2010—2011 学年第一学期高等数学 B 试卷（A 卷）答案

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

（1）$\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)dx$；（2）2；（3）$y=x-5$；（4）$-2$；（5）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^n$（$-2<x<2$）.

二、计算下列极限（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$ 　　4 分

（2）解 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$ 　　2 分

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$ 　　4 分

（3）解 $\because \lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0$$ 　　2 分

$\therefore \lim_{x\to 0^+}x^{\tan x}=e^0=1$ 　　4 分

（4）$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{(1-\cos x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{\frac{1}{8}x^6}$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{2x-e^{-x^4}\cdot 2x}{6x^5}$$ 　　2 分

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^4}}{x^4}=\frac{8}{3}$$ 　　4 分

三、求下列积分（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\int\left(x^2+\tan x\right)dx=\int x^2\,dx+\int\tan x\,dx$ 　　2 分

$$=\frac{1}{3}x^3-\ln\left|\cos x\right|+C$$ 　　4 分

（2）解 $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$　　4 分

（3）解 $\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin xdx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin xdx$　　2 分

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx + x\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}\cos xdx$$

$= 4\pi$　　4 分

（4）解 令 $x = \sin t$，则

$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$　　2 分

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi$　　4 分

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8 分，每小题 4 分）

（1）解 $\because \int_0^b \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\arctan b^2$，且 $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\tan b^2 = \frac{\pi}{4}$　　2 分

$\therefore$广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{4}$　　4 分

（2）解 $\because \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \sqrt{x^2-4}\Big|_{2+\varepsilon}^3 = \sqrt{5}-\sqrt{(2+\varepsilon)^2-4}$，

且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\sqrt{5}-\sqrt{(2+\varepsilon)^2-4}\right) = \sqrt{5}$　　2 分

$\therefore$广义积分 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ 收敛，且 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \sqrt{5}$　　4 分

五、判别下列级数的敛散性，并说明理由（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0$　　2 分

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n}$ 发散　　4 分

（2）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$　　2 分

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n\frac{1}{2n}$ 收敛　　4 分

（3）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$　　2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$收敛 4 分

（4）解 $\because \tan\frac{1}{n} > \tan\frac{1}{n+1}$，且$\lim_{n\to\infty} \tan\frac{1}{n} = 0$ 2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$收敛. 4 分

六、(8 分，每小题 4 分)

解（1）D 的面积

$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$ 4 分

（2）所求的旋转体体积

$V = \pi \int_0^1 [x^2 - x^4] dx = \frac{2}{15}\pi$ 4 分

七、(7 分)

解 收敛域为$[-1,1)$ 1 分

当$-1 < x < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt$ 3 分

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$ 5 分

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n (n+1)} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} \Big|_{x=\frac{1}{6}} = 6\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - x \right)\Big|_{x=\frac{1}{6}}$$

$$= 6(-\ln(1-x) - x)\Big|_{x=\frac{1}{6}} = 6\ln\frac{6}{5} - 1$$ 7 分

八、(7 分)

解 令$x - t = u$，则

$$\int_0^x e^t f(x-t) dt = -\int_x^0 e^{x-u} f(u) du = e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du$$ 2 分

$\therefore f(x)$满足

$$e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du = e^{2x}(x+1)$$

即

$$\int_0^x e^{-u} f(u) du = e^x (x+1)$$

在上式两边求导，得

$e^{-x} f(x) = e^x (x+1) + e^x$，即 $f(x) = e^{2x}(x+2)$ 5 分

因此$\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1 e^{2x}\left(x+2\right)dx=\frac{5}{4}e^2-\frac{3}{4}$ 7 分

九、（7 分）

证 $\because$ $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导

$\therefore$由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right) \qquad (*) \qquad 2\text{ 分}$$

又$\because$ $\ln x$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，且$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}\neq 0$

$\therefore$由柯西中值定理知，存在$\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'\left(\eta\right)}{\frac{1}{\eta}} \qquad (**) \qquad 5\text{ 分}$$

由（*）和（**）得

$$\frac{f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)}{\ln b-\ln a}=\eta f'\left(\eta\right)$$

再由 $f'\left(\eta\right)\neq 0$ 得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\eta \qquad 7\text{ 分}$$