例5. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

解: (1) 令 $u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\quad(n=1,2,\cdots)$$

故 $\quad u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\,\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

进行拆项相消

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛，其和为 $\frac{1}{4}$.

(3) $$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n - \tfrac{1}{2} S_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{故} \lim_{n \to \infty} S_n = 3,$$

这说明原级数收敛, 其和为 3 .

四、柯西收敛准则

定理. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in Z^+,$ 当$n > N$时, 对任意 $p \in Z^+$, 有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

证: 设所给级数部分和数列为 $S_n\,(n = 1, 2, \cdots)$, 因为

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right|$$

所以, 利用数列 $S_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ 的柯西收敛准则即得本定理的结论 .

例6. 利用柯西收敛准则判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解: 对任意 $p \in Z^+$, 有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\cdots+(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p})$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in Z^+$,
都有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西收敛准则可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.