§2 函数的极限

1. 自变量 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

分三种情况:

(1) $x \to +\infty,$

(2) $x \to -\infty,$

(3) $x \to \infty\ (|x| \to \infty).$

考察 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 可无限接近**0**, 只要 x 充分大,

对任意 $\varepsilon > 0$, 只要 $x > M \triangleq \dfrac{1}{\varepsilon}$, 就有 $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$

函数极限的定义

定义1（函数极限的 $\varepsilon - M$ 定义）

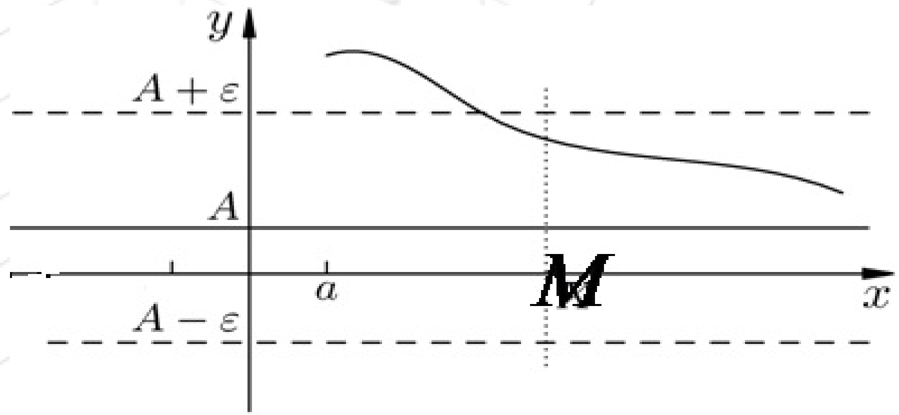
设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义，A 是一个数，

若对任意给定的正数 ε, 存在数 $M(>a)$, 使得当 $x>M$ 时有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时有**极限**(值) A,

记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 或 $f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$.



定义1’（函数极限的 $\varepsilon - M$ 定义）

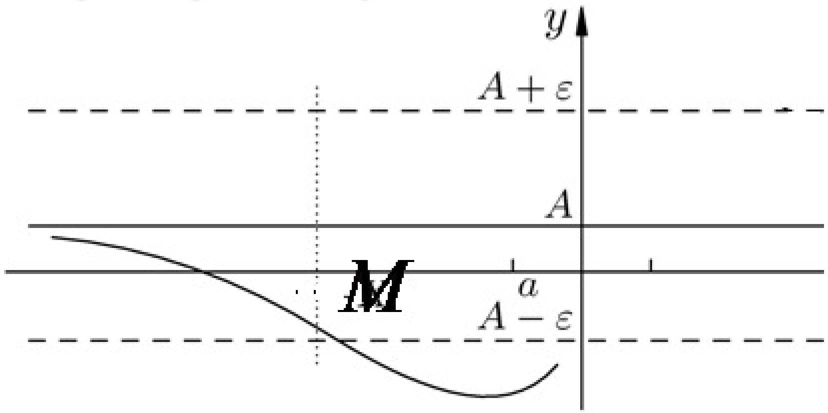
设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有定义，A 是一个数，

若对任意给定的正数 ε，存在数 $M(<a)$，使得当 $x<M$ 时有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时有极限(值) A,

记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, 或 $f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$.



