内容小结

1. 连续函数的极值

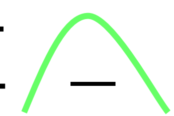
(1) 极值可疑点 : 使导数为0 或不存在的点

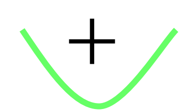
(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由**正**变**负** $\Longrightarrow$ $f(x_0)$为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由**负**变**正** $\Longrightarrow$ $f(x_0)$为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$为极大值 

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$为极小值 

(4) 判别法的推广 (Th.3)

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找 ;

应用题可根据问题的实际意义判别 .

思考与练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(B).

(A) $f(x)$ 的导数存在 , 且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值 ; (C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

提示: 利用极限的保号性 .

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (D).

(A) 不可导;

(B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值;

(D) 取得极小值.

提示: 利用极限的保号性.

二、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则其最值只能在**极值点**或**端点**处达到 .

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

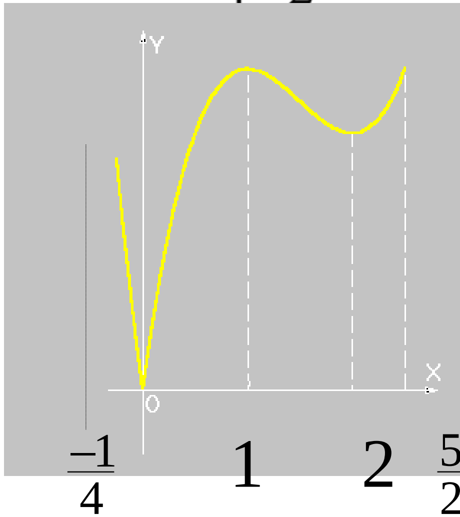
(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值.



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0 ; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

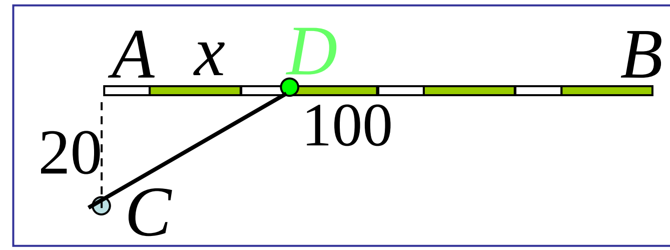
例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值.

说明:

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同，因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点.（自己练习）

例4. 铁路上 AB 段的距离为100 km，工厂 C 距 A 处20 Km，$AC\perp AB$，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路，已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5，为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应如何选取?



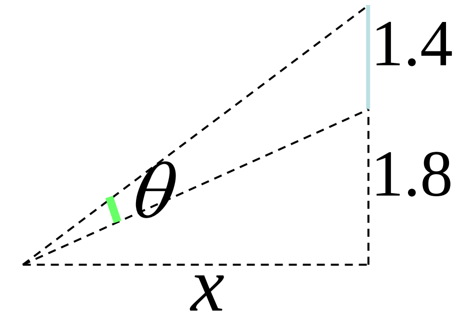
解: 设 $AD=x$ (km)，则 $CD=\sqrt{20^2+x^2}$，总运费

$$y=5k\sqrt{20^2+x^2}+3k(100-x) \qquad (0\le x\le 100)$$

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right), \qquad y''=5k\frac{400}{(400+x^2)^{3/2}}$$

令 $y'=0$，得 $x=15$，又 $y''\big|_{x=15}>0$，所以 $x=15$ 为唯一的极小点，从而为最小点，故 $AD=15$ km 时运费最省.

例5. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角θ最大)？



解: 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x\in(0,+\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$，得驻点 $x = 2.4 \in (0,+\infty)$

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，驻点又唯一，因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚 .

第五节

函数图形的描绘

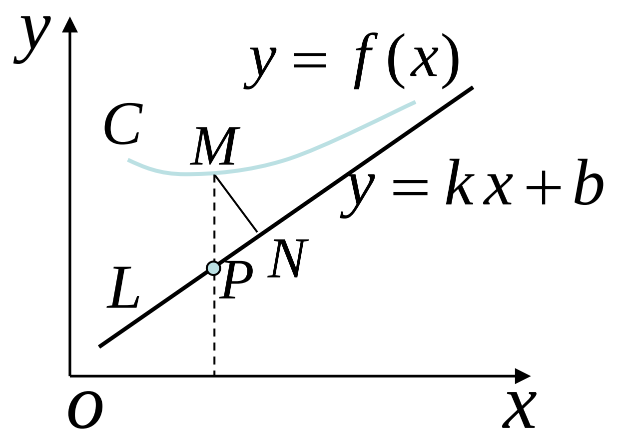
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

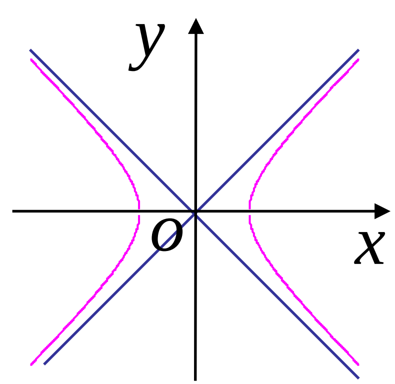
定义 . 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线 .**

或为 **“纵坐标差”**



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线 .

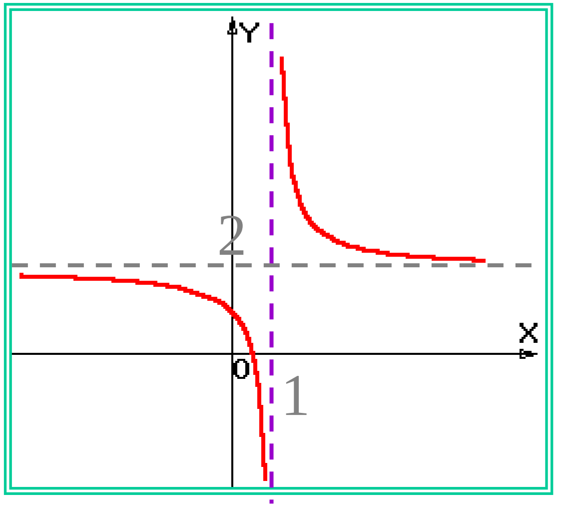
1. 水平与竖直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$)



例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线.

解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore\ x=1$为垂直渐近线.

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (或x\to-\infty)}} [f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$$

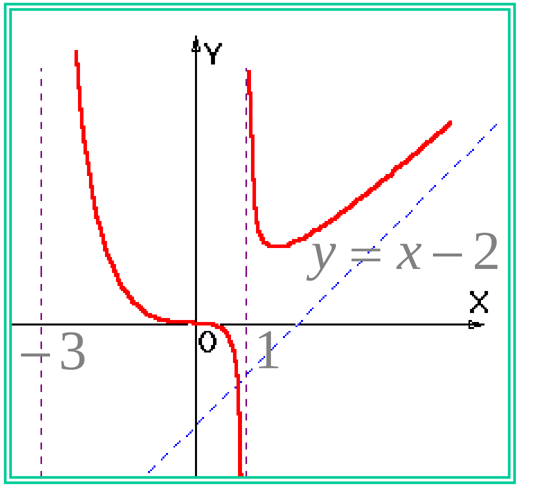
$$\Downarrow$$

$$k=\lim_{x\to+\infty} [\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}]$$

$$\therefore \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (或x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (或x\to-\infty)}} [f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线 .



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)},\quad \lim\limits_{\substack{x\to -3\\(\text{或}\,x\to 1)}} y=\infty,$

所以有垂直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\quad y=x-2$ 为曲线的斜渐近线 .

