小结

1.两个准则

迫敛性; 单调有界准则 .

2.两个重要极限

设 α 为某过程中的无穷小 ,

$$1^0 \quad \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^0 \quad \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

2、 $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

令 $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t}=e.$

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

利用变量代换可导出上述极限的一般形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解　$原式=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}$

$$=\frac{1}{e}.$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解　$原式=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}=e^{2}.$

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{-x\to 0}\left\{[1+(-x)]^{(-\frac{1}{x})}\right\}^{-2}$$

$$= \left\{\lim_{-x\to 0}[1+(-x)]^{(-\frac{1}{x})}\right\}^{-2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

例 7　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$，令 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，

则当 $x\to 0$ 时，$u\to \mathrm{e}$，　所以原式 $=1$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

例 8　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $u=e^x-1$，则 $x=\ln(1+u)$，

当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

例 9　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$.

解　因为

$$\frac{2-x}{3-x}=\frac{3-x+(-1)}{3-x}=1+\frac{1}{x-3}.$$

所以令 $u=x-3$，当 $x\to\infty$ 时 $u\to\infty$，因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+5}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{5}\right]=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

例 10 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}$

$= e^2$.

思考题

求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3^{x}+9^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

思考题解答

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(9^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=9\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x\cdot x}}=9\cdot e^0=9$$

无穷大量和无穷小量

一 无穷小量

定义 1 如果$\lim\limits_{x\to X} f(x)=0$，则称$f(x)$是极限过程 $x\to X$ 下的无穷小量。

简记为 $$f(x)=o(1) \qquad (x\to X)$$

例如，

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\therefore$ 函数$\sin x$是当$x\to 0$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\therefore$ 函数$\dfrac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$，$\therefore$ 数列$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$是当$n\to\infty$时的无穷小.

注1　无穷小量是个变量;

注2　0是唯一可称为无穷小量的数。

注3　一个函数是无穷小量，必须指明自变量的变化趋势;

2.无穷小与函数极限的关系:

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\quad \therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=A.$

意义 1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

3.无穷小的运算性质:

定理2 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

注意 无穷多个无穷小量的代数和未必是无穷小量.

定理3 $f(x)=o(1)(x\to X), g(x)$是$x\to X$的有界量，

则 $f(x)g(x)=o(1)(x\to X).$

证 因$g(x)$是$x\to X$的有界量，故∃M >0,使得

$$|g(x)|\le M(x\to X).$$

从而

$$0\le|f(x)g(x)|\le M|f(x)| \qquad (x\to X).$$

由于 $f(x)=o(1)(x\to X)$,所以

$$\lim_{x\to X} M|f(x)|=M\lim_{x\to X}|f(x)|=0$$

由迫敛性可得

$$\lim_{x \to X} |f(x)g(x)| = 0$$

所以 $f(x)g(x) = o(1)(x \to X).$

结论:（**同一过程中的**）有界量与无穷小量的乘积是无穷小量。

推论1（在同一过程中）有极限的变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论2 常数与无穷小量的乘积是无穷小量

.

定义 2 如果$\lim\limits_{x\to X} f(x)=\infty$, 则称$f(x)$是极限过程 $x\to X$下的无穷大量。

例如：
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

注意 1.无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

2.切勿将$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$认为极限存在.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$;

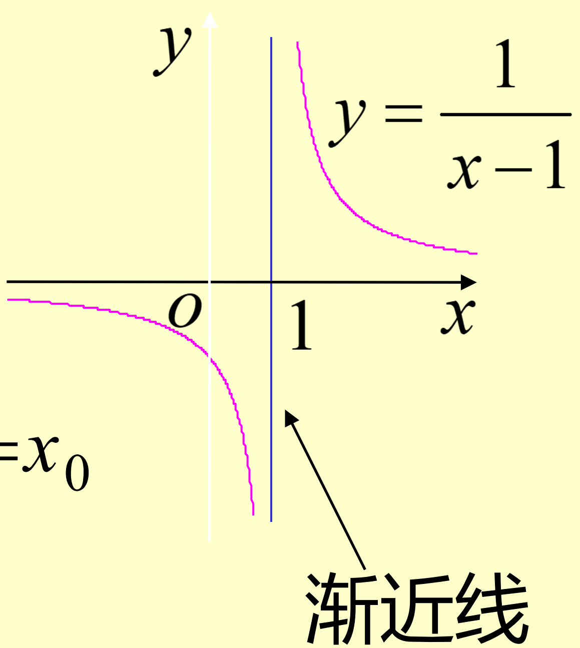
例．证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证: $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$, 只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$.