函数极限的定义

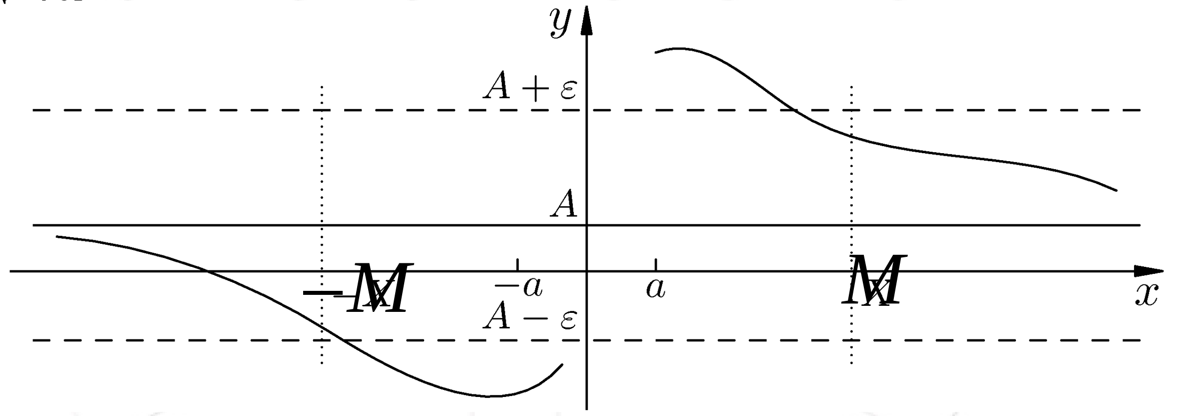
定义1”（函数极限的 $\varepsilon - M$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义，A 是一个数，若对任意给定的正数 ε,存在正数$M(>a)$，使得当$|x|>M$ 时有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时有极限(值) A,

记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A,$ 或 $f(x)\to A\quad(x\to\infty).$



函数极限的例子

例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$

证明 对任意$\varepsilon>0$, 不妨设 $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,

要使 $\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon,$

只要 $x>\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$ 取 $M=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$

则当 $x>M$ 时, 有 $\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$

同理可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$

函数极限的例子

例2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ （n 为正整数）

证明 对任意 $\varepsilon>0$， 要使 $\left|\dfrac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon$，

只要 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$， 取 $M=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$，

则当 $|x|>M$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0.$

例3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x}=1.$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{x}{1+x}-1\right|<\varepsilon,$

由于 $\left|\dfrac{x}{1+x}-1\right|=\left|\dfrac{1}{1+x}\right|\le\dfrac{1}{|x|-1},$

只要 $\dfrac{1}{|x|-1}<\varepsilon,$ 即 $|x|>1+\dfrac{1}{\varepsilon},$ 取 $M=1+\dfrac{1}{\varepsilon},$

则当 $|x|>M$ 时, 有 $\left|\dfrac{x}{1+x}-1\right|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x}=1.$

三种极限的一个关系

由于 $|x|>M$ 等价于 $x>M$ 或 $x<-M$,

定理1" 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义，

则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

例 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}.$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

无穷大量的定义

定义2 （无穷大量的 $G-M$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义，

若对任意给定的正数 G，存在正数 $M(>a)$，使得当 $x>M$ 时有

$$|f(x)|>G,$$

则称 $f(x)$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大量.

记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$， 或 $f(x)\to\infty \quad (x\to+\infty)$.

类似可以定义其它趋势下的无穷大量，正无穷大量，负无穷大量.

无穷大量的例子

例4 按定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$

证明 对任意 $G>0,$ 要使 $\ln x>G,$

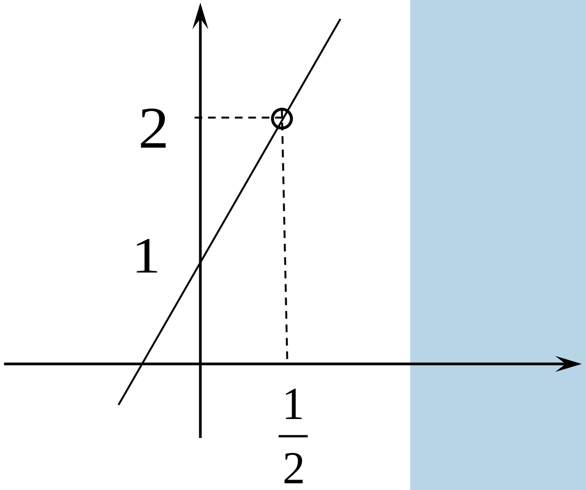
只要 $x>e^G,$ 取 $M=e^G,$

则当 $x>M$ 时，有 $\ln x>G,$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$

2. 自变量趋于有限值的函数极限

自变量 $x \to x_0 \ (x \neq x_0)$ 时的函数极限:



