第五节 函数的微分

一、微分的定义

二、微分的几何意义

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

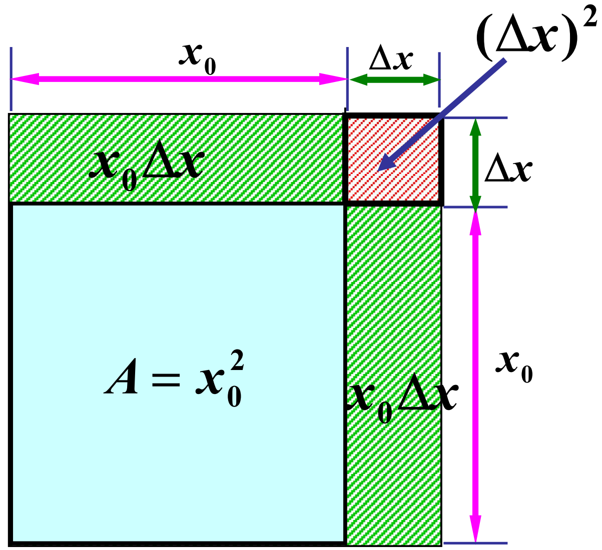
四、微分在近似计算中的应用

一、微分的定义

引例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$,

则面积增量



$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$

(1)是Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2) 当$|\Delta x|$很小时, $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$, **则**

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x.$$

再例如， 设函数 $y = x^3$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= \underbrace{3x_0^2 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，(2)是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$，

则 $\Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x.$ **既容易计算又是较好的近似值**

问题:这个线性函数(改变量的主要部分)是否所有函数的增量都有?它是什么?如何求?

定义: 若函数 $y = f(x)$ **在点** x_0 **的增量可表示为**

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \boxed{= A\Delta x + o(\Delta x)}$$

(A **为不依赖于** Δx **的常数)**

则称函数 $y = f(x)$ **在点** x_0 **可微, 而** $A\Delta x$ **称为** $f(x)$ 在

点 x_0 **的相应于增量** Δx **的微分, 记作** $\mathrm{d}y$ **即**

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

说明: (1) $\mathrm{d}y$ 是自变量的增量 Δx的线性函数 ;

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

说明：(1) $\mathrm{d}y$ 是自变量的增量 Δx的线性函数；

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时, $\mathrm{d}y$与Δy是等价无穷小；

因为$\dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \dfrac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$

(4) A是与Δx无关的常数, 但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$　(线性主部).

定理: 函数 $y = f(x)$ **在** x_0 **可微的充要条件是**

$y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$，**即**

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

可微 ⟺ **可导**

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = \Delta x$. **所以**

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

即函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数．导数也叫"微商".

例1. 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分 .

解: $\because \quad \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

$$(x^2)'=2x$$

$\therefore$ 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y=(x^2)'\Big|_{x=1}\Delta x=2\Delta x;$$

在 $x=3$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y=(x^2)'\Big|_{x=3}\Delta x=6\Delta x.$$

例2. 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2$, $\Delta x=0.02$ 时的微分.

解: $\because \quad \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

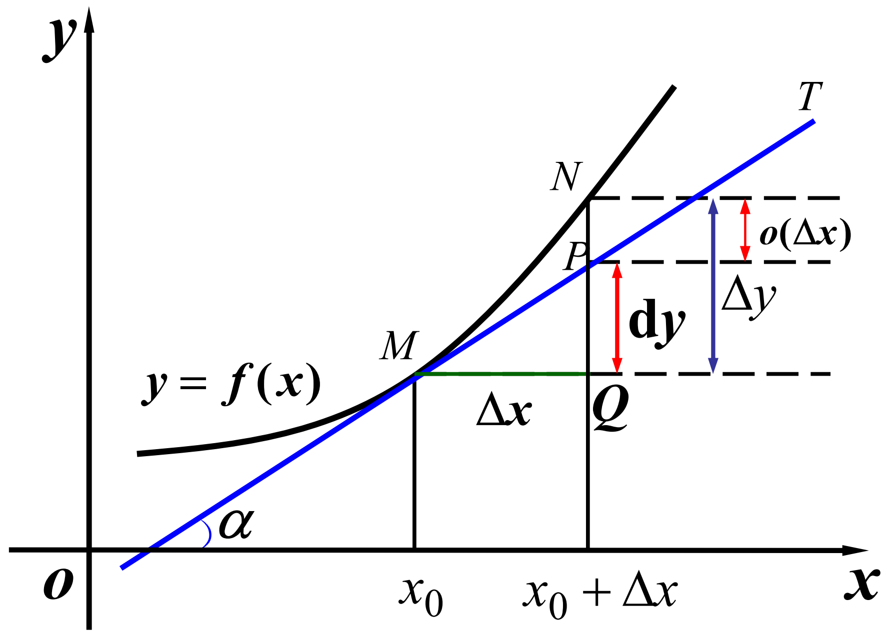
$$(x^3)'=3x^2,$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}$$

