第一章 函数、极限、连续

第二节 数列极限

有关定理及方法:（1）柯西准则（不常用） （2）夹逼定理 （3）单调有界定理 （4）数列极限与其子列极限的关系 （5）求极限常用方法：适当缩放法，利用等价无穷小，化为函数极限，利用微分学、积分学及级数的知识及方法，另外极限的定义、性质、重要极限、恒等变形、变量代换是经常用到的知识和技巧

补充：

（1） stolz 定理

$\frac{0}{0}$ 型 stolz 定理:设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是无穷小量,数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$,则有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$

$\frac{*}{\infty}$ 型 stolz 定理:设 $\{a_n\}$ 是正无穷大量,数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$,则有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$

(2)均值极限:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$ 。又若 $a_n>0$，则 $\lim\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

（3）$\sqrt[n]{n}\to 1,\sqrt[n]{a}\to 1(a>0),1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$（$\gamma=0.577\cdots$ 为欧拉常数，$\varepsilon_n\to 0$）

例 1：设 $x_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$，求 $\lim x_n,\lim\sqrt[n]{x_n}$， $\lim\sqrt{2n+1}x_n$.

解：（1）由于 $2>\sqrt{1\cdot 3},4>\sqrt{3\cdot 5},\cdots,2n>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$，所以 $x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$， 又 $x_n>0$

由夹逼定理知 $\lim x_n=0$

（2）由于 $\frac{1}{2n}<x_n<1$，又 $\lim\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}=1$，所以 $\lim\sqrt[n]{x_n}=1$

（3 考虑积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

$I_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\times\frac{\pi}{2}$， $I_{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$

又 $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$， 故 $1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{2n+1}{2n}\Rightarrow\lim\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$

而$\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)})^2(2n+1)\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}(2n+1)x_n^2$

所以 $\lim(2n+1){x_n}^2=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow\lim\sqrt{2n+1}x_n=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

例 2：求$\lim\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

解：方法一 ：令$a_n=\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}},b_n=\dfrac{n^n}{n!}$，则$a_n=\sqrt[n]{b_1\cdot\dfrac{b_2}{b_1}\cdots\dfrac{b_n}{b_{n-1}}}$

而$\lim\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\lim(\dfrac{n}{n-1})^{n-1}=e$，故$\lim a_n=e$

方法二：$\ln a_n=\dfrac{n\ln n-(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)}{n}=\dfrac{x_n}{n}$，其中$x_n=n\ln n-(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)$

又 $\lim\dfrac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n}=\lim n\ln\dfrac{n+1}{n}=1$，所以 $\lim\ln a_n=1$，从而$\lim a_n=e$

方法三：$\lim\ln a_n=-\lim\dfrac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n-n\ln n)=-\lim\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n}=-\int_0^1\ln xdx=1$

所以 $\lim a_n=e$

例 3：求$\lim n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$

分析：$n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=n^2(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}-2)=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}$

只须求出函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$，便可得结果。此函数极限可用洛必塔法则求出：$-\dfrac{1}{4}$

或用泰勒公式去求：$\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2!}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2}-1)\times\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$

$\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}=1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2!}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2}-1)\times\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$，

故 $n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=n^2(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}-2)=n^2(-\dfrac{1}{4n^2}+o(\dfrac{1}{n^2}))\to\dfrac{-1}{4}$

例 4：设 $f'(a)$ 存在，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})})^n$

分析：易见 $\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\to 1$，该极限属于 1^∞ 型的问题，一般可利用重要极限或利用指数、对数去解决：

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^{\frac{f(a-\frac{1}{n})}{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}\times\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{f(a-\frac{1}{n})}}\to e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

或：若 $f(a)>0$

$$\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a-\frac{1}{n})}\right]^n=e^{n(\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a-\frac{1}{n}))}\to e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}$$

若 $f(a)<0$，同样可求出答案

例 5：设 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛

分析：为证数列收敛，我们首先想到用收敛准则
先看是否单调：

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0$$

可见该数列单调减少，下面再说明有下界：

$$1>\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx,\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad a_n>\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx-2\sqrt{n}=2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n}>-2$$

由此可得结论．这个方法很常规，本题证明有界性不易，本题利用级数的知识证数列收敛更容易：

$$0<a_n-a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

由正项级数审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，从而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

注：利用级数的知识去说明数列收敛一般有两种情况：

（1） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim a_n=0$

（2） 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$收敛（或级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$收敛）

