第七章

空间解析几何与向量代数

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中:

空间形式 — **点, 线, 面**

数量关系 — **坐标, 方程（组）**

基本方法 — **坐标法; 向量法**

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

一、向量的概念

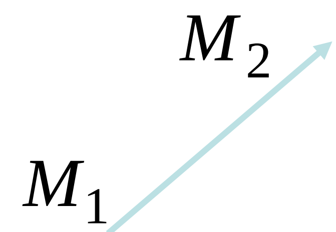
向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 $\vec{a}$,或 $\mathbf{a}$.

向量的模 : 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\mathbf{a}|$.

向径 (矢径): 起点为原点的向量.

自由向量: 与起点无关的向量.



单位向量: 模为 1 的向量, 记作 $\vec{a}^\circ$ 或 a° .

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$,或 0 .

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等, 方向相同, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$相等, 记作$\vec{a}=\vec{b}$;

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行, 记作$\vec{a}/\!/\vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;

与$\vec{a}$的模相同, 但方向相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记作$-\vec{a}$;

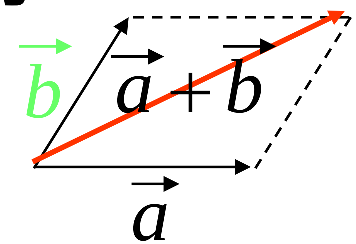
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线.

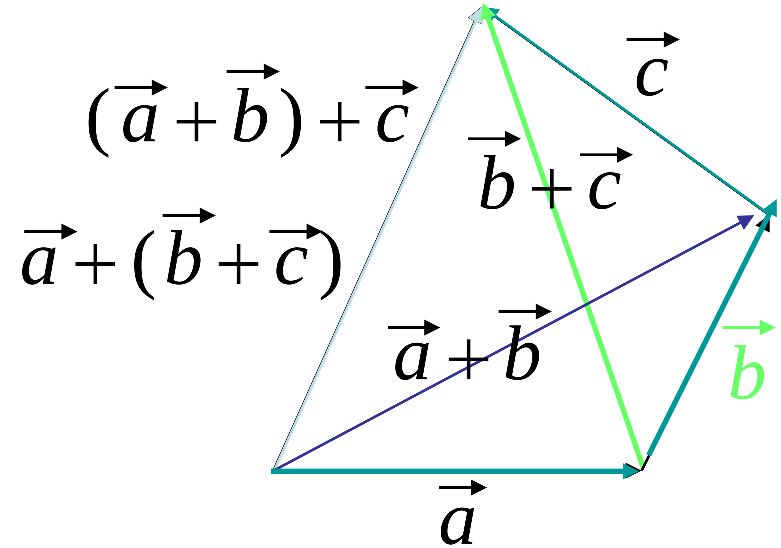
若$k\,(\geq 3)$个向量经平移可移到同一平面上, 则称此k个向量共面.

二、向量的线性运算

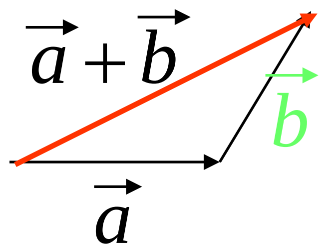
1. 向量的加法

平行四边形法则:





三角形法则:

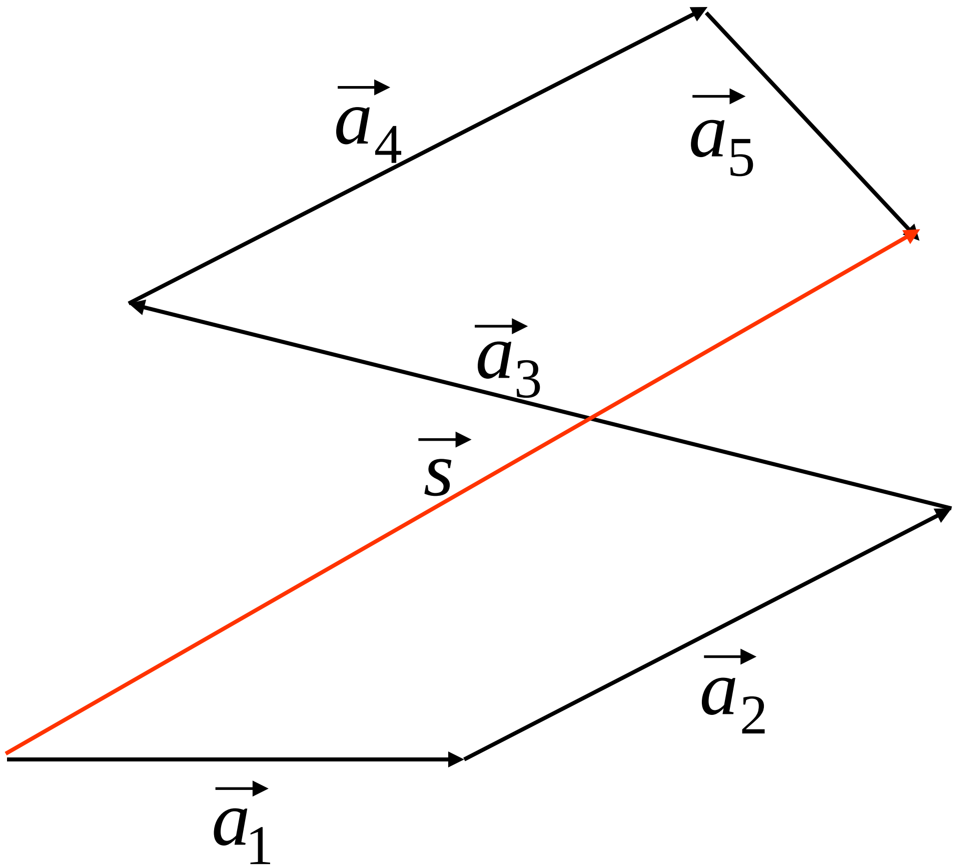


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$

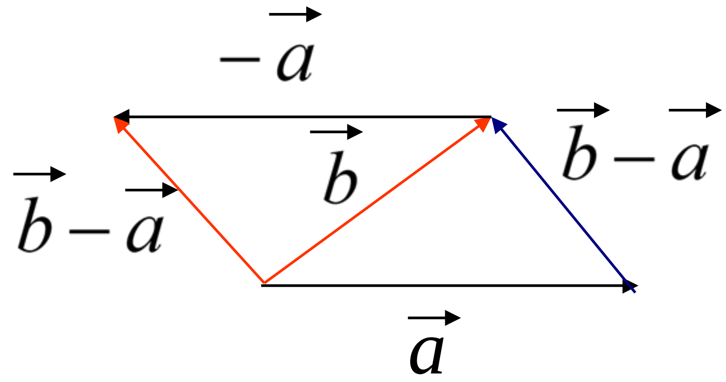


2. 向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

特别当$\vec{b}=\vec{a}$时,有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$



三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数，λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记作 $\lambda\vec{a}$.

规定：$\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

$\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

总之：$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

运算律：结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则有单位向量 $\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: "$\longrightarrow$". 设 $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$，取 $\lambda = \pm |\vec{b}| / |\vec{a}|$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向时取正号，反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$，则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$，故 $|\lambda - \mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

“ $\longleftarrow$ ” 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 则

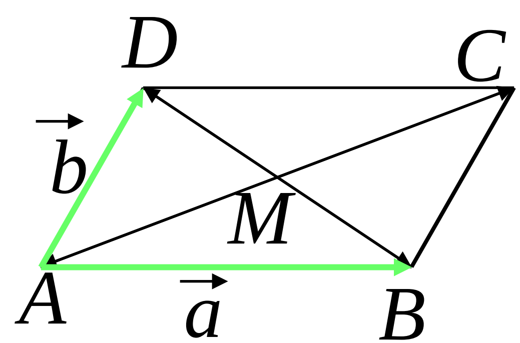
$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \lambda=0 \text{ 时, } \vec{b}=\vec{0} \\ \text{当 } \lambda>0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda<0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向}\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$$

例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$$



$$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MB}=-\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

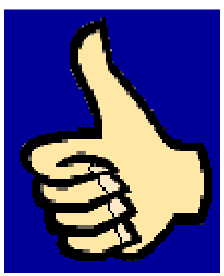
$$\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