$$=0.24.$$

二、微分的几何意义

如图,



$$QP = MQ \cdot \tan\alpha$$
$$= \Delta x \cdot f'(x_0)$$
$$= \mathrm{d}y$$

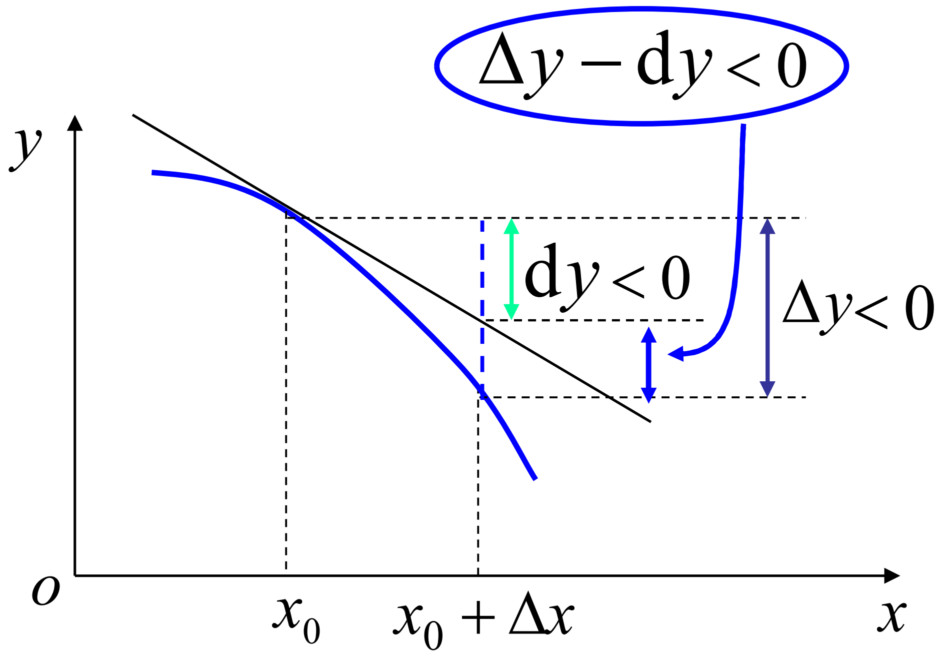
$\mathrm{d}y$ 就是切线纵坐标对应的 增量.

当$|\Delta x|$很小时，在点 M 的附近,

切线段 MP 可近似代替曲线段 MN.

思考与练习

1. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y$, Δy 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

微分表达式　$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,$

微分的求法：**先计算函数的导数再乘以自变量的微分.**

1. 基本初等函数的微分公式 (对照表)

导 数 公 式	微 分 公 式
$(C)' = 0$	$\mathrm{d}(C) = 0$
$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$

导 数 公 式	微 分 公 式
$(\sin x)' = \cos x$	$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$
$(\sec x)' = \sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\mathrm{d}x$
$(\csc x)' = -\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$
$(a^x)' = a^x\ln a$	$\mathrm{d}(a^x) = a^x\ln a\mathrm{d}x$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

导 数 公 式	微 分 公 式
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
$(Cu)' = Cu'$	$\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v \neq 0)$

3. 复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 有如下求导和微分法则 .

求 导 法 则	微 分 法 则
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x$ $=f'(u)\cdot g'(x)\mathrm{d}x$

4. 微分形式不变性

设函数 $y=f(u)$ 有导数 $f'(u)$,

(1) 若 u 是自变量时， $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$;

(2) 若 u 是中间变量时，即是另一变量 x 的可微函数 $u=g(x)$, 则

$$\mathrm{d}y=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u. \qquad \mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$$

结论: 无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是 $\boxed{\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u}$

微分形式的不变性

例3. 设 $y=\sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解: $\because \quad y=\sin u, \quad u=2x+1,$

$$\therefore \quad \mathrm{d}y=(\sin u)'\mathrm{d}u=\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot(2x+1)'\mathrm{d}x$$

$$=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

例4. 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求 dy.

解法1: **利用先求导数再求微分的方法**

因为 $y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$， 所以 $dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$

解法2: **利用微分形式不变性.**

$$dy=d\ln(x+e^{x^2})=\frac{1}{x+e^{x^2}}\underline{d(x+e^{x^2})}$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}[\underline{dx}+e^{x^2}\underline{d(x^2)}]=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$$

例5. 设 $y = \mathrm{e}^{1-3x}\cos x$, 求$\mathrm{d}y$.

$$\boxed{\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v}$$

解: **根据积的微分法则**

$$\mathrm{d}y = \cos x \cdot \mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}) + \mathrm{e}^{1-3x} \cdot \mathrm{d}(\cos x)$$

$$= \cos x \cdot \mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}(1-3x) + \mathrm{e}^{1-3x} \cdot (-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \cos x \cdot (-3\mathrm{e}^{1-3x})\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{1-3x} \cdot (-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x + \sin x)\mathrm{d}x.$$

四、计算函数的近似值

1.求$f(x)$在点$x=x_0$附近的近似值;

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (|\Delta x|\text{很小时})$$

例. 计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值.

解: 设 $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x$, (x为弧度)

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

因为 $30^\circ 30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$, 取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$,

则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin 30^\circ 30'=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.5076.$$

2. 工程上常用的近似公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

令 $x_0 = 0$, 则 $f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x$

(假设 $|x|$ 很小)

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{n}x$;

(2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度);

(4) $e^x \approx 1 + x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

例13. 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解: $\sqrt{1.05} = \sqrt{1 + 0.05}$,

根据近似公式 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$,

取 $x = 0.05,\ n = 2$,

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.05) = 1.025 .$$

*3. 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A，其近似值为 a，

$|A-a|$ 称为a 的绝对误差

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为a 的相对误差

若$|A-a| \le \delta_A$，则

δ_A 称为测量 A 的绝对误差限

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的相对误差限

误差传递公式：

若直接测量某量得 x，已知测量误差限为 δ_x，

按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\leq |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

内容小结

1. 微分概念

- 微分的定义及几何意义
- 可导 $\rightleftarrows$ 可微

2. 微分运算法则

微分形式不变性：$\mathrm{d}\,f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}\,u$

（u 是自变量或中间变量）

3. 微分的应用 $\begin{cases}\text{近似计算} \\ \text{估计误差}\end{cases}$