高等数学练习卷（Ⅳ）

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+9n^3+2n}{2n^4+1}=$ ______________________ ；

（2）设 $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ______________ ；

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)<0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 的大小次序为 ________________________；

（4）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\,2^n}$ 的收敛域是 ______________ ；

（5）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=$ ______________________ .

二、计算下列极限（16 分，每小题 4 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$；（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin x^3}$.

三、求下列积分（16 分，每小题 4 分）

（1）$\int\left(2e^x+\sqrt{x}\right)dx$；（2）$\int x\left(1+x^2\right)^3dx$；（3）$\int\arctan x\,dx$；（4）$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\,dx$.

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8 分，每小题 4 分）

（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}dx$；　　　（2）$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

五、（16 分，每小题 4 分）判别下列级数的敛散性，并说明理由. 如果非正项级数是收敛的，需判别是条件收敛还是绝对收敛.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$；（4）$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n-3)}}$.

六、（7 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{4^n}$ 的和.

七、（14 分，每小题 7 分）（1）证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$.

（2）求函数 $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+2$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

八、（8 分）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上连续，且 $f(x)=x\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+x^2\int_0^1 f(x)\,dx-x$，

求 $f(x)$.

华东师范大学化学与分子工程学院本科化学类 2015 级（1）班

高等数学练习卷(Ⅳ)答案

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{1+x^2}$；（3）$f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$；（4）$[0,4)$；（5）$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

二、计算下列极限（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}4x^3=32$ 4 分

（2）解 $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$ 4 分

（3）解 $\because\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$ 3 分

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=e$ 4 分

（4）解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$ 4 分

三、求下列积分（16 分，每小题 4 分）

（1）解 $\int\left(2e^x+\sqrt{x}\right)dx=2\int e^x\,dx+\int\sqrt{x}dx$ 2 分

$=2e^x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ 4 分

（2）解 $\int x\left(1+x^2\right)^3dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^3d\left(1+x^2\right)$ 2 分

$=\frac{1}{8}\left(1+x^2\right)^4+C$ 4 分

（3）解 $\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$ 2 分

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$ 4 分

（4）解 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}dx = \int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\,|\cos x|dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\,|\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\,|\cos x|dx$$ 2 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx$$

$$= \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5}$$ 4 分

四、判断下列广义积分的敛散性；若收敛，则求其值（8 分，每小题 4 分）

（1）解 $\because \int_1^b \frac{1}{x^5}dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4b^4}$，且 $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4b^4}\right) = \frac{1}{4}$ 2 分

$\therefore$ 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}dx$ 收敛，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}dx = \frac{1}{4}$ 4 分

（2）解 $\because \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$，且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$ 2 分

$\therefore$ 广义积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，且 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2$ 4 分

五、（16 分，每小题 4 分）

判别下列级数的敛散性，并说明理由. 如果非正项级数是收敛的，需判别是条件收敛还是绝对收敛.

（1）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 2 分

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散 4 分

（2）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ 2 分

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛 4 分

（3）解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5} = +\infty$ 2 分

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ 发散　　4 分

（4）解 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n-3)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n-2)}}$，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-3)}} = 0$

$\therefore$由莱布尼兹判别法知，$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n-3)}}$ 收敛　　2 分

又$\because \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n-3)}}}{\frac{1}{n}} = 1$，且$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

$\therefore \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-3)}}$ 发散

因此$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n-3)}}$ 条件收敛.　　4 分

六、（7 分）

解 收敛域为$(-4,4)$

当$-4<x<4$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{4^n}\right)' = x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n\right]'$

$$= x\left(\frac{4}{4-x}\right)' = \frac{4x}{(4-x)^2}$$　　4 分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \left.\frac{4x}{(4-x)^2}\right|_{x=1} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{7}{9}$$　　7 分

七、（14 分，每小题 7 分）

（1）证 令 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$，则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{1+x} < 0 \quad（x>0）$$　　4 分

$\therefore f(x)$ 在$[0,+\infty)$上严格递减，因此当$x>0$时，$f(x) < f(0)$，即

$\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ （$x > 0$） 7 分

（2）解 $\because f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3)$

$\therefore$令 $f'(x) = 0$ 可得 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内的驻点：$x_1 = 0$，$x_2 = 1$ 3 分

又$\because f(0) = 2$，$f(1) = 3$，$f(-1) = -9$，$f(2) = -6$

$\therefore$所求的最大值为 $f(1) = 3$，最小值为 $f(-1) = -9$ 7 分

八、（8 分）

解 设 $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$，$B = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$，则 $f(x) = Ax + Bx^2 - x$，

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = A\int_{-1}^{0} xdx + B\int_{-1}^{0} x^2dx - \int_{-1}^{0} xdx$$

$$= -\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}$$

即 $A = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{2} \Rightarrow 9A - 2B = 3$ 3 分

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = A\int_{0}^{1} xdx + B\int_{0}^{1} x^2dx - \int_{0}^{1} xdx$$

$$= \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}$$

即 $B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B - \frac{1}{2} \Rightarrow 3A - 4B = 3$ 5 分

解方程组$\begin{cases} 9A - 2B = 3 \\ 3A - 4B = 3 \end{cases}$，得 $A = \frac{1}{5}$，$B = -\frac{3}{5}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}x^2 - x = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}x$ 8 分

华东师范大学化学与分子工程学院本科化学类 **2015** 级（**1**）班