2019版

南卷汇

大二概率论期中试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

概率论 2018 年 11 月期中试题

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设随机事件 A、B、C 的概率均为 p，且 A 与 B、C 分别相互独立，B 与 C 不相容，若 A、B、C 中至少有一个发生的概率为 7/9，则 A、B、C 中至少有两个发生的概率为_________。
2. 将一枚均匀硬币掷 2n 次，则出现正面次数多于反面次数的概率等于_____。
3. 设 A、B 为两个事件，则$P\{A\cup B\}P\{AB\}$_____$P\{A\}P\{B\}$（填符号（$<,>,=,\le,\ge$）之一）。
4. 设随机变量$X\sim P(\lambda)$，且$P(X=1)=P(X=2)$，则$P(X>1)=$__________。
5. 设随机变量$X\sim exp(\lambda)$，则随机变量$Y=-2X+3$的概率密度是：________。

二、解释下列各题（每小题 7 分，共 42 分）

1. 设随机变量X的概率分布为$P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=a$，$P\{X=3\}=b$，若$EX=0$，求：（1）常数a，b；（2）方差$D(X)$。

2. 设$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$且$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，证明事件$A$与$B$相互独立。

3. 设事件 A、B、C 两两独立，其发生的概率均为 0.6，若已知 A 发生的条件下 B、C 至少一个发生的概率为 0.2，求 A、B、C 最多发生两个的概率。

4. 设$P\{X=i\}=\frac{1}{3},i=1,2,3$，$P\{Y=k|X=i\}=\frac{k-i}{9-2i},k=4,5$，求随机变量$Y$的概率分布。

5. 设随机变量$X \sim U(-2,1)$，随机变量$Y = X^2$，求Y的概率密度。

6. 设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x,y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求$(X,Y)$的联合分布函数。

三、（15 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y) = \begin{cases} ae^x, & 0 < x < 1,\ x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

试求：（1）常数a；（2）边缘密度函数$f_X(x)$及$f_Y(y)$；

（3）判断X与Y是否相互独立，为什么？（4）概率$P\{X + Y \le 0.5\}$。

四、（10 分）

设随机变量X，Y相互独立，X在区间[-2,-1]上服从均匀分布，Y在区间[1,2]上服从均匀分布，求$Z = X + Y$的概率密度。

五、（18 分）

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

求：（1）条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；（2）$P\{X \le x | Y = 0.25\}$；

（3）$P\{X < 0.5 | Y < 0.5\}$；（4）$Z = \frac{X}{Y}$的概率密度；（5）$E(X^2Y^2)$

概率论与数理统计

(2018 年 11 月 11 日)

一、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1、$\frac{2}{9}$　　2、$\frac{1}{2}-C_{2n}^{n}(\frac{1}{2})^{2n+1}$, 或 $\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}(\frac{1}{2^{2n}})$, 或 $\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}(\frac{1}{2^{2n}})$　　3、$\leq$

4、$1-e^{-2}-2e^{-2}$　　5、$f(y)=\begin{cases}0.5\lambda\exp(\lambda\frac{y-3}{2}) & y<3\\ 0 & y\geq 3\end{cases}$

二、解答下列各题（每小题 7 分，共 42 分）

1、解：由 a+b+0.2=1 及(-2)0.5+a+3b=0, 得 a=b=0.25, D(X)=4.5

$$p(A\mid B)+p(\bar{A}\mid\bar{B})=1,\text{得}\frac{p(AB)}{p(B)}+\frac{p(\overline{A\cup B})}{1-p(B)}=1$$

