练习.1将$f(x)=\ln(2+x-3x^2)$在$x=0$处展为幂级数.

二、(10分) 设有界单连通区域D的边界L为光滑曲线, u在闭区域D上有二阶连续偏导数, 且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 试证$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}ds=0$, 其中$\frac{\partial u}{\partial n}$是$u$沿$D$的边界曲线$L$上的外法线方向的方向导数, L方向为逆时针方向.

练习. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在$x=0$处展为幂级数.

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此

$$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

二、 (10分) 设有界单连通区域D的边界L为光滑曲线, u在闭区域D上有二阶连续偏导数, 且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 试证 $\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds=0$, 其中$\frac{\partial u}{\partial n}$是$u$沿$D$的边界曲线$L$上的外法线方向的方向导数, L方向为逆时针方向.

第5节

函数幂级数展开式的应用

一、近似计算

二、欧拉公式

常用方法:

1.若余项是交错级数，则可用余和的首项来解决;

2.若不是交错级数，则放大余项中的各项，使之成为等比级数或其它易求和的级数，从而求出其和.

例1 计算 e 的近似值，使其误差不超过 10^{-5}.

解 因为 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

令 $x = 1,$ 得 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

余和:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots\right)$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n \cdot n!}$$

欲使 $r_n \le 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{n \cdot n!} \le 10^{-5}$,

即 $n \cdot n! \ge 10^5$, 而 $8 \cdot 8! = 322560 > 10^5$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828.$$

一、近似计算

例1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解: $\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3(1-\frac{1}{3^4})^{1/5}$

$$=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

$$\because \left|r_2\right|=3\left(\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot4\cdot9\cdot14}{5^4\cdot4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$

$$<3\cdot\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]<0.5\times10^{-4}$$

$$\therefore\quad \sqrt[5]{240}\approx3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4})\approx3-0.00741\approx2.9926$$

例2. 计算 $\ln 2$ 的近似值，使准确到 10^{-4}.

解: 已知

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

$$\therefore \quad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\le x<1)$$

故

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) \quad (-1<x<1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$ 得 $x=\frac{1}{3}$，于是有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because \ |r_4| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}} + \cdots \right)$$

$$< \frac{2}{3^{11}}\left(1 + \frac{1}{9} + (\frac{1}{9})^2 + \cdots\right) = \frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$= \frac{1}{78732} < 0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore \ \ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right) \approx 0.6931$$

说明: 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

中,令 $x=\dfrac{1}{2n+1}$ (n为自然数) , 得

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

$$\therefore \ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

具此递推公式可求出任意正整数的对数 . 如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例3. 计算积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

(取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

解:
$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

欲使截断误差 $\left|r_n\right| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n=4$,则所求积分近似值为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

$$\approx 0.5205$$

例5. 计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$的近似值, 精确到$10^{-4}$.

解: 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故所给积分不是广义积分.

若定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1, 则它在积分区间上连续, 且有幂级数展开式 :

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=1-\underline{\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

$$|r_3|<\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<0.3\times 10^{-4}$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167\ \approx 0.9461$$

二、欧拉(Euler)公式


欧拉，L.

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$ ①

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 则称 ① **收敛**，且其和为 $u + i v$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n + i v_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ 收敛，则称 ① **绝对收敛.**

由于 $\left| u_n \right| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$， $\left| v_n \right| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ ，故知

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$ 绝对收敛 $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

$\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$ 收敛 .

定义: 复变量 $z = x + i\,y$ 的指数函数为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (\,|z| < \infty\,)$$

易证它在整个复平面上绝对收敛 .

当 $y = 0$ 时, 它与实指数函数 e^x 的幂级数展式一致.

当 $x = 0$ 时,

$$e^{i\,y} = 1 + i\,y + \frac{1}{2!}(i\,y)^2 + \frac{1}{3!}(i\,y)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(i\,y)^n + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cdots\right)$$

$$+ i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i\,\sin y$$

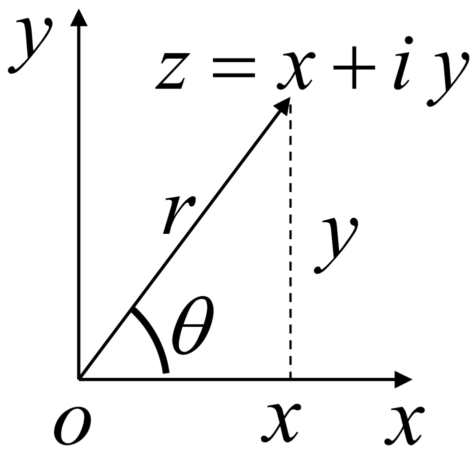
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad \text{(欧拉公式)}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

则 $$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\[2ex] \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \qquad \text{(也称欧拉公式)}$$

利用欧拉公式可得复数的指数形式

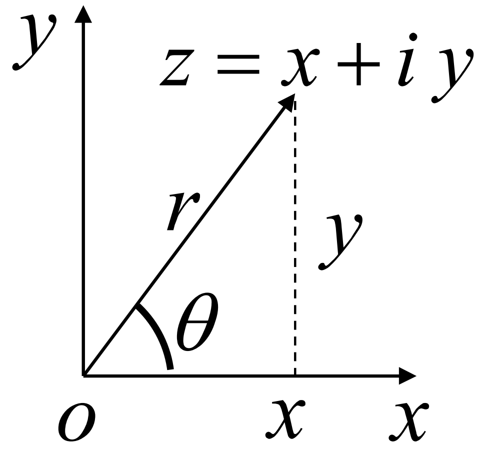
$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta}$$



据此可得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(德莫弗公式)



利用幂级数的乘法, 不难验证

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

特别有

$$e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (x, y\in R)$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x(\cos y + i\sin y)\right| = e^x$$