

# 东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数 B 考试学期 10-11-3 得分         

适用专业 13、42 系 考试形式 开卷 考试时间长度 120 分钟

可带教材:《线性代数》, 陈建龙, 周建华, 韩瑞珠, 周后型编, 科学出版社

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. (30%) 填空题 ( $E$  表示  $n$  阶单位矩阵,  $O$  表示  $n$  阶零矩阵):

1. 若对任意 3 维列向量  $\eta = (x, y, z)^T$ , 矩阵  $A$  满足  $A\eta = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ x+5z \end{pmatrix}$ , 则  $A =$  \_\_\_\_\_;

2. 假设  $\alpha = (1, -1)$ ,  $\beta = (1, 2)$ , 则  $(\alpha^T \beta)^{2011} =$  \_\_\_\_\_;

3. 若  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $A^* =$  \_\_\_\_\_;

4. 如果向量组  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$  线性相关, 则参数  $k =$  \_\_\_\_\_;

5. 假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 2A + E = O$ , 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

6. 齐次线性方程组  $x + 2y - z = 0$  的一个基础解系是 \_\_\_\_\_;

7. 若  $3 \times 3$  矩阵  $A$  的特征值是  $-1, 0, 2$ , 则行列式  $|A^2 + 3E| =$  \_\_\_\_\_;

8. 二次型  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  对应的实对称矩阵是 \_\_\_\_\_;

9. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$  为正定矩阵, 则参数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_;

10. 已知  $2 \times 2$  矩阵  $A, P$  满足  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha, \beta), Q = (-\beta, \alpha)$ , 则

$Q^{-1}AQ =$  \_\_\_\_\_.

二. (12%) 已知  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $AP = P\Lambda$ , 求  $A^{2011}$ .

三. (12%)  $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$ , 计算  $|A|$ , 并根据  $k$  的不同取值讨论  $A$  的秩.

四. (14%) 设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 讨论方程组  $Ax = b$  的解的情况。如果有无穷多个解, 写出其通解.

五. (14%) 已知  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似,

- (1) 求参数  $x, y$  的值;
- (2) 求一正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = B$ .

六. (9%) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_3 + kx_3^2$ ,  $g(z_1, z_2, z_3) = -z_1^2 + 2z_3^2$ 。

(1) 求一可逆线性变换  $x = Cy$  将  $f$  化成标准型。

(2) 当参数  $k$  满足什么条件时, 存在可逆线性变换将  $f$  变成  $g$ ?

七. (9%) 设  $A, B$  为  $n$  阶正定矩阵.

1) 若  $AB$  为对称矩阵, 证明:  $AB = BA$ .

2) 若  $AB = BA$ , 证明:  $AB$  为正定矩阵.