例 6：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，数列$\{p_n\}$严格单调增加，且$\lim p_n = +\infty$，求$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots p_n a_n}{p_n}$

解：令$A_n = a_1 + \cdots + a_n$，则$a_n = A_n - A_{n-1}(n \geq 2), a_1 = A_1$

由题设 $\lim A_n = A$存在，

$$\frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = \frac{p_1 A_1 + p_2(A_2 - A_1) + \cdots + p_n(A_n - A_{n-1})}{p_n} = A_n - \frac{B_n}{p_n}$$

其中$B_n = A_1(p_2 - p_1) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})$

而$\lim \frac{B_n}{p_n} = \lim \frac{B_{n+1} - B_n}{p_{n+1} - p_n} = \lim A_n = A$

故$\lim \frac{p_1 a_1 + \cdots p_n a_n}{p_n} = A - A = 0$

练习题

1．(1) $\lim n(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n^2}})$（$a > 0$），（2）$\lim n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n})$，（3）设$n \sin \frac{1}{n+1} < x_n < (n+2) \sin \frac{1}{n+1}$，求$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ （4）$\lim (-1)^n n \sin \sqrt{n^2 + 2}\pi$

（提示：由拉氏中值定理 $a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n^2}} = a^{\xi}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) \ln a$，易得结果：$\ln a$。或通过求函数极限：$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - a^{x^2}}{x}$，（2）$\ln n \sin \frac{1}{n} = \ln(1 - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = \frac{-1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n}) \to \frac{-1}{6}$），
（3）1，（4）π）

2．设$a_n = \frac{5}{1} \times \frac{6}{3} \times \cdots \times \frac{n+4}{2n-1}$，求$\lim a_n$

（由$\sum a_n$收敛，易得$a_n \to 0$）

3．$s_n = \sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k / n^2$，求$\lim s_n$

（用两次 stolz 定理可得结果:$\frac{1}{2}$）

4．将二项系数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 的算术平均和几何平均上分别记为 A_n 和 G_n ,求 $\lim\sqrt[n]{A_n}, \lim\sqrt[n]{G_n}$

($A_n = \frac{2^n}{n}, \ln\sqrt[n]{G_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k \to \frac{1}{2}$，答案:2, $\sqrt{e}$)

5．设 $a_n = e - (1+\frac{1}{n})^n$，$a, k$ 为何值时，a_n 与 $\frac{a}{n^k}$ 为等价无穷小。

（$a = \frac{e}{2}, k = 1$）

6．设 $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$，其中 a_n, b_n 为正整数，

求 $\lim\frac{a_n}{b_n}$，$\lim(a_n - \sqrt{3}b_n)$，$\lim A_n$，其中 $A_n = (2+\sqrt{3})^n - [(2+\sqrt{3})^n]$

（由题设知 $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$，从而得出 a_n, b_n 的表达式，进而得结果：$\sqrt{3}$，0。

$A_n = \sqrt{3}b_n - [\sqrt{3}b_n]$，

$0 < (2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} < 1 \Rightarrow a_n - 1 < \sqrt{3}b_n < a_n \Rightarrow [\sqrt{3}b_n] = a_n - 1$，

$A_n = \sqrt{3}b_n - a_n + 1 \to 1$）

几类典型问题

（1） 由递推生成的数列的极限

命题一：设 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2,\cdots$。若 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim x_n$ 存在，则极限值 $l = \lim x_n$ 满足方程 $l = f(l)$

命题二：设 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2,\cdots$。若 $f(x)$ 在区间 I 上单调,且 $x_n \in I, n = 1,2,\cdots$,则只有两种情况：(1)当 $f(x)$ 在 I 上单调增加时,则数列 $\{x_n\}$ 为单调数列,且 $x_1 \le x_2$ 时,$\{x_n\}$ 单调增加,；$x_1 \ge x_2$ 时,$\{x_n\}$ 单调减少.（2）当 $f(x)$ 在 I 上单调减少时,$\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2n}\},\{x_{2n-1}\}$ 分别为单调数列，且具有相反的单调性.

例7：设 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$（$c > 1$ 为常数)，证明：$\lim x_n$ 存在，并求其极限.