2、解：由 $(1-p(B))p(AB)+p(B)(1-p(A\cup B))=p(B)(1-p(B))$

将$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)$代入化简得$p(AB)=p(A)p(B)$

所以事件A,B独立

由$p(A)=p(B)=p(C)=0.6$, 事件A,B,C两两独立，$p(B\cup C\mid A)=0.2$

3、解：即$p(B\cup C\mid A)=\frac{p(AB)+p(AC)-p(ABC)}{p(A)}=0.2$, 得$p(ABC)=0.6$

所求概率$p=p(\overline{ABC})=1-p(ABC)=0.4$

4、解：

$$p(X=i,Y=k)=p(X=i)p(Y=K\mid X=i)=(\frac{1}{3})(\frac{k-i}{9-2i}),i=1,2,3;k=4,5$$

$$p(Y=4)=\frac{122}{315},\ p(Y=5)=\frac{193}{315}$$

5、解:

$$Y\text{的分布函数}F(y)=p(X^2\le y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{2}{3}\sqrt{y} & 0\le y<1\\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{y}) & 1\le y<4\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$$

$$\text{所求概率为}f(y)=\begin{cases}0 & y\le 0,or,y\ge 4\\ \frac{1}{\sqrt{y}} & 0<y<1\\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1\le y<4\end{cases}$$

6、解：$F(x,y)=p\{X\le x,Y\le y\}=\begin{cases}0 & x\le 0,or,y\le 0\\ x & 0<x<1,y>1\\ xy & 0<x<1,0<y<1\\ y & x\ge 1,0<y<1\\ 1 & x\ge 1,y\ge 1\end{cases}$

三、（15 分）

解：

（1）$\int_0^1 dx\int_0^1 ae^x dy=a(2-x)e^x\,|_0^1=a(e-2)=1$，得$a=\frac{1}{e-2}$(3分)

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{e-2}(1-x)e^x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

同理$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{e^y-1}{e-2} & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ （7分）

（3） 因为在$0<x<1,x<y<1$内，有$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X, Y不独立

（11 分）

（4） $P(X+Y<0.5)=\int_0^{0.25}\int_x^{0.5-x}\frac{e^x}{e-2}dy=2(e-2)$ （15 分）

四、（10 分）解:

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & -2<x<-1\\0 & \text{其他}\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}1 & 1<y<2\\0 & \text{其他}\end{cases}\quad (4分)$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}1-|z| & |z|<1\\0 & |z|\ge 1\end{cases}\quad (10分)$$

五、(18 分)解：

（1）

$$f_Y(Y)=\begin{cases}4y^3 & 0<y<1\\0 & \text{其他}\end{cases},0<y<1\text{时，}f_{X|Y}(X\mid Y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2} & 0<x<y\\0 & \text{其他}\end{cases}\quad (4分)$$

（2） $$P(X\le x\mid Y=0.25)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(X\mid 0.25)dx=\begin{cases}0 & x<0\\16x^2 & 0\le x\le 0.25\\1 & x\ge 0.25\end{cases}\quad (8分)$$

（3） $$P(X<0.5\mid Y<0.5)=\frac{P(X<0.5,Y<0.5)}{P(Y<0.5)}=1\quad (12分)$$

（4） $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy=\begin{cases}2z & 0<z<1\\0 & \text{其他}\end{cases}\quad (14分)$$

（5） $$E(X^2Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2y^2 8xydy=\int_0^1 2x^3(1-x^4)dx=\frac{1}{4}\quad (18分)$$

2017 年概率论期中考试试题

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1、已知A、B独立，$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.8$ 则 $P\left(\bar{B}\mid A\right)=$__________.

2、 甲、乙、丙三人分别独立地破译一份密码，已知三人能译出的概率分别为 1/5， 1/3，1/4，那么密码被破译的概率为_______.

3、 n对夫妇任意地排成一列，则每一位丈夫都排在他妻子后面的概率是_______.

4、设 $r.v.X \sim P(\lambda)$，且 $P(X=2)=P(X=4)$，则 $\lambda=$________.

5、已知连续型 $r.v.X,Y$ 独立同分布，且密度函数为 $f(x)$，则 $r,v,Z=\min(X,Y)$ 的概率密度为_________.

6、设 r,v,x,y 相互独立，且服从同一分布，$P(X=k)=P(Y=k)=(k+1)/3, k=0,1$， k=0，1，则 $P(X=Y)$ =_________.

7、设随机变量 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$，则 $P\{X^2\geq 1\}=$ _________.

8、若 $r.v.(X,Y) \sim N(0,1,2,1,0)$，则 $2X-3Y+1$ 服从________________分布.

