第九章

重 积 分

一元函数积分学

↓

多元函数积分学 $\left\{ \begin{array}{l} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{array} \right.$

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例

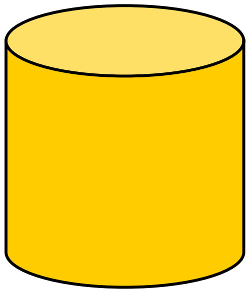
二、二重积分的定义与可积性

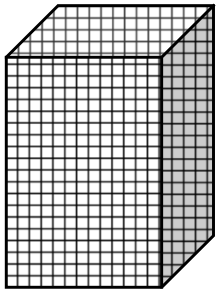
三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、问题的提出

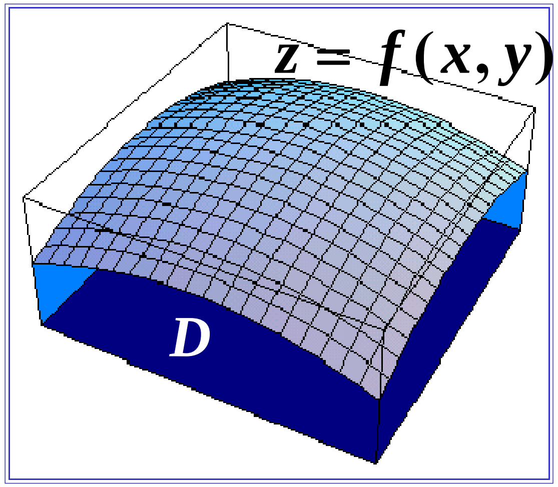
1．曲顶柱体的体积





柱体体积=底面积×高

特点：平顶.

