§4 函数图形的讨论

1. 曲线的凸性与拐点

曲线的向上凸或向下凸的性质统称为曲线的凸性.

定义1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,

若曲线 $y=f(x)$ 位于每点处切线的上方 (或下方),

则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凸 (或向上凸) 的.

定理1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,

且导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格递增(减),

则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凸 (或向上凸) 的.

定理1 的证明

证 只证向下凸.

任取 $x_0 \in (a,b)$, 切线方程为 $y_{切} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

另设 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$,

使得 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$.

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格递增,

当 $x_0 < \xi < x$ 时, 有 $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

当 $x < \xi < x_0$ 时, 也有 $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

所以 $y_{曲} = f(x)$ 在切线 $y_{切} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 的上方.

即 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凸的.

向下凸的一个不等式

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凸的, 对任意 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2,$

及 $\lambda_1+\lambda_2=1, \lambda_1>0, \lambda_2>0,$

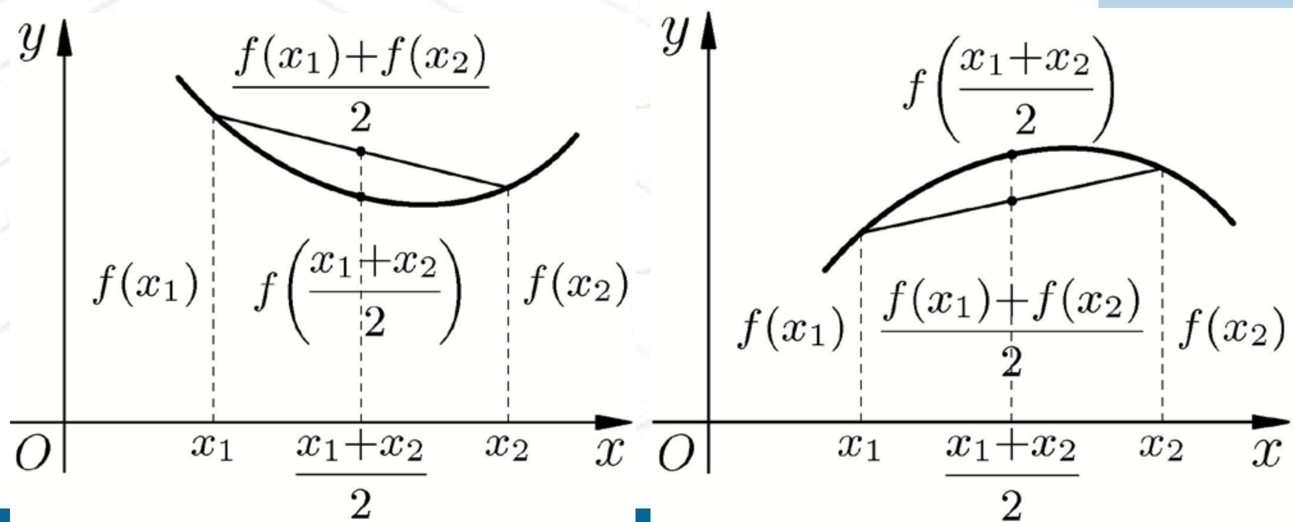
$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1(f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+f'(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)(x_1-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)))$$

$$+\lambda_2(f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+f'(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)(x_2-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)))$$

$$<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

同理向上凸也有 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)>\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$

这两个不等式也可以定义向下凸和向上凸, 而且在可导的条件下, 可以证明与我们的定义等价.

