2019版

南卷汇

大一下高数期末试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2018 年高数（下）期末

一、单项选择题（共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1.设函数$f(x,y)$在P（x_0,y_0)处的某个邻域内有定义，则下列说法正确的是（ ）

A 若f(x, y）在点P处的偏导数存在，则f(x, y）在该点一定可微；

B 若f(x, y）在点P处连续，则f(x, y）在该点的偏导数一定存在；

C 若f(x, y）在点P处有极限，则f(x, y）在该点一定连续；

D 若f(x, y）在点P处可微，则f(x, y）在该点连续且偏导数一定存在.

2.若$f(x,y)$在 $D: a\le x\le b, c\le y\le d$ 上有二阶连续偏导数，则$\iint\limits_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy=(\ )$.

A $f(a,d)-f(b,d)-f(b,c)+f(a,c)$　　B $f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$

C $f(a,d)-f(b,d)-f(a,c)+f(b,c)$　　D $f(b,d)-f(a,d)-f(a,c)+f(b,c)$

3.若L是球面$x^2+y^2+z^2=4$与平面$x+y+z=0$的交线，则$I=\oint_L (x+1)^2 ds=(\ )$.

A $\frac{28}{3}\pi$　　B 8π　　C $\frac{19}{3}\pi$　　D 12π

4.微分方程$y''+3y'+2y=(ax+b)e^{-x}$的特解形式为( ).

A $y=Axe^{-x}$　　B $y=(Ax+B)e^{-x}$　　C $y=(Ax+B)xe^{-x}$　　D $y=Ax^2e^{-x}$

5.设$f(x)$为连续函数, $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$, 则$F'(2)=(\ )$.

A $2f(2)$,　B $f(2)$,　C $-f(2)$,　D 0.

二、计算题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1.求曲面$e^z-z+xy=3$在点(2,1,0)处的切平面方程和法线方程.

2.求密度为1的抛物体V：$x^2+y^2 \le z \le 1$绕z轴的转动惯量.

3.设S为上半球面$x^2+y^2+z^2=4, z \ge 0$,计算$\iint\limits_{(s)}(x+y+z)dS$.

4.计算$I=\int_L (y^2+\sin^2(x+y))dx+(x^2-\cos^2(x+y))dy$,其中$L$为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$上从点$A(1,0)$到点$B(0,1)$的一段弧.

5.计算积分$I=\oint\limits_C zdx+xdy+ydz$,其中$C$为$x+y+z=1$被三个坐标面所截的三角形的边界，方向与三角形上侧的法向量构成右手法则.

6.设$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$,计算 $div[grad\, f(x,y,z)]$和$rot[grad\, f(x,y,z)]$.

7.已知$y_1=x, y_2=x+e^x, y_3=1+x+e^x$是$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$的解，试求此方程的通解.

8.计算$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy.$

三、(9分)讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$在点$(0,0)$处的连续性，偏导数的存在性及可微性.

四、(9分)在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点P，使得函数$u=x^2+y^2+z^2$在点P沿方向n=(1,-1,0)的方向导数最大，并求此方向导数的最大值.

五、(9分)计算$I=\oint\!\!\oint_{(s)}(x-y+z)dy\Lambda dz+(y-z+x)dz\Lambda dx+(z^2-x+y)dx\Lambda dy$,其中S为曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$所围立体表面的外侧.

六、(9分)求微分方程$x''+2x'+2x=te^{-t}\cos t$ 的通解.

七、(9分)设L是不经过点$(2,0),(-2,0)$的分段光滑的简单正向闭曲线，试就L的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x^2)+y^2}+\frac{y}{(2+x^2)+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x^2)+y^2}-\frac{2+x}{(2+x^2)+y^2}\right]dy.$$

2018 年高数（下）期末答案

一、1.D　2.B　3.A　4.C　5.B

二、1.$(e^z-1)dz+xdy+ydx=0$,将点$(2,1,0)$代入，$dx=-2dy$,法向量$n=(1,2,0)$.(3分）

切平面方程为$x-2+2(y-1)=0$即$x+2y=4$.(4分)法线方程为$x-2=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$(5分)

2.$I_x=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dV=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{6}$(5分)

3.$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)dS=\iint\limits_{(S)}zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2-y^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=8\pi$(5分)

4.补直线BA:y=1-x, x从0到1，直线BA与L围成的区域为D.

I=$\int_L+\int_{AB}-\int_{AB}=\iint\limits_D 2(x-y)dxdy-\int_0^1((1-x)^2+\sin^2 1-x^2+\cos^2 1)dx=-1$(5分)

5.记S为平面x+y+z=1被三个坐标面所截的三角形，由stokes公式，

I=$\iint\limits_{(S)}dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy=\sqrt{3}\iint\limits_{(S)}dS=\frac{3}{2}$.(5分)

6.$grad\ f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x,2y,2z)$,(2分)$div[grad\ f(x,y,z)]=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$.(4分)

$rot[grad\ f(x,y,z)]=0$.(5分)

7.$y=C_1(y_3-y_2)+C_2(y_2-y_1)+y_1=C_1+C_2e^x+x$.(5分)

8.$I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{6}.2\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.(5分)

三、$\left|xy\ \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{\pi}{2}|xy|$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\ \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, $f(x,y)$在$(0,0)$处连续，(3分)

$f_x(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,0)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,

所以函数$f(x,y)$在点(0,0) 处可微.(9 分)