考察 当 $x \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} \to ?$

当 $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = 2x + 1 \xrightarrow{x \to \frac{1}{2}} 2?$

是否只要 $\left| x - \frac{1}{2} \right|$ 充分小, 就有 $\left| \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$,

给定 $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{1}{10^k}$, 要使 $\left| \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right| = |2x - 1| < \dfrac{1}{10^k}$, 只要 $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2 \cdot 10^3}$,

对任给 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, 要使 $\left| \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$, 只要 $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}\varepsilon = \delta$,

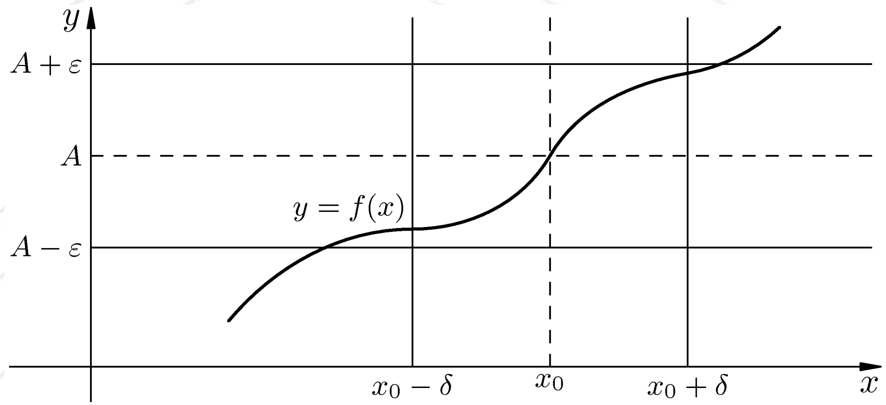
定义3（函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,h)$ 上有定义，A 是一个数，若对任意给定的正数ε，存在数 $\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有**极限(值)** A，

记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， 或 $f(x)\to A \quad (x\to x_0)$.



函数极限的例子

可证(略) (1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C,$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

例5 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}, (x_0 > 0).$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| < \varepsilon,$

由于 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}},$

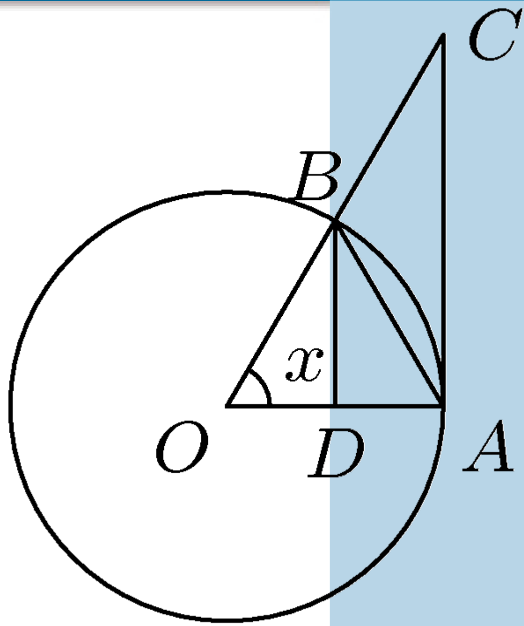
只要 $|x-x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon,$ 取 $\delta = \min\left\{\sqrt{x_0}\varepsilon, x_0\right\},$

则当 $0 < \left|x-x_0\right| < \delta$ 时, 有 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| < \varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$

为求三角函数的极限, 证明下面的不等式.

当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$.



证　当 $x = 0$ 不等式为等式.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\Delta OAB} < S_{扇形OAB} < S_{\Delta OAC}$,

即 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$,　$0 < \sin x < x < \tan x$,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，有 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$,

由上面知 $0 < \sin(-x) < -x < \tan(-x)$,　即 $0 > \sin x > x > \tan x$,

所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$.