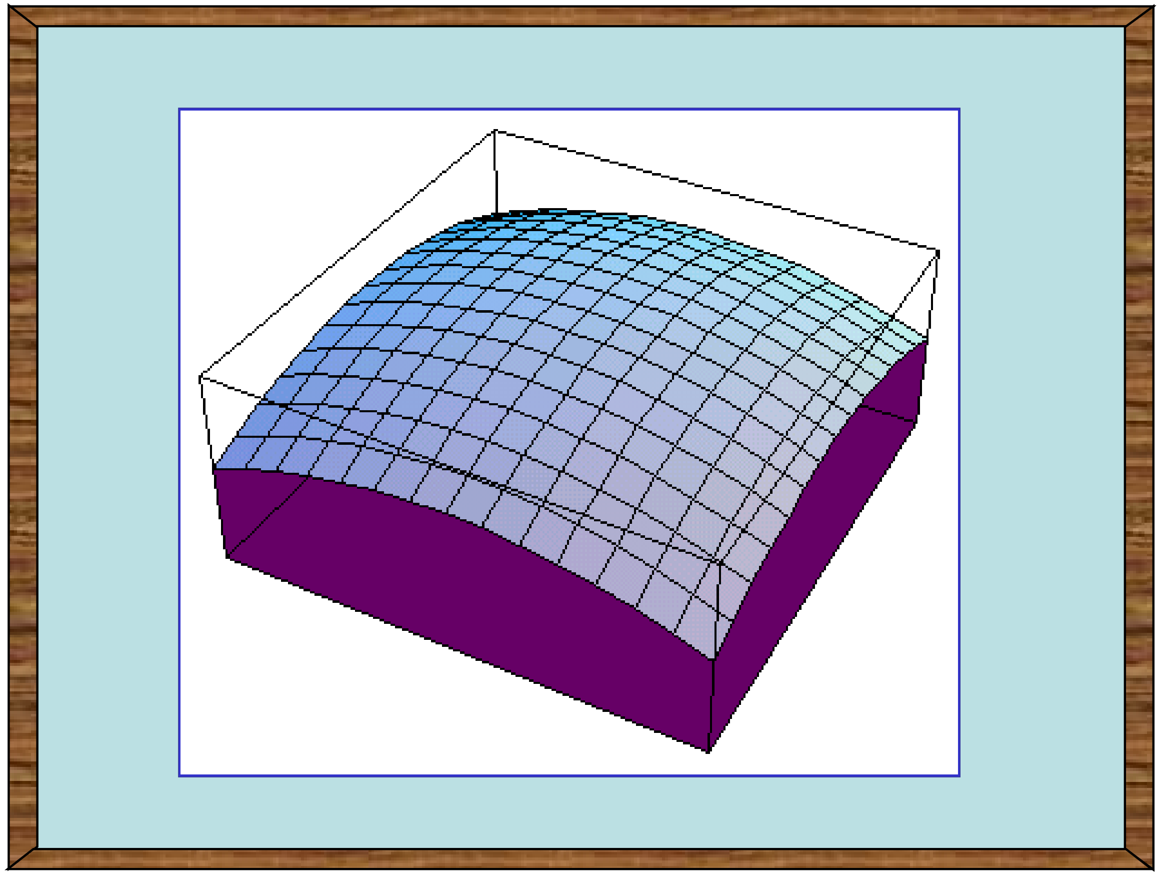


柱体体积=?

特点：曲顶.

曲顶柱体

求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.

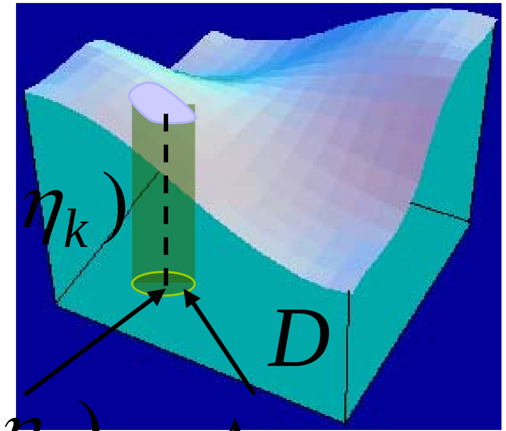


1)“大化小”

用任意曲线网分D为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点(ξ_k, η_k),则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “近似和”

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4) “取极限”

4) “取极限”

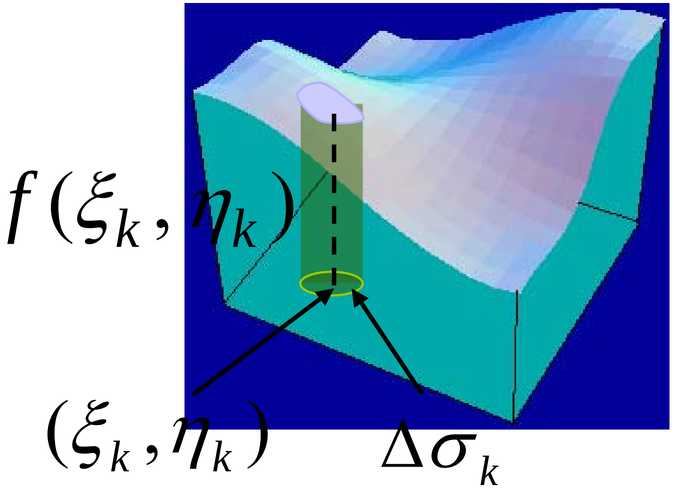
定义$\Delta\sigma_k$的直径为

$$d(\Delta\sigma_k) = \max\{\,|P_1P_2|\;|\;P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k\}$$

令 $\|\Delta\sigma\| = \max\limits_{1\le k\le n}\{\ d(\Delta\sigma_k)\ \}$

$$V = \lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

$z = f(x, y)$

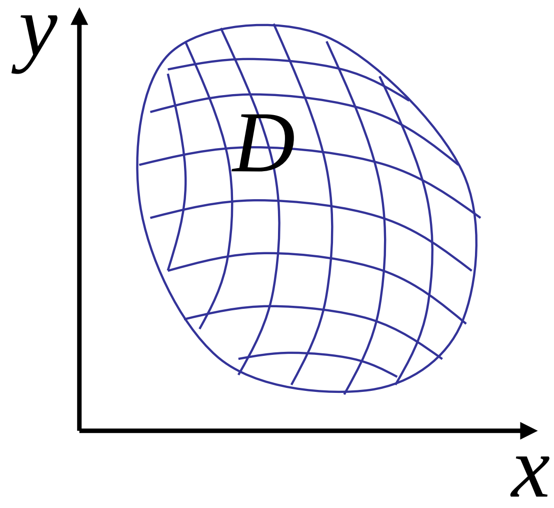


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 D , 其面密度为$\mu(x,y)\in C$,计算该薄片的质量 M .