四、设$P(x,y,z)$,$\nabla u=(2x,2y,2z)$,$e_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$,$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_p=\nabla u?e_n\big|_p=\sqrt{2}(x,y)$.(4分)

设$L=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$,得$L_x=0$，$L_y=0,L_z=0$,(6分)

得$x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2},z=0$.$u=x^2+y^2+z^2$在$P(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$方向导数最大,$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_P=\sqrt{2}$.(9分)

五、记S所围区域为V，则有高斯公式

$$\mathrm{I}=2\iiint_{(V)}(1+z)dxdydz(4分)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(1+z)(R^2-(z-R)^2)dz+2\iiint_{(V)}\pi(1+z)(R^2-z^2)dz(6分)$$

$$=\frac{5\pi}{12}(2+R)R^3.(9分)$$

六、特征根为$-1\pm i$，所以考虑$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=te^{(-1+i)t}$的实部解，设该特解为

$x^*=t(at+b)e^{(-1+i)t}$,(5分)代入得$a=-\frac{1}{4},b=-\frac{1}{2}$(7分)

所以原方程的特解为$x^*=(\frac{1}{4}t^2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t)e^{-t}$.(9分)

七、记$I_1=\oint_L\frac{y}{(2-x)^2+y^2}dy+\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}dy,I_2=\oint_L\frac{y}{(2+x)^2+y^2}dx+\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}dy$,则$I=I_1+I_2$,

对I_1，I_2，计算得$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1）若闭曲线L所围区域不包含点(2, 0), (-2, 0), 则$I_1=I_2=0$，因此$I=0$.(3 分)

(2）若闭曲线L所围区域包含点(2, 0), (-2, 0), 则分别作以这两个点为圆心， 以ε_1，ε_2

为半径的圆C_1，C_2，则$I_1=\frac{1}{\varepsilon_1^2}\oint_{C_1}ydx+(2-x)dy=-\frac{2}{\varepsilon_1^2}\iint\limits_{(2-x)^2+y^2\le\varepsilon_1^2}dxdy=-2\pi$同理$I_2=-2\pi$,

因此$I=-4\pi$.(6分)

(3）若点(2, 0), (-2, 0)中一个在闭曲线L所围区域内部，一个在外部时，$\mathrm{I}=-2\pi$.   9'

2017 下学期末高数

一、计算下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. 求 $u=4x^2+y^2+z^2$ 在 $M=$（1，0，2）处的梯度和最大方向导数.

2. 求微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解.

3. 设 $u=f(t),t=\varphi(xy,x)$ 其中 f,φ 具有连续的二阶导数和偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

4、求曲线$\begin{cases} x=t \\ y=-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$与平面 $x+2y+z=4$ 的切线方程.

5. 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2-9x$ 的所有极值.

6. 计算累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2 e^{-y^2}dy$.

7. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (xy+|y|)dxdy$，其中 D= $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$.

8. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3}{r^3}dy\wedge dx+\frac{y^3}{r^3}dx\wedge dy+\frac{z^3}{r^3}dx\wedge dy$ 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\sum\ :x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

9. 求第一类曲线积分 $I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}ds$ ，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x-y=0\end{cases}$.

10. 求双曲抛物面（马鞍面）$z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截下那部分的面积.

二、（本题 8 分） 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0\\0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）

的偏导数存在性、可微性及偏导数的连续性.

三、（本题 8 分） 计算第二型曲线积分 $I=\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ ，其中 L 是

$A(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\ge 0)$ ，到点 $B(a,0)$ 的弧段.

四、（本题 8 分） 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

五、（本题 8 分）学习高等数学 I 的学生做（1），其余的学生做（2）

（1）求解微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$ ；

（2）设曲线积分 $\int_{(C)}\left[f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1\right]ydx$ 与路径无关，求 $f(x)$

六、（本题 8 分） 计算曲线积分 $\int_{(C)}(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中曲线（C）为球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，其方向为从 oz 轴正向看进去为逆时针方向（ $z\geq 0$ ）

2017 年高数下期末参考答案

一.

1. $\mathrm{grad}\ u\Big|_M=(8x,2y,2z)\Big|_M=(8,0,4)$ （3 分） $\vec{c}=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$ （4 分）

$\left\|gradu=4\sqrt{5}\right\|$ （6 分）

2. 特征方程为：λ^3-$\lambda^2+2\lambda$-2=0 （2 分）（λ-1）（λ^2+2)=0 （3 分）

故通解为：$y=C_1e^x+C_2\cos\sqrt{2}x+C_3\sin\sqrt{2}x$ （6 分）

3. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\left[\varphi_1(xy,x)y+\varphi_2(xy,x)\right]$ （3 分）

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''(t)\varphi_1(xy,x)x\left[\varphi_1 y+\varphi_2\right]+f'(t)\left[\varphi_1+y\varphi_{11}+\varphi_{21}x\right]$ （6 分）

4. $\vec{\tau}$=（1，-2t，3t^2） （1 分） $\vec{n}=(1,2,1)$ （2 分）

$\because \vec{\tau}\bullet\vec{n}=0\therefore 1-4t+3t^2=0.\therefore t=1$ 或 $t=\frac{1}{3}$ （4 分）

$t=1$ 时，切线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ （5 分）

$t=\frac{1}{3}$ 时，切线方程为：$\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$ （6 分）

