第四章 级数

第二节 幂级数

本节主要内容有（1）求幂级数的收敛半径、收敛域，（2）函数的幂级数展开，（3）级数求和。

1．求幂级数的收敛半径、收敛域．主要方法是比值法、根值法．这两个方法都不能用时就要想到 Abel 定理．

例 1．求下列级数的收敛半径和收敛域

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+1}{n!}x^n$ （2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}(x+1)^n$ ，（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n\ln n}$

解：（1）由于 $\lim\frac{\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)!}}{\frac{n^3+1}{n!}}=\lim\frac{(n+1)^3+1}{(n^3+1)(n+1)}=0$

所以收敛半径为 $R=+\infty$ ，从而收敛敛域为 $(-\infty,+\infty)$

（2）由于 $\lim\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}$ ，所以收敛半径为 $R=2$ ，收敛区间为 $(-3,1)$ ，$x=-3$ 和 $x=1$ 时原级数均发散，故原级数收敛域为 $(-3,1)$

注：本题不能用比值法，因为极限 $\lim|\frac{c_{n+1}}{c_n}|$ 不存在．值得注意的是：任何幂级数都有收敛半径（最小可以是零，最大可以是正无穷），但比值 $|\frac{c_{n+1}}{c_n}|$ 或根值 $\sqrt[n]{|c_n|}$ 的极限可以不存在．用比值法求收敛半径的前提是比值 $|\frac{c_{n+1}}{c_n}|$ 的极限存在；同样用根值法求收敛半径的前提是根值 $\sqrt[n]{|c_n|}$ 的极限存在．

（3）由于 $\lim\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}=1$

所以收敛半径为 $R=1$，从而收敛区间为 $(1,3)$ ， $x=1$ 时原级数发散， $x=3$ 时原级数收敛，所以收敛域为 $(1,3]$

例 2．求下列级数的收敛域

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^n n}$　　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ ，（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+2^n+\cdots+50^n}{n^4}(\frac{1-x}{1+x})^n$

解：（1）（分析：幂级数中没有偶数次幂的项，对于缺项幂级数一般有两个方法处理：（1）带上变量 x，求出比值或根值的极限．然后找出收敛区间，再看收敛区间的端点是否收敛，从而得出收敛域．（2）作变量代换，化为不缺项的幂级数，求出其收敛域，再求出原幂级数的收敛域．）

$\lim|\frac{\frac{x^{2n+3}}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{x^{2n+1}}{3^n n}}|=\frac{x^2}{3}$，故当 $\frac{x^2}{3}<1$ 即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时幂级数收敛；而 $\frac{x^2}{3}>1$ 即 $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时幂级数发散，故幂级数收敛区间为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，又 $x=\pm\sqrt{3}$ 时幂级数发散，所以收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$．

另解：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^n n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n n}$ 具有相同的收敛域，令 $t=x^2$，则

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n n}$，而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n n}$ 的收敛域为 $[-3,3)$，由于 $x^2\in[-3,3)\Leftrightarrow x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，

所以原幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$．

（2）$\lim\sqrt[n]{|\frac{x^{n^2}}{2^n}|}=\lim\frac{|x^n|}{2}\begin{cases}0,|x|<1\\ \frac{1}{2},x=\pm1\\ +\infty,|x|>1\end{cases}$

所以收敛域为 $[-1,1]$．

（3）令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+\cdots+50^n}{n^3}t^n$，

由 $\frac{\frac{1+2^n+\cdots+50^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{1+2^n+\cdots+50^n}{n^3}}\to 50$，且 $t=\pm\frac{1}{50}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+\cdots+50^n}{n^3}t^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+\cdots+50^n}{n^3}t^n$ 的收敛域为 $[-\frac{1}{50},\frac{1}{50}]$

解不等式 $\frac{-1}{50}\le\frac{1-x}{1+x}\le\frac{1}{50}$ 得 $\frac{49}{50}\le x\le\frac{51}{50}$，所以原级数的收敛域为 $[\frac{49}{50},\frac{51}{50}]$

例 3．（1）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ___，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 ___，$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛半径为 ___．

（2）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n x^n$ 的收敛域为 __________．

解：（1）由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，故 $x=-4$ 一定是收敛区间的端点，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 4，从而可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 2．又由于 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$，故 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛半径为 4．

注：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导和逐项求积分后的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ 的收敛半径与原幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径相同，但收敛区间端点处的收敛性可能会变化。

（2）（分析：比值法、根值法都不能用，因此只能用 Abel 定理去分析）

$|1+2\cos\frac{n\pi}{4}| \le 3$．当 $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 时，$|(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n x^n| \le |\frac{x}{3}|^n$，从而知 $\sum_{n=0}^{\infty} |(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n x^n|$ 收敛，而当 $x=\pm\frac{1}{3}$ 时幂级数发散（因为通项不趋于零），所以收敛域为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