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设D 的面积为σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$ 非常数 , 仍可用

"大化小, 常代变,近似和, 求 极限"

解决.

1)"大化小"

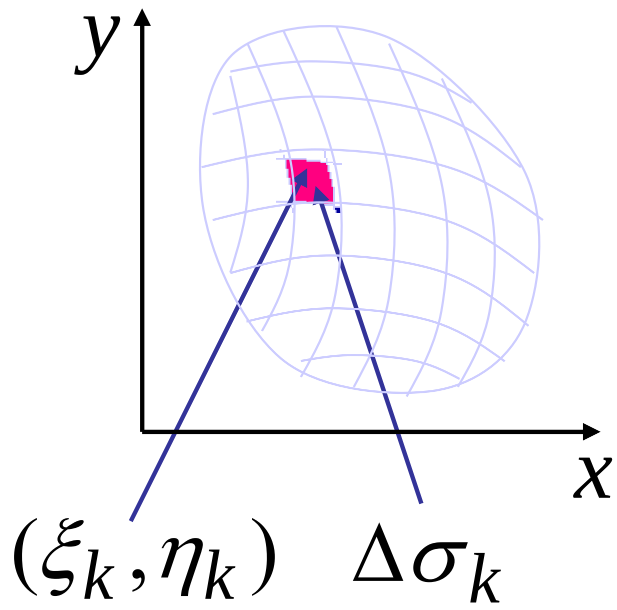
用任意曲线网分D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,

相应把薄片也分为小区域 .

2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k,η_k),则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3)“近似和”

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)“取极限”

令 $\|\Delta\sigma\|=\max\limits_{1\le k\le n}\{\,d(\Delta\sigma_k)\,\}$

$$M=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 常代变, 近似和,取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\|\Delta\sigma\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\|\Delta\sigma\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

二、二重积分的概念

定义 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域 D 上的**二重积分**，

记为$\displaystyle\iint_D f(x,y)d\sigma$，

即
$$\iint_D f(\boxed{x,y})d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

对二重积分定义的说明：

(1) 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

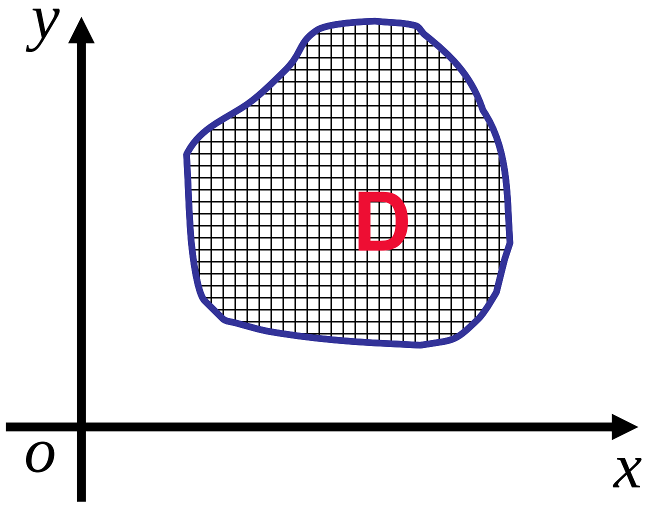
(2)当 $f(x,y)$在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，



则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为

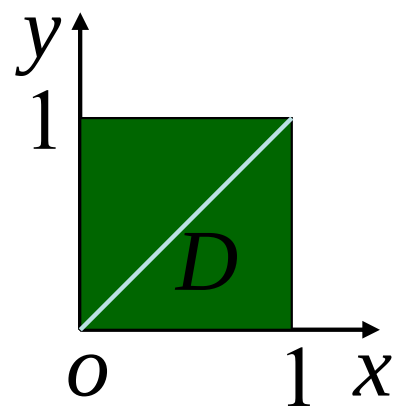
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

二重积分存在定理： (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

例如, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$



上二重积分存在；但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在 D 上二重积分不存在 .