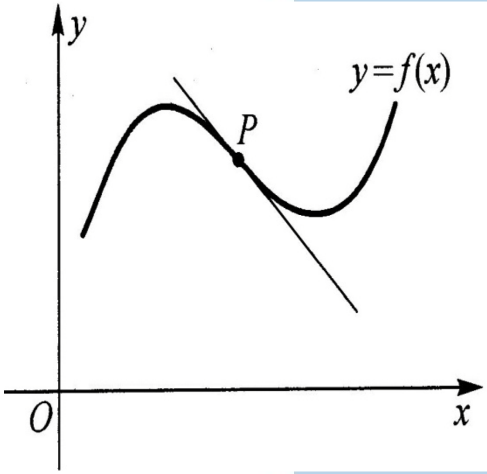


拐点

由于 $f'(x)$ 可以用二阶导数的符号来判别，我们得到

定理 2 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内 $f''(x)>0$ (或 <0), 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是向下凸 (或向上凸) 的.

定义2 连续曲线 $y=f(x)$ 的向下凸部分与向上凸部分的分界点称为该曲线得拐点.



从定理2 和定义2 知道:

定理 3 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 若点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， 则 $f''(x_0)=0$.

求拐点: $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点.

例 1 求证 $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y),\ x, y \in (-\infty, +\infty),\ \ x \neq y.$

证 取 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 则 $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0,$

故曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 上是向下凸的,

因此对 $x, y \in (-\infty, +\infty),\ \ x \neq y,$ 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y),$$

即 $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y).$

拐点与凸性举例

例2 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点和凸性区间.

解 $y' = 12x^3 - 12x^2$,

$$y'' = 12(3x^2 - 2x) = 12x(3x - 2) = 0,$$

得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y = f(x)$	向下凸	拐点	向上凸	拐点	向下凸

所以，拐点为 $(0,1)$, $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$.

下凸区间为 $(-\infty, 0)$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$, 上凸区间为 $(0, \frac{2}{3})$.

拐点与凸性举例

例3 求曲线 $y=(x-2)^{5/3}$ 的拐点和凸性区间.

解 $y'=\dfrac{5}{3}(x-2)^{2/3}$, $y''=\dfrac{10}{9}(x-2)^{-1/3}$,

$x_1=2$ 处二阶导数不存在. 列表:

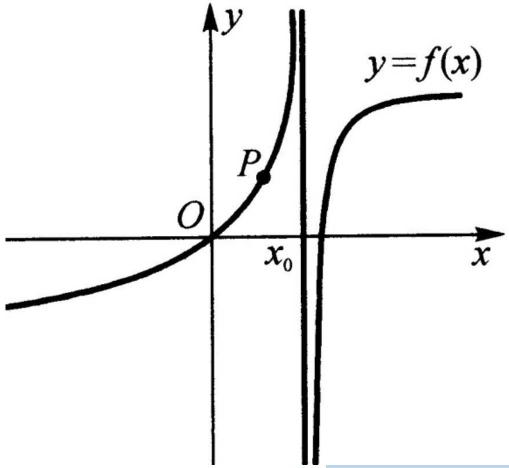
x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	不存在	$+$
$y=f(x)$	向上凸	拐点	向下凸

所以, 拐点为 $(2,0)$, 上凸区间为 $(-\infty,2)$, 下凸区间为 $(2,+\infty)$.

2. 曲线的渐近线

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有一对渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0.$

定义3 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某固定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的一条**渐近线**.



下面分三种情况求出渐近线方程.

(1) 垂直渐近线

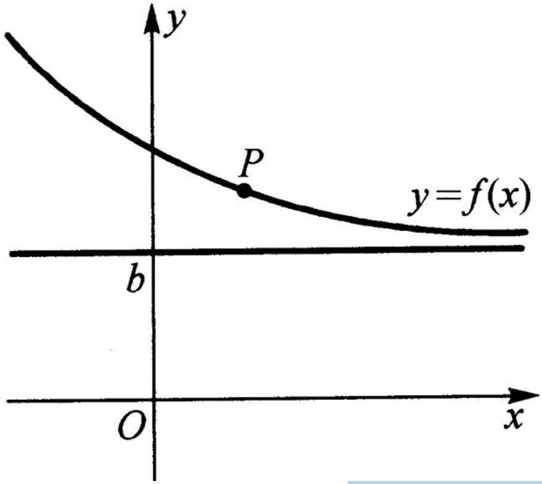
若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty,$

则 $L: x=x_0$ 是曲线 $C: y=f(x)$ 的一条渐近线.