5. $\begin{cases}f_x=3x^2+6x-9=0\\ f_y=-3y^2+6y=0\end{cases}$ 驻点为：$M_1(1,0),M_2(1,2),M_3(-3,0),M_4(-3,2)$ （3 分）

$f_{xx}=6x+6,f_{xy}=0,f_{yy}=-6y+6$ （4 分）M_2,M_3 不是极值点，极小值 $f(M_1)=-5$

极大值 $f(M_4)=31$ （6 分）

6. $I=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\int_0^1 e^{-y^2}\frac{y^3}{3}dy=\frac{1}{6}\left(1-2e^{-1}\right)$ （6 分）

7. 由对称性 $\iint\limits_D xyd\sigma=0$ （2 分） $\iint\limits_D |y|d\sigma=4\iint\limits_{D_1}yd\sigma$ ， D_1 是 D 在第一象限的部分（3 分）原式 $=4\iint\limits_{D_1}yd\sigma=4\int_0^1 ydy\int_0^{1-y}dx=4\int_0^1 y(1-y)dy=\frac{2}{3}$ （6 分

南洋出品，必属精品

）

8. $I=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma} x^3dy\lambda dz+y^3dz\lambda dy+z^3dxdy=\frac{3}{\varphi^3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$ （4 分）

$=\frac{3}{a^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}r^2\bullet r^2\sin\theta dr=\frac{12}{5}\pi a^2$ （6 分）

9. $I=\int\limits_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}ds=\int\limits_C ads=2\pi a^2$

10. $\xi=\iint\limits_{\Sigma}ds=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\delta_x^2+\delta_y^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy$ （4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R}\sqrt{1+r^2}rdr=\frac{2\pi}{3}\left[\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$ （6 分）

二.

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0$ 同理 $f_y(0,0)$ （2 分）

$\frac{\Delta\delta\text{-}f(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\rho\sin\frac{1}{\rho^2}\to0(\rho\to0)$ （6 分）

$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\frac{1}{x^2+y^2}$ $x\to o,y\to0$ 极限不存在（8 分）

三.

$\because\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial\rho}{\partial y}$ （ 4 分 ） $\therefore$ 与 路 径 无 关 ， 从 而

$I=\frac{1}{a^2}\int(x-y)dx+(x+y)dy=\frac{1}{a^2}\int_{\pi}^{l}a^2d\theta=-\pi$ （8 分）

四.

方程特征根为$1+i$ 和$1\text{-}i$ 齐次通解为$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$ （4 分）

设 $y^*=Axe^{(1+i)x}$ 代入得特解为 $y=-\frac{1}{2}xe^x\cos x$ 由初值条件得 $C_1=1,C_2=\frac{1}{2}$ 所求

特解为 $y=e^x\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)-\frac{1}{2}xe^x\cos x$ （8 分）

五.

（1）特征方程$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$ （2 分）

对特征值-1，$(A+I)\vec{r}=0$ 得$\vec{r}=\begin{bmatrix}-3\\4\\2\end{bmatrix}$ （4 分）

对特征值 2，$(A-2I)=\begin{bmatrix}3 & -3 & -3\\ -4 & 4 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix},\vec{r_o}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\vec{r_0}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，

$\vec{r_1}^{(1)}=(A-2I)\vec{r_0}^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\vec{r_1}^{(2)}=(A-2I)\vec{r_0}^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ （6 分）

通解为$\vec{x}(t)=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\t\\1-t\end{bmatrix}+C_2e^{2t}\begin{bmatrix}1\\t\\1-t\end{bmatrix}+C_3e^{-t}\begin{bmatrix}-3\\4\\2\end{bmatrix}$ （8 分）

（2）

$2f''(x)=\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}=\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1$ （2 分）设

$y=f(x)$，$y''-9=2x^2-5x+1,\lambda^2-9=0,\lambda=\pm3$ 特解设为$y^*=ax^2+bx+c$ （6 分）代入得：$a=-\dfrac{2}{9},b=\dfrac{5}{9},c=-\dfrac{13}{81},f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{13}{81}$ （8 分）

六.

球面上点(x,y,z) 处单位法向量为$\vec{e_\eta}=\left(\dfrac{x-2}{2},\dfrac{y}{2},\dfrac{z}{2}\right)$ （2 分）

原式$=2\iint_{\Sigma}(y-z)dy\wedge dz+(z-x)dz\wedge dx+(x-y)dx\wedge dy$ （4 分）

$=2\iint_{\Sigma}\left[(y-z)\cdot\dfrac{x-2}{2}+(z-x)\dfrac{y}{2}+(x-y)\dfrac{z}{2}\right]ds=2\iint_{\Sigma}(z-y)d\xi$ （6 分）

其中上半球面位于圆柱面内且关于xoy 面对称，故$\iint_{\Sigma}yds=0$

$$\iint_{\Sigma} zd\xi = \iint_{x^2+y^2\le 2x} \sqrt{1+\frac{(2-x)^2+y^2}{4x-x^2-y^2}}dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 2x} 2dxdy = 2\pi$$ ，故原式 $=4\pi$ （8 分）

2016 年高数（下）期末

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y+1,\frac{\partial f}{\partial y}=ax+y^2+2$, 则 a=________。

2. 设三元函数 $f(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}\cos(t^2)dt$, 则 $df\big|_{(1,0,-1)}=$________。

3. 设 $f(x)=\int_x^1 e^{\frac{y^2}{2}}dy$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=$________。

4. 函数 $z=3x+4y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值为________。

5. 微分方程 $xdy+(y-\sin x)dx=0$ 满足 $y\big|_{x=\pi}=1$ 的特解 $y=$________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则必有（　　）.