三、二重积分的性质

1. $\iint_D k f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ （k 为常数)

2. $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

3. $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

($D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2无公共内点)

4. 若在D上 $f(x,y)\equiv 1$, σ为D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-\left|f(x,y)\right| \le f(x,y) \le \left|f(x,y)\right|$

$$\therefore \quad \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma$$

6. 设 $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y),\ D$ 的面积为σ，

则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续, σ 为D 的面积 ,则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知,

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M$$

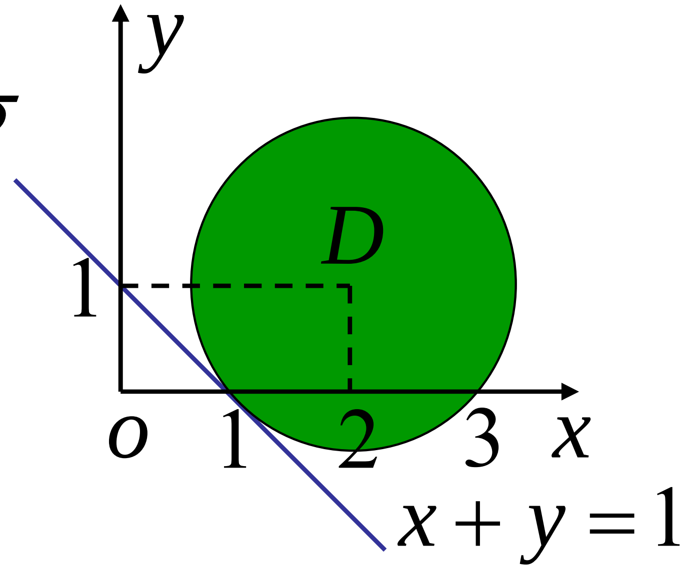
由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$



其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$

解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

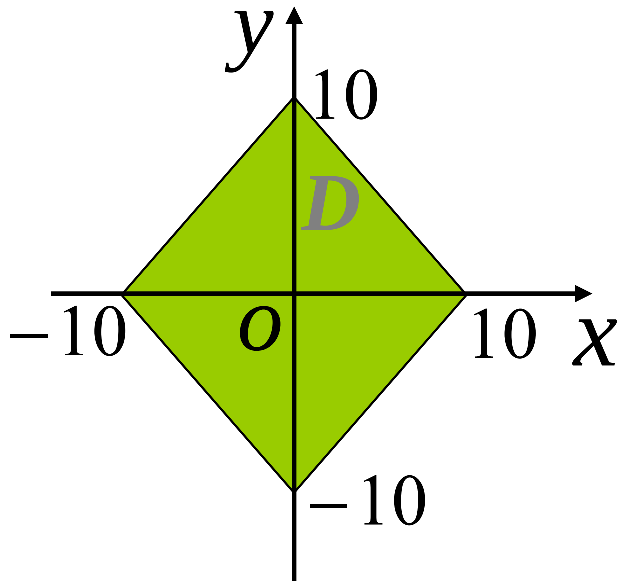
它与 x 轴交于点 $(1,0)$, 与直线 $x+y=1$ 相切. 而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例2. 估计下列积分之值

$$\mathrm{I} = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \qquad D: |x|+|y| \le 10$$



解: D 的面积为 $\sigma = (10\sqrt{2})^2 = 200$

由于

$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

积分性质5

$$\frac{200}{102} \le \mathrm{I} \le \frac{200}{100}$$

即: $1.96 \le \mathrm{I} \le 2$

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

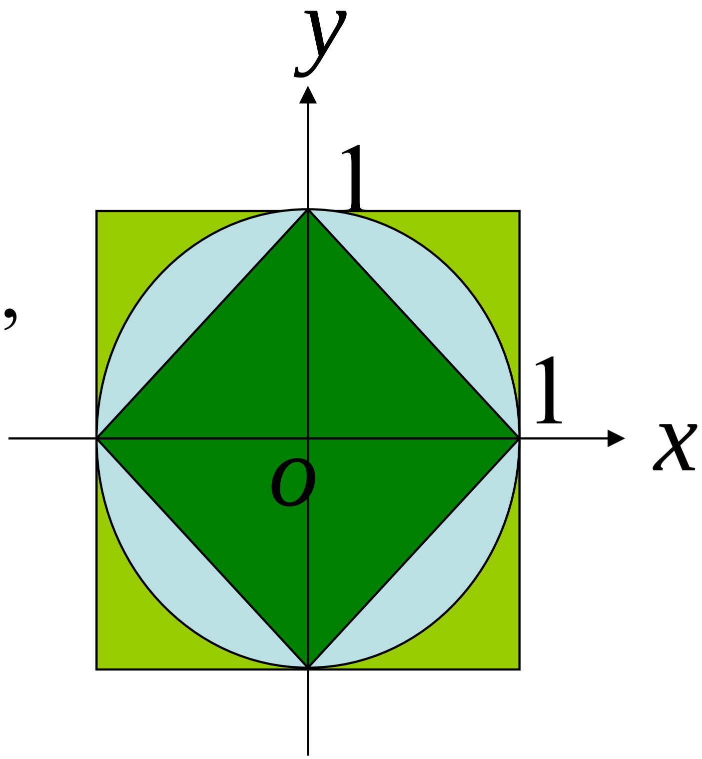
$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$



2. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0 < y < 1$, 则

$$I_1 = \iint_D yx^3 \,\mathrm{d}\sigma, \quad I_2 = \iint_D y^2 x^3 \,\mathrm{d}\sigma, \quad I_3 = \iint_D y^{1/2} x^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D)

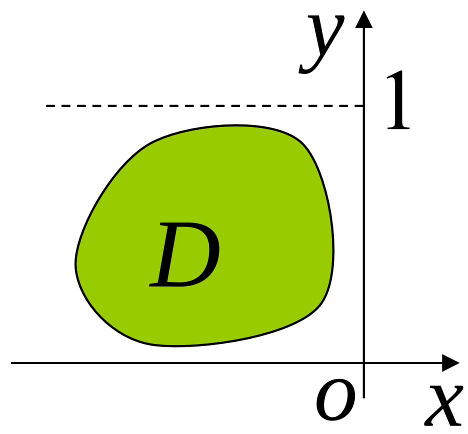
(A) $I_1 \le I_2 \le I_3$;　　(B) $I_2 \le I_1 \le I_3$;

(C) $I_3 \le I_2 \le I_1$;　　(D) $I_3 \le I_1 \le I_2$.

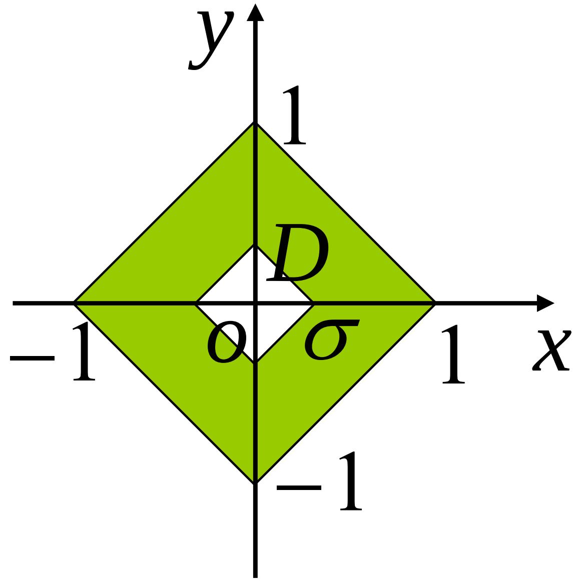
提示: 因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \le y \le y^{1/2}$;

又因 $x^3 < 0$, 故在D上有

$$y^{1/2} x^3 \le yx^3 \le y^2 x^3$$



2. 判断 $\iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (\sigma > 0)$ 的正负.



解: $\sigma \le |x|+|y| \le 1$ 时,

$$0 < x^2+y^2 \le (|x|+|y|)^2 \le 1$$

故

$$\ln(x^2+y^2) \le 0$$

$$|x|+|y| < 1 \qquad \ln(x^2+y^2) < 0$$

$$\iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 0$$

4. 关于对称性

利用对称性来简化重积分的计算是十分有效的，它与利用奇偶性来简化定积分的计算是一样的，不过重积分的情况比较复杂，在运用对称性是要兼顾被积分函数和积分区域两个方面，不可误用