因为当 $x\to x_0^+$ 或 x_0^- 时，

$$d(O,P)=\sqrt{x^2+f^2(x)}\to\infty,$$

$$d(P,L)=|x-x_0|\to 0.$$



(2) 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b,$

则 $L: y=b$ 是曲线 $C: y=f(x)$ 的一条渐近线.

因为当 $x\to+\infty$ 或 $-\infty$ 时,

$$d(O,P)=\sqrt{x^2+f^2(x)}\to\infty,$$

$$d(P,L)=|f(x)-b|\to 0.$$

例 对曲线 $y=\arctan x,$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},$ $y=\dfrac{\pi}{2}$ 是它的一条渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2},$ $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是它的一条渐近线.

(3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$,

则 $L: y=kx+b$ 可能是曲线 $C: y=f(x)$ 的一条渐近线.

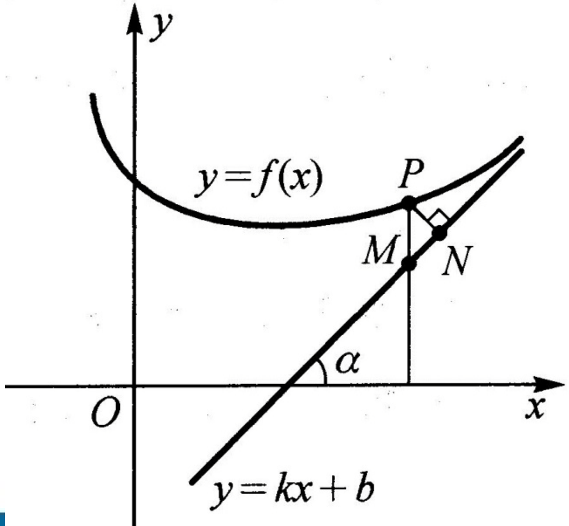
因为当 $x\to+\infty$ 或 $-\infty$ 时, $d(O,P)=\sqrt{x^2+f^2(x)}\to\infty$,

$$d(P,L)=|PN|=|PM|\cos\alpha$$

$$=|f(x)-(kx+b)|\cos\alpha\to 0$$

由于 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha\neq 0$,

上式等价于 $f(x)-(kx+b)\to 0.$



斜渐近线

$f(x)-(kx+b)\to 0$

我们考虑 $x\to+\infty$ 的情形.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx}{x}=0\cdot b=0,$$

即 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}.$

所以当 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ 存在时,

就有斜渐近线 $y=kx+b.$

同理可以得到 $x\to-\infty$ 的情形.

渐近线举例

例4 求曲线 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty$, 所以 $x=-1$ 是一条渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$$

所以 $y=x-5$ 是另一条渐近线.

3. 函数作图

函数作图的一般步骤:

(1) 求函数的定义域,

(2) 考察函数的奇偶性、周期性,

(3) 求函数的特殊点: 与坐标轴的交点, 不连续点, 不可导点,

(4) 确定函数的单调区间, 极值, 凸性区间, 拐点,

(5) 求曲线的渐近线,

(6) 将以上结果列表, 最后总结作图.

例5 作函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的图形.

解 (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 函数是奇函数，只需讨论 $[0,+\infty)$ 上的图形.

(3) 曲线过原点.

