东南大学考试卷(A 卷)

课 程 名 称 线性代数B 考 试 学 期 12-13-3 得 分

适 用 专 业 13,14,42系 考 试 形 式 开 卷 考试时间长度 120分钟

可以带一本教材

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名________ 学号________

线 封 密

一．（30%）填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&0\\3&2\end{pmatrix}$，若 $AB=BA$，则 $a=$________________;

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则行列式 $\left|A^3\right|=$________________;

3. 若矩阵 $\begin{pmatrix}1&2\\k&3\end{pmatrix}$ 不可逆，则 $k=$________________;

4. 已知方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，则 $A^{-1}=$________________;

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&\lambda\\4&9&\lambda^2\end{pmatrix}$ 的秩等于2，则 λ 的值只可能为________________;

6. 齐次线性方程组 $2x-3y+4z=0$ 的一个基础解系是________________;

7. 若 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}3&x\\1&4\end{pmatrix}$ 的特征向量，则相应的的特征值是________________;

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix}1&x\\2&3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&2\\3&y\end{pmatrix}$ 相似，则 $(x,y)=$________________;

9. 若实对称矩阵 $\begin{pmatrix}k&1\\1&k\end{pmatrix}$ 是正定的，则 k 的取值范围是________________;

10. 若 n 阶方阵 A 的特征多项式是 $\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$，则 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix}O&E\\A&O\end{pmatrix}$ 的特征多项式是________________________________。

二. （10%）求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

三. （14%）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ -x_1+2x_2+ax_3=1 \\ 3x_1+4x_2+6x_3=b \end{cases}$。

1. 当参数 a,b 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

2. 当方程组有无穷多解时，求其通解。

四．（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$。求矩阵 X 使得 $XA=X+B$。

五．（14%）已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$。求一正交阵 Q 及对角阵 Λ，使得

$Q^T AQ=\Lambda$。

六．（10%）根据参数k的值，讨论实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+kx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$的秩和正、负惯性指数。

七．（10%）证明题：

1. 已知A是$s\times n$矩阵，α_i是n维列向量，$\beta_i=A\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,t$。证明：若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$也线性无关。

2. 证明：对任意方阵A，均存在可逆矩阵P，使得PA是幂等阵（矩阵M是幂等阵意指M满足$M^2=M$）。