# 复旦大学计算机科学技术学院

## 2011-2012 学年第二学期《线性代数》期终考试试卷

### B 卷　　共 9 页

**课程代码：COMP120004.02**　　　**考试形式：□开卷　☑闭卷**　　　　2012 年 9 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿＿

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | |

## 一、名词解释（10%）

1. 矩阵的秩

2. 齐次线性方程组的基础解系

（装订线内不要答题）

3. 线性空间的维数

4. 分别写出非齐次方程组 $Ax=b$ 的解存在与齐次方程组 $Ax=0$ 的解存在的充分必要条件

5. 二次型的标准形与规范形

（装订线内不要答题）

## 二、选择题（10%）

1. 在 $n$ 阶行列式 $|A|$ 中将第 $i$ 行第 $j$ 列的元素乘以 $b^{i-j}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，其值变为_____。

A. $|A|$　　B. $b^n|A|$　　C. $(b)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$　　D. $b|A|$

2. 改变一个 $n$ 阶行列式 $|A|$ 的每一个元素为原来的一半，其值将变为_____。

A. $\frac{1}{2}|A|$　　B. $2|A|$　　C. $(\frac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$　　D. $(\frac{1}{2})^n|A|$

3. 假设 $A,B$ 都为 $n$ 阶矩阵，$k$ 为正整数，下列正确的是____。

A. 若 $|A|=0$，则 $A=0$　　B. $|-A|=|A|$

C. $|A+B|\le|A|+|B|$　　D. $|A^k|=|A|^k$

4. 假设 $D=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，其中 $A$ 为 $m$ 阶矩阵，$B$ 为 $n$ 阶矩阵，则 $r_D=$_____。

A. $\min(r_A,r_B)$　　B. $\max(r_A,r_B)$　　C. $r_{AB}$　　D. $r_A+r_B$

5. $n$ 阶实反对称矩阵的全体按矩阵通常的加法与数乘构成实数域 $R$ 上的线性空间 $V$，此空间的维数为____。

A. $n$　　B. $n^2$　　C. $n!$　　D. $\frac{n(n-1)}{2}$

## 三、填空题（10%）

1. 在 $n$ 阶行列式 $|A|$ 中位于某 $k$ 行，某 $l$ 列交叉点的 $kl$ 个元素全为 0，且 $k+l>n$，则 $|A|=$____。

2. 假设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，则齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解的充要条件是 $r_A$________；$Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r_A$________。

3. 假设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\8&4&1&0\\1&9&2&5\end{bmatrix}$，$A^*$ 是矩阵 $A$ 的伴随矩阵，$(A^*)^{-1}=$ ________。

4. 假设 $A$ 是四阶矩阵，它的特征值分别是 1，-1，2，-2。则行列式 $\left|A^3-2A\right|=$________。

5. 假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，其中 $s$ 是奇数。

且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，生成子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数为________。

## 四、是非题（10%）

1. 假设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，对于非齐次线性方程组 $Ax=b$，有 $r_A=m$，则此方程必相容。【　　】

2. 假设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，其秩为 $r$，则 $A$ 中必定存在一个 $r+1$ 阶子式不为零。【　　】

3. 假设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，它的 $m$ 个行向量线性相关，则它的 $n$ 个列向量也线性相关。【　　】

4. 假设 $R$ 为实数域，$C$ 为复数域，则 $R$ 是复数域 $C$ 上的线性空间。【　　】

5. 假设 $A,B$ 都是 $n$ 阶对称矩阵，且 $\left|\lambda I_n-A\right|=\left|\lambda I_n-B\right|$，则 $A$ 与 $B$ 相似。【　　】

## 五、行列式计算（10%）

1. 行列式 $A_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$

（装订线内不要答题）

## 六、计算逆阵（10%）

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$

## 七、计算非齐次方程组的通解(10%)：

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -7 \\ -2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \end{cases}$$

（装订线内不要答题）

## 八、计算题（10%）

1. 已知线性空间 $P[x]_3$ 的向量组：

$$f_1 = 1 + x + 3x^2 + x^3，\quad f_2 = 1 + x + 2x^2，\quad f_3 = 1 + x + x^2 - x^3，\quad f_4 = x^2 + x^3$$

（1）计算子空间 $L(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 的维数和一个基；

（2）确定 $f_5 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ 在这个基下的坐标；

（3）向量 $f_6 = 1 + x$ 是否属于子空间 $L(f_1, f_2, f_3, f_4)$。

## 九、证明题（20%）

1. 假设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，试证:

    (1) 矩阵 $A$ 可以分解成实对称矩阵 $B$ 与实反对称矩阵 $C$ 之和；

    (2) 若 $A=B+C$，其中 $B$ 是实对称矩阵，$C$ 是实反对称矩阵，而且 $BC=CB=0, A^2=0$，则 $A=0$。

2. 设$V$是数域$P$上的$n$维线性空间，$\sigma,\tau$是空间$V$上的线性变换，$\sigma$在数域$P$上有$n$个不同的特征值，证明：

（1）$\sigma$的特征向量都是$\tau$的特征向量的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$；

（2）若$\sigma\tau=\tau\sigma$，则$\tau$是$\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1}$的线性表示，其中$\varepsilon$表示$V$上的恒等变换。

（装订线内不要答题）