因此可以取 $\delta=\dfrac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

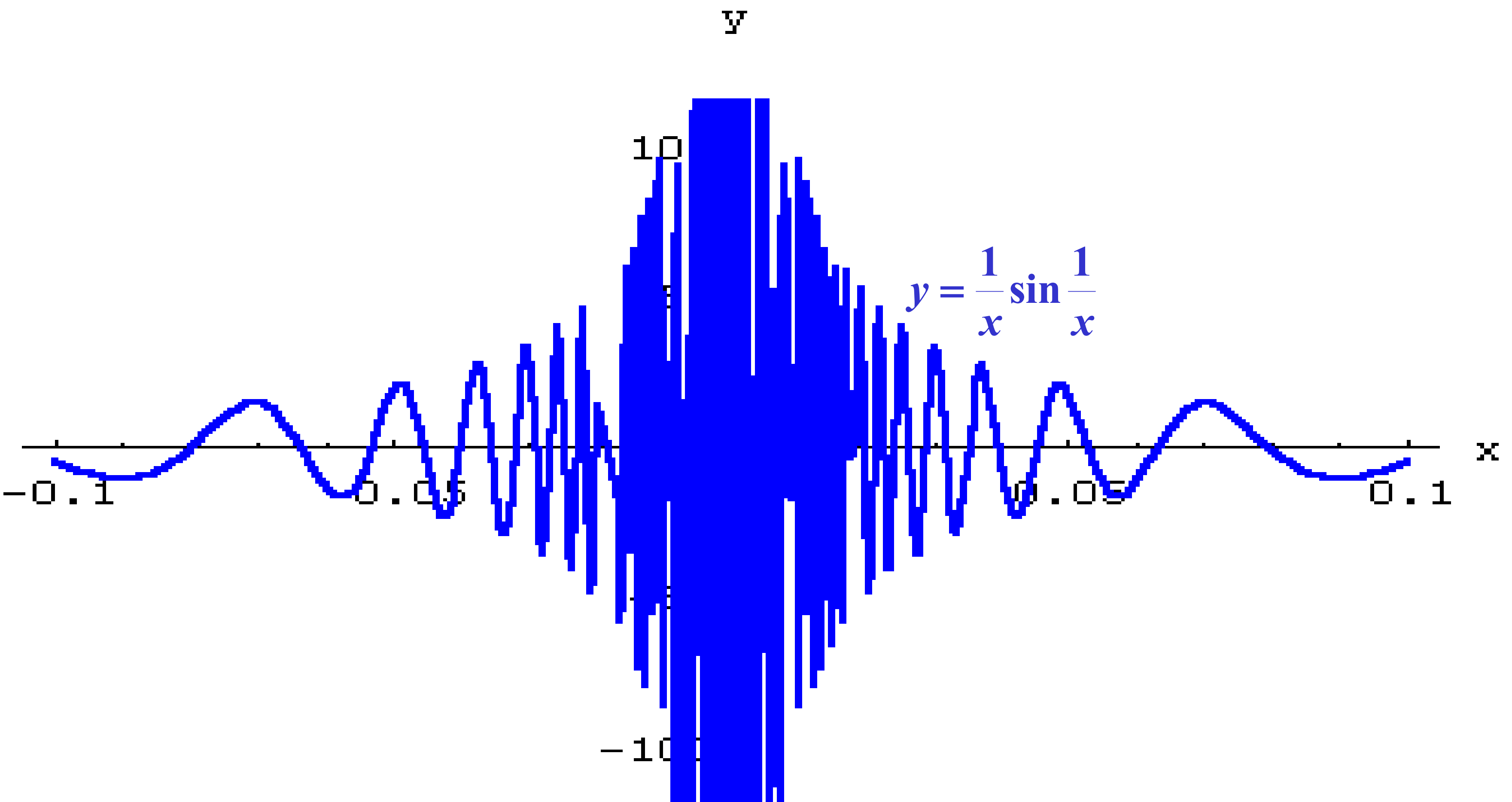


