课前练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中$\Omega$由六个平面 $x=0$, $x=2$, $y=1$, $x+2y=4$, $z=x$, $z=2$ 所围成，$f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

2. 计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$由$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$围成.

思考与练习

1. 将 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 用三次积分表示, 其中Ω由六个平面 $x=0, x=2, y=1, x+2y=4$, $z=x, z=2$ 所围成，$f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}\,x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}\,y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中

Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

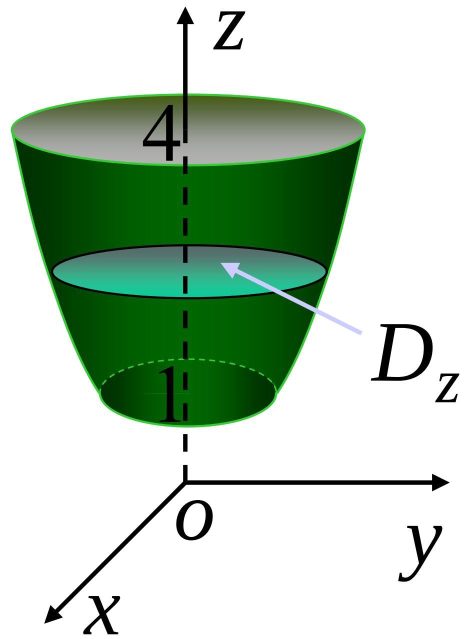
解: $I=\iiint_\Omega \boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_\Omega xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

利用对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

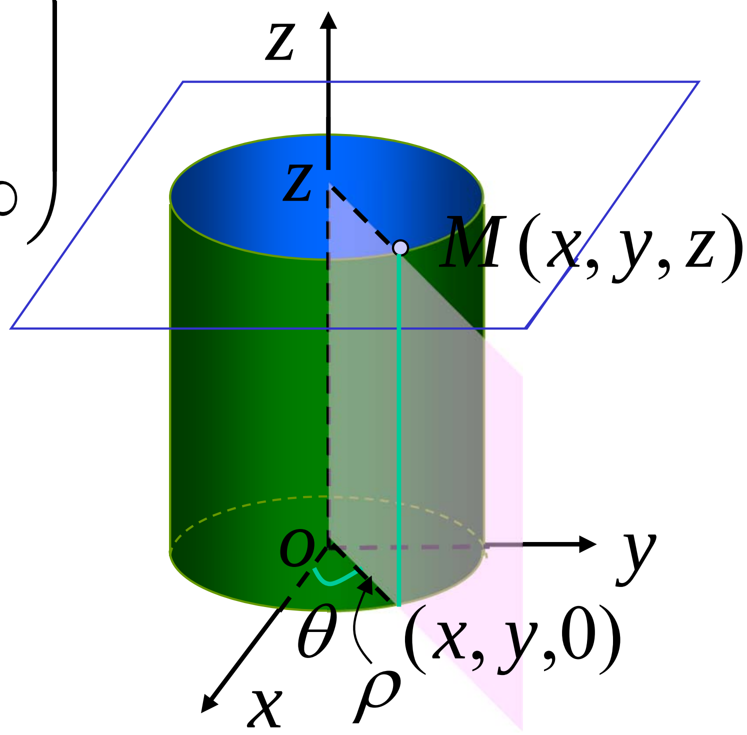
$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$



2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$,将 x,y 用极坐标 ρ,θ 代替,则 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

$\rho=$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$z=$ 常数 ⟶ 平面

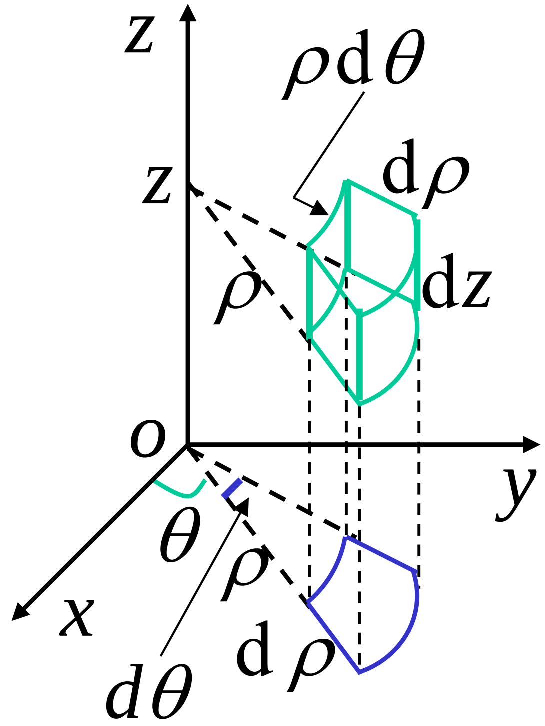
如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

