思考与练习 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=\underline{\qquad\quad};\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\underline{\qquad\quad}.$$

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度

一、斯托克斯公式

二、空间曲线积分与路径无关的条件

三、环流量与旋度

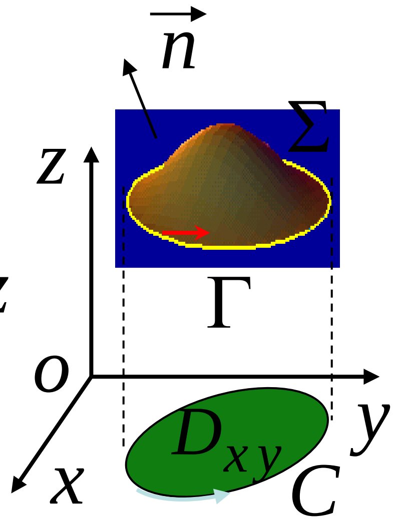
一、 斯托克斯(Stokes) 公式

定理1. 设标准曲面 Σ 的边界 Γ是分段光滑曲线, Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则, P,Q,R在包含Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数,则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$ (斯托克斯公式)

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$



为便于记忆, 斯托克斯公式还可写作:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

思考与练习 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \underline{\ {}^{2}\!/_{r}\ };\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r) = \underline{\ \vec{0}\ }.$$

提示： $\operatorname{grad} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{r - x\cdot {}^{x}\!/_{r}}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{r^2-z^2}{r^3}$$

三式相加即得$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

11. 设 $\overrightarrow{A}=\{x-z,x^3+yz,-3xy^2\}$,求 $\overrightarrow{A}$的旋度$rot\overrightarrow{A}$,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(rot\overrightarrow{A})_n\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}(0\leq z\leq 2)$, 其法向量与z轴正向夹角为锐角.

11. 设 $\overrightarrow{A} = \{x - z, x^3 + yz, -3xy^2\}$,求 $\overrightarrow{A}$的旋度$rot\overrightarrow{A}$,并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma}(rot\overrightarrow{A})_n \mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}(0 \leq z \leq 2)$, 其法向量与z轴正向夹角为锐角.

二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理2. 设 G 是空间中单连通区域, 函数 P, Q, R 在 G 内具有连续一阶偏导数, 则下列四个条件相互等价:

(1) 对 G 内任一分段光滑闭曲线 Γ, 有

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

(2) 对 G 内任一分段光滑曲线 Γ, $\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 与路径无关

(3) 在 G 内存在某一函数 u, 使 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

(4) 在 G 内处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

证: $(4)\Rightarrow(1)$ 由斯托克斯公式可知结论成立;

$(1)\Rightarrow(2)$ (自证)

$(2)\Rightarrow(3)$ 设函数

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P\,\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y,z)$$

$$=P(x,y,z)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)$

故有 $$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$(3)\Rightarrow(4)$ 若(3)成立, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

因P, Q, R 一阶偏导数连续, 故有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

同理 $$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

证毕

例3. 验证曲线积分$\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$
与路径无关, 并求函数

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$$

解: 令 $P=y+z\,,\;Q=z+x\,,\;R=x+y$

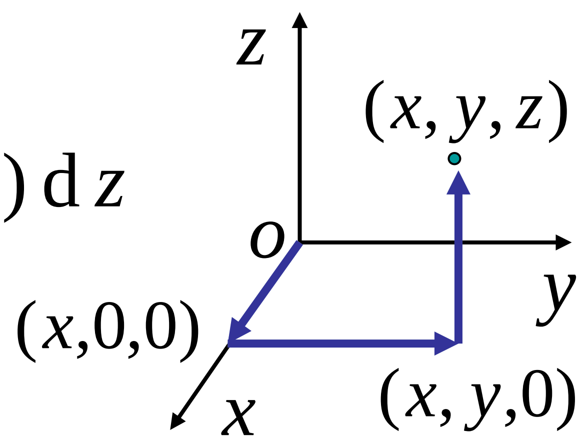
$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$\therefore$ 积分与路径无关, 因此

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z(x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z$$

$$=xy+yz+zx$$



三、 环流量与旋度

斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

设曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

曲线 Γ的单位切向量为 $\vec{\tau}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$

则斯托克斯公式可写为

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A}=(P, Q, R)$, 引进一个向量

$$\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \operatorname{rot}\vec{A}$ *rotation*

于是得斯托克斯公式的向量形式：

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

或
$$\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s \qquad ①$$

定义: $\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s$ 称为向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线 Γ的**环流量**. 向量 $\operatorname{rot}\vec{A}$ 称为向量场 $\vec{A}$ 的**旋度**.

大拇指所指方向为旋度的方向，知道大拇指的方向就知道封闭曲线是顺时针还是逆时针旋转了。

维基百科上有一幅图特别直观，一架农业飞机翼尖激起的气流。烟雾成顺时针或逆时针方向运动，对应的旋度在飞机前行的方向上：

斯托克斯公式①的物理意义:

$$\iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_\tau\,\mathrm{d}s$$

向量场 $\vec{A}$ 产生的旋度场穿过 Σ 的通量

为向量场 $\vec{A}$ 沿 Γ 的环流量

注意 Σ 与 Γ 的方向形成右手系!

例4. 求电场强度 $\vec{E}=\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ 的旋度 .