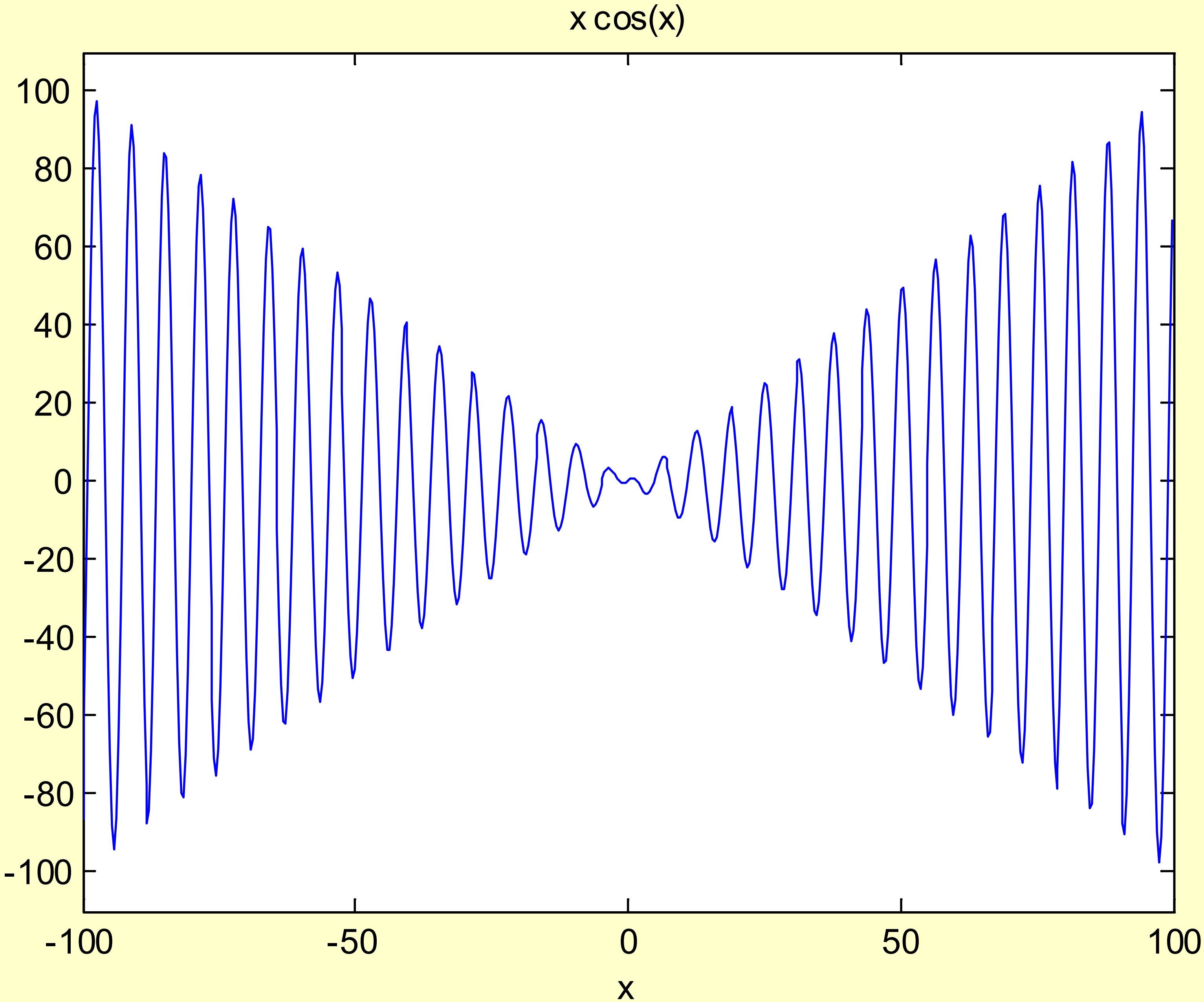
说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$