2．幂级数展开

首先要熟记几个简单函数：$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^{\mu}$（特别是 $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}$）的麦克劳林展式并要记住其收敛域．其它函数在进行泰勒展开时，一般都是利用这几个展式再结合幂级数的性质（四则运算性质、逐项求导和求积分的性质、变量代换的性质）进行．幂级数展开的最后结果还要写上收敛域．

例 4．将函数 $f(x) = \arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处展开为幂级数．

解：$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1,1)$

从而 $f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

右端幂级数在 $x=\pm1$ 处均收敛，但 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处无定义，故

$$f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1)$$

例 5． 求 $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$ 在 $x=-1$ 处的泰勒级数.

解： $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)=\ln(2x-1)(x-1)=\ln(1-2x)(1-x)=\ln(1-2x)+\ln(1-x)$

$$\ln(1-2x)=\ln(3-2(x+1))=\ln 3+\ln[1-\frac{2(x+1)}{3}]=\ln 3-\sum_{\text{n}=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,3^n}(x+1)^n, \frac{-3}{2}\le x+1<\frac{3}{2}$$

$$\ln(1-x)=\ln(2-(x+1))=\ln 2+\ln[1-\frac{x+1}{2}]=\ln 2-\sum_{\text{n}=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}(x+1)^n, \text{-}2\le x+1<2$$

所以 $f(x)=\ln 6-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2^n}{n\,3^{\text{n}}}+\frac{1}{n\,2^n}](x+1)^n, \frac{-5}{2}\le x<\frac{1}{2}$.

例 6． 将 $f(x)=\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\ (|x|<1)$ 展开成 x 的幂级数.

解：设 $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ，则

$$x\sin\alpha=(1-2x\cos\alpha+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=a_0+(a_1-2a_0\cos\alpha)x+(a_2-2a_1\cos\alpha+a_0)x^2+\cdots+(a_n-2a_{n-1}\cos\alpha+a_{n-2})x^n+\cdots$$

比较系数得：

$$a_0=0, a_1-2a_0=\sin\alpha, a_2-2a_1\cos\alpha+a_0=0,\cdots, a_n-2a_{n-1}\cos\alpha+a_{n-2}=0, n=2,3,\cdots$$

由归纳法可得 $a_0=0, a_1=\sin\alpha,\cdots, a_n=\sin n\alpha$

所以 $f(x)=\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_{\text{n}=1}^{\infty}(\sin n\alpha)x^n, |x|<1$.

例 7． $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$ 的麦克劳林级数中 x^3 的系数为______ .

解： $\frac{e^{-x}}{1-x}=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\cdots)=1+\cdots+(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-1+1)x^3+\cdots$

所以 x^3 的系数为 $\frac{-1}{6}+\frac{1}{2}-1+1=\frac{1}{3}$.

亦可通过作除法得出答案：

$$\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\cdots}{1-x}=$$

３．级数求和，这里包括幂级数求和、数项级数求和

幂级数求和：主要方法有（１）直接利用基本展开式，（２）利用基本展开式再结幂级数的性质求和，（３）方程法，建立和函数满足的代数方程或微分、积分方程，然后解方程得结果．另外若遇到一般的函数项级数求和问题，我们先看能否通过变换化为幂级数，如不能就想办法求其部分和再求部分和的极限．

例８．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数为________．

解：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x^2)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=x^2e^{x^2}+e^{x^2},-\infty<x<+\infty$

例９．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}$ 的和函数．

解：该幂级数的收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}})$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}=\sqrt{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{2}x^3)^{n-1}$$

令 $t=\sqrt{2}x^3$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{2}x^3)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(t^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}t^n)'=\frac{1}{(1-t)^2}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{2}x^3)^{n-1}=\frac{1}{(1-\sqrt{2}x^3)^2}$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}=\sqrt{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{2}x^3)^{n-1}=\frac{\sqrt{2}x^2}{(1-\sqrt{2}x^3)^2},x\in(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}})$

注：本题初看比较复杂，但通过变换后就非常简单了，可见变换、变形等技巧在解数学题中是多么有效．

例１０．求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)2^n}$ 的和函数．

解：该级数的收敛域为$[-2,2]$．令$t=\frac{x}{2}$，则原级数化为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)t^n}{n(n-1)}$．

设其和函数记为 $f(t)$，即 $f(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)t^n}{n(n-1)}$，那么

$f''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n=\frac{1}{1+t}$，又 $f'(0)=0$

故 $f'(t)=\int_0^t f''(t)dt+f'(0)=\int_0^t\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+t)$

