第四节 广义积分

常义积分 $\begin{cases}\text{积分限有限}\\\text{被积函数有界}\end{cases}$

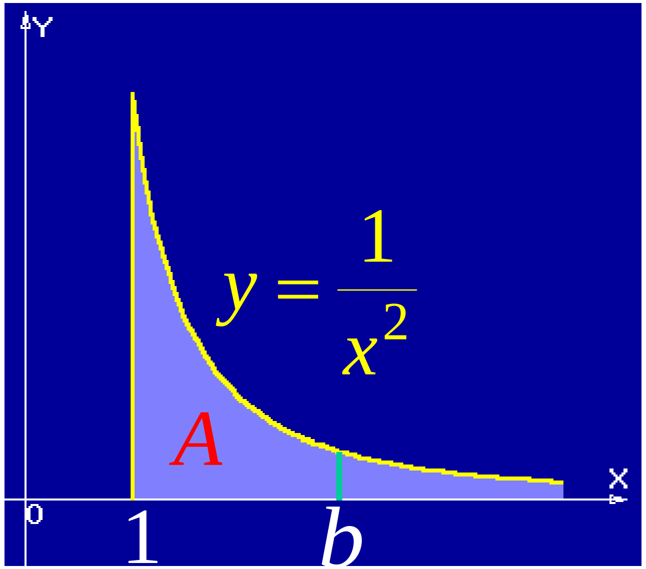
↓ 推广

广义积分 (反常积分) $\begin{cases}\text{无穷积分}\\\text{瑕积分}\end{cases}$

一、无穷限的广义积分--无穷积分

二、无界函数的广义积分--瑕积分

引例 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积 可记作



$$A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$=\lim_{b\ +\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

一、无穷限的广义积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称无穷积分收敛；当极限不存在时，称无穷积分发散.

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，取 $a < b$，如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的无穷积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称无穷积分收敛；当极限不存在时，称无穷积分发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 如果无穷积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛, 则称上述两无穷积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

极限存在称无穷积分收敛；否则称无穷积分发散.

注意: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx$ 与 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$

只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散 .

若$F(x)$是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\,;\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

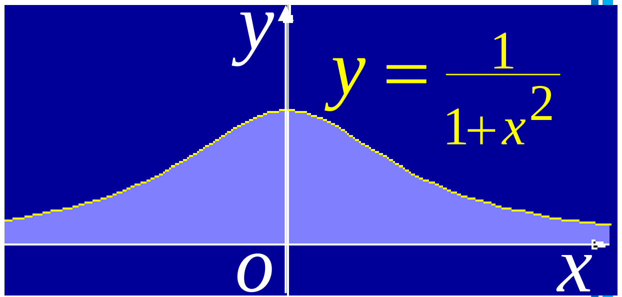
f(x)连续，则有类似牛顿-莱布尼兹公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1　计算广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.



解　$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

思考: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+x^2} \cancel{=} 0$ 对吗 ?

分析:

注意: 对无穷积分，只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零” 的性质, 否则会出现错误 .

例2　计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

解　$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{\pi}{2}\right]=1.$$

例 3 证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

证 (1) $p=1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{+\infty}=+\infty$,

(2) $p\ne 1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此当$p>1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$;

当$p\le 1$时广义积分发散.

例 4　证明广义积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p > 0$时收敛，当$p < 0$时发散.