（A）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续

（B）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数不存在

（C）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续

（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿某个方向的方向导数不存在

2. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且满足等式 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-f(x,y)$, 则 $f(x,y)$ 在 D 上（　　）.

（A）存在非零的最大值

（B）存在非零的最小值

（C）只在边界上取得最大值和最小值

（D）能在边界上取得最大值和最小值

3. 设 $I_1=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}e^{xyz}dv, I_2=\iiint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1}e^{xyz}dv, I_3=\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\le 1}e^{xyz}dv$, 则（　　）.

（A）$I_3<I_1<I_2$　　　（B）$I_1<I_2<I_3$

（C）$I_2<I_3<I_1$　　　（D）$I_1<I_3<I_2$

4. 质点在变力 $\overrightarrow{F}=\{P(x,y),0\}$ 的作用下沿平面有向曲线 L 移动，则该力所做的功为（　　）.

（A）0

（B）$\int_L P(x,y)dx$

（C）$\int_L P(x,y)dy$

（D）$\int_L P(x,y)ds$

5. 设 L 是曲线 $x^2+y^2=a^2$, 则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds$ 为（　　）.

（A）a^2　　（B）a^3　　（C）$2\pi a^3$　　（D）πa^4

三、简答题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设函数 $z=f(xy,\sin y)$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

2. 求曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2+3z^2=12\\ z=x\end{cases}$在点$(1,\sqrt{3},1)$处的切线与法平面方程

3. 求$\iint\limits_D \frac{x\cos y}{y}dxdy$，其中$D$是由曲线$y=x^2(x\geq 0)$和直线$x=0,y=4$围成的平面区域

4. 求$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv$, 其中$\Omega$是由曲面$z^2=x^2+y^2, z=1$与$z=2$所围的区域

四、（10 分）求函数$f(x,y)=2x^2-3xy+2y^2-x+2y$的极值

五、（10 分）计算曲线积分 $\int_L (y+\frac{e^y}{x})dx + e^y \ln x dy$，其中 L 为平面曲线 $x = 1+\sqrt{2y-y^2}$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(2,1)$ 的一段有向弧段

六、（8 分）学习高等数学 I 的同学做 (1), 学习高等数学 Π 的同学做 (2)

（1）求解微分方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 的通解，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（2）求方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的通解

七、（8 分）设三元函数 P,Q,R 在单连通区域 Ω 内有一阶连续偏导数，Γ 是 Ω 内的简单曲线

1. 写出曲线积分 $I=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关的一个充分条件；

2. 计算积分 $I=\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，其中 $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=t$ 上从点 $(a,0,0)$ 到点 $(-a,0,\pi)$ 的一段.

参考答案

一、1. 1　2. $df\Big|_{(1,0,-1)}=dx+dy+dz$　3. $\sqrt{e}-1$　4. 5　5. $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$

二、$(C)(D)(A)(B)(C)$

三、1. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1^{'}(xy,\sin y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1^{'}(xy,\sin y)+y\left[xf_{11}^{''}(xy,\sin y)+\cos y.f_{12}^{''}(xy,\sin y)\right]$$

2. 解：曲线在点$(1,\sqrt{3},1)$处的切线的方向矢量为$\left\{1,-\sqrt{3},1\right\}$,

切线方程$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\dfrac{z-1}{1}$,　法平面方程$x-\sqrt{3}y+z+1=0$

3. 解：设Ω_1,Ω_2是曲面$z^2=x^2+y^2$分别和平面$z=1,z=2$所围的立体，

$$\iiint_{\Omega_1}\sqrt{x^2+y^2}dv=\iint_{\substack{r\in[0,1]\\ \theta\in[0,2\pi]}}rdrd\theta\int_r^1 rdz=\iint r^2(1-r)drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2-r^3)dr=\frac{1}{6}\pi$$

$$\iiint_{\Omega_2}\sqrt{x^2+y^2}dv=\iint_{\substack{r\in[0,2]\\ \theta\in[0,2\pi]}}rdrd\theta\int_r^2 rdz=\iint r^2(2-r)drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2r^2-r^3)dr=\frac{8}{3}\pi$$

$$\therefore\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv=\iiint_{\Omega_2}\sqrt{x^2+y^2}dv-\iiint_{\Omega_1}\sqrt{x^2+y^2}dv=\frac{5}{2}\pi$$

四、解：先求驻点$\begin{cases}f_x(x,y)=4x-3y-1=0\\ f_y(x,y)=-3x+4y+2=0,\end{cases}$解得$x=-\dfrac{2}{7},y=-\dfrac{5}{7}$

再计算在点$(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{5}{7})$处的二阶导数：$A=f_{xx}=4,B=f_{xy}=-3,C=f_{yy}=4,$

由于$AC-B^2>0,A>0,$所以函数在点$(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{5}{7})$处取得极小值$-\dfrac{4}{7}$

五、解：记L_1为从点$(2,1)$到点$(1,1)$的有向线段，L_2为从点$(1,1)$到点$(1,0)$的有向线段，则利用格林公式可得

$$\oint_{L+L_1+L_2}(y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln xdy=\iint_D(\frac{e^y}{x}-1-\frac{e^y}{x})dxdy=-\frac{1}{4}\pi$$，又

$$\int_{L_1}(y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln xdy=\int_2^1(1+\frac{e}{x})dx=-1-e\ln 2,\int_{L_2}(y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln xdy=\int_1^0 0dx=0$$

