（装订线内不要答题）

复旦大学计算机科学技术学院

2010-2011 第二学期《线性代数》期终考试试卷

B卷 共 6页

课程代码：COMP120004.02-03　　**考试形式：闭卷**　　2011 年 9 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业________________学号____________姓名____________成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、 n阶行列式计算：（共 20 分，每小题 10 分）

（1） $$A_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

（2）$A_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix}$

其中 $x_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$。

二、假设 A 为 n 阶方阵，$D=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n\}$是 n 阶对角阵，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\cdots,\lambda_n$ 两两不相等，且 $AD=DA$，证明:A 必为对角阵。 (10 分)

三、设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是复数域上三维线性空间 V 的一组基，T 是 V 的一个线性变换，它在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，即 $T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$。求：$T$ 的所有的特征值与特征向量。 (12 分)

（装订线内不要答题）

四、讨论参数α,β的值，解下列方程组。何时无解？何时有唯一的解？并请写出解；何时有无穷多的解？并请写出解的一般形式。

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + \beta x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

（18 分）

五、设 A,B 分别为实数域上 m 阶、n 阶方阵，试证明：

1. 如果 A,B 都相似于对角矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 也相似于一个对角矩阵。

2. 设 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似于一个对角矩阵，即存在一个可逆矩阵 S，使得

$$S^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}S = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)。$$

对 S 进行分块，令 $S=\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$，其中 S_1 是 $m\times(m+n)$ 阶矩阵，S_2 是 $n\times(m+n)$ 阶矩阵。试证明：S_1 的每一列都是 A 的特征向量，S_2 的每一列是 B 的特征向量，并且 $rank(S_1)=m,\ rank(S_2)=n$。

3. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似于一个对角矩阵当且仅当 A,B 都相似于对角阵。(共 20 分)

（装订线内不要答题）

六、设 R 为实数集，R^n 为实数域 R 上全体 n 维向量的集合。设本题中的向量均在 R^n 中。证明（共 20 分）:

（1）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，且 $s>t$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性相关的。（10 分）

（2）设向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 可由向量组 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t$ 线性表示，即存在实数域 R 上的 $t\times s$ 的矩阵 A，使得 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t)\bullet A$，并设 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_t$ 是线性无关向量组，则向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩。（10 分）