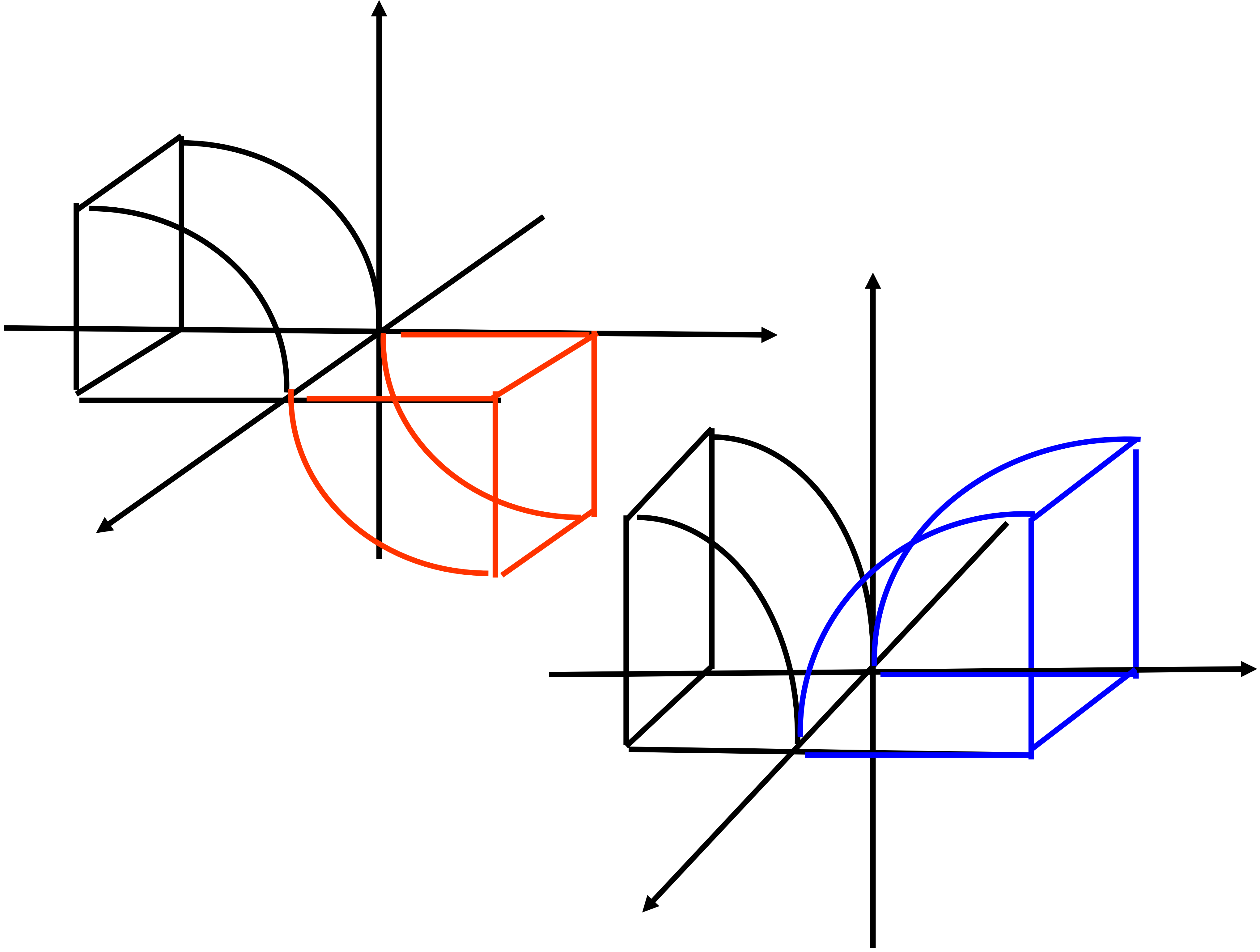
对 $I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

①若D关于 x 轴对称

(1)当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时 $I=0$

(2)当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时 $I=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

