第三章 一元积分学

第三节 定积分值的估计及不等式

定积分值的估计及不等式证明是一个较难的问题，方法多样，用到的知识（微分学的知识，积分学的知识等）也很多。总的说来：

（1）主要用积分学的知识，除了定积分的性质、积分中值定理、计算方法外，以下几个简单的不等式也是有用的：

（i）若 $f(x)\le g(x)\,(x\in[a,b])$，则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

（ii）$|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

（iii）若 $f(x)\ge 0\,(x\in[a,b]),a\le c\le d\le b$,则 $\int_c^d f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$.

(iv)(柯西不等式)$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

(2)主要用微分学的知识,包括前面已讲过的利用微分学知识证明不等式的一切方法.

(3)利用二重积分、级数等．值得注意的是：题目的解法往往有多种，同一题目其解答过程中往往要用到各种知识和方法.

例１．判断积分 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx$ 的符号

分析：这个积分值是求不出来的．如果被积函数在积分区间上有确切的符号，那么积分值的符号很容易判断．如果被积函数在积分区间上有正、有负，那么应根据被积函数的正、负情况将积分区间分成部分区间，然后利用积分学等方面的知识比较在这些部分区间上的积分值（实际上是比较积分值的绝对值）．本题中被积函数 $\sin x^2$ 在积分区间上有正、有负，先作换元：$t=x^2$，把积分变为 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 后，问题更清晰，因而想到

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt)$$

至此积分的符号凭直觉已经能判断了．但严格说明还需做一些工作，上式右端两个积分的积分区间不一样，为了方便比较，应将两个积分放在同一积分区间上进行比较．有了这些分析和思路后，解答就容易了.

解：令 $t=x^2$，则

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt==\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt)$$

对上式右端后一积分换元 $t=u+\pi$ 得 $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}\frac{-\sin u}{\sqrt{u+\pi}}du=-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt$

从而 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx==\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}})\sin t dt>0$$

注：本题的解答过程不复杂，但其过程中有两个技巧很有用（1）将积分区间分成部分区间（尤其是等分区间，特别是二等分）（2）如要比较两个在不同积分区间上的积分的大小，可通过换元变成相同积分区间上的积分，然后比较.

例 2．设 $a>0$，证明：$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\sin x}dx\geq\frac{\pi^3}{4}$

分析:： 从形式上看很象柯西不等式，但两个积分的积分区间不一样，前面的积分可用教材上介绍的一个等式 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$ 变为 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分，再用柯西不等式便可得结论。

解：$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}dx$

$$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{\sin x}{2}})dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{-\sin x}{2}})^2dx\geq\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx)^2=\frac{\pi^3}{4}$$

例 3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，且 $f(a)=0$，证明：

（1）$|\int_a^b f(x)dx|\leq\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$

（2）$\int_a^b f^2(x)dx\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx$

分析：（1）该不等式实际上给出了左边积分的一个界。若令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，则有 $|f'(x)|\leq M$，即给出了导数的界，再加条件 $f(a)=0$，可估计出 $|f(x)|\leq M(x-a),x\in[a,b]$，进而估计出积分的界。（2）不等式两边分别有 $f(x)$ 和 $f'(x)$，而等式 $f(x)=\int_{x_0}^{x}f'(x)dx+f(x_0)$ 可将两者联系起来，这里 x_0 要根据具体问题具体选择，本题中容易想到 $x_0=a$

证明：（1）令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，由拉氏中值定理知

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$$

从而 $|f(x)|=|f'(\xi)(x-a)|\leq M(x-a),x\in[a,b]$

所以 $|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b M(x-a)dx=\frac{(b-a)^2}{2}M$

（2） $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)=\int_a^x f'(t)dt$，则

$$f^2(x)=[\int_a^x f'(t)dt]^2\le\int_a^x 1dt\int_a^x [f'(t)]^2dt\le(x-a)\int_a^b [f'(t)]^2dt$$

故$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b [f'(t)]^2dt\int_a^b (x-a)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx$

注：（1）中，若将条件 $f(a)=0$ 改为(i) $f(b)=0$，结论仍成立，(ii) $f(\frac{a+b}{2})=0$,右端改为$\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,(iii) $f(a)=0$ 且 $f(b)=0$,右端改为$\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,

另外本题也可利用等式 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)=\int_a^x f'(t)dt$ 去证:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(\int_a^x f'(t)dt)dx=\int_a^b(\int_t^b f'(t)dx)dt=\int_a^b(b-t)f'(t)dt$$

所以 $|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b|(b-t)f'(t)|dt\le M\int_a^b(b-t)dt=\frac{(b-a)^2}{2}M$

(2)中右边作为左边积分的一个界有点粗(证明过程中能感觉到这一点),我们可以更精细一点：

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx-\frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2dx$$

不做(2)的证明过程中的第二步放大,便可证出上面结论：

$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b\{(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt\}dx=\int_a^b(\int_a^x [f'(t)]^2dt)d\frac{(x-a)^2}{2}$,再分部即可.