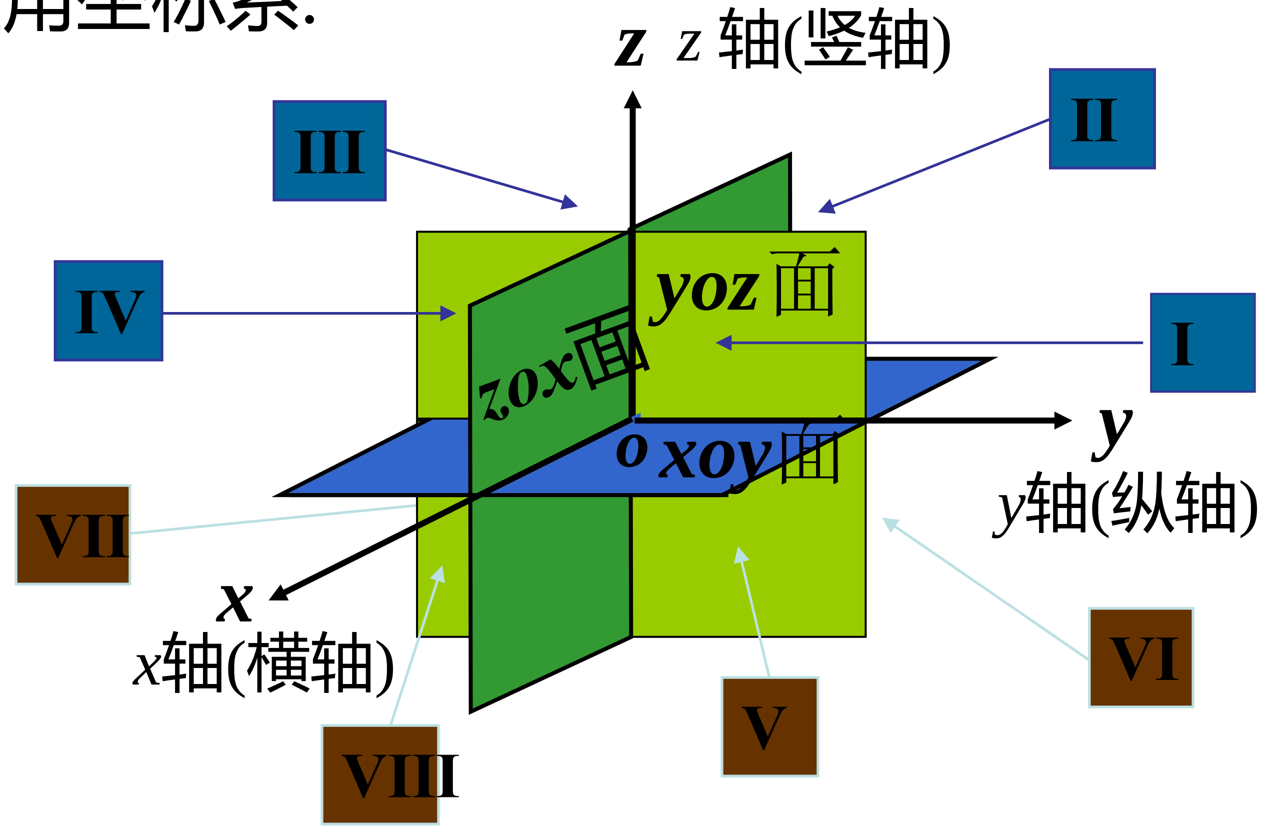
三、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)





在直角坐标系下

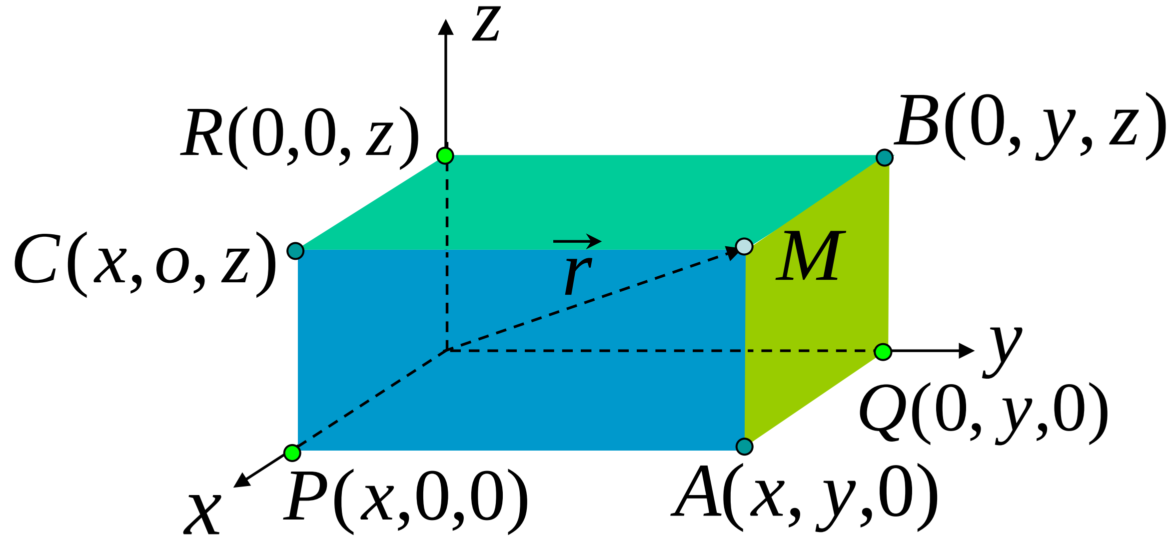
点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组$(x, y, z) \xleftrightarrow{1--1}$ 向径 $\vec{r}$