因此 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$



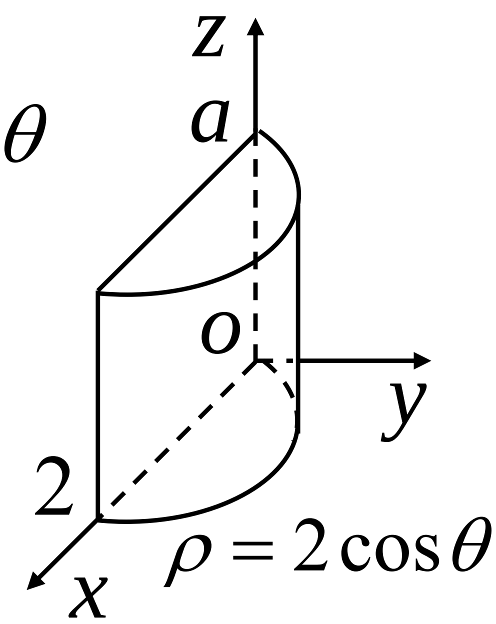
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le a\\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$



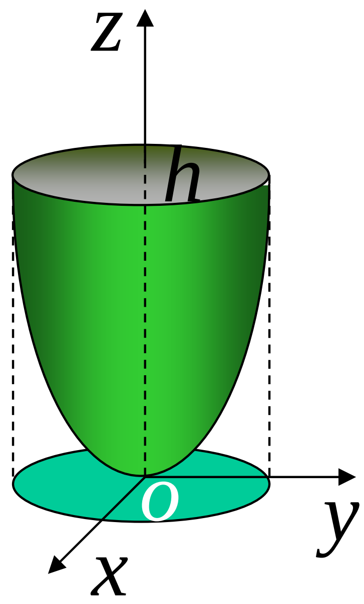
$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^3$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$, 其中Ω由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

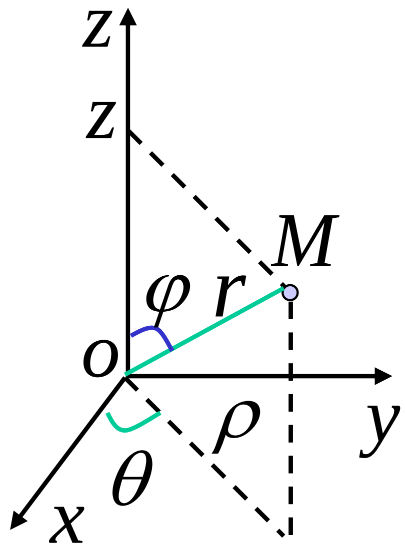
$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}(h-\frac{\rho^2}{4})\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

3. 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 其柱坐标为(ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle ZOM=\varphi$, 则(r,θ,φ)就称为点M 的球坐标.



直角坐标与球面坐标的关系

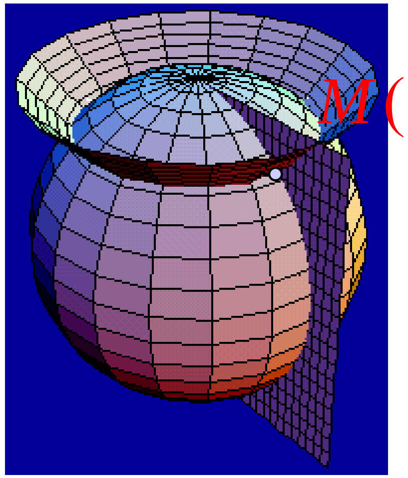
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 ⟶ 球面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$\varphi=$ 常数 ⟶ 锥面



