§ 3 函数的单调性和极值

用导数的符号来判断函数的单调性、极值和最值.

1. 单调性判别

定理1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续, (a,b) 内可导, 且 $f'(x)>0$ (或 <0),

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内严格递增(减).

证 对 $\forall x_1<x_2\in[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 用拉格朗日中值定理,

$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$.

由 $f'(\xi)>0$ 得 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内严格递增.

同理可证严格递减的情形.

定理1 的几何意义

若曲线 $y = f(x)$ 在某区间上每一点处切线的倾角 α 是锐角,

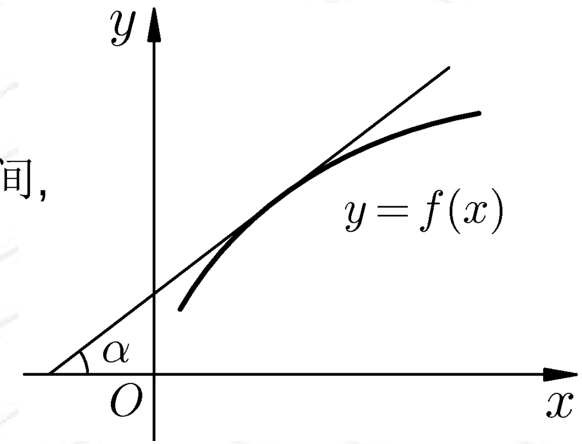
即 $f'(x) = \tan\alpha > 0,$ 则函数在此区间上严格递增.

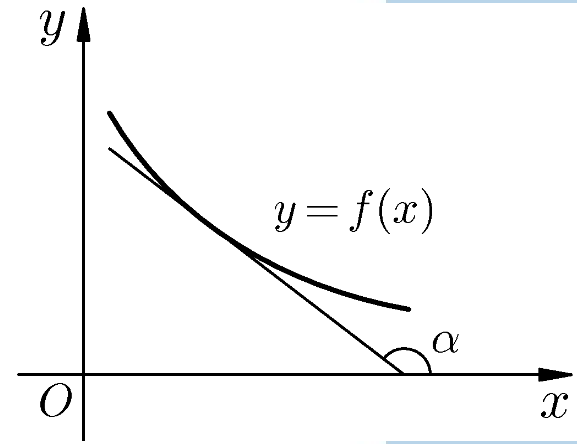
若 α 是钝角, 即 $f'(x) = \tan\alpha < 0,$ 则函数在此区间上严格递减.

要确定 $f(x)$ 的单调区间,

先确定 $f(x)$

的不可导点和驻点,





这些点将定义域分成几个区间, 由每个小区间上 $f'(x)$

的符号确定 $f(x)$ 的单调性.

单调区间

例1 确定 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ 的单调区间.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2).$$

驻点为 $x_1=-1,\ x_2=2.$ 列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$

此函数的严格递增区间为 $(-\infty,-1],[2,+\infty)$, 严格递减区间为 $[-1,2]$.

单调区间

例2 确定 $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ 的单调区间.

解 定义域为 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(3+x)(3-x)}{(3-x^2)^2}.$$

驻点为 $x_1=-3,\ x_2=0,\ x_2=3.$ 列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	↗	0	↗	↗	$-\frac{9}{2}$	↘

此函数的严格递增区间为 $[-3,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},\sqrt{3}),(\sqrt{3},3]$,

严格递减区间为 $(-\infty,-3],[3,+\infty)$.

例3 讨论函数 $f(x)=x^3$ 的单调性.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=3x^2$.

当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,0],[0,+\infty)$ 上严格递增.

因此函数 $f(x)=x^3$ 在实数集 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

从这个例子看出:

如果函数的导函数在区间上除有限个点外都大于零或小于零,

则这个函数在此区间上严格单调.

例4 证明: 当 $x>0$ 时, $x>\ln(1+x)$.

证 令 $f(x)=x-\ln(1+x)$,

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0\,(当x>0),$$

所以 $f(x)$在 $[0,+\infty)$ 严格递增.

当 $x>0$ 时,

$$f(x)=x-\ln(1+x)>f(0)=0.$$

所以当 $x>0$ 时, $x>\ln(1+x)$.

例5 证明：当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

证 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0\ (\text{当}x>0),$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格递增. 当 $x>0$ 时，

$$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>f(0)=0.$$

所以当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

2. 极值判别法

定理2(极值第一充分条件)

设 $f(x)$ 在某个 $U(x_0;\delta)$ 内连续, $U^\circ(x_0;\delta)$ 内可导, 若

(1) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)>0\,(\text{或}<0)$,

(2) 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)<0\,(\text{或}>0)$,

则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值(或极小值).

证 由题设

$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上严格递增 $\Rightarrow f(x)<f(x_0),\ x<x_0$,

$f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上严格递减 $\Rightarrow f(x)<f(x_0),\ x>x_0$,

所以 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

同理可证极小值的情形.

极值举例

例6 求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点和极值.

解 $f'(x)=2x^{\frac{2}{3}}+(2x-5)\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{10}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}$,

$x_1=0$ 为不可导点，驻点为 $x_2=1$. 列表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$

所以 $x_1=0$ 是此函数的极大值点，极大值为 $f(0)=0$,

$x_2=1$ 是此函数的极小值点，极小值为 $f(1)=-3$.