例 4．设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有二阶连续导数，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，证明：

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$$

方法一：利用上一节中的例 10 中的（2），或练习题 21 可证出结论。

方法二：由泰勒公式有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

两边在$[a,b]$上积分并注意到$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$得

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$，从而得

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})|=\frac{1}{2}|\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx|\le\frac{M}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{M(b-a)^3}{24}$$

方法三：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F'(x)=f(x),F''(x)=f'(x),F'''(x)=f''(x)$，且

$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$，由泰勒公式有：

$$F(b)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})^2+\frac{F'''(\xi_1)}{6}(\frac{b-a}{2})^3 \qquad (1)$$

$$F(a)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})^2+\frac{F'''(\xi_2)}{6}(\frac{a-b}{2})^3 \qquad (2)$$

（1）—（2）得

$$F(b)-F(a)=F'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}(F'''(\xi_1)-F'''(\xi_2))$$

所以 $|\int_a^b f(x)dx - f'(\frac{a+b}{2})(b-a)| = \frac{(b-a)^3}{48}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)| \le \frac{M}{24}(b-a)^3$

例 5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

分析：本题有多种证明方法，思路一：这里有两个参数 a,b，把 b 改成变量 x，欲证

$$\int_a^x tf(t)dt \ge \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$$

左右两边均是函数，可利用导数这一工具去证明．思路二：变形为 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \ge 0$ 被积函数中因子 $x-\frac{a+b}{2}$ 关于积分区间中点具有某种对称性，而 $f(x)$ 又单调，因此可想到前面介绍的利用对称性计算积分的有关公式去处理．思路三：基于思路二的考虑，将积分区间二等分，然后用积分中值定理或其它方法去证．思路四：由于 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})=0$ 故

$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))dx \ge 0$

就一目了然．思路五：变形为

$$(b-a)\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b 1dx\int_a^b xf(x)dx \ge \int_a^b xdx\int_a^b f(x)dx$$

那么看过例 6 后就知道怎么做了．

证：令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，则 $F(a)=0,$ 且

$$F'(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^x [f(x)-f(t)]dt \ge 0$$

从而 $F(x)\ge F(a)=0, x\in[a,b]$

取 $x=b$，便得 $F(b)\ge 0$，结论得证．

或：$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [(x-\frac{a+b}{2})f(x)+(a+b-x-\frac{a+b}{2})f(a+b-x)]dx$

$\frac{1}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(a+b-x))dx \ge 0$

（或：

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx = \int_0^{\frac{b-a}{2}} [(\frac{a+b}{2}-x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2}-x)+(\frac{a+b}{2}+x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2}+x)]dx$$

$=\int_0^{\frac{b-a}{2}} x[f(\frac{a+b}{2}+x)-f(\frac{a+b}{2})-x]dx \ge 0$）

或：$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$

$$= f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-\frac{a+b}{2})dx + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})dx = \frac{(b-a)^2}{2}(f(\xi_2)-f(\xi_1)) \ge 0$$

注：第一种方法我们称之为变易常数法，即把某个常数（在积分中一般是积分上限或下限）换成变量，从而化为一个函数不等式，再利用微分学的知识及其它知识去证明，这是一种常用的技巧。本题若把条件“连续且单调增加”改为“单调且有界”，结论仍成立。但变易常数法不能用（为什么？）。

例 6．设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证：

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

分析：右端出现了两个积分，若将两个积分的积分变量换成不同符号则可化为二重积分：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx = \int_a^b\int_a^b f(y)g(x)dxdy = \int_a^b\int_a^b f(x)g(y)dxdy$$

而左边亦可化为二重积分：$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx = \int_a^b\int_a^b f(x)g(x)dxdy = \int_a^b\int_a^b f(y)g(y)dxdy$