9、设二维 $r.v.(X,Y)$ 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}\left(1-2^{-x}\right)\left(1-3^{-y}\right), & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 则概率 $P(Y\leq 1)$ =_____________.

10、设 X 与 Y 都服从分布 $B(1,p)$，若 $P(XY=0)=q$，则 $P(XY=1)$ =___________.

二（10 分）、某厂卡车运送防“非典”用品下乡，顶层装 10 个纸箱，其中 5 箱民用口罩、2 箱医用口罩、3 箱消毒棉花。到目的地时发现丢失 1 箱，不知丢失哪一箱。现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱，结果都

是民用口罩，求丢失的一箱也是民用口罩的概率。

三（10 分）、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=AB\arctan x$，求：(1)常数 A 和 B；（2）X的概率密度函数 $f(x)$ （3）$P\{\sqrt{2}<X<2\}$

四（10 分）、$r.v.X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8},0<x<4\\0, \quad 其他\end{cases}$，若 $Y=\exp(X)-1$，求$r.v.X$的概率密度 $f_Y(y)$

五（13 分）、设 $r.v.(X,Y)$ 联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(x+2y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & (else) \end{cases}$$

（1）求 A；（2）判断X，Y是否独立，并说明理由；（3）求 $P\{0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

六、（12 分）设随机变量 $X : U(0,1), Y : \exp(1)$，且它们相互独立，试求Z=2X-Y的密度函数 $f_Z(z)$.

七（15 分）、设随机变量Y服从参数为 1 的指数分布，定义随机变量 X_1,X_2 为

$$X_k=\begin{cases} 0,(Y\le k) \\ 1,(Y>k) \end{cases},k=1,2$$

求：1）X_1 和 X_2 的联合分布律：

2）X_1 和 X_2 的边缘分布律：

3）X_1 和 X_2 是否独立？为什么？

4）在 $X_2=0$ 条件下 X_1 的条件分布。

2016 年 11 月概率论与数理统计

一、判断题（正确答“是”，错误答“否”）（每小题 3 分，共 12 分）

1、设事件 A,B 互斥，则 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 为必然事件.

2、设 A,B 为两个事件，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

3、设事件 A,B 相互独立，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

4、设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim N(1,4),Y\sim N(2,9)$，则 $X+Y\sim N(3,13)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1、设 A,B 为两个事件，且 $B\subset A$，则下列关系成立的是（）

A、$\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}$ B、$\overline{A-B}=\overline{\overline{B}}$ C、$\overline{A\cup B}=\overline{A}$ D、$\overline{A\cup B}=\overline{\overline{B}}$

2、设 A,B 为两个互斥事件，且 $P(A)$，$P(B)$ 均大于 0，则下列关系成立的是（）

A、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互斥 B、$\overline{A}$ 与 B 互斥 C、P(A-B)=P(A) D、P(AB)=P(A)P(B)

3、下列哪一个函数是某个变量的分布函数（）

4、设随机变量 X,Y 相互独立，分布函数分别为 FX(x)，FY(y)，则对任意实数 Z，P{max（X,Y）≤Z}等于（）

A、FX(Z)FY(Z) B、(1-FX(Z))FY(Z) C、1-(1-FX(Z))(1-FY(Z)) D、(1-FY(Z))FX(Z)

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1、设 P(A)=1/4,P(A|B)=1/2,P(B|A)=1/3,求 $P(A\cup B)$.

2、设 X~N(2，P)，T~N(3，P)，且 P（X≥1）=5/9，求 P(T≥1).

3、设 X,Y 的分布函数为

四、（10 分）某保险公司将参加保险的车主分为三类，“技术熟练者”，“技术一般者”，“技术较差者”，这三类车主在一年内驾车出事故的概率依次为 0.02,0.06,0.1，“技术熟练者”占 3/10，“技术一般者”占 1/2，“技术较差者”占 1/5，问

（1）一年内驾车出事故的车主占参加汽车保险的车主的比例是多少？

（2）若某车主在一年内驾车未出事故，则其为“技术一般者”的概率是多少？

五、（10 分）设 f1(x)是标准正态分布的概率密度，f2(x)是在区间$[-1,3]$服从均匀分布的概率密度，若 f(x)=是某随机变量的概率密度，且相应的分布函数满足 F（0）=0.2，求 a,b.

