课堂练习一参考答案

1. 判断函数 $y=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$ 的奇偶性，并给予证明。（15）

解: $f(-x)+f(x)=\ln(\sqrt{4(-x)^2+1}-2(-x))+\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$

$=\ln(4x^2+1-4x^2)=\ln 1=0,$

所以 $y=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$ 是奇函数.

2. 求函数 $y=\begin{cases} x-2 & 0<x\le 1 \\ 3-(x-3)^2 & 1<x\le 3 \end{cases}$ 的反函数. （15）

解：$y=x-2, 0<x\le 1$ 是严格递增函数，它的反函数是 $y=x+2, -2<x\le -1$，

$y=3-(x-3)^2, 1<x\le 3$ 是严格递增函数，它的反函数是 $y=3-\sqrt{3-x}, -1<x\le 3$，

所以所求函数的反函数是 $y=\begin{cases} x+2, -2<x\le -1 \\ 3-\sqrt{3-x}, -1<x\le 3 \end{cases}$ 其定义域是 $(-2,3]$。

3.填空(5×6)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=(\quad 0\quad)\ (\alpha>0)$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=(\quad 0\quad)\ (|q|<1)$. (3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=(\quad 1\quad)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}C^{1/n}=(\quad 1\quad)\ (C>0)$. (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=(\quad 1\quad)$. (6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=(\quad \mathrm{e}\quad)$.

4. 用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-4}=\frac{2}{3}$. (10)

证明：对任意 $\varepsilon>0$，要使 $|\frac{2n+1}{3n-4}-\frac{2}{3}|<\varepsilon$，

只要 $|\frac{2n+1}{3n-4}-\frac{2}{3}|=|\frac{6n+3-6n+8}{3(3n-4)}|=\frac{11}{3(3n-4)}<\varepsilon$, 所以取 $N=[\frac{11}{9\varepsilon}+\frac{4}{3}]$，

只要 $n>N$ 就有 $|\frac{2n+1}{3n-4}-\frac{2}{3}|<\varepsilon$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-4}=\frac{2}{3}$.

5. 求极限 (2×10)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+2}{3n^2+5n+1}$;

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+2}{3n^2+5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8})$.

解: $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8})=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证：在 $[a,b]$ 上必存在点 ξ，

使 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$.（10）

证明: 设 $F(x)=3f(x)-f(a)-2f(b)$, 它在 $[a,b]$ 上连续，

$F(a)F(b)=[3f(a)-f(a)-2f(b)][3f(\mathrm{b})-f(a)-2f(b)]=-2[f(a)-f(b)]^2\le 0.$

当 $f(a)=f(b)$ 时，取 $\xi=a$, 当 $f(a)\ne f(b)$ 时，$F(a)F(b)<0$, 由根的存在定理知：

存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$.

所以在 $[a,b]$ 上必存在点 ξ，使 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$.