这样就化为二重积分的比较了。

证：令 $I = (b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$

则 $I = \int_a^b\int_a^b f(x)g(x)dxdy - \int_a^b\int_a^b f(x)g(y)dxdy = \int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]dxdy$

同样可得 $I == \int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]dxdy$

两式相加得 $2I = \int_a^b\int_a^b [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy \ge 0$

故 $I = (b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx \ge 0$

结论得证。

注：本题是通过化为二重积分来证明，这也是有用的方法。仔细体会这个证明过程并用此方法去证一下柯西不等式及上一例题。

凹凸性及平均值等式

例 7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且为凹函数即对 $\forall \lambda \in [0,1]$，及 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

证明： $f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$

证明：$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx$

$\ge \int_a^b f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(a+b-x))dx = \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

从而得左过得不等式，下证右过不等式

$\forall x \in [a,b]$，有 $x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b$

从而 $f(x) \le \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$

两边积分得 $\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

于是得右过不等式.

注：能看出该不等式的几何意义吗？

n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均、几何平均、调和平均有如下关系：

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

我们把以上关系推广到积分形式：设 $f(x)$ 正值连续，则

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx} \le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

上面不等式中的第一项称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的调和平均，第二项称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的几何平均，第三项称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的算术平均．还可推广到加权平均的形式：

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}dx} \le \exp(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}) \le \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$$，其中 $p(x)$ 为正值连续函数 （2）

下面证一下（2）

对于任意 u, u_0，有 $e^u = e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0) + \frac{e^{\xi}}{2!}(u-u_0)^2 \ge e^{u_0} + e^{u_0}(u-u_0)$

取$u_0=\dfrac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$，则$\int_a^b p(x)\ln f(x)dx=u_0\int_a^b p(x)dx$

$f(x)=e^{\ln f(x)}\ge e^{u_0}+e^{u_0}(\ln f(x)-u_0)$，从而

$p(x)f(x)\ge p(x)e^{u_0}+e^{u_0}(p(x)\ln f(x)-u_0p(x))$

两边在$[a,b]$上积分，并注意到不等式右边最后一项的积分为零，得

$\int_a^b p(x)f(x)dx\ge e^{u_0}\int_a^b p(x)dx$

即$\exp(\dfrac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx})=e^{u_0}\le\dfrac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$

下证左过不等式：左过不等式等价于

$$\frac{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}dx}{\int_a^b p(x)dx}\ge\exp(\frac{\int_a^b p(x)\ln\frac{1}{f(x)}dx}{\int_a^b p(x)dx})$$

把右边不等式的$f(x)$换成$\dfrac{1}{f(x)}$，便得上式.

分析上面证明过程， 可以发现关键用到了：e^x的二阶导大于零及$f(x)=e^{\ln f(x)}$. 因此有下面更一般的结论：

设 $f(x),p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m\le f(x)\le M,p(x)\ge 0,\int_a^b p(x)dx>0$， $\varphi(x)$ 在$[m,M]$上有二阶导数，且$\varphi''(x)\ge 0$，则

$$\varphi[\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}]\le\frac{\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]dx}{\int_a^b p(x)dx} \qquad (3)$$

注：$\varphi''(x)\le 0$，则上面不等式变号. 同学可仿（2）的证明去证一下（3）

练习题:

1. 证明:$\int_0^\pi e^{\sin^2 x}dx\ge\sqrt{e}\pi$

($\int_0^\pi e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{\sin^2 x}dx$,而$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos^2 x}dx$)

2．证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$

（左－右＝$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx$，然后用利用对称性计算积分的有关公式）

3．证明:$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

（通过换元将左、右积分分别比为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)dt$和$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)dt$，然后比较被积函数的大小便可得结论）

4．设l表示椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的周长，证明：

$$\pi(a+b)\le l\le\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

（由弧长公式可得$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$，

由$\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\ge a\sin^2 t+b\cos^2 t$可得左边不等式，再用积分的柯西不等式可得右边不等式）

5．设$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数，证明：

$$\int_0^1|f(x)|dx\le\max\{\int_0^1|f'(x)|dx,|\int_0^1 f(x)dx|\}$$

（若$f(x)$在$[0,1]$上不变号，不等式成立；若变号则存在$x_0\in[0,1]$，使得$f(x_0)=0$，由$|f(x)|=|\int_{x_0}^x f'(t)dt|\le\int_0^1|f'(t)|dt$，可得结论.）