六、（12 分）设二维随机变量（X,Y）的联合密度函数为

（1）求 X,Y 的边缘密度函数 fx(x),fy(y)，X,Y 是否独立？
（2）求概率密度 fY|X(y|x),fX|Y(x|y).

七、（10 分）设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，求 $Y=1-e^{-2x}$ 的概率密度.

八、（10 分）设随机变量 X,Y 相互独立，其概率密度分别为

求 Z=X+Y 的概率密度.

（1）已知一个原件已工作了三万小时，求再正常工作四万小时的概率;

（2）求系统寿命大于五万小时的概率.

2016 年 4 月概率论与数理统计

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1、已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，求 $P(AB\to)$.

2、n 个同学聚会，若围着圆桌随意就坐，求甲同学恰好和乙同学相邻的概率.

3、甲乙丙三位同学独立参加数学概率统计课程考试，不及格的概率分别为 0.4,0.3,0.5，如果已知这三位同学中有两位同学不及格，求其中一位是乙同学的概率.

4、已知事件 A 的概率 $P(A)=0$，B 为任意一事件，证明：事件 A,B 相互独立.

5、10 件产品中有 8 件正品，2 件次品，从中任意抽取 2 件产品，设其中次品件数为 X，求 X 的分布律和分布函数.

6、设 X 是连续型随机变量，其分布函数 f（x）是严格

7、从 1,2,3 中任选一个数记为 X，再从 1 到 X 中任选一个数记为 Y，求 X 与 Y 的联合分布律和边缘分布律，并计算 P（X+Y=4）.

8、已知随机变量 X,Y 均服从正态分布

二、有外表相同的两箱零件，其中甲箱中有十件正品两件次品，乙箱中有七件正品三件次品.

（1）从两箱中任取一箱，再从该箱中先后取出两个零件，求先取出正品后取出次品的概率；

（2）已知取出的零件是前正品后次品，求这些零件是从甲箱中取出的概率.

三、（10 分）设某电子元件的寿命服从参数 $\lambda=\frac{1}{4}$ 的指数分布（单位：万小时），某系统并联了两个这种电子元件，计算：

（1）已知一个原件已工作了三万小时，求再正常工作四万小时的概率；

（2）求系统寿命大于五万小时的概率.

四、（10 分）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 U=max{X,Y},V=min{X,Y},求（U,V）的概率分布.

五、（12 分）设（X,Y）在由曲线 $y=x^2/2$ 和 $y=x$ 所围的有限区域内服从均匀分布.

（1）求（X,Y）的联合概率密度；

（2）求边缘密度 fX（x）和 fY（y）；

（3）判断 X 与 Y 是否独立；

六、（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 在（0,1）服从均匀分布，Y 服从 λ=1 的指数分布，求 Z=2X-Y 的密度函数 fZ（z）.

15 年概率论期中试题

一、解答下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1、一套五卷文集随意放在书架上，求第一卷或第五卷放在旁边的概率。

2、某人向同一目标进行独立重复射击，每次命中率均为 p $(0<p<1)$. 求第 6 次射击时恰好第 2 次命中目标的概率.

3、设随机变量 $\boldsymbol{X}$ 服从[0，4]上的均匀分布，求随机变量 $\mathrm{Y}=|\mathrm{X}-2|$ 的分布函数和密度函数。

4、袋中有 2 个红球，3 个黑球，n 个人依次摸球，每人摸 2 个再放回袋中，求 n 个人摸到红球总数的期望和方差。

5、设随机变量 X,Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，已知 $P(X\le 1,Y\le -1)=0.25$，计算 $P\{X>1,Y>-1\}$.

