本章讨论无限个实数相加和无限个函数相加.

§1 数项级数

对此数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots,$ 的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**常数项无穷级数**，简称为**数项级数**或**级数**.

其中 u_n 称为此级数的通项或一般项.

级数可简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$

注意：这里的“相加”是一个形式上的相加.

我们需要给出一个合理的解释.

部分和数列

我们讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前有限项的和：

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

$$\cdots\cdots$$

称数列 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列，其通项

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个部分和，简称为部分和.

收敛数列定义

定义1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称极限值 S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，

记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S.$$

若部分和数列没有极限，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

实际上是指：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ 收敛.

几何级数

例1 证明：几何级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0),$$

当 $|q|<1$ 时是收敛的，当 $|q|\geq 1$ 时是发散的.

证明：当 $|q|\neq 1$ 时，级数的部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

因此级数收敛，其和为 $S = \dfrac{a}{1-q}$.

几何级数

当 $|q|>1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty,$$

所以级数发散.

当 $q=1$ 时， $S_n = na \to \infty,$

所以级数发散.

当 $q=-1$ 时， $S_{2n-1} = a, \quad S_{2n} = 0,$

故 $\{S_n\}$ 无极限，所以级数发散.

级数举例

例2 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

收敛，并求其和.

证明：
$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和为 $S=1.$

级数举例

实际上，由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + +(S_n - S_{n-1}) + \cdots.$$

例3 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛，并求其和.

证明：$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,

$$S_n = (1 - \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots + (\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}) + (\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!})$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛，其和为 $S = 1.$

例4 证明：调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证明：因为当 $n\le x\le n+1$ 时，有 $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}$，所以

$$u_n=\frac{1}{n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx\ge\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\,\Big|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n,$$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\ge(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$=\ln(n+1).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，因此调和级数发散.

定理1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

证明：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S.$ 而 $u_n = S_n - S_{n-1}$，

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

注意：该定理不是充分条件，即反过来不成立。反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

例5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ 的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ 发散.

线性性

定理2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，且其和分别为 S 和 T，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S \pm T$，

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证明：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n 和 T_n，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和

$$W_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = S_n \pm T_n$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} T_n = S \pm T$，

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm T = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

线性性

同理可证

定理3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且其和为 S， k 为一常数，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛，且其和为 kS，

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

当 $k \neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} k u_n$， 所以有

推论 若常数 $k \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 有相同的敛散性.

例4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{7}{10})^n+\frac{1}{2n}]$ 敛散性.

解：因为 $|-\frac{7}{10}|<1$, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{7}{10})^n$ 收敛,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{7}{10})^n+\frac{1}{2n}]$ 收敛,

则由定理2知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{7}{10})^n+\frac{1}{2n}]-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{7}{10})^n$ 收敛.

这是一个矛盾，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{7}{10})^n+\frac{1}{2n}]$ 发散.

定理4 去掉、增加或改变级数的有限项不影响级数的敛散性.

证明：设原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其部分和为 S_n，

改变有限项后所得级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，其部分和为 T_n.

若所改变的项中，下标最大的项为 u_p，

则当 $n > p$ 时有 $u_n = v_n$. 令 $M = T_p - S_p$，则 M 是一个常数.

当 $n > p$ 时，

$$T_n - S_n = (T_p + v_{p+1} + \cdots + v_n) - (S_p + u_{p+1} + \cdots + u_n)$$
$$= T_p - S_p = M.$$

所以 $\{S_n\}$ 和 $\{T_n\}$ 有相同的敛散性，

即改变级数的有限项不影响级数的敛散性.

同理可证去掉、增加有限项的情形.

加括号后敛散性不变

定理5 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对该级数的项任意加括号后得到的级数

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

仍然收敛，且和不变.

证明：设级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，新级数的第 k 个部分和为 A_k，

则 $A_k = S_{n_k}$.

即 $\{A_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列，由 $\{S_n\}$ 的收敛性知 $\{A_k\}$ 也收敛，且

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

注意：加括号后的级数收敛，不能得出原级数收敛. 反例: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

例7 判别下列级数的敛散性：

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解 考虑加括号的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

其一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$ ，

由定理9.1.4知，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}u_n=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，从而原级数发散.

收敛级数的余项

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且其和为 S,

则级数 $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 也收敛，其和为 $R_n = S - S_n$.

级数 $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 称为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 项后的余项.

例8 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和.

证 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$，若能求出 $\lim_{n\to\infty}S_n$，就能得到所要的结论. 由于

$$S_n-\frac{1}{3}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{3^{k+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{3^{k+1}}-\frac{2k-1}{3^{k+1}}\right)-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{2n-1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3^2}(1-(\frac{1}{3})^{n-1})}{1-\frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}, \qquad (= S_n - \frac{1}{3} S_n)$$

所以 $$S_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}\right),$$

于是 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}\right) = 1.$$

这样就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并且其和为 1.

例9 求二进制无限循环小数 $(110.110110\cdots)_2$ 的十进制值.

解 $(110.110110\cdots)_2 = 2^2 + 2^1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \cdots,$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{3k-5}} + \frac{1}{2^{3k-4}}\right) = 2^2\frac{1-(\frac{1}{2^3})^n}{1-\frac{1}{2^3}} + 2\frac{1-(\frac{1}{2^3})^n}{1-\frac{1}{2^3}}$$

$$= 6\times\frac{8}{7}\left(1-\left(\frac{1}{2^3}\right)^n\right),$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{3n-2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{48}{7}.$$

所以 $(110.110110\cdots)_2 = \frac{48}{7} = 6.\overline{857142}.$

例9 将无限循环小数 $=0.\overline{857}$ 化成分数.

解 $0.\overline{857}=\frac{8}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{7}{10^6}+\cdots,$

$$=\frac{8}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3n}}+\frac{5}{10^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3n}}+\frac{7}{10^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3n}}$$

$$=\left(\frac{8}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{7}{10^3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^n$$

$$=\frac{857}{10^3}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^3}=\frac{857}{999}.$$