复旦大学计算机科学技术学院

2011-2012 学年第二学期《线性代数》期终考试试卷

A 卷　　共 9 页

课程代码：COMP120004.02　　　**考试形式：□开卷　☑闭卷**　　　　2012 年 6 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业______________学号____________姓名____________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、名词解释（10%）

1. n 阶行列式

2. 矩阵的三种初等行变换及其对应的初等行变换矩阵

（装订线内不要答题）

3. 向量组的极大线性无关子组以及向量组的秩

4. 分别写出非齐次方程组 $Ax=b$ 的解存在与齐次方程组 $Ax=0$ 的解存在的充分必要条件

5. n 阶 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子

（装订线内不要答题）

二、选择题（10%）

1.改变一个 n 阶行列式 $|A|$ 的每一个元素的正负号，其值将变为_____。

A. $|A|$　　B. $-|A|$　　C. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$　　D. $(-1)^n|A|$

2.在 n 阶行列式 $|A|$ 中将第 i 行第 j 列的元素乘以 $(-1)^{i-j}(i,j=1,2,\cdots,n)$，其值变为_____。

A. $|A|$　　B. $(-1)^n|A|$　　C. $(-1)^{n^2}|A|$　　D. $-|A|$

3.假设 A,B 都为 n 阶矩阵，k 为实常数，下列正确的是____。

A. 若 $|A|=0$，则 $A=0$　　B. $|kA|=|k||A|$

C. $|A+B|\le|A|+|B|$　　D. $|AB|=|A||B|$

4.假设 $D=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$，其中 A 为 m 阶可逆矩阵，B 为 n 阶矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r_D=$_____。

A. $\min(r_A,r_B)$　　B. $\max(r_A,r_B)$　　C. r_{AB}　　D. r_A+r_B

5. n 阶实对称矩阵的全体按矩阵通常的加法与数乘构成实数域 R 上的线性空间 V，此空间的维数为____。

A. n　　B. n^2　　C. $n!$　　D. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

三、填空题（10%）

1.已知 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & x & 0\\ 5 & 2 & 3 & -x & 0 & 0\\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0\\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$，则 x^5 的系数为__________。

2.假设 A^* 是 n 阶矩阵 A $(n>1)$ 伴随矩阵，则 $\det(A^*)=$__________。

3. 假设 A,B 分别是 m,n 阶可逆矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，分块矩阵为

$D=\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$，则 $D^{-1}=$__________。

4. 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的解，$\alpha=\alpha_1+a\alpha_2-3\alpha_3$，则 α 是 $Ax=b$ 的解的充要条件是 $a=$ ________；α 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解的充要条件是 $a=$________。

5. 假设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的特征值，则相应地，A^{-1} 的特征值等于________；$f(A)$ 的特征值等于________，其中 $f(A)$ 是 p 次多项式。

四、是非题（10%）

1. 假设 A 是 $m\times n$ 矩阵，其秩为 r，则 A 中必定存在一个 $r-1$ 阶子式不为零。【　　】
2. 假设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对于线性方程组 $Ax=b$，有 $r_A=n$，则此方程必有解。【　　】
3. 假设 A 是 $m\times n$ 矩阵，它的 m 个行向量线性无关，则它的 n 个列向量也线性无关。【　　】
4. 假设 R 为实数域，C 为复数域，则复数域 C 是 R 上的线性空间。【　　】
5. 假设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-B|$，则 A 与 B 相似。【　　】

五、行列式计算（10%）

1. 行列式 $A_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

（装订线内不要答题）

六、计算逆阵（10%）

1. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

七、计算非齐次方程组的通解（10%）：

1. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases}$$

（装订线内不要答题）

八、计算题（10%）

1. 在线性空间 $P[x]_3$ 中，

（1）求由基（I）：$1,x,x^2,x^3$ 到基（II）：$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵；

（2）已知 $g(x)$ 在基（I）下的坐标为 $(1,0,-2,5)^T$，$f(x)$ 在基（II）下的坐标为 $(7,0,8,-2)^T$，

求 $f(x)+g(x)$ 分别在基（I）和基（II）下坐标。

九、证明题（20%）

1. 假设 A, B 为 n 阶矩阵，且 $\lambda I_n + AB$ 可逆，其中 I_n 是 n 阶的单位阵，λ 是任意给定的实数，证明：$\lambda I_n + BA$ 也可逆， 并求 $(\lambda I_n + BA)^{-1}$

（装订线内不要答题）

2. 设V是实数域R上的n维线性空间，T是V上的线性变换，且$T^2 = T + 2I_n$，其中T不为纯量阵，I_n是V上的恒等变换。证明：

（1）T的特征值-1 和 2;

（2）对任意的向量$\xi \in V$，有$(T+I_n)\xi \in V_2$, $(T-2I_n)\xi \in V_{-1}$；

（3）$V = V_{-1} + V_2$且$V_{-1} \cap V_2 = \{0\}$，其中V_{-1}与V_2分别是属于-1 与 2 的特征子空间。