$D_2=\{(x,y)\in D, y\geq 0\}$



②若D关于 y 轴对称

(1)当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时 $I=0$

(2)当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

$$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, x\geq 0\}$$

③若D关于原点对称

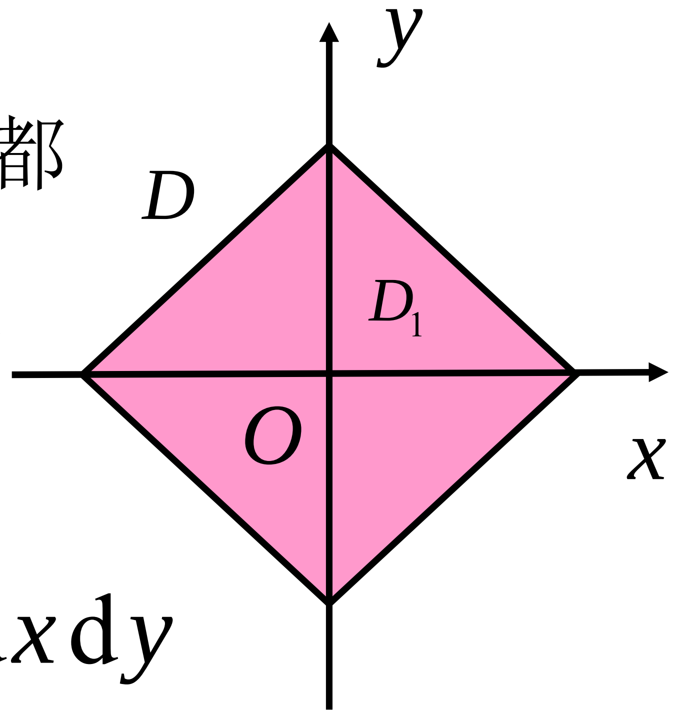
(1)当 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时 $I=0$

(2)当 $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时 $I=2\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy$

$$D_3=\{(x,y)\in D, x\geq 0, y\geq 0\}$$

推论 1.1

若有界闭区域 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，$f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且关于 x 和 y 均为偶函数，则



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$D_1 = \{(x,y)\in D \mid x\ge 0, y\ge 0\}$$

奇函数关于对称域的积分等于0，偶函数关于对称域的积分等于对称的部分区域上积分的两倍，完全类似于 对称区间上奇偶函数的定积分的性质

简述为“你对称，我奇偶”

④若 D 关于直线 $y = x$ 对称

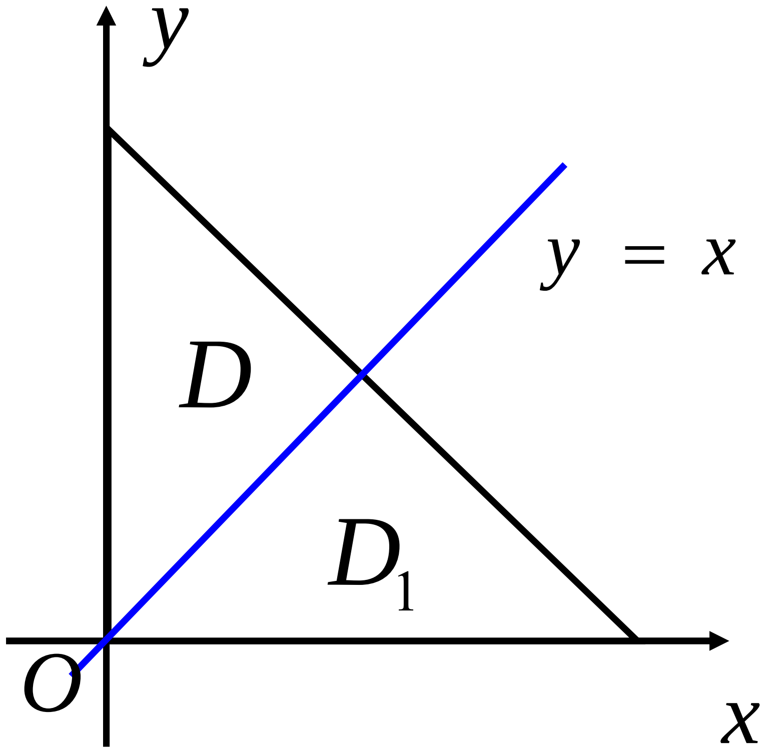
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$$