函数极限的例子

例6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$

证明 由于 $\left|\sin x-\sin x_0\right|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

$$\le\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\left|x-x_0\right|,$$

对任意$\varepsilon>0$, 要使$\left|\sin x-\sin x_0\right|<\varepsilon$, 只要$|x-x_0|<\varepsilon$,

取 $\delta=\varepsilon$, 则当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时, 有

$$\left|\sin x-\sin x_0\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$

同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$

定义4（函数右极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0+h)\,(h>0)$ 上有定义，A 是一个数，若对任意给定的正数 ε，存在数 $\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时有极限(值) A，

或称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，

记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，或 $f(x)\to A \quad (x\to x_0^+)$.

也记 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

函数右极限的例子

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0.$

证明 对任意$\varepsilon>0$, 要使 $\left|\sqrt{x}-0\right|<\varepsilon,$ 只要$|x-0|<\varepsilon^2,$

取 $\delta=\varepsilon^2,$ 则当 $0<x<\delta$ 时, 有

$$\left|\sqrt{x}-0\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0.$

左极限的定义

定义4’（函数左极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-h,x_0)\,(h>0)$ 上有定义，A 是一个数，

若对任意给定的正数 ε，存在数 $\delta>0$，使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时有极限(值) A，

或称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限，

记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，或 $f(x)\to A \quad (x\to x_0^-)$.

也记 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

极限与左右极限的关系

由极限和左右极限的定义知：

定理2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

例8 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<1, \\ x^2, & x\geq 1, \end{cases}$ 说明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在性？

解 因为 $f(1+0)=1,\ f(1-0)=1,$ 所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1.$

例9 说明 $\operatorname{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 处无极限.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x=-1\neq \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x=1,$

所以 $\operatorname{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 处无极限.

无穷大量的定义

定义2 （无穷大量的 $G-\delta$ 定义）

设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,h)$ 内有定义，

若对任意给定的正数G,存在正数$\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)|>G,$$

则称 $f(x)$是当 $x\to x_0$时的无穷大量.

记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,或 $f(x)\to\infty \quad (x\to x_0)$.

类似可以定义其它趋势下的无穷大量，正无穷大量，负无穷大量.

无穷大量的例子

例10 按定义证明 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1+x}=\infty.$

证明 对任意 $G>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{1+x}\right|>G,$

只要 $|x+1|<\dfrac{1}{G},$ 取 $\delta=\dfrac{1}{G},$

则当 $0<|x+1|<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{1}{1+x}\right|>G,$

所以 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1+x}=\infty.$

3. 函数极限的性质

定理3(唯一性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在， 则极限唯一.

证明思路与数列极限的唯一性及定理5证明类似.

定理4(局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $\delta>0$,

使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,\delta)$ 内有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则对 $\varepsilon=1$, $\exists\delta>0$,

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<1$,

$$\left|f(x)\right|=\left|f(x)-A+A\right|\le\left|f(x)-A\right|+\left|A\right|<1+\left|A\right|$$

所以 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,\delta)$ 内有界.

不等式性质

定理5 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,\quad A>B,$

则 $\exists\delta>0,$ 当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ 时，有 $f(x)>g(x).$ (严)大极限→(严)大数ス

证 取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0,$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \exists\delta_1>0,$ 当 $x\in U^0(x_0;\delta_1)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A-B}{2},\ \Rightarrow \frac{A+B}{2}=A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon(*),$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,\ \exists\delta_2>0,$ 当 $x\in U^0(x_0;\delta_2)$ 时，有

$$|g(x)-B|<\varepsilon=\frac{A-B}{2},\Rightarrow B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}(**),$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$ 则当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ 时，有 $f(x)>\dfrac{A+B}{2}>g(x).$

局部保号性

推论1(局部保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\quad A>0,$

则 $\exists\delta>0$, 当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ 时，有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0.$

