2021-2022 学年《线性代数》第二次过程性考试试题

（共计 8 个题目，满分 100 分，开卷考）

(请同学们独立完成考试后，将答题部分以 PDF 文件形式上传两位助教老师邮箱，上传的截止时间为 5 月 11 日上午 9 点 50 分，谢谢！)

1. （15 分）判断下列命题是否正确，如果认为是**不正确**的，请举出**反例**说明。

（1） 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则方程组 $Ax=\beta(\beta\neq 0)$ 一定有无穷多个解；

（2） 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=m$，则方程组 $Ax=\beta(\beta\neq 0)$ 一定有解；

（3） 若 A 是一个 n 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则一定有秩的不等式 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 成立；

2.（15 分）设 $W=\left\{X\in\mathbb{R}^3 \middle| X=(x_1,x_2,x_3)\text{ 满足 } x_1=x_3\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集，试**证明** W 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间，并求出 W 的维数和一组基；

3.（15 分）求向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$ 的**所有**极大线性无关组；

4.（15 分）试问下列线性方程组有解吗？若有解请写出它的**通解**：

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13; \end{cases}$$

5.（15 分）设V是数域P上的三维线性空间，I：α，β，γ 是V的一组基，证明：II：$\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，$\gamma+\alpha$ 也是V的一组基。若V中的一个向量X在**基I**下的坐标为$(1,0,0)$，求向量X在**基II**下的坐标；

6.（10 分）已知由次数小于或等于 3 的实系数多项式组成的集合

$$V=\{f(t)|f(t)=at^3+bt^2+ct+d,a、b、c、d\text{为实数}\}$$

构成一个线性空间。试指出 V 中的如下三个向量

$$\alpha=t^3+4t^2-2t+3,\quad \beta=t^3+6t^2-t+4,$$

$$\gamma=3t^3+8t^2-8t+7$$

的线性关系，并**说明理由**；

7.（10 分）设欧氏空间$\mathbb{R}^3$中有一组基 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,0,0)$。若$\mathbb{R}^3$的内积是标准内积，试用 G-S 正交化方法将α_1，α_2，α_3化为$\mathbb{R}^3$的一组**标准正交基**；

8. (5 分) 设 n 阶矩阵 A、$B \in M_n(\mathbb{R})$，证明：

$$r(AB - E_n) \le r(A - E_n) + r(B - E_n),$$

这里，E_n 是 n 阶单位矩阵。