——称为关于积分变量的轮换对称性

是多元积分所独有的性质

定理 2

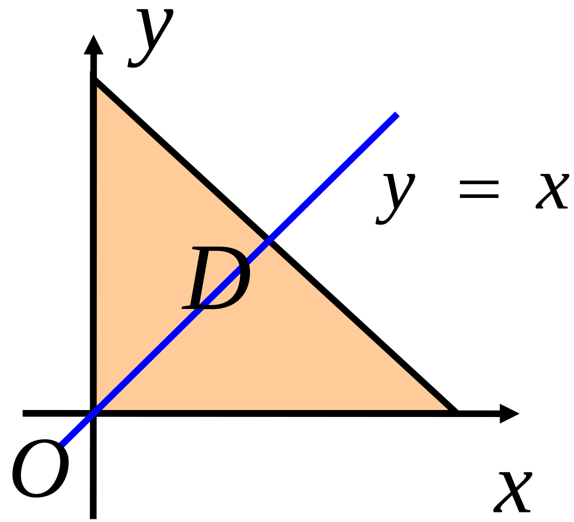
若有界闭区域 D 与区域 D_1 关于直线 $y = x$ 对称，$f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

推论 2.1

若有界闭区域D关于直线$y = x$对称，$f(x,y)$在区域D上连续，则



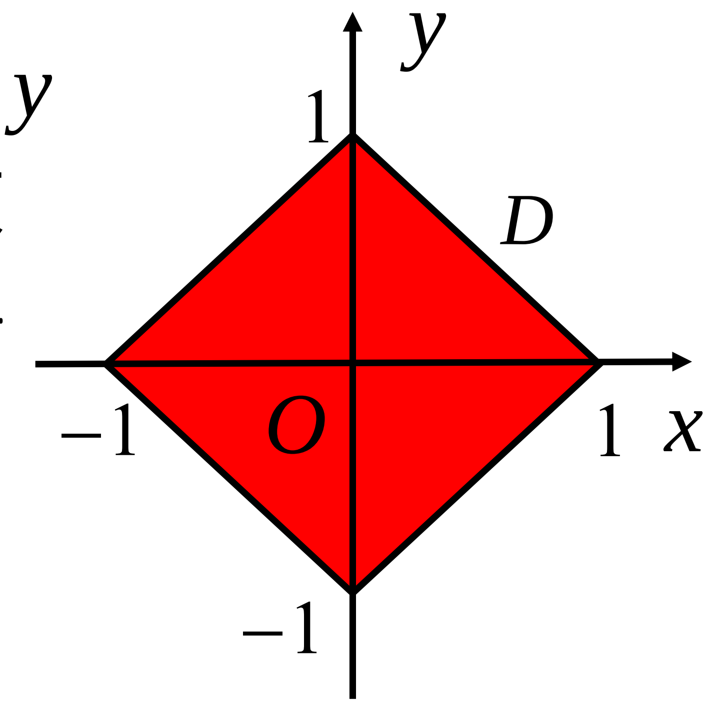
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二、定理的应用

例1. 计算 $I=\iint\limits_{D}(x+y^{3})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\}.$

解： $I=\iint\limits_{D}(x+y^{3})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}y^{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=I_1+I_2,$



如图，由于积分区域 D 关于 x 轴, y 轴都对称，且 I_1 和 I_2 中的被积函数分别关于 x,y 是奇函数，根据定理1和定理1′得

$$I=I_1+I_2=0+0=0.$$

设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a, x\le y\le a\}$,

$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则

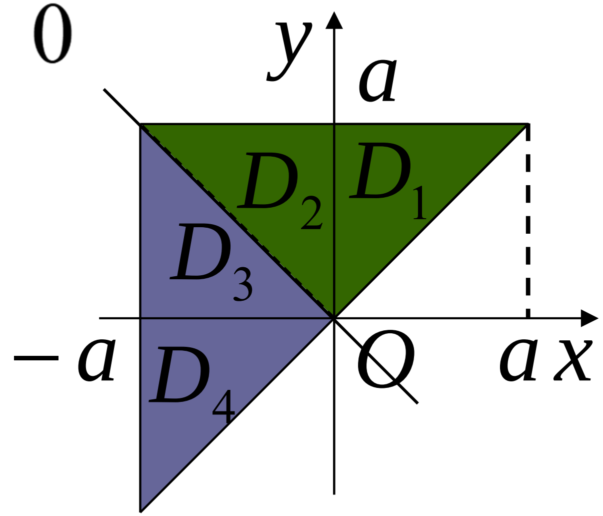
$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____A____.

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(B) $2\iint_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(D) 0



提示: 如图，$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$.