6、设随机变量 X,Y 相互独立且均服从参数为 λ 的指数分布，已知 $P(X>1)=e^{-2}$，求参数 λ 并计算 $P\{\min(X,Y)<1\}$。

7、已知随机变量 X 与 Y 满足：$EX=2,EY=3,DX=1,DY=4,E(XY)=7$. 又设 $U=X-Y,V=2X+Y$，计算 U,V 的相关系数 ρ_{UV}.

二、(10 分) 一道单选题同时列出 5 个答案，某考生可能会做而选对答案，也可能不会做而乱猜一个。假设他会做此题的概率为 $\frac{1}{3}$，计算

(1) 他选对答案的概率；

(2) 已知他选对答案了，求他是猜对的概率.

三、(10 分) 某教师总是在早上 7 点准时出门去赶 7 点 15 分准时发车的校车，已知他步行到校车站所用时 X（分钟）服从正态分布 $N(12,4)$. 本学期他每周要去学校四次，问每周至少有三次能赶上校车的概率是多少？

（已知 $\Phi(0.5)=0.692,\Phi(1)=0.841,\Phi(1.5)=0.933$ ）

四、（10 分）设随机变量 X,Y 同分布，X 的分布律为

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

已知 $P\{XY=0\}=1$，求 (X,Y) 的联合分布律和 X、Y 的边缘分布律.

五、(10 分) 设随机变量 X与Y 相互独立，X 在（0，1）服从均匀分布，Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，求 $Z=2X+Y$ 的密度函数。

六、(14 分) 设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 在 $D=\{\ (x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge 0\ \}$ 服从均匀分布.

（1）求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$；

（2）求 X、Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，X 与 Y 是否独立？

（3）求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ 和 X、Y 的相关系数 ρ_{XY}，X 与 Y 是否相关？

七、(6 分) 设 $0<P(B)<1$，证明：随机事件 A 与 B 相互独立的充要条件是

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1.$$

15 年概率论期中试题参考答案

一、解答下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1、

解 设事件 A、B 分别表示第一卷、第五卷放在旁边，则所求概率为

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2\times 4!}{5!}+\frac{2\times 4!}{5!}-\frac{2\times 3!}{5!}=0.7$$

2、

解 $P\{\text{第6次射击时恰好第2次命中目标}\}$

$$=P\{\text{前5次射击中命中1次目标，第6次射击时命中目标}\}$$

$$=P\{\text{前5次射击中命中1次目标}\}\cdot P\{\text{第6次射击时命中目标}\}$$

$$=C_5^1 p^1(1-p)^4\cdot p=5p^2(1-p)^4$$

3、

解 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；当$0\le y\le 2$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X-2|\le y\}=P\{2-y\le X\le 2+y\}=\int_{2-y}^{2+y}\frac{dx}{4}=\frac{y}{2}$$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{y}{2}, & 0\le y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{n n .}\end{cases}$

4、

解 设 X_i 表示第 i 人摸到的红球数，i，2，....，n，X 表示 n 个人总共摸到的

红球数，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 因为

$$P\{X_i=0\}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},\quad P\{X_i=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5},\quad P\{X_i=2\}=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$$

所以 $E(X_i)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$$D(X_i)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+4\times\frac{1}{10}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，所以 n 个人摸到红球总数的期望和方差分别是

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0.8n \qquad D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=0.36n$$

5、

解 记 $A=\{X\le 1\}$，$B=\{Y\le -1\}$，已知 $P(AB)=\frac{1}{4}$，则

$$P\{X>1,Y>-1\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

其中 $P(A)=P\{X\le 1\}=\Phi(\frac{1}{\sigma})$

$$P(B)=P\{Y\le -1\}=\Phi(-\frac{1}{\sigma})=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})$$

$$P\{X>1,Y>-1\}=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})-1+\Phi(\frac{1}{\sigma})+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

6、

解 因为 $P(X>1)=\int_1^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda}$ 所以 $\lambda=2$

$$P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\ge 1\}=1-P\{X\ge 1,Y\ge 1\}$$
$$=1-[P(X\ge 1)]^2=1-(e^{-2})^2=1-e^{-4}$$