极值判别法

定理3(极值点的第二充分条件)　设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0\ (\text{或}<0),$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值(或极大值).

证 由 $$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

及保号性，$\exists U^\circ(x_0;\delta)$，在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0.$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $f'(x)<0,$

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $f'(x)>0,$

所以 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

同理可证极大值的情形.

极值举例

例7 求 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值点和极值.

解 $f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1).$

驻点为 $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{5},\ x_3=1.$

$f''(x)=(x+1)^2(5x-1)+2(x-1)(x+1)(5x-1)+(x-1)(x+1)^2 5$

$=4(x+1)(5x^2-2x-1).$

$f''(-1)=0,\quad f''(\dfrac{1}{5})=-\dfrac{144}{25},\quad f''(1)=16,$

所以 $f(\dfrac{1}{5})=(\dfrac{4}{5})^2(\dfrac{6}{5})^3$ 是极大值, $f(1)=0$ 是极小值,

由于在 $x_1=-1$ 的一个空心邻域内 $f'(x)>0$, $f(-1)=0$不是极值,

极值

当 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$ 时，无法直接判断极值，

上例中是用一阶导数判别的.

下面三个函数

$$f_1(x)=x^4,\quad f_2(x)=-x^4,\quad f_3(x)=x^3$$

都满足 $f'(0)=0,\ f''(0)=0.$

但是 $f_1(0)=0$ 是极小值，$f_2(0)=0$ 是极大值，

$f_3(0)=0$ 不是极值.

3. 连续函数的最大、最小值

问题: 如何找连续函数在某个区间上的最大最小值?

(1) 闭区间上连续函数存在最大最小值.

(2) 最大(小)值在内部取到必为极大(小)值.

求函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大最小值的方法是:

(1) 求出 $f(x)$ 的驻点和不可导点，并求值.

(2) 求 $f(a), f(b)$.

(3) 比较上述函数值，则得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大最小值.

另外，若函数 $f(x)$ 只有一个极值点，则它必为最值点.

最大最小值举例

例8 求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在闭区间 $[-1,\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值.

解 $f'(x)=2x^{\frac{2}{3}}+(2x-5)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}},$

$x_1=0$ 为不可导点，驻点为 $x_2=1.$

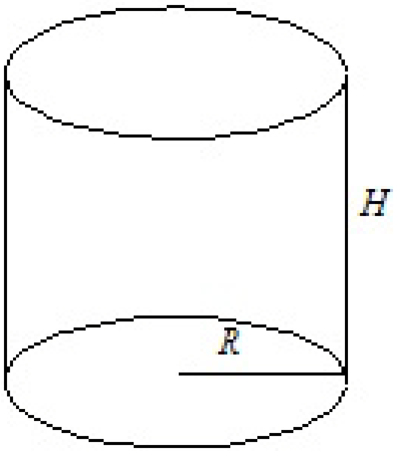
$$f(0)=0,\quad f(1)=-3,\quad f(-1)=-7,\quad f(\frac{5}{2})=0.$$

所以 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,\frac{5}{2}]$ 上的最大值为 $f(0)=0=f(\frac{5}{2}),$

最小值为 $f(-1)=-7.$

最大最小值举例

例9 某工厂需生产一批容积为 V 的有盖圆柱形铁罐，问如何选择铁罐的高和底面半径，使得所用材料最省.



解 设铁罐的高为 H，底面半径为 R，

则其体积为 $V = \pi R^2 H$， 即得 $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

其表面积为 $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R}$.

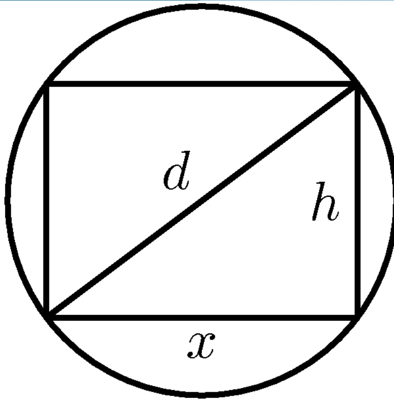
$S' = 4\pi R - \dfrac{2V}{R^2} = 0$ 的驻点 $R_0 = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

而当 $R \to 0$ 和 $R \to +\infty$ 时 $S(R) \to +\infty$，

所以 $S(R_0) = 3(2\pi V^2)^{1/3}$ 是最小值，这时 $H = 2\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

最大最小值举例

例10 把一根直径为 d 的圆木锯成横截面为矩形的梁,



已知梁的抗弯强度与此截面的高的平方和宽的乘积成正比.

问如何选择宽和高使得梁的抗弯强度最大?

解 设梁的底宽为 x, 则高为 $h=\sqrt{d^2-x^2}$,

梁的抗弯强度为 $F(x)=kx(d^2-x^2),\quad 0<x<d,$

k 为比例常数.

$$F'(x)=k(d^2-x^2)-2kx^2=k(d^2-3x^2),$$

区间 $(0,d)$ 内的唯一驻点为 $x_0=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, 而 $F(0)=F(d)=0$,

所以 $F(\dfrac{d}{\sqrt{3}})=\dfrac{2k}{3\sqrt{3}}d^3$ 是最大值, 这时宽为 $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, 高为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}d$.