故$\displaystyle\int_L(y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln xdy=-\frac{\pi}{4}+1+e\ln 2$

六、（1）$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

$$(2I-A)x=0,\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}\quad x_1=x_2\quad \vec{r_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(-I-A)x=0,x_1+x_2+x_3=0\quad \vec{r_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \vec{r_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t)=C_1\vec{r_1}e^{2t}+C_2\vec{r_2}e^{-t}+C_3\vec{r_3}e^{-t}$$

（2）解：对应齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=x^2e^{-x}(ax+b)$，代入验证解得 $a=\dfrac{1}{3},b=0$

所以通解为 $C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\dfrac{1}{3}x^3e^{-x}$

七、解：1. $I=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关的充分条件是以下三个条件之一：

（a）任何封闭曲线 C 上的积分 $\oint_C Pdx+Qdy+Rdz\equiv 0$

（b）存在三元函数 $u(x,y,z)$，使得 $du=Pdx+Qdy+Rdz$

（c）$rot\vec{A}=\vec{0}$，其中 $\vec{A}=\{P,Q,R\}$

2. 积分 $I=\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ 与路径无关，故

$$I=\int_{(a,0,0)}^{(-a,0,\pi)}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=\int_{(a,0,0)}^{(-a,0,\pi)}d(xy+yz+zx)=(xy+yz+zx)\Big|_{(a,0,0)}^{(-a,0,\pi)}=-\pi a$$

八、解：$\dfrac{\partial P}{\partial x}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\quad \therefore \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

$$I=\left(\iint\limits_{\Sigma_{上}}+\iint\limits_{\Sigma_{\varepsilon下}}+\iint\limits_{\Sigma_{z=0下}}\right)+\iint\limits_{\Sigma_{\varepsilon上}}+\iint\limits_{\Sigma_{z=0上}}=\iiint\limits_{\Omega}0dv+\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_{\varepsilon上}}xdydz+ydzdx+zdxdy+0$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^3}\left(\iiint\limits_{\Omega}3dv+0\right)=\frac{3}{\varepsilon^3}.\frac{2}{3}\pi\varepsilon^3=2\pi$$

2015 年高数下期末试题

一、 选择题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$，则 $f(x,y)$ 在（0, 0）处的二重极限（ ）

（A）等于 0　（B）等于 1　（C）等于 2　（D）不存在

2. 设曲面 S：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge 0)$，取上侧，S_1 为 S 位于第一卦限部分，则有（ ）

（A）$\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　（B）$\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} ydS$

（C）$\iint\limits_S xdydz=4\iint\limits_{S_1} xdydz$　（D）$\iint\limits_S ydydz=4\iint\limits_{S_1} ydydz$

3. 设曲线 C：$x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则 $\int_C (y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy=$（ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{3\pi}{8}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{5\pi}{8}$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2},(x,y)\ne(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0) \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在（0, 0）点沿方向 $l=(1,\sqrt{3})$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=$（ ）

(A) 0　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　(D) 3

二、填空题

5. 设 $f(x,y)=x^2y-\sin(x^2-y^2)$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1)}=$

6. 空间曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在点（$\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}$）处的切线与 Ox 的夹角 $\alpha=$

7. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\cos y}{y}dy=$

8. 设空间曲线 C 为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=\dfrac{3R}{2} \end{cases}$，其中常数R>0，则$\int_C yds=$

三、

9. 设函数 $f(u,v)$具有一阶连续偏导数，$z=\int_0^{xy} f(e^t,t)dt$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

10. 设 $z=z(x,y)$是由方程$e^z-2x+yz=e$在（0, 0, 1）点的某邻域内确定的隐函数，求全微分$dz\big|_{(0,0)}$

四、求解下列微分方程

11. 学工科分析者（1），其余作（2）

（1）求解微分方程组：$\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & - \end{pmatrix}x$

（2）求一个以四个函数$y_1=e^x$，$y_2=2xe^x$，$y_3=\cos 2x$，$y_4=3\sin 2x$为特解的齐次线性微分方程，并求该方程的通解。

12. 求微分方程 $y''-5y'+6y=2xe^{2x}$ 的通解

13. $I=\iint\limits_{D}\sqrt{\left|y-x^{2}\right|}dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$

14.
Σ是旋转抛物面$z=1-x^{2}-y^{2}(z\ge 0)$，取上侧，计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^{3}dydz+3(z^{2}-1)dxdy$

15. 设$f(x)$在（0,+∞）上具有连续的导数，L是由点A$(3,\frac{2}{3})$到点B(1, 2)的直线段，

求$\int_{L}\left[\frac{x}{y^{2}}-xf(xy)\right]dy-\left[\frac{1}{y}+yf(xy)\right]dx$

六、应用题

16. 在曲面 $z=4-x^{2}-y^{2}$ 位于第一卦限部分上求一点 P，使得 P 点的切平面与三个坐标面围成的四面体的体积最小，并求此最小体积

七、证明题

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|}{x^{2}+y^{2}}\sin(x^{2}+y^{2}),x^{2}+y^{2}\ne 0\\ 0,x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$

证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

18. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续的偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$

证明：$I=\iint\limits_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=\frac{P}{2e}$