7、

解 $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=7-2\times 3=1$

$$Cov(U,V)=Cov(X-Y,2X+Y)=2DX-DY-2Cov(X,Y)+Cov(X,Y)=-3$$

$$DU=DX+DY-2Cov(X,Y)=3,\quad DV=4DX+DY+4Cov(X,Y)=12,$$

所以 $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DV}}=-\frac{1}{2}$

二、(10 分)

解 设 A 表示考生选对答案了，B 表示考生会做这道题。

(1) 由全概公式得

$$P(A)=P(B)\times P(A|B)+P(\bar{B})\times P(A|\bar{B})=\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15},$$

(2) 由逆概公式得 $$P(\bar{B}|A)=\frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(A)}=\frac{2/3\times 1/5}{7/15}=\frac{2}{7}$$

三、(10 分)

解 设他 4 次中能赶上校车的次数为 Y，则 Y 服从 $B(4,p)$.

由题意 $$p=P(0<X<15)=P(\frac{0-12}{2}<\frac{X-12}{2}<\frac{15-12}{2})$$

$$=\Phi(1.5)-\Phi(-6)\approx 0.933$$

所以 $P(Y\geq 3)=C_4^3p^3(1-p)+C_4^4p^4=4\times(0.933)^3\times(1-0.933)+(0.933)^4=0.975$

四、(10 分)

解 由条件 $P\{XY=0\}=1$ 得

$$P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=-1,X_2=0)$$
$$+P(X_1=0,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)=1$$

所以 $$P(X_1=1,X_2=1)=P(X_1=-1,X_2=-1)$$

$$=P(X_1=-1,X_2=1)=P(X_1=1,X_2=-1)=0$$

计算出有关数据，列出联合及边缘分布律表为

X \ Y	-1	0	1	$P_{i.}$
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
$P_{.j}$	0.25	0.5	0.25	

五、（10 分）

解 $$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<1, y>0 \\ 0 & \text{n n} \end{cases}$$

由卷积公式 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-2x)dx$$

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ z-2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<z/2 \end{cases}$$

所以 Z 的密度函数为 $$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \int_0^{z/2} e^{-(z-2x)}dx=\frac{e^{-z}}{2}(e^z-1) & 0<z\le 2 \\ \int_0^1 e^{-(z-2x)}dx=\frac{e^{-z}}{2}(e^2-1) & z\ge 2 \end{cases}$$

六、（14 分）

解（1） $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2}{\pi} & y^2+x^2\le 1, y>0 \\ 0 & \text{n n} \end{cases}$$

（2） X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1 \\ 0, & n\ n \end{cases},$$

Y 的边缘密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & 0<y<1 \\ 0, & n\ n \end{cases},$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X，Y 不独立。

(3) $$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y>0}} \frac{2x}{\pi}dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x}{\pi}dx=0$$

$$EY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y>0}} \frac{2y}{\pi}dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2y}{\pi}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=\frac{4}{3\pi}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y>0}}\frac{2xy}{\pi}dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2xy}{\pi}dx=0$$

因为 $EXY=EXEY$，所以 $\rho_{XY}=0$，故 X 与 Y 不相关。

七、（6 分）

证明 必要性：

随机事件 A 与 B 相互独立，所以随机事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立．因此有

$$P(A|B)=P(A),\qquad P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{A}),$$

因此有 $$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

充分性： 由于 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，

所以有 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$.

因此有 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A-AB)}{1-P(B)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$.

由 $0<P(B)<1$，得 $1-P(B)>0$，因此有

$$P(AB)(1-P(B))=P(B)(P(A)-P(AB))$$

整理得 $P(AB)-P(B)P(AB)=P(A)P(B)-P(AB)P(B)$.

即得 $P(AB)=P(A)P(B)$.

这表明随机事件 A 与 B 相互独立.

15 年 4 月概率论期中试题

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1、已知随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，求积事件 $A\overline{B}$ 的概率。

2、n 个同学聚会，若围着圆桌随意就座，求甲同学和乙同学恰好相邻的的概率。

3、甲、乙、丙 3 位同学独立参加概率课程考试，不及格的概率分别为 0.4，0.3，0.5。如果已经知道这 3 位同学中有 2 位不及格，求其中一位是同学乙的概率.

