# 武汉大学2016-2017学年第二学期期末考试线性代数B试题（A）

一、（8分）不求出行列式的值,用行列式的性质,判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被17整除.

二、（10分）什么样的矩阵$X$满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}B^T(CB^{-1}+E)^T - [(C^{-1})^T A]^{-1}$.

四、（10分）计算$n$阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$的值.

五、（12分）求向量组$\alpha_1 = (1,3,3,1)$，$\alpha_2 = (1,4,1,2)$，$\alpha_3 = (1,0,2,1)$，$\alpha_4 = (1,7,2,2)$的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6分）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是齐次方程组$AX = 0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$AX = 0$的解，求证：$\beta, \beta+\alpha_1, \cdots, \beta+\alpha_r$线性无关。

七、（10分）已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$，

(1)求$A$.（2）计算行列式$|A|$和$|A^2 - 2A + 3I|$的值；（3）判断$A$是否为正定矩阵。

八、（10分）已知向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若

向量$\alpha$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\}$的坐标。

九、（10分）设二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$通过正交变换$x = Py$化成标准型$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2$，求出$a, b$的值及所用的正交变换。

十、（14分）讨论$a, b$为何值时，方程$ax_1 + x_2 + x_3 = 4$与方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9 \end{cases}$无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

**武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）参考解答**

一、（8 分）不求出行列式的值,用行列式的性质,判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被$17$ 整除.

解　因为$204, 527, 255$都能被$17$ 整除. 所以第一列的 100 倍,第二列的 10 倍加到第三列得 204, 527, 255, 而这三项能提出公因子 17. 故原行列式的值能被 17 整除.

二、（10 分）什么样的矩阵 $X$ 满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解　设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$　则 $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$，$y_1 - 3y_2 + 2y_3 = -2$，$-x_1 + 3x_2 = 2, -y_1 + 3y_2 = 2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$X = \begin{pmatrix} -2+3k_1 & 1+3k_2 \\ k_1 & 1+k_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$（$k_1, k_2$ 为任意实数）

三、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $A^{-1}B^T(CB^{-1}+E)^T - [(C^{-1})^T A]^{-1}$.

解　先化简, 有 $D = A^{-1}B'(CB^{-1}+E)' - [(C^{-1})'A]^{-1} = A^{-1}[(CB^{-1}+E)B]' - A^{-1}[(C^{-1})']^{-1}$

$$= A^{-1}[(C+B)' - C'] = A^{-1}B'$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = A^{-1}B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四、（10 分）计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$ 的值.

解　$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n} & x & x & \cdots & x \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!(1+x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n})$

五、（12 分）求向量组 $\alpha_1 = (1,3,3,1)$，$\alpha_2 = (1,4,1,2)$，$\alpha_3 = (1,0,2,1)$，$\alpha_4 = (1,7,2,2)$ 的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

解　　令 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_2^{\mathrm{T}} & \alpha_3^{\mathrm{T}} & \alpha_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，对 $A$ 作初等行变换：$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故给定向量组的秩为$3$。$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个最大无关组。且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$

六、（6 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 $\beta$ 不是方程组 $AX=0$ 的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关。

证明：假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性有关，则存在不全为零的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使得

$$\lambda_0\beta+\lambda_1(\beta+\alpha_1)+\cdots\lambda_r(\beta+\alpha_r)=0，$$

于是 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r$，

又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性无关性知 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\neq 0$，于是

$\beta=-\dfrac{1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r}$（$\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r$），这与已知向量 $\beta$ 不是方程组 $AX=0$ 的解矛盾。

七、（10 分）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

(1)求 $A$．（2）计算行列式 $|A|$ 和 $|A^2-2A+3I|$ 的值；（3）判断 $A$ 是否为正定矩阵。

解：（1）设 $p_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}^T$，$p_2=\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}^T$，$p_3=\begin{pmatrix}-2&-1&2\end{pmatrix}^T$，则 $p_1,p_2,p_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征向量，且对应的特征值分别为 $1,2,3$，设 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)$。

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，故 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$

（2）$|A|=1\cdot2\cdot3=6$　设 $\varphi(A)=A^2-2A+3I$，则有 $\varphi(1)=1^2-2+3=2$，$\varphi(2)=2^2-4+3=3$

$\varphi(3)=3^2-6+3=6$，故 $|A^2-2A+3I|=\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3)=36$

(3) 由三阶矩阵 $A$ 为实对称矩阵，且有三个大于零的特征值，故 $A$ 为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基，说明 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基。若向量 $\alpha$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下坐标为 $(1,1,1)^T$，求向量 $\alpha$ 在基 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 的坐标。

解：由题条件可知 $\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，记 $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

由 $|P|=2$ 可知 $P$ 可逆，故 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 也能表示 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，故它们等价

故 $R(\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\})=3$，又 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 有 3 个向量，故

由题条件可知 $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$，

故 $\alpha=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)P^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$

故 $\alpha$ 在基 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

九、（10 分）设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 通过正交变换 $x=Py$ 化成标准型 $f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，求出 $a,b$ 的值及所用的正交变换。

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&a\\-1&a&1\end{pmatrix}$，由题意可知 $A$ 的特征值为 $2,2,b$，故有

$4+b=3$， 得 $b=-1$；由 2 是特征值得 $|A-2E|=0$，即 $\left(a^2+2a+1\right)=0$，得 $a=-1$

当特征值为 $\lambda=2$ 时解 $(A-2E)x=O$ 得两个无关的特征向量 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}^T,\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}^T$

将其正交规范化后得 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T,p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^T$

当特征值为 $\lambda=-1$ 时解 $(A+E)x=O$ 得特征向量 $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$，单位化得 $p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则 $\boldsymbol{x=Py}$ 即为所求。

十、（14 分）讨论 $a,b$ 为何值时，方程 $ax_1+x_2+x_3=4$ 与方程组 $\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ 无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

解：问题等价于 $a,b$ 为何值时方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ （*）无解，有唯一解，和无数多个解。（*）

的线性矩阵的行列式值为 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{vmatrix}=2b(1-a)$，由克拉姆法则知 $|A|\neq0$，

即 $a\neq1,b\neq0$（*）有唯一解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$

当 $a=1$ 时（*）增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&3b&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&4\\0&0&0&-4b+3\end{pmatrix}$，

故当 $a=1$ 时，且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时（*）无解；

当 $a=1$，且 $b=\frac{3}{4}$ 时（*）与 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=4\\x_3=x_3\end{cases}$，故有解 $\begin{pmatrix}0&4&0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$，其中 $k$ 为任意常数

当 $b=0$ 时（*）增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1-a&4-3a\\0&0&0&6\end{pmatrix}$，故

$R(A)=2<3=R(\overline{A})$，（*）无解。故 当 $b=0$ 或当 $a=1$ 且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时，两个方程无公共解。

当 $a\neq1,b\neq0$ 两个方程有唯一公共解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$。

当 $a=1$ 时，且 $b=\frac{3}{4}$ 时两个方程有无数个共解 $\begin{pmatrix}0&4&0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$