线性代数笔记

Notes on linear algebra

王晨阳

目录

1. 矩阵

1.1 矩阵的基本概念

实矩阵
零矩阵
对角矩阵
数量矩阵/纯量矩阵
对称矩阵
反对称矩阵
单位矩阵
三角矩阵
行阶梯形矩阵
行最简形矩阵
初等矩阵

1.2 矩阵基本运算

1.2.1 线性运算

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

$K(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

1.2.2 乘法

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

1.2.3 可交换

若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可交换

$(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{E})=k\boldsymbol{A}$

n阶对角矩阵可交换

$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$

$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$

1.2.4 转置

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

1.3 分块矩阵

行向量
列向量
分块对角矩阵$\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_{11},\cdots,\boldsymbol{A}ss)$

1.4 初等变换和初等矩阵

1.4.1 等价关系

$\boldsymbol{A}$可以经过有限次初等变换化为$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$等价，$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$
等价标准型$\boldsymbol{E}_{m\times n}^{(r)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{r\times r} & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$

1.4.2 初等矩阵

设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则
行最简形矩阵$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{E}^{(r)}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t,r$为不超过$\min(m,n)$的非负整数

1.5 逆矩阵

可逆矩阵唯一
$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$
$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
$(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
初等矩阵可逆
可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$或$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$
求逆矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\longrightarrow(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$

1.6 方阵的行列式

$\det\boldsymbol{A}$或$|\boldsymbol{A}|$
代数余子式$(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$
$|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$
对换变换$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$
若有两行元素成比例，则值为0

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1}, \boldsymbol{A}_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_s^{-1})$

1.7 矩阵的秩

$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$（$\boldsymbol{A}$为非奇异方阵）$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$（$\boldsymbol{A}$为满秩方阵）

初等变换不改变秩

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$

$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$等价 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ})$

$\boldsymbol{A}$为$s \times m$，B为$s \times n$ $\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$m \times n$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}$为$s \times n$，$\boldsymbol{B}$为$n \times t$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n$

2. n维向量

2.1 n维向量及其运算

2.1.1 运算

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

$\alpha + 0 = \alpha$

$\alpha + (-\alpha) = 0$

$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

$k(l\alpha) = (kl)\alpha$

$1\alpha = \alpha$

2.1.2 线性组合

$\eta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$

k为组合系数

2.2 向量组的秩

线性相关 $\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) < s$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$可以相互表示，则等价

$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性表示，$\mathrm{r}\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} \le \mathrm{r}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$

$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性表示，且$t > s$，则$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$线性相关

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$等价，则$\mathrm{r}\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\} = \mathrm{r}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$线性无关且等价，则$s = t$

2.3 线性相关

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$存在不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性相关当且仅当存在$a_j$可以由其余向量线性表示

2.4 极大线性无关组

$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{is}$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$中每个向量均可由$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{is}$线性表示

极大无关组向量个数等于向量组的秩

2.5 向量空间

$\alpha + \beta \in V, k\alpha \in V$

$$V = \left\{\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right\} = \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$为生成元

基

维数$\mathrm{dim}V = \mathrm{r}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$

过渡矩阵

2.6 内积与正交矩阵

2.6.1 内积

$\langle\alpha,\beta\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$

$\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$

$\langle k\alpha,\beta\rangle = k\langle\alpha,\beta\rangle$

$\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle = \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$

$\langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$,且$\langle\alpha,\alpha\rangle = 0$当且仅当$\alpha = 0$

$|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}$

长度$\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$

夹角$\arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

单位向量$\|\alpha\| = 1$

$\langle\alpha,\beta\rangle = 0$则$\alpha,\beta$正交

$\|\alpha\| \geq 0$, 且$\|\alpha\| = 0$当且仅当$\alpha = 0$

$\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$

$\|\alpha+\beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$

单位向量$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$

2.6.2 Schmidt

正交向量组线性无关

标准正交向量组

正交基

标准正交基：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2 - \frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\|\beta_j\|}\beta_j$$