分析:令 $f(x) = \frac{c(1+x)}{c+x}$，$f'(x) = \frac{c^2 - c}{(c+x)^2} > 0$,知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加,又 $x_n \in (0,+\infty)$，

故 $\{x_n\}$ 为单调数列，再比较 x_1, x_2 的大小：$x_1 - x_2 = \frac{{x_1}^2 - c}{c + x_1}$，易见 $x_1 \le \sqrt{c}$ 时，$x_1 \le x_2 \Rightarrow \{x_n\}$

单调增加，易见 $x_1 \ge \sqrt{c}$ 时， $x_1 \ge x_2 \Rightarrow \{x_n\}$ 单调减少。再说明其有界便可得结果。

解：当 $x_1 \le \sqrt{c}$ 时，

$x_1 - x_2 = \dfrac{{x_1}^2 - c}{c + x_1} \le 0$ 即 $x_1 \le x_2$，又 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n} - \dfrac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}} = \dfrac{c(c-1)(x_n - x_{n-1})}{(c+x_n(c+x_{n-1})}$，

可见 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号，由 $x_2 \ge x_1$ 及归纳法知 $x_{n+1} - x_n \ge 0$，故 x_n 单调增加。

设 $x_n \le \sqrt{c}$， $x_{n+1} - \sqrt{c} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n} - \sqrt{c} = \dfrac{(c-\sqrt{c})(x_n - \sqrt{c})}{c+x_n} \le 0 \Rightarrow x_{n+1} \le \sqrt{c}$，由归纳法知

$x_n \le \sqrt{c}$

综上知 $\{x_n\}$ 单调增加且有界，从而 $\lim x_n$ 存在。

设 $\lim x_n = a$，则有 $a = \dfrac{c(1+a)}{c+a}$，得 $a = -\sqrt{c}$（不合题意舍去），$a = \sqrt{c}$，故 $\lim x_n = \sqrt{c}$ 。

注：本题亦可先证明有界性 $x_n \le \sqrt{c}$，再利用有界性证明单调性。

另解：当 $x_1 \le \sqrt{c}$ 时

令 $f(x) = \dfrac{c(1+x)}{c+x}$， $f'(x) = \dfrac{c^2 - c}{(c+x)^2} > 0$，知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，

$x_1 - x_2 = \dfrac{{x_1}^2 - c}{c + x_1} \le 0$ 得 $x_1 \le x_2$，设 $x_{n-1} \le x_n$，那么 $x_n \le f(x_{n-1}) \le f(x_n) = x_{n+1}$，由归纳法知

$x_n \le x_{n+1}$ 即 x_n 单调增加，

又 $x_1 \le \sqrt{c}$，设 $x_n \le \sqrt{c}$，则 $x_{n+1} = f(x_n) \le f(\sqrt{c}) = \dfrac{c(1+\sqrt{c})}{c+\sqrt{c}} = \sqrt{c}$，由归纳法知 $x_n \le \sqrt{c}$，

以下的说明同上。

当 $x_1 \ge \sqrt{c}$ 时，其解法同上（留给同学去完成）

例 8：设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1 = 1, b_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{b_n}$ 生成，求证 $\lim b_n$ 存在，并求其极限.

分析：令 $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$， $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$，知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少。故数列 $\{b_n\}$ 不是单调数列。此时有以下处理方法：（1）证明 $\lim b_{2n-1}, \lim b_{2n}$ 存在且极限值都是 a，那么 $\lim b_n$ 存在且 $\lim b_n = a$，（2）若 $|b_n - a| \le \alpha |b_{n-1} - a|$，其中 $0 < \alpha < 1$ 为常数，则 $\lim b_n = a$.（极限

值 a 是方程 $a=f(a)$ 的一个解）（３）若｜ $b_{n+1}-b_n|\le\alpha|b_n-b_{n-1}|$，其中 $0<\alpha<1$ 为常数，则

$\lim b_n$ 存在，极限值 a 满足方程 $a=f(a)$.

