

练习. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

练习. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

练习. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

练习.讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

第4节

幂级数

- 一、函数项级数的概念
- 二、幂级数及其收敛性
- 三、幂级数的运算

二、幂级数及其收敛性

形如
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中数列 a_n ($n = 0, 1, \cdots$) 称为幂级数的**系数**。

下面着重讨论 $x_0 = 0$ 的情形，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ， $|x| < 1$ 即是此种情形。

定理 1. (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛, 则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛.

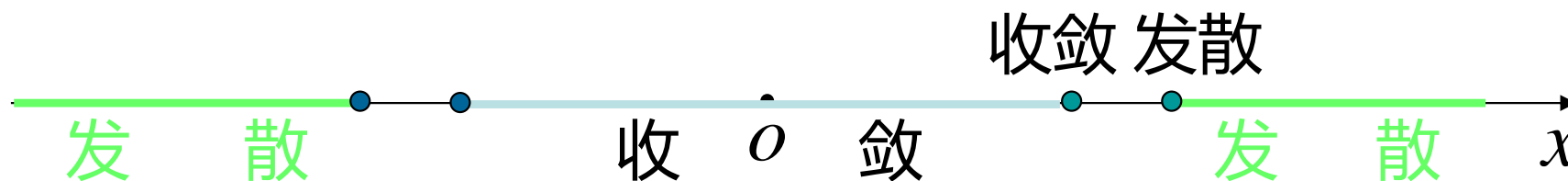


阿贝尔, N.H.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散, 则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x , 该幂级数也发散.

证: 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, 于是存在

常数 $M > 0$, 使 $|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots)$



$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛, $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 也收敛,

故原幂级数绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散, 下面用反证法证之.

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛, 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾, 故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散, 则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x , 原幂级数也发散. 证毕

由Abel 定理可以看出, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

用 $\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点, 则

$R = 0$ 时, 幂级数仅在 $x = 0$ 收敛;

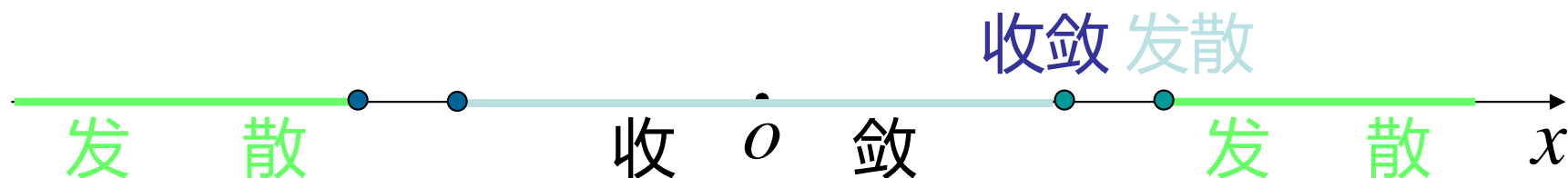
$R = \infty$ 时, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛;

$0 < R < \infty$, 幂级数在 $(-R, R)$ 收敛; 在 $[-R, R]$

外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散.

R 称为**收敛半径**, $(-R, R)$ 称为**收敛区间**.

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为**收敛域**.



定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则

1) 当 $\rho \neq 0$ 时, $R = \frac{1}{\rho}$;

2) 当 $\rho = 0$ 时, $R = \infty$;

3) 当 $\rho = \infty$ 时, $R = 0$.

注: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,
也有类似结论

证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = \rho |x|$

1) 若 $\rho \neq 0$, 则根据比式判别法可知:

当 $\rho |x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数收敛;

当 $\rho |x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$.

2) 若 $\rho = 0$, 则根据比式判别法可知, 对任意 x 原级数绝对收敛, 因此 $R = \infty$;

3) 若 $\rho = \infty$, 则对除 $x = 0$ 以外的一切 x 原级数发散, 因此 $R = 0$.

说明:据此定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

例1.求幂级数 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$

的收敛半径及收敛域.

解:
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

对端点 $x = 1$, 级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x = -1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 发散.

故收敛域为 $(-1, 1]$.

例2. 求下列幂级数的收敛域：

规定: $0! = 1$

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

解: (1)

$$\because R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

所以收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(2) \because R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

所以级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径.

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2, 故直接由比式判别法求收敛半径.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2} x^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} x^2 = 4x^2\end{aligned}$$

当 $4x^2 < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时级数收敛
当 $4x^2 > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{2}$ 时级数发散

} 故收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$.

例4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解: 令 $t = x - 1$, 级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} t^n$

$$\therefore R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n n}}{\frac{1}{2^{n+1} (n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)}{2^n n} = 2$$

当 $t = 2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t = -2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 此级数条件收敛;

因此级数的收敛域为 $-2 \leq t < 2$, 故原级数的收敛域为 $-2 \leq x - 1 < 2$, 即 $-1 \leq x < 3$.

三、幂级数的运算

定理3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为

R_1, R_2 , 令 $R = \min \{ R_1, R_2 \}$, 则有:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (\lambda \text{ 为常数}) \quad |x| < R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < R$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R$$

$$\text{其中 } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

以上结论可用部分和的极限证明.

说明: 两个幂级数相除所得幂级数的收敛半径可能比原来两个幂级数的收敛半径小得多. 例如, 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \left(\begin{array}{l} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0, n = 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

它们的收敛半径均为 $R = \infty$, 但是

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

定理4 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则其和函数 $S(x)$ 在收敛域上连续, 且在收敛区间内可逐项求极限, 逐项求导和求积分, 运算前后收敛半径相同:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$x \in (-R, R)$$

例5. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

解: 由例2可知级数的收敛半径 $R = +\infty$. 设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = S(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

故有

$$\left(\ln |S(x)| \right)' = 1$$

因此得

$$S(x) = C e^x$$

由 $S(0) = 1$ 得 $S(x) = e^x$, 故得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

例6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1, $x = \pm 1$ 时级数发散, 故当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\ &= x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例7. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1, 且 $x = -1$ 时级数收敛, 则当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-x} dx \\ &= -\frac{1}{x} \ln(1-x) \quad (0 < |x| < 1) \end{aligned}$$

$$S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \quad (0 < |x| < 1)$$

而 $S(0) = 1$, 所以

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 1. & x = 0 \end{cases}$$

注：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} \right) = 1$, 和函数连续。