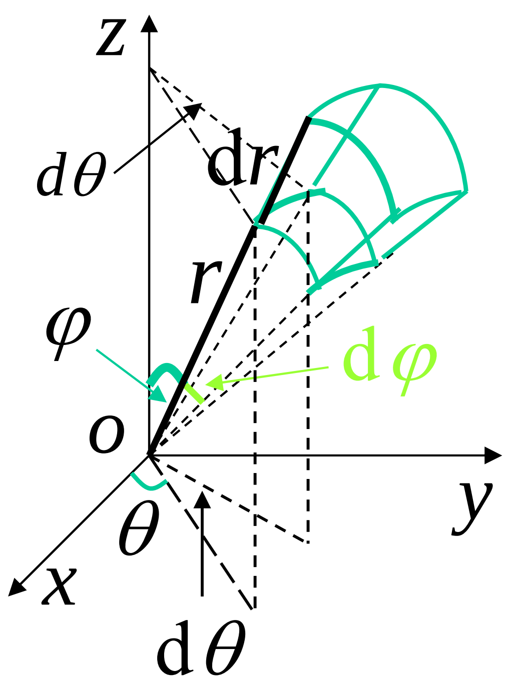
$M(r,\theta,\varphi)$

$$\rho = r\sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega F(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

适用范围:

1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

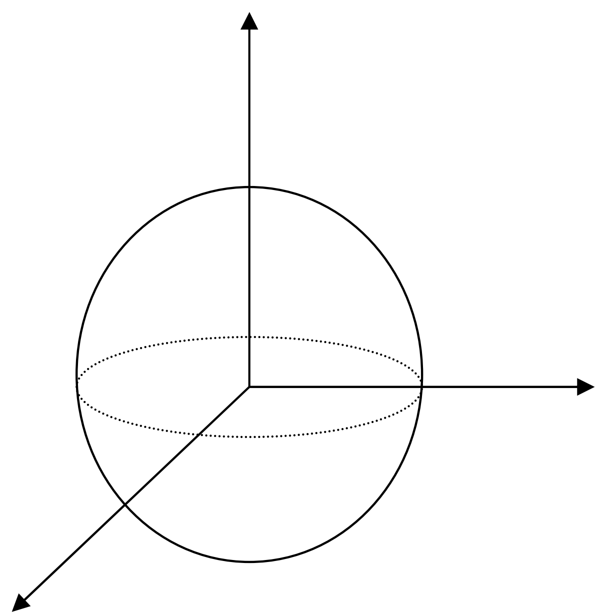
例3 计算$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$ 其中 Ω由 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 围成.

解：$\Omega: 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le R,$

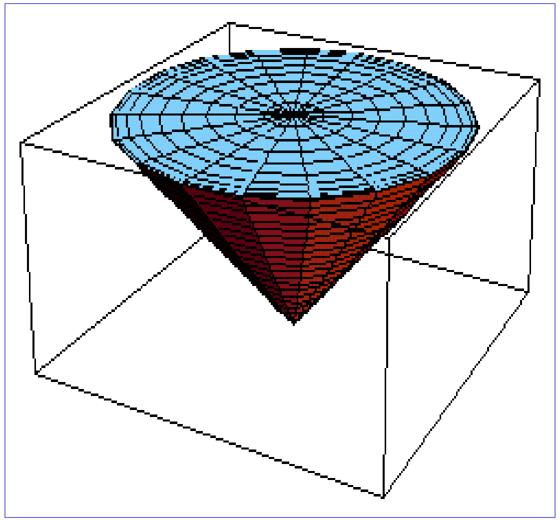
$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin^2 \varphi dr$$

$$= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5$$



例 4 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$是锥面 $x^2+y^2=z^2$， 与平面$z=a \quad (a>0)$所围的立体.