解：方法一： 易见 $b_n\ge 2, n=2,3,\cdots$，记 $a=1+\sqrt{2}$，则 a 满足 $a=2+\dfrac{1}{a}$

$$|b_n-a|=|2+\frac{1}{b_{n-1}}-2-\frac{1}{a}|=\frac{|b_{n-1}-a|}{ab_{n-1}}\le\frac{1}{4}|b_{n-1}-a|\le\cdots\le\frac{|b_1-a|}{4^{n-1}}\to 0$$

所以 $\lim b_n=a=1+\sqrt{2}$

方法二：$|b_{n+1}-b_n|=\dfrac{|b_n-b_{n-1}|}{b_nb_{n-1}}\le\dfrac{1}{4}|b_n-b_{n-1}|$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛 $\Rightarrow\lim b_n$ 存在，设 $\lim b_n=a$，则 a 满足 $a=2+\dfrac{1}{a}$

解此方程得 $a=1+\sqrt{2}, a=1-\sqrt{2}$ （舍去），故 $\lim b_n=1+\sqrt{2}$

方法三：易见 $2\le b_n\le 3, n=2,3,\cdots$

$$b_{n+2}-b_n=\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_{n-1}}=\frac{1}{2+\frac{1}{b_n}}-\frac{1}{2+\frac{1}{b_{n-2}}}=\frac{b_n-b_{n-2}}{(2b_n+1)(2b_{n-2}+1)}$$

可见 $b_{n+2}-b_n$ 与 b_n-b_{n-2} 同号

由 $b_1<b_3$ 及归纳法知 $\{b_{2n-1}\}$ 单调增加，由 $b_2>b_4$ 及归纳法知 $\{b_{2n}\}$ 单调减少。

所以 $\lim b_{2n-1},\lim b_{2n}$ 都存在，设 $\lim b_{2n-1}=a,\lim b_{2n}=b$，则 a,b 满足

$a=2+\dfrac{1}{b}$， $b=2+\dfrac{1}{a}$

解得 $a=b=1+\sqrt{2}$，故 $\lim b_n$ 存在，且 $\lim b_n=1+\sqrt{2}$

例 9：设 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$， $x_{n+1}=\sin x_n, n=1,2,\cdots$，求 (1) $\lim x_n$， (2) $\lim\sqrt{n}x_n$

分析：问题（1）是容易的，只需说明该数列单调有界便可求出 $\lim x_n=0$

由（1）知 $\{x_n\}$ 是无穷小，自然就有找出该无穷小的阶的问题，同样当数列为无穷大时也会有找无穷大的阶的问题(如练习题９，１０),通过（2）的解答知该数列与 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 为同阶无穷小。这种问题

用 stolz 定理去解并不困难,但要注意变形,本题要先求 $\lim nx_n^2$.

解(1)略

(2)

$$\lim nx_n^2=\lim\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim\frac{x_n^2\sin^2 x_n}{x_n^2-\sin^2 x_n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=3$$

故 $\lim\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$

例 10:设数列 $\{x_n\}$ 为正数列,且 $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$,证明：$\lim x_n$ 存在，并求其极限.

分析：本题中 x_{n+1},x_n 的关系与前面不一样，但用到的方法是一样的，最容易想到单调有界准则.

解：由于 $x_n+\frac{1}{x_n}\ge 2>x_{n+1}+\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n>x_{n+1}$，即 x_n 单调减少，又 $x_n>0$，所以 $\lim x_n$ 存在，

设 $\lim x_n=a$，则 a 满足 $a+\frac{1}{a}\le 2$，从而得 $a=1$，即 $\lim x_n=1$.

练习题：

7．设 $x_1>0$， $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，证明：$\lim x_n$ 存在，并求之.（答案：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$）

8．设 $x_1>0$， $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明：$\lim x_n$ 存在，并求之.（答案：3）

9．设 $x_1>0$， $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$，求 $\lim\frac{x_n}{\sqrt{2n}}$.（答案： 1 ）

１０．设 $b_1>1$， $b_{n+1}=\frac{{b_n}^2}{b_n-1}$，证明：$\lim b_n=+\infty$ ，并求 $\lim\frac{n}{b_n}$.（答案： 1 ）

１１．设 $1>x_1>0$， $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$，求 $\lim x_n$ 及 $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}$.（答案： 0， $\frac{1}{2}$）

１２．设 $x_1=a,x_2=b$， $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},n=3,4,\cdots$，求 $\lim x_n$.