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

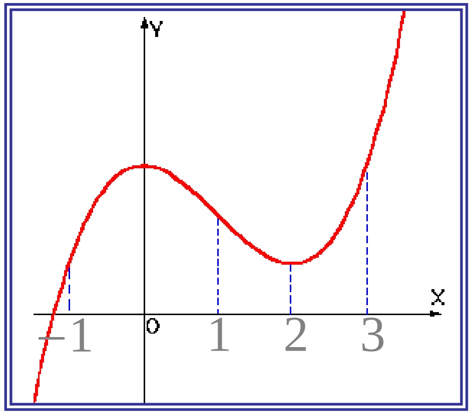
3. 列表判别增减及凸性区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形.

例3. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 无对称性及周期性.



2) $y'=x^2-2x,\ y''=2x-2,$

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例4. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

解: 1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，定义域为$(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点

$$\because \quad 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$$

$$\therefore \quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$\because \quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$$

$$\therefore \quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	**无定义**	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y		-2				0	
		(极大)				**(极小)**	

4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 1} y=\infty$, $\therefore x=1$ 为铅直渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$，即 $k=\dfrac{1}{4}$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

6）绘图

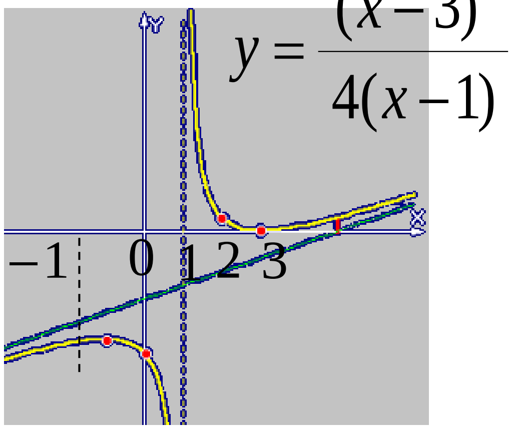
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	$\nearrow$	-2 (极大)	$\searrow$	无定义	$\searrow$	0 (极小)	$\nearrow$

垂直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



例5. 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 y 轴.

2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		**(拐点)**	

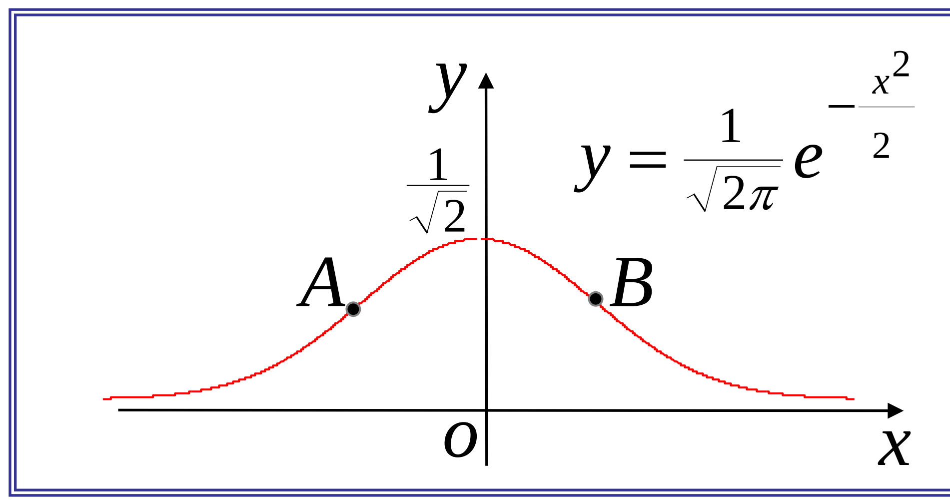
x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		**(拐点)**	

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y = 0$ 为水平渐近线

5) 作图



内容小结

1. 曲线渐近线的求法

   水平渐近线； 垂直渐近线;

   斜渐近线

2. 函数图形的描绘 —— 按作图步骤进行

思考与练习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线;

(B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1;\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$