6．设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，证明对$\forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\le\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|f'(x)|dx$$

（由积分中值定理知$\exists x_0\in[a,b],f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，再由$f(x)=\int_{x_0}^x f'(t)dt+f(x_0)$可得结论）

7．设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，且$f(a)=0$，证：

$$(\int_a^b f(x)dx)^2\le\frac{(b-a)^3}{3}\int_a^b[f'(x)]^2dx$$

（利用$f(x)=\int_a^x f'(t)dt$）

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$，证：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \le \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

（$|f(x)|=|\int_a^x f'(t)dt| \le \int_a^x |f'(t)|dt$，

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \le \int_a^b |f'(x)|\int_a^x |f'(t)|dtdx = \frac{1}{2}[\int_a^x |f'(t)|dt]^2 |_a^b = \frac{1}{2}[\int_a^b |f'(t)|dt]^2$$

再用柯西不等式)

9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$，$0< f'(x) \le 1$，证：

$$(\int_a^b f(x)dx)^2 \ge \int_a^b f^3(x)dx$$

（令 $F(x)=(\int_a^x f(t)dt)^2 - \int_a^x f^3(t)dt$，利用导数证明）

１０．（１）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0, |f''(x)| \le M$，证明：

$$|\int_a^b f(x)dx| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$$

（２）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n$ 阶连续导数，$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，

$|f^{(2n)}(x)| \le M$，证明：

$$|\int_a^b f(x)dx| \le \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$$

（(1）利用上一节中例 10 的（1)，(2）是（1）的推广，先证明：

$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx = (-1)^n(2n)!\int_a^b f(x)dx$，其中 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$）

１１．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0,$ 证明：对 $\forall x \in (a,b)$ 有

$$|\frac{b-a}{(x-a)x-b)}f(x)| \le \int_a^b |f''(x)|dx$$

（左 $=|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(b)}{x-b}| = |f'(\xi)-f'(\eta)| = |\int_\xi^\eta f''(t)dt|$）

１２．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0,\ f(x)\ne 0(x\in(a,b))$，证明：

$$\int_a^b |\frac{f''(x)}{f(x)}|dx \ge \frac{4}{b-a}$$

（ $|f(c)| = \max|f(x)| > 0$，利用上题有

$$\frac{1}{|f(c)|}\left|\frac{b-a}{(c-a)(c-b)}f(c)\right|\le\frac{\int_a^b|f''(x)|dx}{|f(c)|}\le\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx$$

而当 $c\in(a,b)$ 时总有 $\left|\frac{b-a}{(c-a)(c-b)}\right|\ge\frac{4}{b-a}$ ）

１３．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $|f'(x)|\le M$ ，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$$

（左 $=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx\right|$

而 $\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx\right|\le\frac{M}{2n^2}$ ）

14．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加， $p(x)\ge0$ 且连续，求证：

$$\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx\ge\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx$$

15．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $1\le f(x)\le2$ ，证明：

$$1\le\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{9}{8}$$

（左边不等式可用二重积分或柯西不等式去证，左边不等式与条件“$1\le f(x)\le2$”无关，但需“$f(x)>0$”。右边不等式的证明有一定难度：$1\le f(x)\le2\Rightarrow[f(x)-1][2-f(x)]\ge0$

$\Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\le3\Rightarrow3\ge\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx\ge2[\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{2}{f(x)}dx]^{\frac{1}{2}}$ ）

１６．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

（用二重积分证明）

１７．证明：$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{4}{5}$

（$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$，$I^2=\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}dxdy>\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，

便可得左边不等式．当$u<0$ 时有$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{e^{\xi}}{3!}u^3<1+u+\frac{u^2}{2}$，

故$e^{-x^2}<1-x^2+\frac{x^4}{2}$ 两边积分可得右边不等式）

１８．设$g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$g''(x)\ge 0$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a\le f(x)\le b$，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g[f(x)]dx\ge g[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx]$$

（本题是均值不等式中结论（３）的特例）

１９．设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^1 f(x^{\mu})dx\ge f(\frac{1}{\mu+1})\,(\mu>0)$$

（本题可视为上题的特例）

２０．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0<f(x)<1$，证明：

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}dx\ge\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}$$

（可视为 18 题的特例，其中$g(x)=\frac{x}{1-x}$，也可用二重积分证明）