一、求下列函数的导数或微分（16分，每小题4分）

（1）设 $y=\ln x+\sin x$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\cos x.$$

（2）设 $y=\dfrac{x}{x^2+e^x}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{(x')(x^2+e^x)-x(x^2+e^x)'}{(x^2+e^x)^2}$$

$$=\frac{x^2+e^x-x(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2}=\frac{(1-x)e^x-x^2}{(x^2+e^x)^2}.$$

（3）设 $y = x\arcsin x,$ 求 $dy;$

解 $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad dy = \left(\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

（4）设 $2x - \tan(x-y) = \int_0^{x-y} \sec^2 t\,dt,$ 求 $\dfrac{dy}{dx};$

解 $$2 - \sec^2(x-y)\cdot\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = \sec^2(x-y)\cdot\left(1-\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\cos^2(x-y) = 1 - \frac{dy}{dx},\qquad \frac{dy}{dx} = \sin^2(x-y).$$

二、计算下列极限（16分，每小题4分）

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{x+1}-1}$;

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=4.$$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{2x^2}$;

解 $(\cos\frac{1}{x})^{2x^2} = e^{2x^2\ln\cos\frac{1}{x}}$,

$$\lim_{x\to\infty}2x^2\ln\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cos\frac{1}{x})^{-1}(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{2}{2x^3}} = -1.$$

所以 $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{2x^2} = e^{-1}$.

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$;

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{x^2}}{12x} = -\frac{1}{6}.$$

三、求下列积分（20分，每小题4分）

(1) $\int\left(x^5+2\cos x\right)dx;$

解 $\int\left(x^5+2\cos x\right)dx=\frac{1}{6}x^6+2\sin x+C.$

(2) $\int x^3\ln x dx;$

解 $\int x^3\ln x dx=\frac{1}{4}\int \ln x dx^4=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

(3) $\int x^4(1+x^5)^3 dx;$

解 $\int x^4(1+x^5)^3 dx = \frac{1}{5}\int (1+x^5)^3 d(1+x^5) = \frac{1}{20}(1+x^5)^4 + C.$

(4) $\int_0^2 x\left|x^2-1\right| dx;$

解 $\int_0^2 x\left|x^2-1\right| dx = \int_0^1 (x-x^3)dx + \int_1^2 (x^3-x)dx$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

解 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \overset{x=\tan t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\tan t}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t dt}{\sec^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt$$

$$=\sin t \,\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8分，每小题4分）

(1) $\int_0^{+\infty} e^{2x}dx;$

解 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{2x}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{2}(e^{2A}-1) = +\infty$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{2x}dx$ 发散.

(2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx^2$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\arcsin x^2\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}\arcsin(1-\varepsilon)^2 = \frac{\pi}{4}.$

所以 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 收敛，且 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi}{4}.$

五、判别下列级数的敛散性，并说明理由（16分，每小题4分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n}}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n}}=2\neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n}}$ 发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$;

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}=1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛,

所以，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ 收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$

所以，由比式判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 发散.

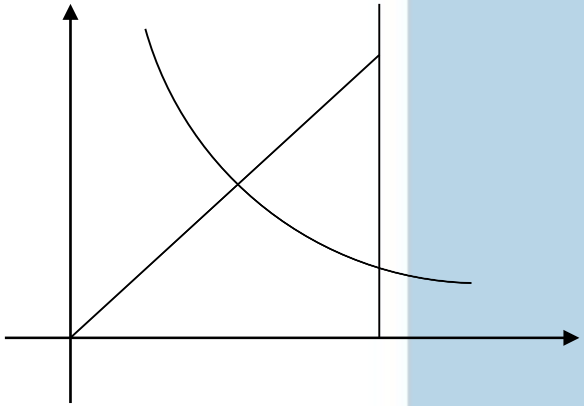
(4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$

所以，由根式判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 收敛.

六、（10分，每小题5分）设 D 是由直线 $x=2, y=x$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$

所围成的平面图形，求（1）D的面积；



解 所求的面积

$$A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

（2）D绕 x 轴旋转所产生的旋转体体积.

解 所求的旋转体体积

$$V=\pi\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{11}{6}\pi.$$

七、（6分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f\left(1\right)-2\int_0^{\frac{1}{2}} x^5 f\left(x\right)dx=0$,

证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{5f\left(\xi\right)}{\xi}$.

证 令 $F(x)=x^5 f(x)$, 由积分中值定理存在 $\eta\in[0,\dfrac{1}{2}]$, 使得

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} x^5 f(x)dx=F(\eta)=f(1)=F(1).$$

在 $[\eta,1]$ 应用微分中值定理存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$.

$$F'(x)=5x^4 f(x)+x^5 f'(x),$$

所以 $f'(\xi)=-\dfrac{5f\left(\xi\right)}{\xi}$.

八、（8分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n!}$ 的和.

解 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)(n^2+1)}=0,$

收敛域为 $(-\infty,+\infty).$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n-1)!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n(n-1)!}x^n\right)'+e^{\frac{x}{2}}=x\left(\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1}\right)'+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=x\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)'+e^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) e^{\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n \bigg|_{x=-2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) e^{\frac{x}{2}} \bigg|_{x=-2} = e^{-1}.$$