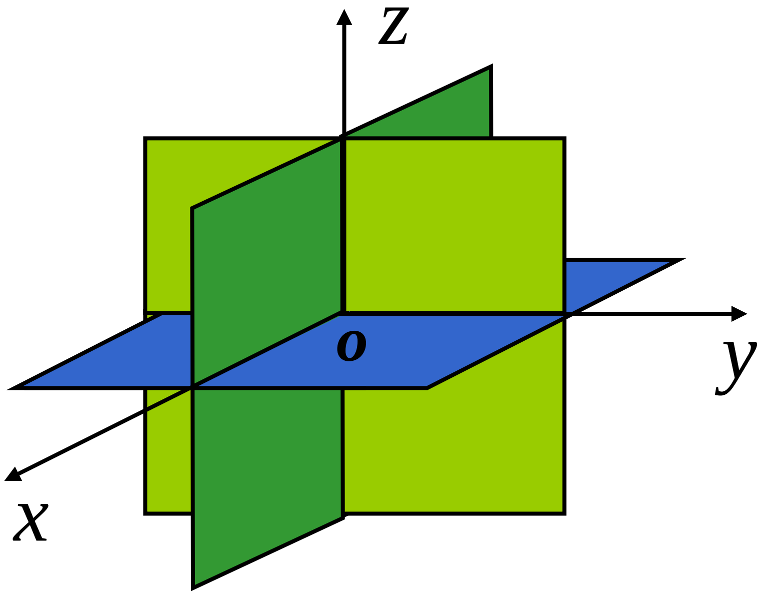
(称为点 M 的**坐标**)

特殊点的坐标:

原点 $O(0,0,0)$;　　坐标轴上的点 P, Q, R ;

坐标面上的点 A, B, C





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面：

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y = 0$$

2. 向量的坐标表示

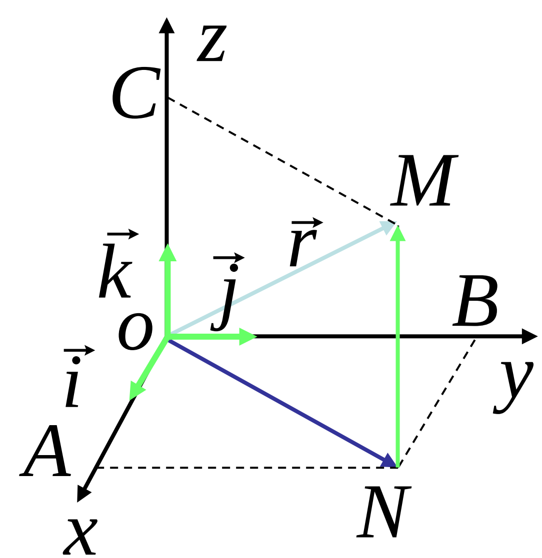
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，**设点** M 的坐标为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数, 则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}/\!/\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x &= \lambda a_x \\ b_y &= \lambda a_y \\ b_z &= \lambda a_z \end{aligned}}$$

例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,1,-2).$

解: 2×① - 3×② , 得

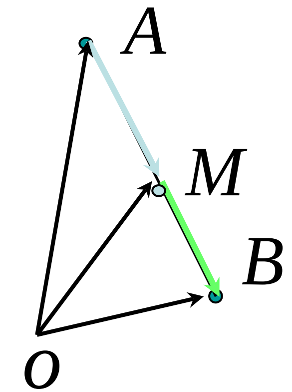
$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

例3. 已知两点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$及实数$\lambda \neq -1$, 在AB直线上求一点M, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$.

解: 设 M 的坐标为(x, y, z), 如图所示

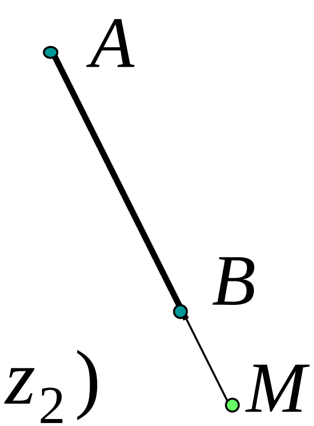


$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

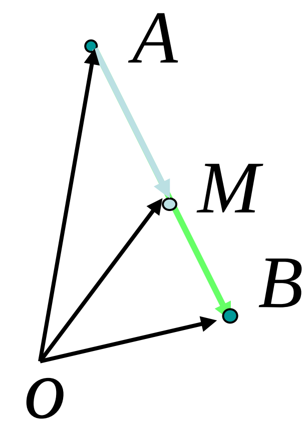
说明: 由

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

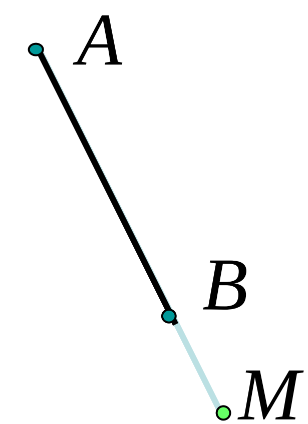
得**定比分点公式:**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$