$f(t)=\int_0^t f'(t)dt+f(0)=\int_0^t\ln(1+t)dt=(1+t)\ln(1+t)-t$

又 $\lim_{t\to-1-}f(t)=1$，所以 $f(t)=\begin{cases}(1+t)\ln(1+t)-t,-1<t\le1\\1,t=-1\end{cases}$

故原幂级数的和为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)2^n}=\begin{cases}(1+\frac{x}{2})\ln(1+\frac{x}{2})-\frac{x}{2},-2<x\le2\\1,x=-2\end{cases}$$

另解：先将通项拆成简单函数的和 $\frac{(-1)^n t^n}{n(n-1)}=\frac{(-1)^n t^n}{n-1}-\frac{(-1)t^n}{n}$，从而

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)t^n}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n}=t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$$

可以通过逐项求导和积分求以上式右端两个级数的和．但如果想到$\ln(1+t)$的展开式，可以更简便．

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\ln(1+t)$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\ln(1+t)-t$

但$t=-1$时要单独考虑．

例１１．设$a_0=a_1=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,n=0,1,\cdots$，求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径及在收敛区间内的和函数．

解：为求收敛半径，先求$\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$，由题设得 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$，令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，

那么 $b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$，（由数列极限一节中介绍的方法可得$b_n\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，从而可得收敛半

径为$R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，具体过程此处不再重述）

设该幂级数的和函数记为$s(x)$，即$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，由$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，得

$a_{n+2}x^{n+2}=a_{n+1}x^{n+2}+a_n x^{n+2}$，求和得

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

即得 $s(x)-a_0-a_1x=x(s(x)-a_0)+x^2s(x)$，解此方程并注意到$a_0=a_1=1$得

$$s(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

例１２．设$a_0=3, na_n=(\frac{5}{3}-n)a_{n-1}, n=1,2,\cdots$，求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径及在收敛区间内的和函数.

解：为求收敛半径，先求$\lim|\frac{a_n}{a_{n-1}}|$，易见$|\frac{a_n}{a_{n-1}}|=|\frac{\frac{5}{3}-n}{n}|\to 1$，故收敛半径为$R=1$；

由题设有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n \qquad （１）$$

令$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，（１）式右边为$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1})'=(s(x)-a_0)'=s'(x)$，

右边为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n=\frac{2}{3}s(x)-x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=\frac{2}{3}s(x)-xs'(x)$

从而和函数$s(x)$满足方程 $s'(x)=\frac{2}{3}s(x)-xs'(x)$

解此方程并注意到$s(0)=3$得 $s(x)=3(1+x)^{\frac{2}{3}}$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=3(1+x)^{\frac{2}{3}}, -1<x<1。$$

数项级数求和：主要方法有（１）裂项相消：把通项分拆成二项或多项的和、差，然后求出部分和的表达式，再对部分和取极限得级数和，（２）直接利用基本展开式，（３）Abel方法：先求一个幂级数的和函数，然后把x取一个特定的值从而得数项级数的和.

例 13。（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$ ______，（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=$ ______，

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=$ ______，（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\,2^n}=$ ______。

解：（1） $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})$

所以 $s_n=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]\to\frac{1}{4}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$

注：也可以将通项拆成三项： $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$，然后求出 s_n。

（2） $\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$

所以 $s_n=1-\frac{1}{(n+2)!}\to 0$，故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=1$

（3） $\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}$

所以 $s_n=\arctan\frac{n}{n+1}\to\frac{\pi}{4}$

注：本题中通项的分拆不容易想到。但也有办法可以解决，先求出 $s_1=\arctan\frac{1}{2},s_2=\arctan\frac{2}{3},s_3=\arctan\frac{3}{4}$，进而猜测 $s_n=\arctan\frac{n}{n+1}$，再用归纳法证明这个猜测。

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n$

前一项是等比级数的和，很容易求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$. 后一项的和可以用后面介绍的 Abel 方法去求,但如能想到 $\ln(1-x)$ 的麦克劳林展式 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，问题就简单了，

$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n=\ln(1-\frac{1}{2})=-\ln 2$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n=1-\ln 2$

注：如能直接用基本展开式，我们就用，这样又快又准．比如某年的一道考题：

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}=$______．（$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+1)}{(2n+1)!}$

$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}]=\frac{\cos 1+\sin 1}{2}$）这里要求同学们对几个基本展开式很熟，同时也要知道他们的一些特点，比如系数中出现阶乘时应想到$e^x,\sin x,\cos x$的展开式.）

例１４．求级数的和　（１）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，（２）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

（３）$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-3)^n}{4^n}$

（１）分析：可将通项拆成二项的差：$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，从而可得部分和$s_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\to\frac{1}{2}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$.