证　$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^b$$

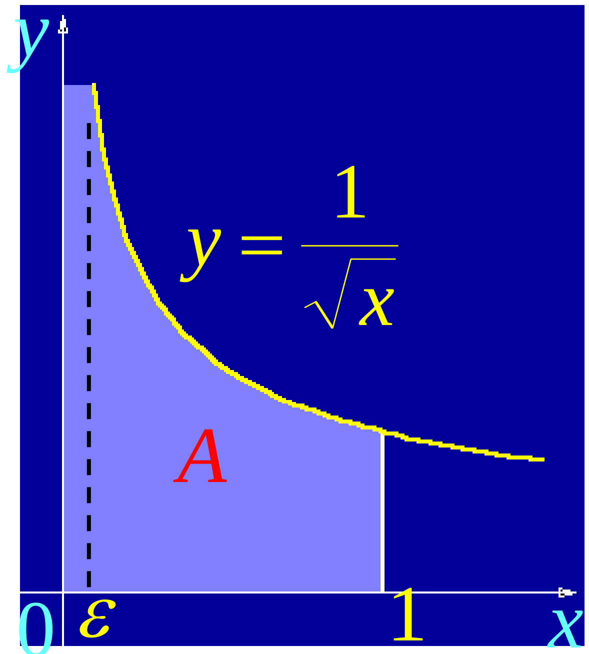
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p > 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases}$$

即当$p > 0$时收敛，当$p < 0$时发散.

二、无界函数的广义积分

引例 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}\ )=2$$

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界．取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的**瑕积分**，记作 $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

当极限存在时，称瑕积分**收敛**；当极限不存在时，称瑕积分**发散**.

定义中 a 称为**瑕点**.

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，而在点 b 的左邻域内无界. 取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的瑕积分，记作.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

当极限存在时，称瑕积分收敛；当极限不存在时，称瑕积分发散.

定义中 b 称为瑕点.

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上除点$c\ (a<c<b)$外连续，而在点c的邻域内无界. 如果两个瑕积分

$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$$

否则，就称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

定义中 c 为**瑕点**.

设$F(x)$是$f(x)$的原函数 ，

则也有类似**牛顿-莱布尼兹**公式：

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a, b 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意：若瑕点 $c \in (a，b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)\underline{-F(c^+)+F(c^-)}-F(a)$$

可相消吗?

例5 计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解 $\because \lim\limits_{x\to a-0} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty,$

$\therefore x=a$ 为被积函数的无穷间断点.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-0\right] = \frac{\pi}{2}.$$

例 6 证明广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当$q<1$时收敛，当$q\geq 1$时发散.

证 (1) $q=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx=\int_0^1 \frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_0^1=+\infty$,

(2) $q\neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx=\left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_0^1=\begin{cases}+\infty, & q>1\\ \frac{1}{1-q}, & q<1\end{cases}$

因此当$q<1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；

当$q\geq 1$时广义积分发散.

例7 计算广义积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

解 $$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right]$$

$= \infty$. 故原广义积分发散.

例8 计算广义积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. $x=1$瑕点

解 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \left(\int_0^1 + \int_1^3\right) \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

小结

无穷限的广义积分（无穷积分）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

无界函数的广义积分（瑕积分）$\int_a^b f(x)dx$

（注意：不能忽略内部的瑕点）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

说明: (1) 有时通过换元，广义积分和常义积分可以互相转化.

例如，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \qquad (令\ x=\sin t\,)$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \qquad (令\ t = x-\frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类反常积分时，应划分积分区间，分别讨论每一区间上的反常积分.

（3）若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点,则本质上是常义积分, 而不是广义积分.

例如, $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x+1)\mathrm{d}x$

思考题

1. 积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 的瑕点是哪几点?

积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 可能的瑕点是 $x=0,\quad x=1$

$\because \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1,\qquad \therefore\ x=1$ 不是瑕点,

$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 的瑕点是 $x=0$.

说明: 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类

则本质上是常义积分, 而不是广义积分.

2 讨论瑕积分 $\int_{1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

下述解法是否正确:

$$\because \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \cancel{=} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-1=-2\text{ , }\therefore\text{积分收敛}$$

解

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}0\,, & -\infty < x \le 0 \\ \frac{1}{2}x\,, & 0 < x \le 2 \\ 1\,, & 2 < x\end{cases}$，试用分段函数表示 $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0\,, & -\infty < x \le 0 \\ \frac{1}{4}x^2\,, & 0 < x \le 2 \\ x-1\,, & 2 < x\end{cases}$$