(4) $f'(x)=\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 得驻点 $x_1=1.$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},$$

$f''(x)=0$ 解得 $x_2=0,\quad x_3=\sqrt{3}.$

作图举例

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

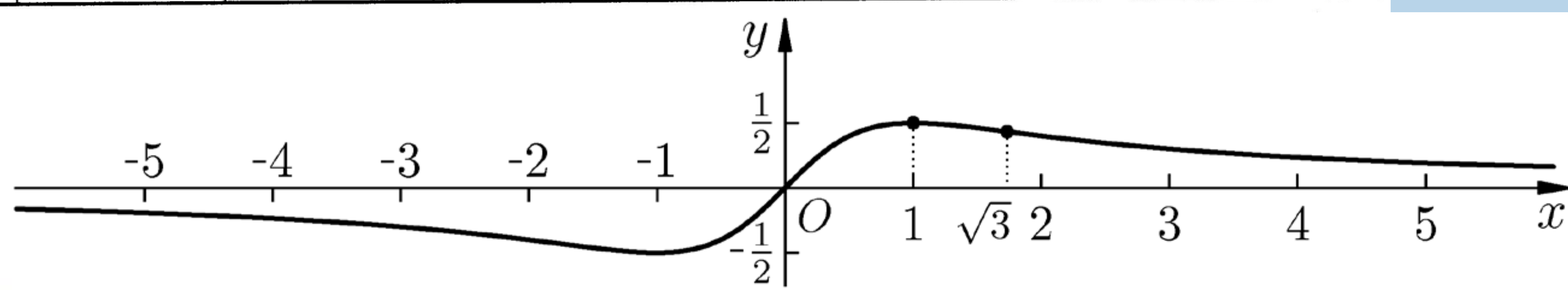
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,$$

所以 $y=0$ 是一条渐近线. 列表

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘
$y=f(x)$ 的图形	拐点 $(0,0)$	向上凸	极大值 $\frac{1}{2}$	向上凸	拐点 $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$	向下凸

图像为



例6 作函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形.

解 (1) 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2) 无对称性, (3) 曲线过点 $(0,-1),(1,0)$.

(4) $f'(x)=\dfrac{3(x-1)^2(x+1)^2-(x-1)^3 2(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$,

得驻点 $x_1=1, x_2=-5$.

$f''(x)=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$, $f''(x)=0$ 解得 $x_3=1$.

作图举例

(5)　因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty,$　所以 $x=-1$ 是一条渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

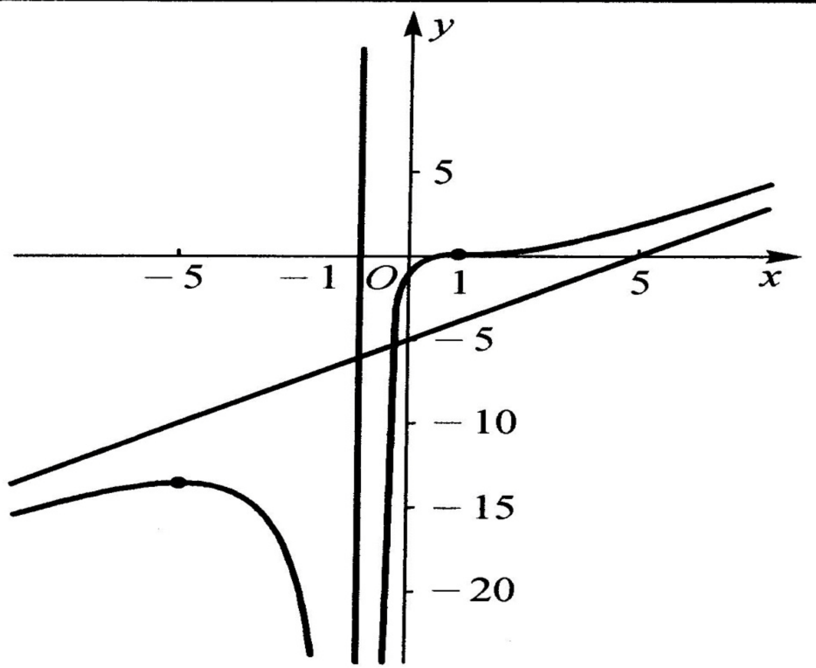
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$$

所以　$y=x-5$ 是另一条渐近线.

作图举例

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	−13.5	↘	↗	0	↗
$y=f(x)$ 的图形	向上凸	极大值−13.5	向上凸	向上凸	拐点(1, 0)	向下凸

图像为



$$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$