（本题涉及二阶递推，与前面题目有区别，用前面的方法求不出答案，先找出 $x_{n+1}-x_n$ 的表达式：

$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n-x_{n-1}}{2}=\cdots=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{2}{3}(b-a)$

$x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)+x_1\to\frac{2}{3}(b-a)+a$）

１３．设$x_n>0$，$x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2})\le 3$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.（答案：2）

１４．设$1>x_n>0$，$x_{n+1}(1-x_n)\ge\frac{1}{4}$，证明：$\lim x_n$存在，并求之.（答案：$\frac{1}{2}$）

１５．三角形Δ_0的三边长为$a_0=a,b_0=b,c_0=c$，三角形Δ_n的三边长为

$a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},b_n=\frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2},c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$。三角形$\Delta_n$的面积记为$A_n$。

（1）证明：三角形Δ_n的周长不变而面积单调增加；

（2）求$\lim a_n,\lim A_n$

（（1）三边长分别为a,b,c的三角形的面积为$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

$A_n=\frac{\sqrt{l}}{4}\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}},n=1,2,3,\cdots,l=a+b+c$，

（2）$a_{2n}=\frac{l}{4}+\frac{a_{2n-2}}{4}=\cdots=\frac{l}{4}+\frac{l}{4^2}+\cdots+\frac{a_0}{4^n}$

$\to\frac{l}{3}$，同样有$\lim b_{2n}=\lim c_{2n}=\frac{l}{3}$）

１６．设$-1<a_0<1$，$a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$，求$\lim a_n$，$\lim 4^n(1-a_n)$，$\lim a_1a_2\cdots a_n$

（本题方法与前面不一样，需求出a_n的表达式：设$a_0=\cos t(0<t<\pi)$，可求出$a_n=\cos\frac{t}{2^n}$）

（２）多项之和或积的极限

此类问题常用到的知识和方法有：（１）夹逼定理　（２）利用定积分的知识　（３）stolz 定理 (4)把一般项的表达式求出来,再求极限 (5)取对数将积变为和

例 11：求（１）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$，（２）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$

解：（１）$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而$\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(1+\sqrt{2})$

注：此两题形式上差别很少，但解法完全不同，仔细体会其中的差别：（1）中的 k 相对于 n^2 是微不足道的，因此甩掉 k 不会影响极限，这是用夹逼定理时常用的思路.（2）中的 k^2 就不是如此，因此在求极限时必须用到 k^2，这里要注意变形及熟悉定积分的概念.

例 12：求（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$

解：（1）由 $\sin\frac{2k-1}{n^2}\sin\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}(\cos\frac{2k-2}{n^2}-\cos\frac{2k}{n^2})$

得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}=\frac{1}{2\sin\frac{1}{n^2}}\sum\limits_{k=1}^{n}(\cos\frac{2k-2}{n^2}-\cos\frac{2k}{n^2})=\frac{1}{2\sin\frac{1}{n^2}}(1-\cos\frac{2}{n})\to 1$

或：由 $x-\frac{1}{3!}x^3\le\sin x\le x(x\ge 0)$，得

$$\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2n)^3}{6n^6}\le\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2k-1)^3}{6n^6}\le\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\frac{2k-1}{n^2}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}-\frac{4}{3n^2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}$

又由 $\lim\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}=1=\lim(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}-\frac{4}{3n^2})$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}=1$

（2）由 $x-\frac{1}{3!}x^3\le\sin x\le x(x\ge 0)$，得

$$\frac{k\pi}{n^2}-\frac{(n\pi)^3}{6n^6}\le\frac{k\pi}{n^2}-\frac{(k\pi)^3}{6n^6}\le\sin\frac{k\pi}{n^2}\le\frac{k\pi}{n^2}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}-\frac{\pi^3}{3n^2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}$

又由 $\lim\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}\times(1+\frac{k}{n})=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\frac{5\pi}{6}$ 及 $\lim\frac{\pi^3}{n^2}=0$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{5\pi}{6}$

例 13：求 $\lim(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$

解：令 $a_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$

$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$

由不等式：$x-\frac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)\le x\ (x>0)$ 得

$\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\le\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\le\ln(1+\frac{k}{n^2})\le\frac{k}{n^2}$ 及夹逼定理可得 $\lim\ln a_n=\frac{1}{2}$

所以 $\lim a_n=\sqrt{e}$

练习题：

１７．求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}})$ （答案：$\frac{2}{\pi}$）

１８．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$（答案：2），

１９．设 $a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$，求 $\lim a_n$

（可求 a_n 的表达式：$a_n=2(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})=2(1-(\frac{1}{2^{2^n}})^2)$）

２０．设 $a_n=(\frac{2}{2^2-1})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{2^2}{2^3-1})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$，求 $\lim a_n$

（$\ln a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=2}^{n}2^{k-2}\ln\frac{2^{k-1}}{2^k-1}$，再用 stolz 定理可得结果:$\ln a_n\to\ln\frac{1}{2}$）