2.6.3 正交矩阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$

$|\boldsymbol{A}| = \pm 1$

若$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$也是

若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是正交矩阵，则$\boldsymbol{AB}$也是

3. 线性方程组

3.1 线性方程组和高斯消元法

系数矩阵
增广矩阵
相容/不相容

3.2 齐次线性方程组

有非零解当且仅当$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$
若A为n阶方阵，有非零解$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0$
η_1, η_2均为$\boldsymbol{A}x = 0$的解，则$\eta_1 + \eta_2$也是
η为$\boldsymbol{A}x = 0$的解，则$k\eta$也是
基础解系含有$n - r$个解向量
通解$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$

$$\begin{cases} x_1 = c_{1r+1}x_{r+1} + c_{1r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n \\ x_2 = c_{2r+1}x_{r+1} + c_{2r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ x_r = c_{rr+1}x_{r+1} + c_{rr+2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = (c_{1r+1}, c_{2r+1}, \ldots, c_{rr+1}, 1, 0, \ldots, 0)^T \\ \eta_2 = (c_{1r+2}, c_{2r+2}, \ldots, c_{rr+2}, 0, 1, \ldots, 0)^T \\ \cdots\cdots \\ \eta_{n-r} = (c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{rn}, 0, 0, \ldots, 1)^T \end{cases}$$

3.3 非齐次线性方程组

有解$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$和$(\boldsymbol{A}, b)$有相同的秩，含有$n - r$个自由未知量
设γ_0为特解，$x = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$
初等行变换不改变列向量间的线性关系
非零首元所在的列向量是该矩阵的列向量组的一个极大无关组
最小二乘解

4. 矩阵的特征值和特征向量

4.1 相似矩阵

存在$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$
主对角线元素之和为迹$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$
$\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$
若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B}),|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，特征值相同
$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵的充要条件是存在n个线性无关的列向量$\xi_1,\dots,\xi_n$，和n个数$\lambda_1,\dots,\lambda_n$使得$\boldsymbol{A}\xi_i=\lambda_i\xi_i(i=1,2,\dots,n)$
相似对角化
相似标准型

4.2 特征值和特征向量

特征值
特征向量
特征矩阵
特征多项式
特征方程
求特征值和特征多项式：

- 计算$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$
- 计算$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$的全部根
- 对每一个特征值，求齐次线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$的一个基础解系$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_t$，特征向量为$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$

$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$
$\lambda_1\dots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$
$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的每个特征值均非零
$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$特征值相同

4.3 矩阵可相似对角化的条件

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$相似于对角阵$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量
$\boldsymbol{A}$不同特征值对应的特征向量线性无关
若$\boldsymbol{A}$有n个互不相同的特征值，则$\boldsymbol{A}$可以相似对角化

4.4 实对称阵的相似对角化

实对称矩阵特征值为实数
实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

求解Q：

求出A的所有特征值

对于每一个特征值，求出齐次线性方程组$\left(\lambda_j \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)x = 0$的一个基础解系$\xi_{j1}, \dots, \xi_{jr_j}$，然后进行正交化和单位化，得到$q_{j1}, \dots, q_{jr_j}$

令$\boldsymbol{Q} = \left(q_{11}, \dots, q_{1r_1}, \dots, q_{m1}, \dots, q_{mr_m}\right)$

4. 5Jordan 标准形

Hamiloton-Cayley：设矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$c(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$，则$c(\boldsymbol{A}) = O$

最小多项式

最小多项式唯一

相似矩阵最小多项式相同

Jordan 形矩阵

Jordan 标准形

5. 二次型

5.1 二次型及其矩阵表示

5.1.1 二次型

n元二次型$f(x_1, \dots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$
$+a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \dots\dots.+a_{nn}x_n^2$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$
$f(x_1, \dots, x_n) = x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$
标准形式的二次型/标准型
可逆线性变换

5.1.2 合同

若$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$
若$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$
若$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，则$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\Lambda}$

5.2 化二次型为标准型

正交变换
主轴定理：二次型$f(x_1, \dots, x_n) = x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$可经正交变换$x = \boldsymbol{Q}y$化为标准型$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$
配方法

5.3 正定二次型

5.3.1 惯性定理

规范型$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$
惯性定理：二次型的规范型唯一
p为正惯性指数，$q = r - p$为负惯性指数

若$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，则$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{p\times p} & & \\ & -\boldsymbol{E}_{q\times q} & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为实对称矩阵，则$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的秩和正惯性指数相同

5.3.2 正定性

正定（负定）二次型
正定（负定）矩阵
$f(x_1, \dots, x_n) = d_1x_1^2 + \cdots + d_nx_n^2$是正定的$\Leftrightarrow d_i > 0$
可逆线性变换不改变正定性

若$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，则下列命题等价：

$\boldsymbol{A}$是正定阵

$\boldsymbol{A}$的正惯性指数为n

$\boldsymbol{A}$的特征值均大于零

$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}$合同

存在$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$

Sylvester：$f(x_1,\dots,x_n)=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$正定的充要条件是其矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$的各阶顺序主子式

$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\dots,\Delta_{\mathrm{n}}=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$均大于零