4、已知事件 A 的概率 $P(A)=0$，B 是任意一个事件，证明事件 A,B 相互独立。

5、10 件产品中有 8 件正品、2 件次品，从中任意抽取 2 件，抽到的次品数为 X，求 X 的分布律和分布函数。

6、设随机变量 X 具有连续的分布函数 F(x)，求 Y=F(X)的分布密度函数。

7、从数 1, 2, 3 中任取一个数，记为 X，再从 1 至 X 中任取一个数，记为 Y，求 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律，并求 $P(X+Y=4)$.

8、已知随机变量 X 和 Y 都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$，且 $P\{X\le 1,Y\le -1\}=\frac{1}{4}$，计算 $P\{X>1,Y>-1\}$。

二、（10 分）有外表相同的 2 箱零件，甲箱中有 10 件正品 2 件次品，乙箱中有 7 件正品 3 件次品.

（1）从两箱中任取一箱，再从该箱中先后取出 2 个零件，求先取出正品，后取

出次品的概率；

（2）已知取出的零件是前正品后次品，求这些零件是由甲箱中取出的概率.

三、(10 分）设每个电子元件寿命 X 都服从 $\lambda=\frac{1}{4}$ 的指数分布（单位：万小时），某系统并联了二个这种电子元件，计算

（1）已知某元件已正常工作了 3 万小时，求它再正常工作 4 万小时的概率.

（2）系统寿命大于 5 万小时的概率.

四、（10 分）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$. 求 (U,V) 的概率分布；.

五、(12 分) 设(X,Y)在由曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=x$ 所围的有限区域内服从均匀分布。

（1）求(X,Y)的联合密度；

（2）计算边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

（3）判断 X 与 Y 是否独立。

六、(10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 在(0，1)服从均匀分布，Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，求 $Z=2X-Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

15 年概率论期中参考答案

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1、解： 由已知得

$$0.6 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.3 - P(AB)$$

即 $P(AB) = 0.1$. 故

$$P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$=0. 3

2、解 $$p = \frac{C_n^1 . C_2^1 .(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}$$

3、解： 设 A_i 分别表示甲、乙、丙不及格，i=1, 2，3

设 B={恰有两位同学不及格}，则

$$B = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$$

$$P(B) = 0.6 \times 0.3 \times 0.5 + 0.4 \times 0.7 \times 0.5 + 0.4 \times 0.3 \times 0.5 = 0.29$$

设事件 C={已知这 3 位同学中有 2 位不及格，其中一位是同学乙 }，所求条件概率为

$$P(C) = \frac{P(\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3)}{P(B)} = \frac{0.6 \times 0.3 \times 0.5 + 0.4 \times 0.3 \times 0.5}{0.29} = \frac{15}{29}$$

4、证明 $\because P(A) = 0$， $A\overline{B} \subset A$，

$$\therefore\ 0 \le P(A\overline{B}) \le P(A) = 0\text{，从而 } P(A\overline{B}) = 0$$

$$\therefore P(AB) = P(A - A\overline{B}) = P(A) - P(A\overline{B}) = 0 = P(A)P(B)$$

于是事件 A, B 相互独立. 证毕。

5、解 分布律和分布函数分别为

X	0	1	2
p_k	28/45	16/45	1/45

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 28/45, & 0 \le x < 1 \\ 44/45, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

6、解　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

由于 F(x)是连续的单增函数，且 $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$,所以

当 $y<0$ 时，　$F_Y(y)=0$；

当 $y\ge 1$ 时，　$F_Y(y)=1.$

当 $0\le y<1$ 时

$$F_Y(y)=P\{\mathrm{F(X)}\le y\}=P\left\{X\le F^{-1}(y)\right\}=F_X(F^{-1}(y))=y$$

所以　$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$

故　$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0 & 0\le y\le 1\\ 1 & \text{其它}\end{cases}$

7、解　联合分布律及边缘分布律为

Y / X	1	2	3	**P**i.
1	1/3	0	0	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
3	1/9	1/9	1/9	1/3
p.j	11/18	5/18	1/9	

