东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 10-11-3 得分 ____

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

学号____ 姓名____

密 封 线

一．(30%)填空题（E 表示单位矩阵）

1．设 $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{2011}B^6C^{17}=$ $\begin{pmatrix}-1&0\\17&1\end{pmatrix}$____；

2．若矩阵 A 满足 $3A^2+2A=O$，则 $(A+E)^{-1}=$ $\cancel{3A-E}$ $E-3A$____；

3．若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$ 线性相关，则参数 $k=$ 0____；

4．若 $\alpha=(1,2,3)^T,\beta=(2,1,0)^T$ 分别是矩阵 A 的属于特征值 1 和 -1 的特征向量，$\eta=2\alpha+3\beta$，则 $A^3\eta=$ $(-4,1,6)^T$____；

5．如果矩阵 $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0\\1&x\end{pmatrix}$ 相似，则参数 $x=$ 1____；

6．若 4 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\p&4&c\\q&r&5\end{pmatrix}$ 的二重特征值，则 A 的行列式 $|A|=$ 32____；

7．与 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,0,-1)$ 都正交的单位向量是 $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$____；

8．若二次型 $f(x,y)=x^2+2txy+3y^2$ 是正定的，则参数 t 满足条件 $|t|<\sqrt{3}$____；

9．若 n 维列向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\beta}=2$，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{a}^T$ 的非零特征值为 2；

10．如果向量组中每个向量都是线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+x_4=5\end{cases}$ 的解，则这样的向量组的秩之最大值为 3____。

二．~~（12%）~~10% 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&1&3&0\\0&3&1&2\\3&2&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}&&&1\\&&2&\\&\iddots&&\\n&&&\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$。

分别求行列式 $|A|$、$|B|$ 及 $|C|$ 的值。

解：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-6\\0&3&1&2\\0&2&-6&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-6\\0&4&20\\0&-4&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&20\\-4&4\end{vmatrix}=96$$

……………….2………………………2……………2…………2……………………………

$|B|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$ $(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}n!$ $(-1)^{\frac{n^2+3n}{2}}$ ……………………………2

~~$|C|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}96n!$~~ ……………………………………2

~~n奇~~ $\begin{cases} n奇 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}n! \\ n偶. & (-1)^{\frac{n}{2}}n! \end{cases}$

三．~~（12%）~~14% 求 $A(\ 2X-B\ )=X$ 的解，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

解：由 $A(\ 2X-B\ )=X$ 知

$(2A-E)X=AB$ ……………………………………………………………2

$AB=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$， ……………………………………………………~~2~~3

$2A-E=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $(2A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&24\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$ ……………~~1~~2+3=~~4~~5

所以 $X=(2A-E)^{-1}AB$ …………………………………………………2

$$=\begin{pmatrix}1&-2&16\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ……………………………………………………2

四．（12%）设向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\q\end{pmatrix}$ 可以由向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$ 线性表示。

1．分别求参数 p,q 的值，并分别将 β_1,β_2 写成 α_1,α_2 的线性组合。

2．记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2),B=(\beta_1,\beta_2)$。求矩阵方程 $AX=B$ 的解。

解：对 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&1&3&1\\1&p&5&q\end{pmatrix}$ 作初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&-1&1/3\\0&0&p+3&q-1/3\bullet p-1/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1/3\\0&1&-1&1/3\\0&0&p+3&q-1/3\bullet p-1/3\end{pmatrix}$$ …………2

因 β_1,β_2 可以由 α_1,α_2 线性表示，$p=-3,q=-\dfrac{2}{3}$ ……………………………2+2

且 $\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\dfrac{1}{3}\alpha_1+\dfrac{1}{3}\alpha_2$，故……………………………………2+2

$$X=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{3}\\-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$ ……………………………………………………2

五．（14%）已知 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&a&0\\1&-2&2\end{pmatrix}$。根据参数 a 的值讨论矩阵 A 是否相似于对角阵。

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-a)$ ……………………………………3

若 $a\neq1,3$，则 A 有三个互异的特征值，所以，A 相似于对角阵。…………………3

若 $a=1$，由于 $r(A-E)=1$，故 $(A-E)x=\theta$ 有两个线性无关的解，进而共有 3 个线性无关的特征向量，从而相似于对角阵。……………………………4

若 $a=3$，由于 $r(A-3E)=2$，故 $(A-3E)x=\theta$ 只有 1 个线性无关的解，进而共有 2 个线性无关的特征向量，从而不与对角阵相似。…………………………4

六． （12%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$。求一正交变换将此二次型化为标准形，并写出相应的标准形。

解：f 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$。……………………………………………………2

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-9)$，所以，$A$ 的特征值为 0（二重）和 9。……………………2

$Ax=\theta$ 有基础解系 $\alpha_1=(0,1,1)^T,\alpha_2=(2,1,0)^T$，

正交化得 $\beta_1=(0,1,1)^T,\beta_2=(4,-1,1)^T$，

单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(4,-1,1)^T$……………………………4

$(A-10E)x=\theta$ 有基础解系 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$

单位化得 $\gamma_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$……………………………………………………………2

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 Q 是正交阵。若令 $x=Qy$，则 f 可以变成标准形：

$f(x_1,x_2,x_3)=9y_3^2$。…………………………………………………………………………2

七． （8%）证明题

1． 若 $n+2$ 个 n 阶实对称矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+2}$ 都是可逆的，证明，存在 $i\neq j$，使得 A_i 与 A_j 是合同的。

证：n 阶可逆实对称矩阵的秩都等于 n，其正惯性指数只有 $n+1$ 种可能。…………1

因此，这 $n+2$ 个矩阵中必有两个矩阵的正惯性指数是相同的，

从而它们是合同的。……………………………………………………………………………2

2． 证明：对任意 $n\times n$ 矩阵 A，存在 $n\times n$ 矩阵 B 使得 $r(AB)=r(A)=r(B)$。

证：设 $r(A)=p$，存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\begin{pmatrix}E_p&O\\O&O\end{pmatrix}Q$。……………………2

令 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_p&O\\O&O\end{pmatrix}\cancel{P^{-1}}$，

则 $AB=P\begin{pmatrix}E_p&O\\O&O\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}E_p&O\\O&O\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}E_p&O\\O&O\end{pmatrix}$……………………………2

因 P 可逆，所以 $r(AB)=r(B)=p$。…………………………………………………………1