第七节 广义积分

常义积分 $\begin{cases} \text{积分限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

$\Big\downarrow$ 推广

广义积分

一、无限区间上的广义积分

二、无界函数的广义积分

二、无界函数的广义积分

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界．取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

说明: 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点,则本质上是常义积分, 而不是广义积分.

例如, $$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛–莱公式的

的计算表达式：

若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意: 若瑕点 $c \in (a, b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

例1. 计算广义积分$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解: 显然瑕点为 a , 所以

$$\text{原式} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例2. 讨论广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = +\infty + \infty$

所以广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例6. 证明广义积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛； $q\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 该广义积分发散 .

例7. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求 $I=\int_{-1}^{3}\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x.$

解： $\because x=0$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 故 I 为广义积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$$

内容小结

1. 广义积分 $\left\{\begin{matrix}\text{积分区间无限}\\\text{被积函数无界}\end{matrix}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{a^{1-p}}{(p-1)}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

说明: **(1)** 有时通过换元，广义积分和常义积分可以互相转化.

例如，$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \qquad (令\ x = \sin t)$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \qquad (令\ t = x-\frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类广义积分时, 可划分积分区间, 分别讨论每一区间上的广义积分.

内容小结

1. 广义积分 $\left\{\begin{matrix}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{matrix}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{a^{1-p}}{(p-1)}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

三、(10分)讨论函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+3}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$的连续性.

2. 设$f(x)$在点 $x = x_0$处连续, 且 $\lim_{x\to x_0} \frac{2f(x)-1}{x-x_0} = 5$, 求 $f'(x_0)$.

四、(8分) 证明不等式 $\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 1 + \frac{x^2}{2}$, $(x \neq 0)$.

思考题

设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

思考题解答

$$\int_0^1 xf''(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xdf'(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2.$$

11.设$f(x)$连续， $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

求$\varphi'(x)$,并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$的连续性.

解: 令$xt=u$, $\varphi(x)=\int_0^x f(u)\cdot\dfrac{1}{x}du=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$,

$$\therefore x\neq 0\text{时}，\quad \varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

$$x=0\text{时},\ \varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\therefore \varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$

$$\text{又}\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$$

$\therefore \varphi'(x)$在$x=0$连续.

例. 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$ (考研98)

解： 将数列适当放大和缩小，以简化成积分和：

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\boxed{\frac{1}{k}}}<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

利用**夹逼准则**可知 $I=\dfrac{2}{\pi}$.

12(7) 求定积分$\int_0^{\pi} f(x)dx$,其中$f(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi - t}dt.$

解:由$f(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi - t}dt$, 得$f'(x)=\frac{\sin x}{\pi - x}$.

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xdf(x) = \pi f(\pi) - \int_0^{\pi} xf'(x)dx$$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^{\pi}\frac{(x-\pi)\sin x + \pi\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \pi f(\pi) + \int_0^{\pi}\sin x dx - \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi - x}dx$$

$\pi f(\pi)$

$$= \int_0^{\pi}\sin x dx = 2$$

13. 设$f(x)$在区间[0,1]上连续，在(0,1)可导，$3\int_{2/3}^{1} f(x)dx = f(0)$. 证明在(0,1)内存在一点$c$,使得$f'(c)=0$.

证明:由积分中值定理, 存在$\xi \in [2/3,1]$,使得

$$3f(\xi)(1-\frac{2}{3}) = 3\int_{2/3}^{1} f(x)dx = f(0),$$即

$$f(\xi) = f(0),$$

在$[0,\xi]$内用罗尔中值定理可得结论.

14.设$f(x)$在$[0,1]$上连续且递减，证明当$0<\lambda<1$时，

$$\int_0^{\lambda} f(x)dx \geq \lambda\int_0^1 f(x)dx.$$

证明：令$x=\lambda t,$

$$\int_0^{\lambda} f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx=\lambda\int_0^1 f(\lambda t)dt-\lambda\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\lambda\int_0^1\left(f(\lambda x)-f(x)\right)dx \geq 0$$

例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解: 右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ 分部积分积分

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b)f'(x)\right]\Big|_a^b$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ 再次分部积分

$$=-\frac{1}{2}\left[(2x-a-b)f(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$

例. 选择一个常数 c , 使

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = 0$$

解: 令 $t = x + c$, 则

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} t\cos^{99} t\,\mathrm{d}t$$

因为被积函数为奇函数, 故选择 c 使

$$a + c = -(b + c)$$

即

$$c = -\frac{a+b}{2}$$

可使原式为 0 .

例10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ, 使

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 在 (a, b) 内存在与 ξ 相异的点 η , 使

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(03考研)

证: (1) $\because \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在, $\therefore \lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a)=0$,

由 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 知 $f(a)=0$. 又 $f'(x)>0$, 所以$f(x)$

在(a, b)内单调增, 因此

$$f(x)>f(a)=0, \quad x\in(a,b)$$

(2) 设 $F(x)=x^2,\ g(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \ \ (a\le x\le b)$

则 $g'(x)=f(x)>0$, 故 $F(x),\ g(x)$满足柯西中值定理条件,

于是存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'}\right|_{x=\xi}$$

即 $$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 因 $f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$

在$[a,\xi]$ 上用拉格朗日中值定理

$$=f'(\eta)(\xi-a),\quad \eta\in(a,\xi)$$

代入(2)中结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

因此得 $$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$