x^3 - 5x^2 + 6x)dx$ ，积分得结果：

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 2\pi(x^3 - 5x^2 + 6x)dx = \frac{16}{3}\pi. \text{ 解答过程自己完成.}$$

总结：用元素法求某个量 U 的一般步骤：

(1) 建立坐标系，选取积分变量，比如 x 。确定该变量的变化区间即为积分区间，比如 $[a,b]$ 。

(2) 在区间 $[a,b]$ 上任取一个小区间 $[x, x+dx]$ ，对应该小区间的部分量记为 ΔU ，找出该部分量的近似值 $\Delta U \approx f(x)dx$ ，那么得到量 U 的元素 $dU = f(x)dx$ 。

(3) 以元素 $dU = f(x)dx$ 为积分表达式在区间 $[a,b]$ 上积分便得欲求的量 U

$$U = \int_a^b dU = \int_a^b f(x)dx$$

这里关键是找出元素 $dU = f(x)dx$ ，找元素的思想是：以直代曲，以常代变。

例 3. 设有半径为 R 的密度不均匀的圆盘。已知其面密度为 $\mu = ar + b$ ，其中 a, b 为所考虑的点到圆盘中心的距离， a, b 为正常数，求圆盘的质量。

解：以圆盘上的点到圆心的距离 r 为积分变量，则 $r \in [0, R]$ ，任取 $[0, R]$ 上的一个小区间 $[r, r+dr]$ ，该小区间对应的小圆环的质量近似为

$$\Delta M \approx [\pi(r+dr)^2 - \pi r^2](ar+b) \approx 2\pi r(ar+b)dr$$

于是质量元素为 $dM = 2\pi r(ar+b)dr$ ，所以圆盘质量为

$$M = \int_0^R 2\pi r(ar+b)dr = \pi R^2 \left(\frac{2}{3}aR+b\right)$$

注：本题可用二重积分计算。

二. 广义积分

本节主要介绍广义积分的计算及敛散性判定。

广义积分的计算也有基本方法和特殊方法，基本方法与定积分差不多但要分清瑕点。

广义积分的敛散性判定主要是两个方法（1）用定义，（2）比较法，这一方法适用于被积函数在瑕点附近或无穷远点附近非负（若非正，则加一负号可变为非负），并且与正项级数的比较审敛法相似。若被积函数在瑕点附近或无穷远点附近变号，可考虑是否绝对收敛。这里先要熟悉几个简单广义积分的收敛性：

对于 $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ ，（ $a > 0$ ）， $p < 1$ 时收敛， $p \geq 1$ 时发散。

对于 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ，（ $a > 0$ ）， $p > 1$ 时收敛， $p \leq 1$ 时发散。

对于 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ ，（ $a > 1$ ）， $p > 1$ 时收敛， $p \leq 1$ 时发散。

例 4. 求下列积分

$$(1) \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx, \text{ 其中 } f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}, (2) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^{\frac{1}{2}} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} dx \quad (b > 0), \quad (4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)} \quad (n \geq 1)$$

解：(1) (分析：注意这里有两个瑕点：0, 2)

$$\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$$

$$= \arctan f(x) \Big|_{-1}^0 + \arctan f(x) \Big|_0^2 + \arctan f(x) \Big|_2^3$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\arctan \frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}\right) = \arctan \frac{32}{27} - 2\pi$$

注：本题的计算很容易出错： $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) \Big|_{-1}^3 = \arctan \frac{32}{27} - 0 = \arctan \frac{32}{27}$ ，错

误的根源在于没注意到积分区间内有两个瑕点，由此可看出计算这类积分时一定要把瑕点找出来然后按本题的做法那样去处理，还要注意极限的单侧性。

$$(2) \text{ (分析：首先容易想到用分部法去求：} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-1}{2} \int_0^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln x}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \right], \text{ 至此问题出来了, 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty, \text{ 这就没法做}$$

下去了, 但我们不能由此说该积分发散, 也不能说分部法不能用. 事实上很容易判断该积分是收敛的 (实际上 $x=0$ 不能算是假点), 用分部法计算广义积分时要求分部积分公式右边两项均收敛 (上述做法中右边两项均发散). 本题用分部法可以这样做:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln x d\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

往下计算请同学完成, 下面有一种更简便方法 (称之为分段相消法))

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\text{对后一积分作换元 } x = \frac{1}{t}, \text{ 得 } \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_1^0 \frac{\frac{1}{t} \ln \frac{1}{t}}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0$$

(3) (分析: 初一看此题比较复杂, 我们试着先换元简化问题, 令 $t = x - a$, 则积分变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^{\frac{1}{2}} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b |t|^{\frac{1}{2}}}{t^2 + b^2} dt$$

$$\text{再利用奇偶性有 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b |t|^{\frac{1}{2}}}{t^2 + b^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{b \sqrt{t}}{t^2 + b^2} dt$$

$$\text{再换元 } u = \sqrt{\frac{t}{b}}, \text{ 则 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b |t|^{\frac{1}{2}}}{t^2 + b^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{b \sqrt{t}}{t^2 + b^2} dt = 4\sqrt{b} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$$

但积分 $\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$ 仍不好算, 我们可用配对法计算此积分:

$$\text{设 } I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} du$$

$$\text{令 } u = \frac{1}{v}, \text{ 则 } I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv = J$$

$$\text{又 } I + J = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 + 1}{1+u^4} du = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{u^2}}{2 + (u - \frac{1}{u})^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u - \frac{1}{u}\right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \text{ 故 } I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} dx = 4\sqrt{b}I = \sqrt{2b}\pi$, 这是分析, 解答请同学们完成)