当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

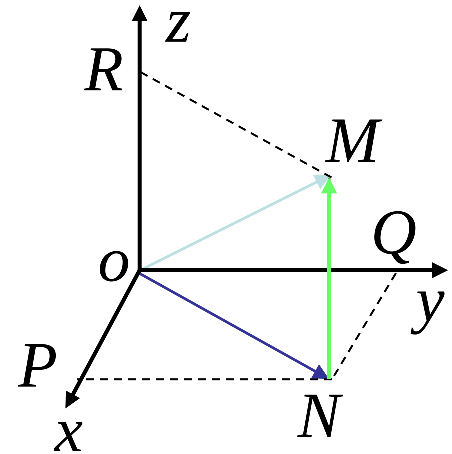


中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式



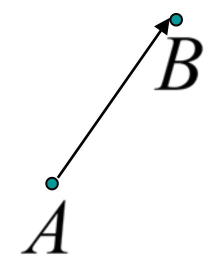
设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, 因



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4. 求证以 $M_1(4,3,1),\ M_2(7,1,2),\ M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形 .

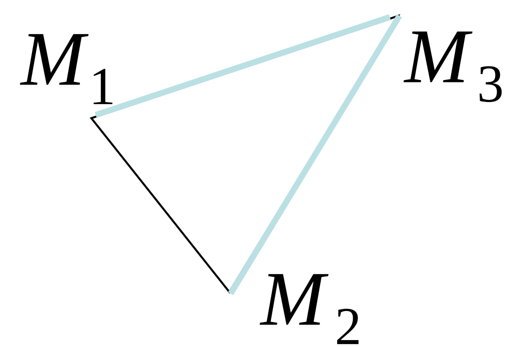
证:

$$\because\ |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore\ |M_2M_3| = |M_1M_3|$$



即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形 .

例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA| = |MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7-z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2-z)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xoy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为$M(x,y,0)$,利用$|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0, \text{且 } z=0$$

(2) 设动点为$M(x,y,z)$,利用$|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例6. 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$, 求$\overrightarrow{AB}^{\circ}$.

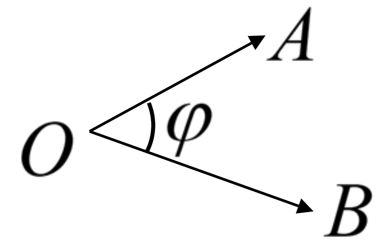
解: $$\overrightarrow{AB}^{\circ}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量$\vec{a}, \vec{b}$,任取空间一点 O, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,称 $\varphi = \angle AOB$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ 为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

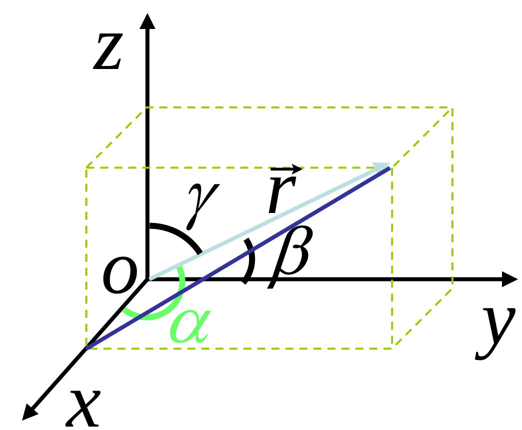
记作 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = \varphi$



类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

给定 $\vec{r} = (x, y, z) \ne \vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴的夹角α, β, γ 为其**方向角**.

方向角的余弦称为其**方向余弦**.

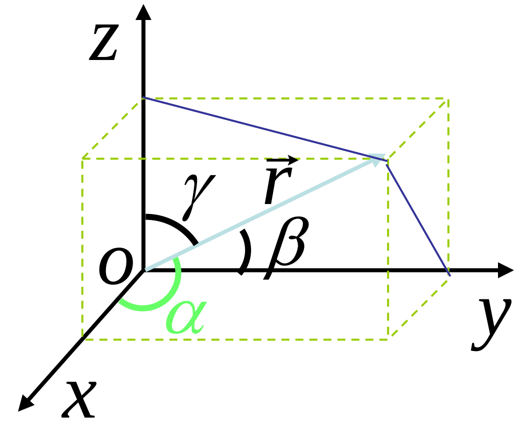


$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量:

$$\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例7. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 、方向余弦和方向角 .