解: $$\mathrm{rot}\,\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{qx}{r^3} & \dfrac{qy}{r^3} & \dfrac{qz}{r^3}\end{vmatrix}=(0,0,0)\quad(\text{除原点外})$$

这说明, 在除点电荷所在原点外, 整个电场无旋.

例5. 设 $\vec{A}=(2y\,,3x\,,z^2)$, $\sum: x^2+y^2+z^2=4$, $\vec{n}$ 为Σ的外法向量,计算 $I=\oiint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$.

解: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & z^2\end{vmatrix}=(0,0,1)$$

$$\vec{n}=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$$

$$\therefore\quad I=\oiint_{\Sigma}\cos\gamma\,\mathrm{d}S=0$$

场论

设$f(x,y,z)$及

$$\overrightarrow{A}(x,y,z)=p(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

分别是定义在空间区域Ω上的数值函数

（数量场）及矢值函数（矢量场）。

场论中的三个重要概念

设 $u = u(x, y, z)$, $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 则

梯度: $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \nabla u$

散度: $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$

旋度: $\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A}$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下的部分,取外侧.

【例子】计算 $I=\iint_{\Sigma} xdydz$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下部分, 取外侧.

【解三】设 Σ_1 为平面 $z=0$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截下的部分, 方向向下. 设 Σ_2 为平面 $z=x+2$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截下的部分, 方向向上. 则由高斯公式可得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xdydz=\iiint_{\Omega} dV=\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_0^{x+2} dz$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x+2)\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1} 2\,dxdy=2\pi$$

又因为 $\iint_{\Sigma_1} xdydz=0$，而

$$\iint_{\Sigma_2} xdydz=-\iint_{(z-2)^2+y^2\le 1}(z-2)\,dydz=-\iint_{z^2+y^2\le 1} zdydz=0.$$

于是

$$\iint_{\Sigma} xdydz=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xdydz=2\pi.$$

【例子】计算 $I=\iint_\Sigma xdydz$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下部分，取外侧.

【解二】设 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\in\Sigma: y\geq 0\}$, $\Sigma_2=\{(x,y,z)\in\Sigma: y\leq 0\}$. 则

$$\Sigma_1: y=\sqrt{1-x^2},\ \ (x,z)\in D_{xz}=\{-1\leq x\leq 1, 0\leq z\leq x+2\}$$

$$\Sigma_2: y=-\sqrt{1-x^2},\ \ (y,z)\in D_{xz}=\{-1\leq x\leq 1, 0\leq z\leq x+2\}$$

因为曲面 Σ 上点 (x,y,z) 出方向朝外的单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x,y,0).$$

于是 $I=\iint_\Sigma xdydz=\iint_\Sigma x\cos\alpha\, dS=\iint_\Sigma x\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\cos\beta\, dS$
$=\iint_\Sigma x\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\, dxdz=\iint_\Sigma \frac{x^2}{y}\, dxdz=\iint_{\Sigma_1}\frac{x^2}{y}\, dxdz+\iint_{\Sigma_2}\frac{x^2}{y}\, dxdz$
$=\iint_{D_{xz}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dxdz-\iint_{D_{xz}}\frac{x^2}{-\sqrt{1-x^2}}\, dxdz=2\iint_{D_{xz}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dxdz$
$=2\int_{-1}^1 dx\int_0^{x+2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dz=2\int_{-1}^1\frac{(x+2)x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx=4\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
$=8\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx=4\left(-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\, dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=2\pi.$

【例子】计算 $I = \iint_{\Sigma} xdydz$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下部分, 取外侧.

【解一】设 $\Sigma_1 = \{(x,y,z)\in\Sigma : x\geq 0\}$, $\Sigma_2 = \{(x,y,z)\in\Sigma : x\leq 0\}$. 则

$$\Sigma_1 : x=\sqrt{1-y^2},\ \ (y,z)\in D_{yz}^1 = \{-1\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 2+\sqrt{1-y^2}\}$$

$$\Sigma_2 : x=-\sqrt{1-y^2},\ \ (y,z)\in D_{yz}^2 = \{-1\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 2-\sqrt{1-y^2}\}$$

于是，我们有

$$I = \iint_{\Sigma} xdydz = \iint_{\Sigma_1} xdydz + \iint_{\Sigma_2} xdydz$$
$$\iint_{D_{yz}^1} \sqrt{1-y^2}dydz - \iint_{D_{yz}^2}(-\sqrt{1-y^2})dydz$$
$$= \int_{-1}^{1} dy \int_0^{2+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dz + \int_{-1}^{1} dy \int_0^{2-\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dz$$
$$= \int_{-1}^{1}(2\sqrt{1-y^2}+1-y^2)dy + \int_{-1}^{1}(2\sqrt{1-y^2}-(1-y^2))dy$$
$$= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = 2\pi.$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$， $z \geq 0$ 的外侧.

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ， $z_y'=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}\left[y\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+2\right]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(y^2+2)\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sin^2\theta\,dr+2\pi$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta+2\pi=\frac{1}{8}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]\Big|_0^{2\pi}+2\pi=\frac{9\pi}{4}$

(6) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

解: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法向量为 $\vec{n}=(z_x, z_y, -1)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[y\cdot(-z_x)-x\cdot(-z_y)+z^2]\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+z^2\right)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\cancel{z}(x^2+y^2)\,dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^3\,dr$$

$$=-2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_1^2=-\frac{15}{2}\pi.$$