2015 年高等数学期末考试参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

(1) D　(2) C　(3) D　(4) B

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

(5) 1　(6) $\frac{\pi}{3}$　(7) 1-cos1　(8) $\frac{\pi R^2}{2}$

三（每小题 7 分，共 14 分）

9. **解** 根据变上限积分求导法则及链式法则有：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf(e^{xy}+xy)$，（4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f(e^{xy},xy)+xy[e^{xy}f_u(e^{xy},xy)+f_v(e^{xy},xy)].\text{（7 分）}$$

10. 解 方程两端取全微分得：

$$e^z dz-2dx+ydz=0 \text{ 即 } (e^z+y)dz-2dx+zdy=0.\text{（5 分）}$$

令 $x=0$，$y=0$，由 $z=z(0,0)=1$ 得到 $dz|_{(0,0)}=\frac{2dx-dy}{e}$.（7 分）

四、求解下列微分方程（每小题 7 分，共 14 分）

11. （1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -2 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$（3 分）

$$\lambda=-1: r_1=(-3,4,2)^T,\quad \lambda_2=\lambda_3=2:(A-2E)^2=\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -4 & 4 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r_0^{(1)}=(1,1,0)^T$　$r_0^{(2)}=(1,0,1)^T$（5 分）

$$x_2=e^{2t}[r_0^{(1)}+tr_0^{(1)}]=e^{2t}(1,1+t,-t)^T;x_3=e^{2t}[r_0^{(2)}+tr_1^{(2)}]=e^{2t}(1,t,1-t)^T$$

$$x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1+t\\-t\end{pmatrix}+C_3e^{2}\begin{pmatrix}1\\t\\1-t\end{pmatrix}\text{（7 分）}$$

（2）$(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0$　$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$

$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''-8y'+4y=0$

$y=e^{x}[C_1+C_2x]+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$

12. 解 由特征方程 $r^2-5r+6=0$ 得特征根 $r_1=2,\ r_2=3$ （2 分）

从而原方程对应的齐次方程的通解 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ （4 分）.

设 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$ 是原方程的特解，代入方程得 $-2ax+2a-b=2x$，对比系数得

$a=-1,\ \ b=-2$

故 $y^*=-x(x+2)e^{2x}$.（6 分）从而原方程的通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(x+2)e^{2x}$

（7 分）

五、计算下列积分（每小题 9 分，共 27 分）

13. 解 记 D_1 为 D 位于第一象限部分的闭区域，根据对称性有

$$I=2\iint_{D_1}\sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy$$

于是 $I=2\int_0^1 dx\int_0^1\sqrt{\left|y-x^2\right|}dy=2\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy+2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\sqrt{y-x^2}dy$

（4 分）

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3dx+\frac{4}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \qquad （8 分）$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4} \qquad （9 分）$$

14. 解一 添加平面 $\Sigma_0: z=0\ \ (x^2+y^2\le 1)$ ，取下侧，其与 Σ 围成空间有界闭区域 Ω ，由 Gauss 公式有

$$I=\left(\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=6\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)dxdydz-\iint_{\Sigma_0}3(z^2-1)dxdy$$

$$=6\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\le 1-z}(x^2+y^2+z)dxdy+3\iint_{x^2+y^2\le 1}(0^2-1)dxdy$$

$$=12\pi\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{1-z}}r^2\cdot rdr+6\pi\int_0^1 z(1-z)dz-3\pi$$

$$=3\pi\int_0^1(1-z)^2dz+\pi-3\pi=-\pi$$

（9 分）

解二 由于 $z_x=-2x,\ z_y=-2y$ 故根据合一投影法得

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(2x^3\cdot(2x)+2y^3\cdot(2y)+3[(1-x^2-y^2)^2-1]\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}4\left((x^4+y^4)+3[(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)]\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[4r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+3(r^4-2r^2)]rdr$$

$$=4\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)d\theta\int_0^1 r^5dr+6\pi\int_0^1(r^5-2r^2)dr$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)d\theta-2\pi=-\pi$$

15. $\dfrac{\partial}{\partial x}[\dfrac{x}{y^2}-xf(xy)]=\dfrac{1}{y^2}-f(xy)-xyf'(xy)=\dfrac{\partial}{\partial y}[-\dfrac{1}{y}+yf(xy)]$

原式=$\displaystyle\int_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}[\frac{x}{y^2}-xf(xy)]dy+[-\frac{1}{y}+yf(xy)]dx$

$$=-[\frac{x}{y}+F(xy)]_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}=4$$

六、应用题（本题共 9 分）

16. 解 设 $P(x,y,z)$ 其中 $x>0,y>0,z>0$ 则曲面在 P 点的切平面方程为：

$$2xX+2yY+Z=8-z\text{即}\frac{X}{\frac{8-z}{2x}}+\frac{Y}{\frac{8-z}{2y}}+\frac{Z}{8-z}=1$$

此切平面与坐标面所围成的四面体的体积 $V=\dfrac{(8-z)^3}{24xy}$ 令

$$L(x,y,z,\lambda)=3\ln(8-z)-\ln x-\ln y+\lambda(x^2+y^2+z-4)$$

由

得唯一驻点 $(1,1,2)$ 因为最小体积必存在，故点 $P(1,1,2)$ 为所求，此时 $V_{\min}=9$

七、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

17 证 由于 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 类似有 $f_y(0,0)=0.$ （3 分）