$P(X+Y=4)$=5/18

8、解　记 $A=\{X\le 1\},B=\{Y\le -1\}$，则 $P(AB)=\dfrac{1}{4}$

$$P\{X>1,Y>-1\}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

其中

$$P(A)=P\{X\le 1\}=\Phi(\frac{1}{\sigma}),$$

$$P(B)=P\{Y\le -1\}=\Phi(-\frac{1}{\sigma})=1-\Phi(\frac{1}{\sigma}).$$

所以 $$P\{X>1,\ Y>-1\}=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})-1+\Phi(\frac{1}{\sigma})+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

二、**解** 记 $A=\{X\le 1\},B=\{Y\le -1\}$，则 $P(AB)=\frac{1}{4}$

$$P\{X>1,Y>-1\}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

其中

$$P(A)=P\{X\le 1\}=\Phi(\frac{1}{\sigma}),$$

$$P(B)=P\{Y\le -1\}=\Phi(-\frac{1}{\sigma})=1-\Phi(\frac{1}{\sigma}).$$

所以 $$P\{X>1,\ Y>-1\}=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})-1+\Phi(\frac{1}{\sigma})+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

三、解： (1) 由指数分布的无记忆性

$$P(X\ge 7\mid X\ge 3)=P(X\ge 4)=1-F(4)=1-(1-e^{-\frac{4}{4}})=e^{-1}=0.3679$$

或

$$P(X\ge 7\mid X\ge 3)=\frac{P(X\ge 7,X\ge 3)}{P(X\ge 3)}=\frac{P(X\ge 7)}{P(X\ge 3)}$$

$$=\frac{1-F(7)}{1-F(3)}=\frac{e^{-\frac{7}{4}}}{e^{-\frac{3}{4}}}=e^{-1}=0.3679$$

（2） 设 Z 表示系统寿命，由于是并联，所以

$$P(Z>5)=1-P(Z\le 5)=1-P(X<5)\times P(X<5)=1-(1-e^{-\frac{5}{4}})^2$$

四、解： （I） 易知 $U,\ V$ 的可能取值均为 1，2， 且

$$P(U=1,V=1)=P(\max\{X,Y\}=1,\min\{X,Y\}=1\})$$

$$=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{4}{9},$$

$$P(U=1,V=2)=P(\max\{X,Y\}=1,\min\{X,Y\}=2\})=0,$$

$$P(U=2,V=1)=P(\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=1)$$

$$=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)$$

$$=P(X=2)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)=\frac{4}{9},$$

$$P(U=2,V=2)=P(\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=2)$$

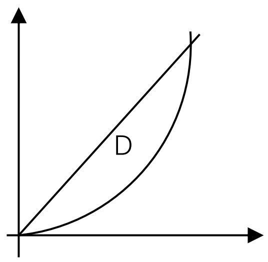
$$=P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=\frac{1}{9},$$

故$(U,\ V)$的概率分布为:

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

五、解：（1）由曲线$y=\dfrac{x^2}{2}$和$y=x$所围的有限区域的面积 A 为

$$A=\iint_D dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} dy=\int_0^2 (x-\frac{x^2}{2})dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} dy=\frac{2}{3}$$



于是(X,Y)的联合密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3} & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2/2}^{x}\dfrac{2}{3}dy & 0\le x\le 2\\ 0 & \textbf{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x-\dfrac{x^2}{2}) & 0\le x\le 2\\ 0 & \textbf{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{2y}}\dfrac{2}{3}dx & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(\sqrt{2y}-y) & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（3）由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。

六、解　$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其\ 他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

由卷积公式　　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(2x-z)dx$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x - z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > z/2 \end{cases}$$

所以 $$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^1 e^{-(z-2x)} dx = e^z (1 - e^{-2})/2 & z \le 0 \\ \int_{z/2}^1 e^{-(z-2x)} dx = (1 - e^{z-2})/2 & 0 < z < 2 \\ 0 & z \ge 2 \end{cases}$$

更多精彩,尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏,欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。