隐函数求导法则: 直接对方程两边求导;

对数求导法: 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

相关变化率: 通过函数关系确定两个相互依赖的变化率; **解法:** 通过建立两者之间的关系, 用链式求导法求解.

上页 下页 返回

例　设f(x) ＝ x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-100) 求 f ‘(0)分析：本题利用乘积求导方法比较麻烦,不如采用导数定义求方便

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)..(x-100)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)..(x-100)=100!$$

例8　求幂指函数 $y=x^x$ 的导数

解：$y=x^x=e^{x\ln x}\to y'=e^{x\ln x}(\ln x+x\times\frac{1}{x})=x^x(\ln x+1)$ 用性质

$y=x^x\to \ln y=x\ln x\to \frac{1}{y}y'=\ln x+1\therefore y'=x^x(\ln x+1)$ 用对数

三、由参数方程所确定的函数的导数

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数$x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导,且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例6 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a-a\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{1-\cos\dfrac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\dfrac{\pi}{2}-1)$, $y=a.$

所求切线方程为

$$y-a = x-a(\frac{\pi}{2}-1)$$

即 $y = x + a(2-\dfrac{\pi}{2})$

上页 下页 返回

思考题

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，由$y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t)\neq 0)$

可知$y''_x=\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

若函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,

设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例6　求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解　$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{1 - \cos\dfrac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$, $y = a$.

所求切线方程为

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$$

即　$y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

上页　下页　返回

例.设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \quad (0 < \varepsilon < 1) \end{cases}$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$.

解:方程组两边对 t 求导,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{(t+1)(1-\varepsilon\cos y)}\right)}{2(t+1)}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\cos y) - \varepsilon t(t+1)\sin y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^2}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\cos y)^2 - 2\varepsilon t^2(t+1)\sin y}{2(t+1)^3(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

上页 下页 返回

四、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数, 而变量 x 与 y 之间存在某种关系, 从而它们的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系, 这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

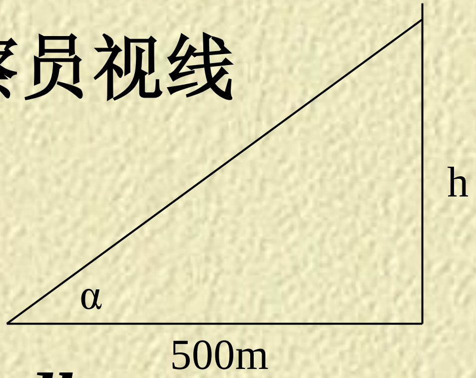
相关变化率问题:

相关变化率问题是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率. 举例说明

例9 一汽球从离开观察员500米处离地面铅直上升,其速率为140米/秒.当气球高度为500米时,观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升t秒后,其高度为h,观察员视线的仰角为α,则

$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$



上式两边对t求导得 $\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500}\cdot\frac{dh}{dt}$

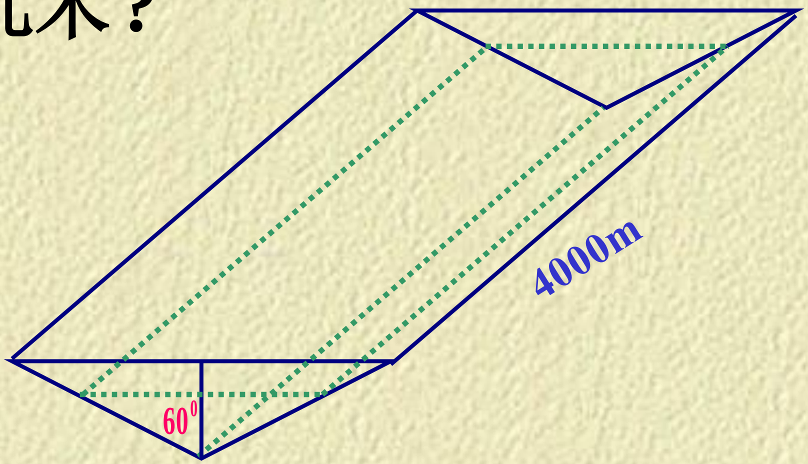
$\because \frac{dh}{dt} = 140$米/秒, 当$h = 500$米时, $\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/分)

仰角增加率

上页 下页 返回

例10 河水以8米^3/秒的体流量流入水库中, 水库形状是长为4000米, 顶角为120^{0}的水槽, 问水深20米时, 水面每小时上升几米?



解 设时刻t水深为$h(t)$,

水库内水量为$V(t)$, 则

$$V(t)=4000\sqrt{3}h^2$$

上式两边对t求导得

$$\frac{dV}{dt}=8000\sqrt{3}h\cdot\frac{dh}{dt}$$

$\because \frac{dV}{dt}=28800$米^3/小时, $\therefore$ 当$h=20$米时,

$\frac{dh}{dt}\approx 0.104$米/小时

水面上升之速率

上页 下页 返回

例1.设 $f'(x_0)$ 存在,求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

解:

$$原式=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x+(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(x_0)$$

上页 下页 返回

例2.若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1)$$

上页 下页 返回

例3.设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3,$ 求 $f'(2)$.

解: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[(x-2)\cdot\dfrac{f(x)}{(x-2)}]=0$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$$

上页 下页 返回

例4.设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$

试确定常数 a , b 使 $f(x)$ 处处可导,并求 $f'(x)$.

解: $$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$$

$x<1$时, $f'(x)=a$; $x>1$时, $f'(x)=2x$.

利用 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，得

$$\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f'_-(1)=f'_+(1) \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \\ a=2 \end{cases}$$

上页 下页 返回

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$$

$x<1$时，$f'(x)=a$，　$x>1$时，$f'(x)=2x$

$\therefore\quad a=2,\ b=-1,\qquad f'(1)=2$

$$f'(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

上页　下页　返回