记 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ，因为

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f=[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\Delta x+\Delta y)-f(0,0)}{\rho}$$

（5 分）

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{|\Delta x\Delta y|}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $df|_{(0,0)}=0$

18. 解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 记 $L:x^2+y^2=r^2$ ，取逆时针方向，其围成的有界闭区域为 D_r ，则据 Green 公式有（3 分）

$$I=\int rdr\int(r\cos\theta f_x+r\sin\theta f_y)d\theta=\int r[\oint_L -f_ydx+f_xdy]dr$$

$$=\int_0^1 r\left[\iint_{D_r}(f_{xx}+f_{yy})dxdy\right]dr=\int_0^1\left[\iint_{D_r}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right]dr$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)rdr=\int_0^1\pi(1-e^{-r^2})rdr=\frac{\pi}{2e}$$

2014 年高数（下）期末（A）

整理人:蒋晶

一.　计算下列各题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 在曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$上求一点，使曲面在该点处的切平面平行于平面$2x+2y-z=0$。
2. 设f是连续函数，交换积分次序：$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x}f(x,y)\,dy$。
3. 求微分方程$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=e^{-2t}$的通解。
4. 已知曲线$L: y=x^2\ (0\le x\le 1)$上任意一点处的线密度在数值上与该点的横坐标相同，求曲线的质量。
5. 学习工科分析者作（1），其余作（2）

   (1)验证微分方程组$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos^2t & \frac{1}{2}sin2t-1\\ \frac{1}{2}sin2t & sin^2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$的通解为$\underset{x}{\rightarrow}=c_1\begin{pmatrix}e^tcost\\e^tsint\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-sint\\cost\end{pmatrix},t\in R.$

   (2)验证$y_1=e^x,y_2=e^x ln|x|$是微分方程$x\ddot{y}-(2x-1)\dot{y}+(x-1)y=0$的解，并求其通解。
6. 计算三重积分$\iiint_v zdv$, 其中V是由不等式$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$确定的空间区域。
7. 求向量场$\underset{A}{\rightarrow}=\{z+x,x,z^2+3y\}$穿过曲面$\sum: z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$下侧的通量。
8. 计算第一型曲面积分$\iint_{\Sigma}\ x^2+y^2dS$, 其中$\sum$ 为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$0\le z\le 1$之间的部分。
9. 计算第二型线积分$\int_L ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$, 其中L为$y=\sqrt[3]{x}$上从O(0,0)到A(1,1)的曲线段。
10. 求$\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right]$

二.（8 分）学习工科分析者作（1），其余作（2）

(1)求线性微分方程组$\frac{d\underset{x}{\rightarrow}}{dt}=A\underset{x}{\rightarrow}$ 其中$A=\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\4 & -7 & 4\\-1 & 4 & 8\end{pmatrix}$

(2)已知函数$y=e^{2x}+(x+1)e^x$是二阶常系数非齐次线性微分方程$\ddot{y}+a\dot{y}+$

$by=ce^{x}$的一个特解，使确定常数 a, b, c，并求该方程的通解。

三.（8 分） 设$y=f(x,t)$,，而 t 是由方程 $F(x,y,z)=0$所确定的x,y的函数，其中f,F都具有一阶连续偏导数，求$\frac{dy}{dx}$.

四.（8 分） 计算$\iint_{(D)}x[1+y\sin^{2}(x^{2}+y^{2})]d\sigma$, 其中（D）是由$y=x^{3},y=1,x=-1$所围成的区域。

五.（8 分） 设函数$\varphi(y),\Psi(y)$具有连续导数，对平面内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有曲线积分$\oint_{c}2[x\varphi(y)+\Psi(y)]dx+[x^{2}\Psi(y)+2xy^{2}+2x\varphi(y)]dy=0$

(1) 求满足条件$\varphi(0)=-2$，$\Psi(0)=0$的函数$\varphi(y),\Psi(y)$；

(2) 计算$\int_{(1,1)}^{(0,0)}2\{x\varphi(y)+\Psi(y)]dx+\left[x^{2}\Psi(y)+2xy^{2}+2x\varphi(y)\right]dy$

六.（8 分） 设$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$,

(1) 计算$A=\iint_{D}|xy-1|dxdy$；

(2) 设$f(x,y)$在 D 上连续，且$\iint_{D}f(x,y)dxdy=0,\iint_{D}xyf(x,y)dxdy=1$,证明存在$(\xi,\eta)\in D$,使$|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{A}$.

2014 高数（下）期末

一、

1、解：$f_x(x,y)=\dfrac{1}{1+x^{\frac{2}{y}}}\cdot x^{\frac{1}{y}}\cdot\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

$\therefore f_x(x_{11})=\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+x^2}$

2、解：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$$=\left[e^x\ln\left|\sin(x-2y)\right|+\frac{\cos(x-2y)}{\sin(x-2y)}\cdot e^x\right]dx+e^x\cdot\frac{-2\cos(x-2y)}{\sin(x-2y)}dy$$

$\therefore dz\,|_{\left(\frac{\pi}{4},0\right)}=0$

3、解：$grad(\dot{u})=(2y,2x,-2z)$

$\therefore grad(u)|_{(2,-1,1)}=(-2,4,-2)$

故方向导数最大值$=2\sqrt{6}$

4、解：法向量：$(2x,4y,2z)$

在点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$时，$\vec{n}=(1,2,1)$

故 平面：$(x-1)+2(y-2)+z-1=0$

切线：$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1}$

5、解：切向量：$(1,6t,3t^2)$

令 $t=0\Rightarrow(1,6,3)$

故切线：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面：$(x-1)+6(y-3)+3(z-1)=0$