（２）分析：将通项拆成二项的差：$\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1})$

但求不出部分和的表达式，因为中间的项消不掉．直接用基本展开式好象也行不通．下面用 Abel 方法来解决:先构造一个幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$,如能求出此幂级数和函数$s(x)$,那么取$x=1$,便得所求级数的和$s(1)$.

解：考虑幂级数$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

令$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$，则$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$

所以　$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx+f(0)=\arctan x$

$$s(x)=\int_0^x x\arctan x dx+s(0)=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=s(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

另解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\frac{1}{2}$，再用 Abel 方法求$\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

（3）分析：$(2n+1)\frac{(-3)^n}{4^n}=(2n+1)(-1)^n(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n}$，从而

$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-3)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n}$，那么容易想到幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

或：$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-3)^n}{4^n}=2\times\frac{-3}{4}\times\sum_{n=1}^{\infty}n(-\frac{3}{4})^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-3}{4})^n$，右端后一项可直接求出来，前一项可用 Abel 方法去求.

解：考虑幂级数$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}=(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1})'=(\frac{x}{1+x^2})'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

所求的和为$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-3)^n}{4^n}=s(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{4}{49}$.

注：用 Abel 方法求数项级数的和时, 幂级数的构造是我们人为的,具有随意性,我们遵循二条原则：（1）能够达到数项级数求和的目的，（2）幂级数的和函数能比较方便地求出来，因此经常要先对原级数作恒等变形.

例 15.（1）求 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式；

（2）求$\sum_{n=`}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$.

解：（1）方法一：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

其中$a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\ln^2(1+x)=x^2(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)^2=x^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中$c_n=a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_na_0=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)}$

$$\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1})=\frac{2(-1)^n}{n+2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})$$

$$f(x)=\ln^2(1+x)=2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})x^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^{n+1},\ -1<x\le 1$$

方法二：$f'(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}=2(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots)(1-x+x^2-\cdots)$

$$=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=2x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}(-1)^{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_nx^{n+1}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+2}x^{n+2}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}]x^{n+2}$$

（2）：由（1）知

$\sum_{n=`}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=\frac{\ln^2 2}{2}$。

练习题

1．设$x>0,$或$x<-1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{[1+(n-1)x](1+2nx)}{(1+nx)[1+2(n-1)x]}=$______．

（$\ln\frac{[1+(n-1)x][1+2nx]}{(1+nx)[1+2(n-1)x]}=\ln\frac{1+(n-1)x}{1+2(n-1)x}-\ln\frac{1+nx}{1+2nx}$，$s_n=-\ln\frac{1+nx}{1+2nx}\to\ln 2$）

2．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-n\ln(1+\frac{1}{n}))x^n$的收敛域为______．（$[-1,1)$）

3．设$m\ge 1$为整数，a_n是$(1+x)^{n+m}$中x^n的系数，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=$______．（$\frac{m}{m-1}$）

4．设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$的收敛域为$(-4,2)$，则$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-3)^n$的收敛域为______．

5．设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{3n}$ 在$x=2$处收敛，在$x=-2$处发散，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$的收敛半径为___．

6．$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots=$________．

7．$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^9}{11!}+\cdots}=$______．

（利用　$0=\sin\pi=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots$，答案：$\pi^2$）

8．求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$的收敛域与和函数.

（收敛域为$(-\infty,+\infty)$，$\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}(n\ge 2)$，和函数为

$$s(x)=\begin{cases}e^{-x}(x^2+1)+\frac{1}{x}(e^{-x}-1),x\ne 0\\0,x=0\end{cases}$$）

9．设$a_0=1,a_1=-2,a_2=\frac{7}{2},a_{n+1}=-(1+\frac{1}{n+1})a_n\ (n\ge 2)$，证明：$|x|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

收敛并求其和函数.

（很容易求出收敛半径$R=1$．可求a_n的表达式：$a_n=\frac{-(n+1)}{n}a_{n-1}$及

$a_2=\frac{7}{2}\Rightarrow a_n=\frac{7(-1)^n(n+1)}{6}\ (n\ge 2)$，$s(x)=\frac{1}{(1+x)^2}(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1)$）

10．（1）将$f(x)=\ln^2(1-x)$展开成x的幂级数；

（2）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$的和函数；

（３）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的和.

（（１） $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^{n+1}$, $-1\le x<1$

（２）由（１）两边积分可得结果，（３）由（２）易得结果：１）

１１. 设曲线$y=\frac{1}{x^3}$与直线$y=\frac{x}{n^4},y=\frac{x}{(n+1)^4}$在第一象限围成的图形的面积记为$I(n)$，

（１）求$I(n)$；　　　　（２）求$\sum_{n=1}^{\infty}I(n)$.

（$I(n)=\frac{2n+1}{(n+1)^2n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}I(n)=1$）

１２. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}})$收敛，并且其和不少于$1$.

（利用不等式：$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$）