解: $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$

$= (-1, 1, -\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$

例8. 设点 A 位于第一卦限,向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$，则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

第3节
数量积 向量积 *混合积

一、两向量的数量积

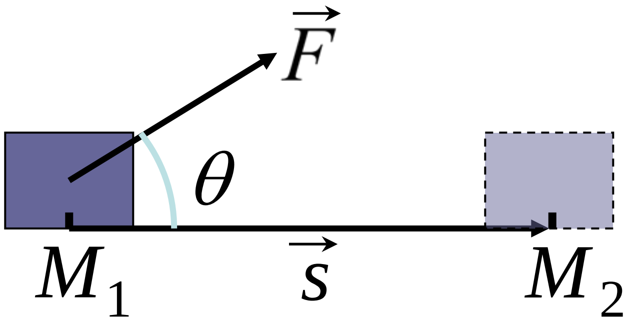
二、两向量的向量积

*三、向量的混合积

一、两向量的数量积

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 则力$\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



1. 定义

设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为θ,称

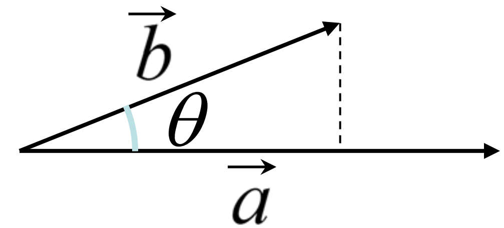
$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

为$\vec{a}$ 与$\vec{b}$的数量积 (点积,内积) .

当$\vec{a} \neq \vec{0}$时, $\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



故 $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

同理,当$\vec{b} \neq \vec{0}$时,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

2. 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}, \vec{b}$为两个非零向量, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$$

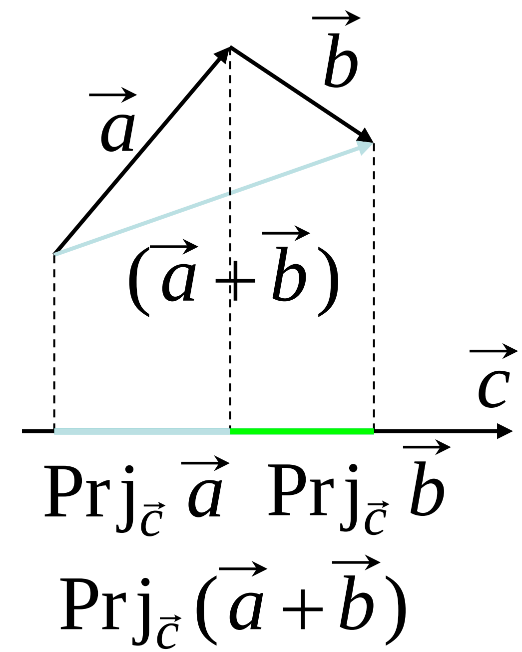
3. 运算律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 $(\lambda,\mu$为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b}) &= \lambda\left(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b})\right)\\ &= \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$



(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

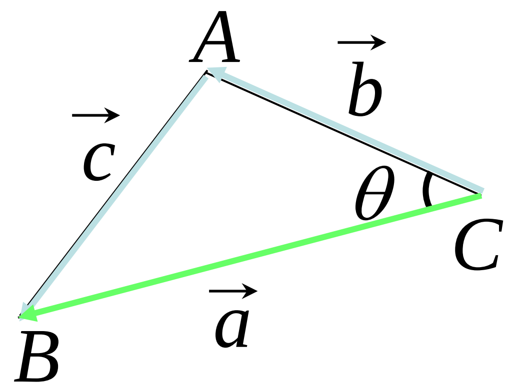
事实上, 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立 ; 当$\vec{c}\neq\vec{0}$时

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= |\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\left(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)\\ &= |\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

例1. 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

证: 如图 . 设



$$\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Big\downarrow\; a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\downarrow \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

两向量的夹角公式

当 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$, 得

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

例 2 已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}$ $\quad\therefore \mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

例 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证 $[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$

$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$

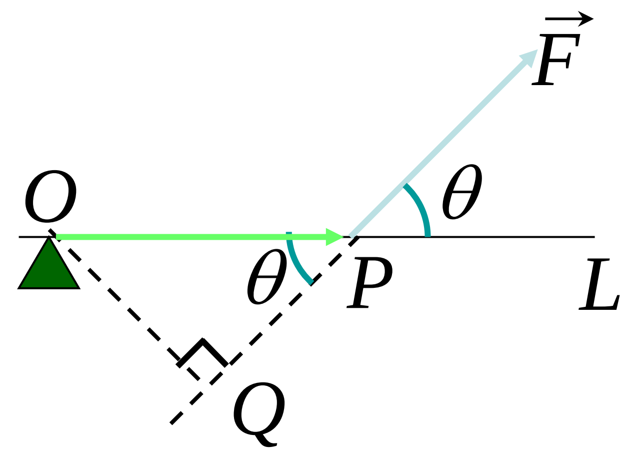
$=0$

$\therefore [(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$

二、两向量的向量积

引例. 设O 为杠杆L 的支点，有一个与杠杆夹角为θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P点上，则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩是一个向量 $\vec{M}$：