(4) (分析: 被积函数是有理函数, 我们总可以将它分拆成最简分式的和

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \cdots + \frac{A_n}{x+n}, \text{ 而且可以求出}$$

$$A_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)1\cdots(n-k)} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k C_n^k}{n!},$$

$$\sum_{k=0}^n A_k = 0.$$

$$\text{从而 } I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_1^b \frac{A_k}{x+k} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n A_k (\ln(b+k) - \ln(1+k))$$

$$\text{而 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n A_k \ln(b+k) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n A_k \ln(1+\frac{k}{b}) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n A_k \ln b = 0 + 0 = 0, \text{ 故}$$

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\cdots(n+x)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k). \text{ 这是分析, 解答请同学们完成)}$$

例 5. 求下列积分

$$(1) \text{ 已知 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \text{ 求 } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+e^x}$$

$$(2) \text{ 已知 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 求 } \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx$$

$$(3) \text{ 计算 } I(m, n) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\text{解: (1) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} x e^{-x} \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} x e^{-(n+1)x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(2) \text{ 令 } I = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{则 } J = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} \frac{1}{x^2} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} d\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2 + \frac{1}{t^2})} dt = I$$

$$I + J = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} (1 + \frac{1}{x^2}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x - \frac{1}{x})^2 - 2} d(x - \frac{1}{x}) = e^{-2} \int_0^{+\infty} e^{-(x - \frac{1}{x})^2 - 2} d(x - \frac{1}{x}),$$

$$\text{令 } u = x - \frac{1}{x}, \text{ 则 } \int_0^{+\infty} e^{-(x - \frac{1}{x})^2 - 2} d(x - \frac{1}{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\text{故 } I = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$$

(4) 对 m 建立递推式

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 (\ln t)^m dt^{n+1} = -\frac{m}{n+1} \int_0^1 t^{n-1} (\ln t)^{m-1} dt = \frac{-m}{n+1} I(m-1, n) \\ &= \dots = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^m} I(0, n) = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}} \end{aligned}$$

(5) (利用二重积分)

$$\frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} = \int_b^a \frac{1}{1+x^2 y^2} dy$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \int_b^a \frac{1}{1+x^2 y^2} dy dx = \int_b^a (\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 y^2} dx) dy = \int_b^a \frac{\pi}{2y} dy \\ &= \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} \end{aligned}$$

例 6. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx$ 收敛的充要条件是 β 满足 _____. ($\alpha \neq 0$ 为常数)

分析: 首先可以看出本题答案与 α 大于零还是小于零无关, 考虑 α 大于零, 这个积分有瑕点 $x=0$ 和无穷点 $x=+\infty$, 这两点都要考虑:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx = \int_0^1 \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx$$

对于 $\int_0^1 \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx$, 由于 $\arctan \alpha x \sim \alpha x (x \rightarrow 0)$, 因此该积分与 $\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta-1}} dx$ 具有相同的敛散性, 故该积分收敛的充要条件是 $\beta < 2$ 。

对于 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} dx$, 由于 $\arctan \alpha x \rightarrow \frac{\pi}{2} (x \rightarrow +\infty)$, 因此该积分与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$ 具有相同的敛散性, 故该积分收敛的充要条件是 $\beta > 1$ 。

综上所述知要填的答案是 $1 < \beta < 2$

例 7. 讨论 $\int_0^{+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx$ 的收敛性

解: $\int_0^{+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx = \int_0^1 (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx + \int_1^{+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx$

对于 $\int_0^1 (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx$, 由于 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ 是正常积分, 故只需讨论 $\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x})dx$,

作换元 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x})dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ 收敛。

对于 $\int_1^{+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx$,

由于 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} (1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}))$

$$\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

故 $\int_1^{+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})dx$ 收敛。

综上知原积分收敛。

练习题

1. (1) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\beta}dx$ 收敛的充要条件是 β 满足 _____

(答案: $1 < \beta < 2$)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{1+\alpha}} dt = \underline{\hspace{2cm}}$. ($\alpha > 0, f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数)

(用洛比达法则, 答案 $\frac{f(0)}{\alpha}$)

2. 求下列广义积分

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{4+x^2} dx, \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2008})}$$

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^n} (n > 1) \quad (5) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx (a > 0, b > 0)$$

$$(7) \text{ 已知 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ 求 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 (e^{\frac{\pi}{x}} - 1)}$$

$$((1) 0, (2) \frac{\pi}{4} \ln 2, (3) \frac{\pi}{4}, (4) \text{ 作换元 } t = x + \sqrt{x^2-1}, (5) \frac{2}{1+e}, (6) \ln \frac{a}{b})$$

(7) $\frac{1}{6}$)

3. 讨论 $\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2} dx$ 的收敛性. (答案: 发散)

4. 证明 $\int_1^{+\infty} \left\{ \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right\} dx$ 收敛, 并求其值. $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow c, c$ 为欧拉常数) (答案: c)

5. 求 $f(x) = \int_0^1 |\ln |x-t|| dt$ 在 $[0,1]$ 上的最大值.

(先求出 $f(x)$ 的表达式 $f(x) = 1 - x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$, 答案: $1 + \ln 2$)