解 用球坐标

$$\because \quad z=a \quad \Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

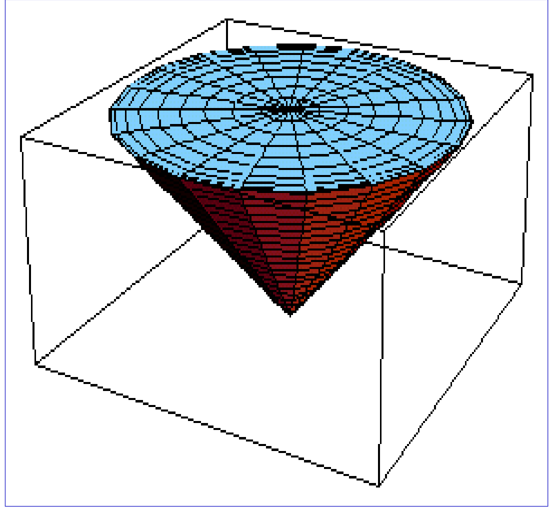
$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \Omega:\ 0\le r\le\frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^4\sin^3\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)d\varphi=\frac{\pi}{10}a^5.$$

用柱面坐标



$$\because x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho,\ D:\quad x^2+y^2\le a^2,$$

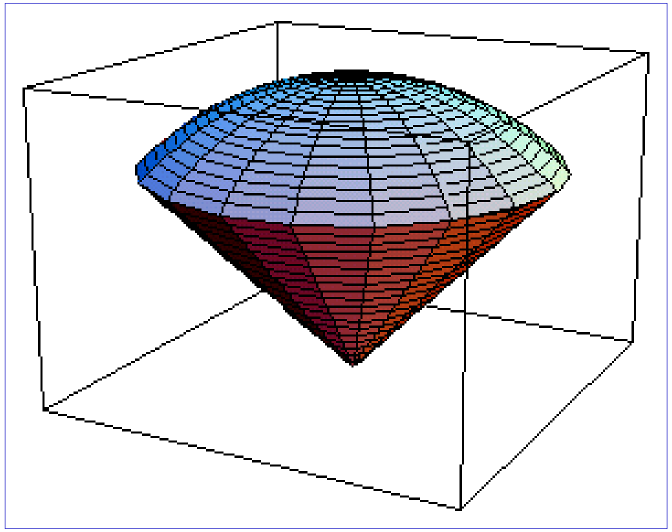
$$\therefore\ I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho d\rho\int_\rho^a \rho^2 dz$$

$$=2\pi\int_0^a \rho^3(a-\rho)d\rho=\frac{\pi}{10}a^5.$$

$$或\ I=\int_0^a dz\iint_{D_z:x^2+y^2\le z^2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^a dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z \rho^2\,\rho d\rho=\int_0^a\ 2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^z\,dz=\frac{\pi}{10}a^5.$$

例 5 求曲面 $x^2+y^2+z^2 \le 2a^2$ 与 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成的立体体积.



解 Ω 由锥面和球面围成,

采用球面坐标,

由 $x^2+y^2+z^2=2a^2 \Rightarrow r=\sqrt{2}a$,

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\Omega: \quad 0 \le r \le \sqrt{2}a, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

由三重积分的性质知 $V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$,

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}d\varphi \quad =\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

注:

若积分区域为球体、球壳或其一部分

被积函数呈 $x^2+y^2+z^2$

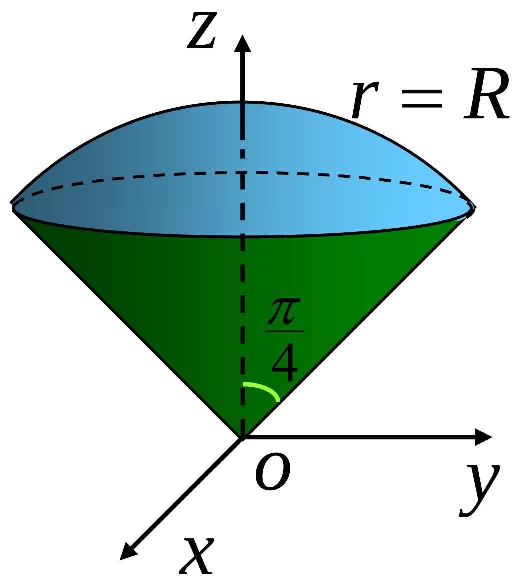
而用球坐标后积分区域的球坐标方程比较简单

通常采用球坐标。

例6. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$\therefore\quad \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}d\varphi=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

注:

若积分区域为球体、球壳或其一部分

被积函数呈 $x^2+y^2+z^2$

而用球坐标后积分区域的球坐标方程比较简单

通常采用球坐标。

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；被积函数形式简洁，或变量可分离.
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	

* **说明**:

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式:**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}F(u,v,w)\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$