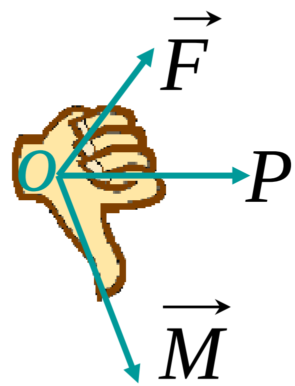
$$\left|\vec{M}\right| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$$



$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\vec{M} \perp \vec{F}$



$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

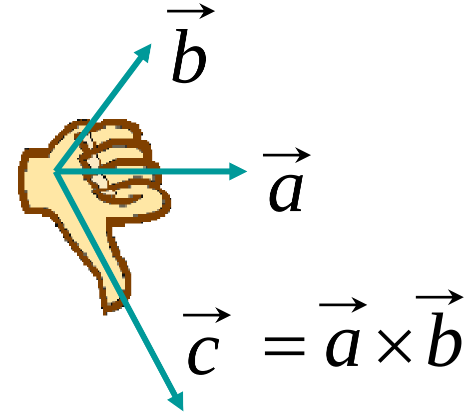
1. 定义

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，定义

$$\text{向量 } \vec{c} \begin{cases} \text{方向}: \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模}: |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**，记作

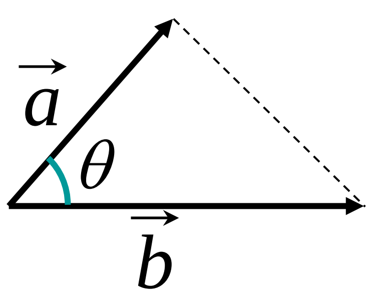
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(叉积)}$$



引例中的力矩 $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

思考: 右图三角形面积

$S =$ $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$



2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0, \text{即}\ \theta=0\ \text{或}\ \pi \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

3. 运算律

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \\
(2)\ \text{分配律}\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \\
(3)\ \text{结合律}\ (\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})
\end{array}\right\}\ \text{(证明略)}$$

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

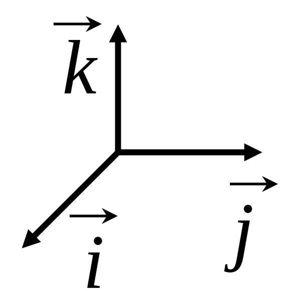
$$= \cancel{a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i})} + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k})$$

$$+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + \cancel{a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j})} + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k})$$

$$+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + \cancel{a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$



向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

例 4 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

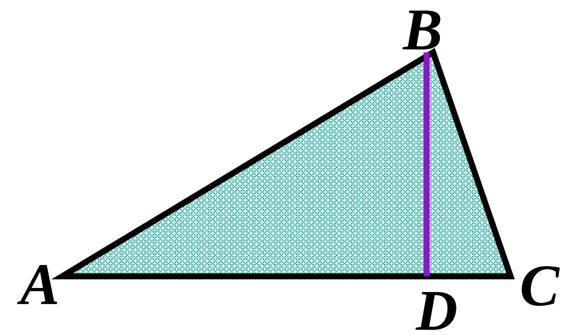
$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{c^0}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 5 在顶点为 $A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和 $C(1,3,-1)$的三角形中，求 AC 边上的高 BD.

解 $\overrightarrow{AC}=\{0,4,-3\}$

$\overrightarrow{AB}=\{4,-5,0\}$



三角形ABC的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$$

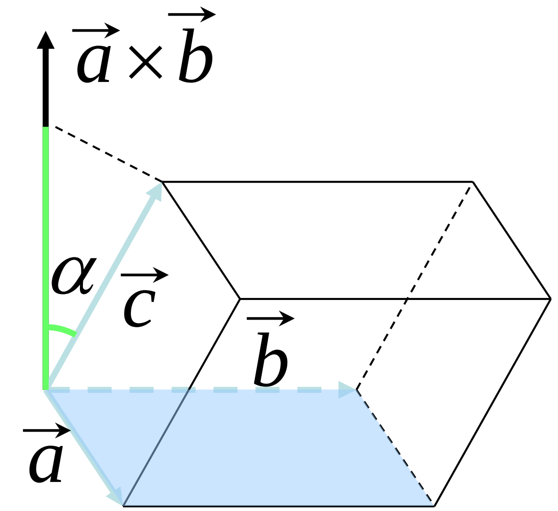
$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot|BD| \qquad \therefore|BD|=5.$$

*三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,]$$

为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的**混合积**.