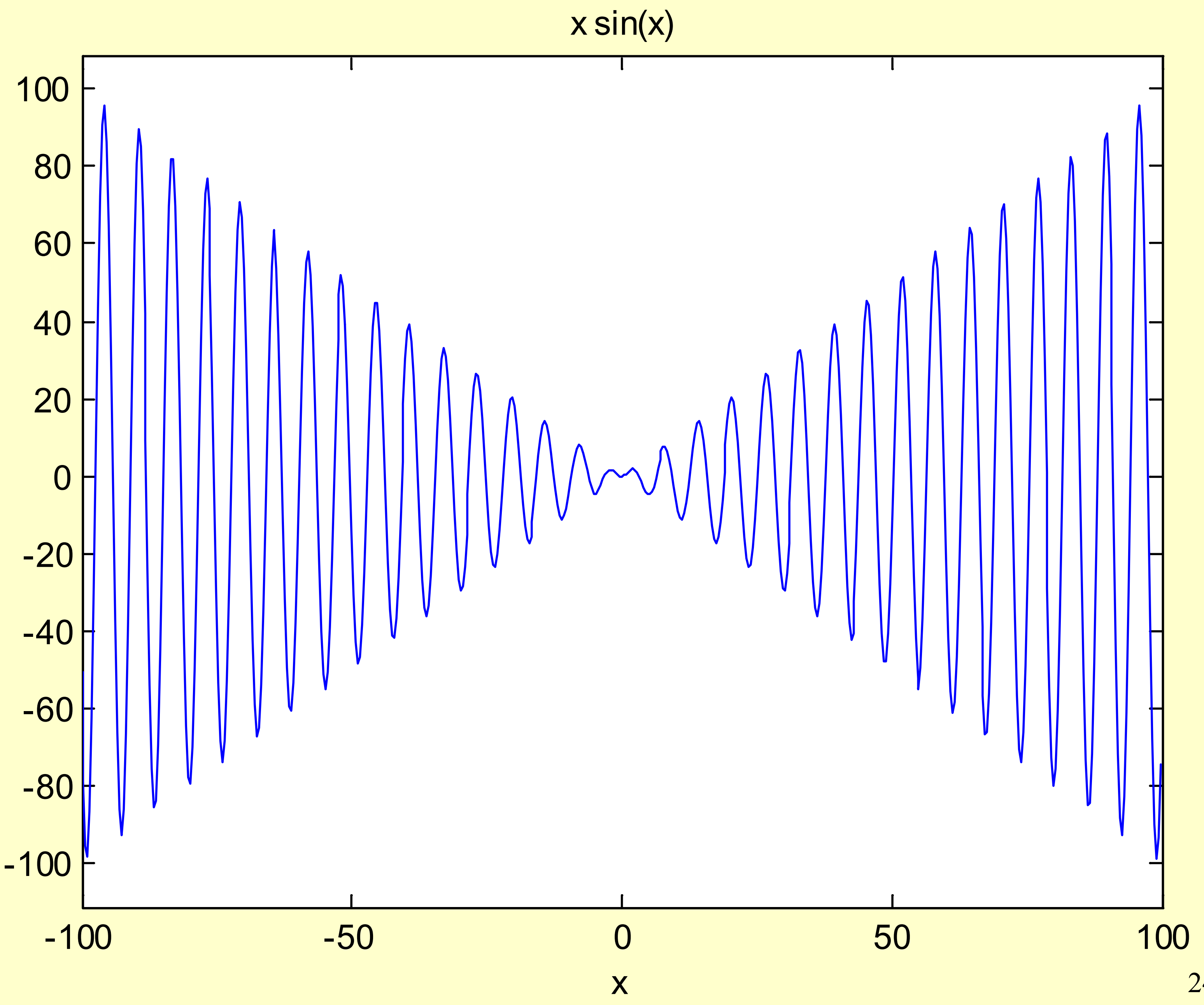
为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

例如，当$x \to 0$时，$y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

是一个无界变量，但不是无穷大.



