§6 广义积分

定积分定义中有两个基本条件：

（1）积分区间 $[a,b]$ **是有限区间，**

（2）被积函数在积分区间上是有界的。

下面考虑放松这两个条件，讨论两类**广义积分，或称非正常积分.**

一、无限区间上的广义积分

形如 $\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

的积分称为积分区间为无限的广义积分.

无限区间上的广义积分定义

定义6.7.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，

且对任意 $A(A>a)$, $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积。若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I,$$

则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛，

且称此极限值 I 为广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的积分值，

记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = I.$$

若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

无限区间上的广义积分定义

定义6.7.1 b 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上有定义，

且对任意 $A(A<a)$，$f(x)$ 在 $[A,a]$ 上可积。若极限

$$\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx = I,$$

则称广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 存在或收敛，

且称此极限值 I 为广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 的积分值，

记作

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = I.$$

若极限不存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 发散。

无限区间上的广义积分定义

若对确定的点 a，广义积分

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad 与 \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 中至少有一个发散，

则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

无限区间广义积分例子

例 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 的敛散性。

解: $\int_0^A\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\big|_0^A=\arctan A$, 而 $\lim\limits_{A\to+\infty}\arctan A=\frac{\pi}{2}$

因此，广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 收敛， 且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

类似地，$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{1+x^2}=-\lim\limits_{A\to-\infty}\arctan A=\frac{\pi}{2}.$

广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$

收敛.

无限区间广义积分例子

例 讨论广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a>0)$ 的敛散性。

解： 当 $p\neq 1$ 时 $\int_a^A\frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^A=\frac{A^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}$,

因此 $$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

当 $p=1$ 时 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty.$

因此，当 $p>1$ 时 广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛， 其值为: $\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

当 $p\le 1$ 时 广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散。

广义积分的简写

计算无穷限积分时，一般应先在有限区间上求定积分，然后再取极限，

为方便起见，这两个步骤可以简写成

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中 $F(+\infty)$ 应理解为极限 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$.

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt\,(p>0)$.

解： $$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = -\frac{t}{p}e^{-pt}\big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$$

$$= -\frac{e^{-pt}}{p^2}\big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}.$$

二、无界函数的广义积分

把定积分推广到被积函数有无穷型间断点的非正常情形。

形如 $$\int_a^b f(x)dx.$$

$$\left(\quad \lim_{x\to b^-} f(x)=\infty \quad \text{或} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty \quad\right)$$

的无界函数积分称为无界函数的广义积分。

无界函数的广义积分定义

定义6.7.2 设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, 对任意小的正数 ε,

$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积， 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=I,$$

则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在或收敛，

且称此极限值 I 为广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分值，记作

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

无界函数的广义积分定义

定义6.7.2b 设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 对任意小的正数 ε,

$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积，若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=I,$$

则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在或收敛，

且称此极限值 I 为广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分值，记作

$$\int_a^b f(x)dx=I.$$

若极限不存在， 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

无界函数的广义积分定义

设是 (a,b) 内的一点，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，若广义积分

$$\int_a^c f(x)dx \quad 与 \quad \int_c^b f(x)dx$$

都收敛，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

若广义积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 中至少有一个发散，

则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

无界广义积分例子

例 讨论广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$ 的敛散性。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty,$ 由于

$$\lim_{x\to\varepsilon^+}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x\to\varepsilon^+}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon}=\frac{\pi}{2}.$$

因此，广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 收敛，

且 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$

无界广义积分例子

例 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}(p>0)$ 的收敛性。

解：当 $p\neq 1$ 时

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p},$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p>1, \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1. \end{cases}$$

当 $p=1$ 时

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

因此，当 $p<1$ 时 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 收敛，其值为: $\frac{1}{1-p}$.

当 $p\geq 1$ 时 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 发散。

三、Γ-函数

对广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,$ 可以证明

当 $s>0$ 时，广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 收敛，

当 $s\le 0$ 时，广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 发散。

因此对 $s\in(0,+\infty)$，积分值 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$

定义了 S 的一个函数，称为 Γ -函数。

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Γ-函数的性质

Γ -函数的递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\ (s>0).$

证明： $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}dx.$

$$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s).$$

对正整数 n, $\quad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n!.$

令 $,u=\sqrt{x}$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}u^{2(s-1)}e^{-u^2}2udu=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}du.$$

下学期证明 $\quad \Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}.$

可以求出 $\quad \Gamma(n+\frac{1}{2}).$

第一宇宙速度

人造地球卫星在地面附近绕地球做匀速圆周运动所必须具有的速度，

叫做**第一宇宙速度**.

设卫星在半径为常数 $r(>R)$ 的圆上运动，速度为 v，轨迹为

$$(x,y)=(r\cos\theta(t),r\sin\theta(t)).$$

速度向量为

$$(x',y')=r(-\sin\theta,\cos\theta)\frac{d\theta}{dt},$$

因此 $v=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=r\frac{d\theta}{dt},$

即得 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{r}.$

第一宇宙速度

$$(x',y')=r(-\sin\theta,\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

加速度 $(x'',y'')=-r(\cos\theta,\sin\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2,$

离心力为 $F=m(x'',y'')=-m(\cos\theta,\sin\theta)\frac{v^2}{r},\quad |F|=m\frac{v^2}{r}.$

此离心力与重力平衡，且卫星离地球较近， $r\approx R,$

$$mg\approx m\frac{v^2}{R}.$$

地球半径 $R=6.371\times10^6 m,$ 地球表面的重力加速度 $g=9.81m/s^2,$

得第一宇宙速度 $v\approx\sqrt{gR}\approx 7.9km/s.$

第二宇宙速度

在地球表面垂直发射火箭，要使火箭克服地球引力远离地球，

其速度至少要有多大?

设地球质量为 M， 火箭质量为 m， 按万有引力定律，

在距地心 $x(\geq R)$ 处火箭所受到的引力为

$$F(x)=\frac{GMm}{x^2}.$$

G 为万有引力常数，由于在地球表面 $x=R$ 时 ，地球对火箭

的引力就是火箭的重量，$\dfrac{GMm}{R^2}=mg,$

因此 $$F(x)=\frac{mgR^2}{x^2}.$$

第二宇宙速度

火箭在地球引力场中从地面上升到距离地心 $r(>R)$ 处所作的功为

$$\int_R^r \frac{mgR^2}{x^2}dx = mgR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}).$$

令 $r \to +\infty$, 火箭克服地球引力远离地球需作的功为

$$W = \lim_{r\to+\infty}\int_R^r \frac{mgR^2}{x^2}dx = mgR.$$

由能量守恒定律，火箭能远离地球的速度 v 至少需要满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR,$$

得第二宇宙速度 $v = \sqrt{2gR} \approx 11.2km/s.$

第三宇宙速度

如果物体的速度等于或大于16.7km/s,物体就摆脱了太阳引力的束缚,

飞到太阳系以外的宇宙空间去.我们把这个速度叫第三宇宙速度