几何意义

以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A = |\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h = |\vec{c}|\,|\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V = Ah = |\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\alpha| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$$

$$= |[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,]|$$

2. 混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

3. 性质

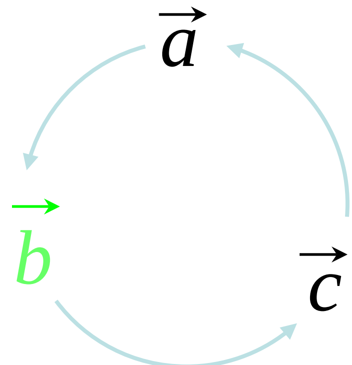
(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

(2) 轮换对称性：

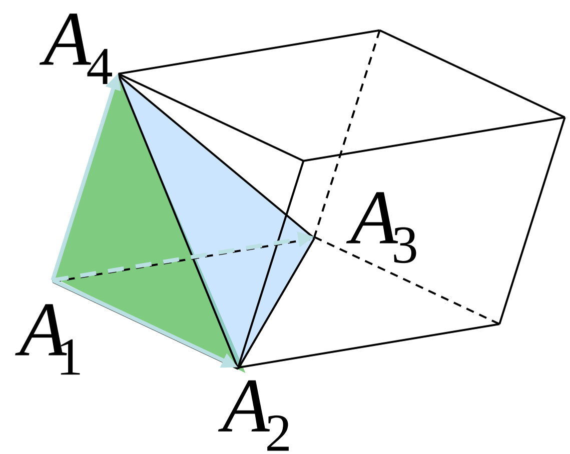
$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

(可用三阶行列式推出)



例4. 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积 .

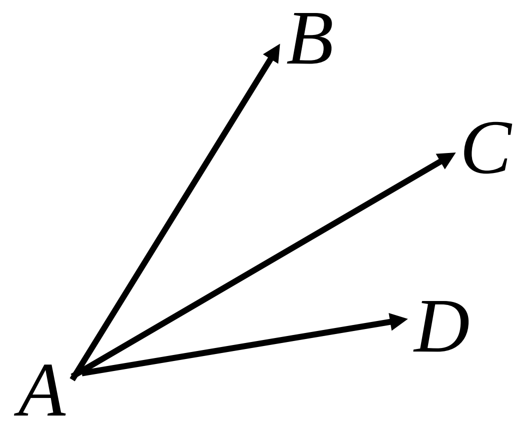
解: 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 故



$$V=\frac{1}{6}\left|\,[\overrightarrow{A_1A_2}\ \ \overrightarrow{A_1A_3}\ \ \overrightarrow{A_1A_4}]\,\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|\,\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\,\right|$$

例5. 证明四点 $A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$ 共面 .



解: 因

$$[\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\ ] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 A , B , C , D 四点共面 .

内容小结

设 $\vec{a}=(a_x\,,a_y\,,a_z)\,,\vec{b}=(b_x\,,b_y\,,b_z),\vec{c}=(c_x\,,c_y\,,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x\,,a_y\pm b_y\,,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x\,,\lambda a_y\,,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系:

$$\vec{a}//\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \rightleftarrows \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightleftarrows a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{共面} \rightleftarrows (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$$

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

思考与练习

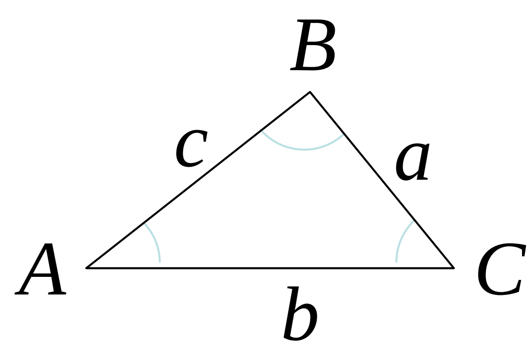
1. 设$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算$\vec{a}\cdot\vec{b}$及$\vec{a}\times\vec{b}$,并求$\vec{a}, \vec{b}$夹角θ的正弦与余弦 .

答案: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证: 由三角形面积公式

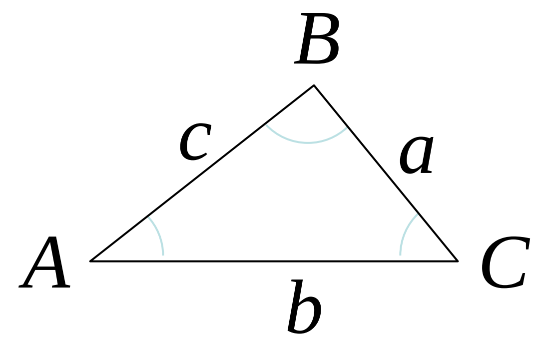
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$$

因 $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = b\cdot c\cdot \sin A$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = c\cdot a\cdot \sin B$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right| = a\cdot b\cdot \sin C$$



所以 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$