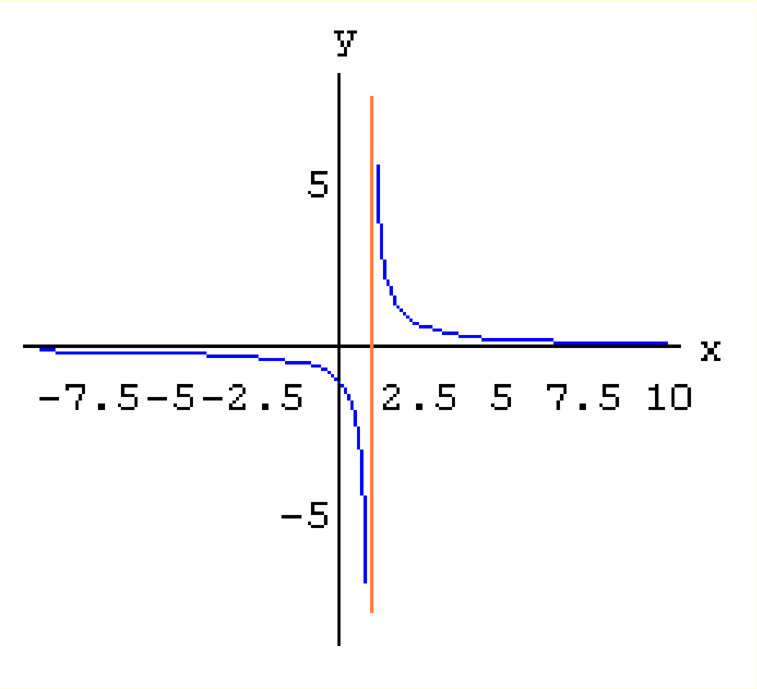

x cos(x)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-100
-50
0
50
100
x


x sin(x)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-100
-50
0
50
100
x

三、无穷小与无穷大的关系

定理4　在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

例　$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$



意义　关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

四、无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin \frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0,$$ x^2比x要快得多；

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$ $\sin x$与x大致相同；

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义. 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作

$$\beta=o(\alpha)$$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$, 则称 β 是关于 α 的 $\boldsymbol{k}$ **阶**无穷小;

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$

或 $\beta\sim\alpha$

例如，**当** $x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2)\ ;\quad \sin x \sim x\ ;\quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

又如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小，且

$$1-\cos x \sim \tfrac{1}{2}x^2$$

等价无穷小替换

定理5（等价无穷小替换定理）

$$若 f(x)=o(1),\ f(x)=o(1)(x\to X),$$

$$且 f(x)\sim g(x)(x\to X), 若$$

$$\lim_{x\to X} g(x)u(x)=A,\ \lim_{x\to X}\frac{v(x)}{g(x)}=B$$

则 $$\lim_{x\to X} f(x)u(x)=A,\ \lim_{x\to X}\frac{v(x)}{f(x)}=B$$

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \ (a \neq 0)$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\tan 2x\sim 2x$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

注意 不能滥用等价无穷小代换.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时, $\tan x \sim x$, $\sin x\sim x$.

$$原式 \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

解 当$x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

注:对于代数和中各无穷小不能分别替换.

注 对无穷大量也可以比较它们趋于无穷大的速度，定义高（低、同）阶无穷大以及等价无穷大；也可以进行等价无穷大替换。

几个常用的无穷大按阶从低到高排列为：

$$\ln^{\alpha} n, \quad n^{\beta}, \quad a^{n}, \quad n!, \quad n^{n}.$$

其中，α、$\beta > 0$，$a > 1$.

六、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容:

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数；

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3） 无界变量未必是无穷大.

无穷小的比较:

反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小; 等价无穷小; 无穷小的阶.

等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法, 注意适用条件.