对于**A< 0,** 类似有 $f(x)<\dfrac{A}{2}<0.$

推论2 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$

且 $\exists\delta>0$, 当 $x\in U^0(x_0;\delta)$ 时，有 $f(x)\ge g(x),$

则 $A\ge B.$

迫斂性

定理6(迫斂性) 若 $\exists \delta' > 0$，使得当 $x \in U^0(x_0;\delta')$ 时，有

$$f(x) \le h(x) \le g(x),\ \text{且}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$$

则 $\displaystyle \lim_{x\to x_0} h(x) = A.$

证 由 $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$

对 $\forall \varepsilon > 0$，分别 $\exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

当 $x \in U^0(x_0;\delta_1)$ 时，有 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon,$

当 $x \in U^0(x_0;\delta_2)$ 时，有 $A-\varepsilon < g(x) < A+\varepsilon,$

令 $\delta = \min\{\delta', \delta_1, \delta_2\}$，则当 $x \in U^0(x_0;\delta)$ 时，有

$$A-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A+\varepsilon$$

所以 $\displaystyle \lim_{x\to x_0} h(x) = A.$

4. 无穷小量及其运算

定义6 若 $f(x)$ 在趋势 $x \to x_0^+, x_0^-, x_0, +\infty, -\infty, \infty$ 下极限为0，

则称 $f(x)$ 是该过程下的无穷小量.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 是当 $x \to +\infty$ 时的无穷小量.

(2) $f(x) = x^2 + x$ 是当 $x \to 0$ 与 $x \to -1$ 时的无穷小量.

(3) $\left\{ \dfrac{1}{\ln n} \right\}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小量.

(4) 0是任何过程下的无穷小量.

定理7 设在 $x \to x_0$ 下，

(1) $f(x)$ 为无穷大量 $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量;

(2) $f(x)$ 为无穷小量且 $f(x) \neq 0$ $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量.

证 (1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$, 即要 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

记 $G = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 由于 $f(x)$ 是无穷大量, $\exists \delta > 0$,

当 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$ 时，有 $|f(x)| > G$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$, (1)得证.

对(2)类似可证 .

定理8 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

证明 因为左右两端的 $\varepsilon-\delta$ 定义都是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,st.\text{当}0<|x-x_0|<\delta,\text{有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\ \text{即}\ |(f(x)-A)-0|<\varepsilon.$$

推论 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

$\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

讨论的这些性质对 $x\to x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$ 也成立

无穷小量的四则运算

定理9 无穷小量的四则运算(趋势不妨设 $x \to x_0$)

(1) 两个无穷小量的和 与差 仍是无穷小量.

证 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0,$

对 $\forall \varepsilon > 0$，有共同 $\delta > 0$，使得当 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$ 时，有

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $|\alpha(x) \pm \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \big(\alpha(x) \pm \beta(x)\big) = 0.$

(2) 无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\qquad |\beta(x)|\le M,$

对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$ 时，有

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M},$$

从而 $|\alpha(x)\cdot\beta(x)|=|\alpha(x)|\cdot|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon.$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=0.$

推论1 无穷小量与常数的乘积是无穷小量.

推论2 两无穷小量之积是无穷小量.

(3) 无穷小量除以极限不为零的量是无穷小量.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$, 不妨设 $b>0$,

由局部保号性,存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$ 时, 有

$$g(x)>\frac{b}{2}>0, \quad \text{即} \quad 0<\frac{1}{g(x)}<\frac{2}{b},$$

从而 $$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$ = 无穷小量×有界函数,

仍为无穷小量.

无穷小量的例子

例11 求 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+\mathrm{e}^{-x}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+\mathrm{e}^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0+0=0.$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

类似地，对正整数 k,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^k\sin\frac{1}{x}\right)=0,\quad \lim_{x\to 0}\left(x^k\arctan\frac{1}{x}\right)=0,\quad \lim_{x\to 0}\left(x^k\operatorname{arc\,cot}\frac{1}{x}\right)=0.$$