6、解：$F_1\cdot\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{z^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\Rightarrow x\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$

$F_2\cdot\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{y}{z^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0\Rightarrow y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$

原式$=2z$

7、解：$\begin{cases}f_x=3x^2+3y=0\\ f_y=3y^2+3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

又 $f_{xx}=6x\qquad f_{yy}=6y\qquad f_{xy}=3$

在点$(0,0)$处，有

海森矩阵 $H_1=\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}=-9<0$，故不是极值

在点$(-1,-1)$处，$H_2=\begin{bmatrix}-6&3\\3&-6\end{bmatrix}=27>0$，故为极大值

$\therefore f_{极大}=1$

8、解：原积分$=\int_{-1}^{0}dy\cdot\int_{-1}^{1}f(x,y)dy+\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dy$

9、解：原积分$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r\cdot\sin r dr$

$=\pi\cdot\left[x\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{2}\right)\Big|_0^a\right]$

$=\dfrac{\pi a}{2}\cdot\dfrac{\sin a-\cos a}{2}$

10、解：$\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{l}}=\begin{bmatrix}\cos y,-x\sin y,0\\ y\left[e^x(\sin xz+z\cos x)\right],e^x\sin xz,xye^x\cos xz\end{bmatrix}$

二、解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1-y^2f_2\frac{1}{x^2}+g\left(x^2+y^2\right)+x\cdot g'\cdot 2x$$

$$=2xyf_1-\frac{y^2}{x^2}f_2+g\left(x^2+y^2\right)+2x^2g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+2xy\left(f_{11}\cdot x^2+f_{12}\cdot\frac{2y}{x}\right)-\frac{y^2}{x^2}\left(f_{21}\cdot x^2+f_{22}\frac{2y}{x}\right)-\frac{2y}{x^2}\cdot f_2+2yg'+2x^2g''\cdot 2y$$

$$=2xf_1+2x^3f_{11}+4y^2f_{12}-y^2f_{21}-\frac{2y^3}{x^3}f_{22}-\frac{2y}{x^2}f_2+2yg'+4x^2yg''$$

三、解：$$f_x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

同理，$f_y=0$，故偏导存在

但

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}(0)\frac{1}{x^2+y^2},x^2+y^2=0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$不存在，故$f_x(x,y)$不连续。

同理，$f_y(x,y)$也不连续，

但 $$\lim_{\delta x^2+\delta y^2\to 0}\frac{f(\delta x,\delta y)-f(0,0)-f_x\delta x-f_y\delta y}{\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}$$

$$=\lim_{\delta x^2+\delta y^2\to 0}\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}\cdot\sin\frac{1}{\delta x^2+\delta y^2}=0$$

即可微，　　证毕

四、解：$\because$投影为长方形，欲使体积最大，则有一底面必在xoy平面上。

又其是六面体，使底面一顶点在原点即可。

设 $P(m,n)$ 为 xoy 上 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 上一动点

则 六面体体积

$$v=\int_0^m dx\int_0^n dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}dz$$

$$=\int_0^m dx\int_0^n cdz-cn\cdot\int_0^m\frac{x}{a}dx-cm\cdot\int_0^n\frac{y}{b}dy$$

$$=mnc-\frac{nc}{2}\cdot\frac{m^2}{a}-\frac{mc}{2}\cdot\frac{n^2}{b}$$

$$=mnc\left[1-\frac{m}{2a}-\frac{n}{2b}\right]$$

$$=mnc\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}mnc=\frac{abc}{2}\frac{m}{a}\frac{n}{b}\le\frac{abc}{2}\cdot\left(\frac{\frac{m}{a}+\frac{n}{b}}{2}\right)^2=abc$$

当仅当 $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{1}{2}$

即 $m=\frac{a}{2},n=\frac{b}{2}$ 成立， $v_{\max}=\frac{abc}{8}$

五、证: $\because F(x,y)=s\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

不妨设 $F(x,y)=h\left(x^2+y^2\right)$

有 $h\left(x^2+y^2\right)=f(x)g(y)$

$$\therefore\frac{\partial h}{\partial x}=f'(x)g(y)=h'\left[x^2+y^2\right]\cdot 2x$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=f(x)g'(y)=h'\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y$$

则，$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{g(y)}{g'(y)}=\frac{x}{y}$

即 $\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}$，$\varphi(x)\equiv\varphi(y)$

当仅当 $\varphi(x)\equiv\varphi(y)=c$

$\boxed{6}$

$\therefore f'(x)=cxf(x)$

即 $e^{-\frac{1}{2}cx^2}\cdot f'(x)-\left(x\cdot e^{-\frac{1}{2}cx^2}f(x)\right)=0$，$\left[e^{-\frac{1}{2}cx^2}\cdot f(x)\right]'=0$

$\therefore\ e^{-\frac{1}{2}cx^2}\cdot f(x)\equiv c$

即 $f(x)=c\cdot e^{\frac{1}{2}cx^2}$

同理 $g(y)=c_2e^{\frac{1}{2}cy^2}$

$\therefore h(x^2+y^2)=c_1c_2e^{\frac{c}{2}(x^2+y^2)}=\bar{c}\cdot e^{c(x^2+y^2)}$