第5节

定积分在物理学上的应用

一、 物体的质量

二、 引力

三、 液体的压力

四、 变力沿直线所作的功

一、物体的质量

假设物体的体(面, 线)密度为常数μ，体积(面积, 长度)为A，则物体质量为$m = \mu A$. 若密度μ不为常数，则可用微元法计算质量微元，然后对质量微元积分而得质量。

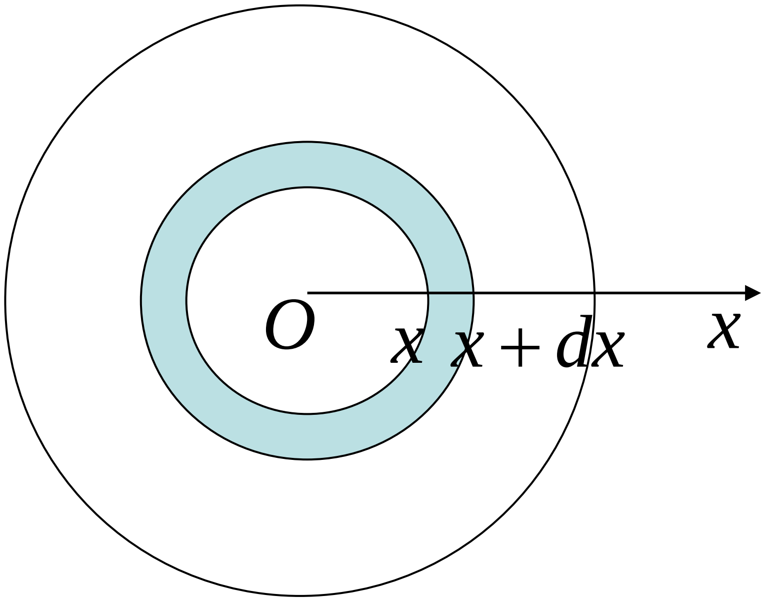
例1. 半径为$R=2\text{cm}$的圆片，其各点的面密度与该点到圆心的距离的平方成正比. 已知圆片边沿处之面密度为$8\text{g}/\text{cm}^2$,求该圆片的质量.

解： 到圆心距离为r的点的面密度为$\mu=kr^2$.

$$8=k\cdot 2^2 \Rightarrow k=2$$

$$dm=2x^2\cdot 2\pi x dx=4\pi x^3 dx$$

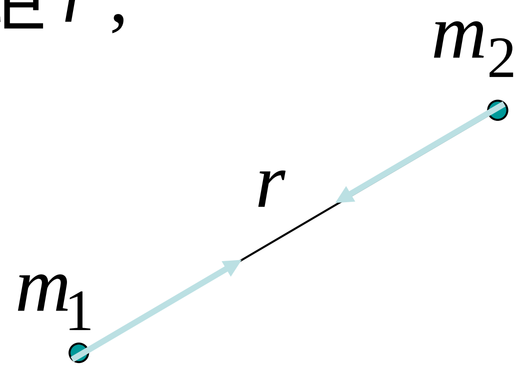
$$m=\int_0^2 4\pi x^3 dx=16\pi(g)$$



二、引力问题

质量分别为 m_1 , m_2 的质点，相距 r ,

二者间的引力：

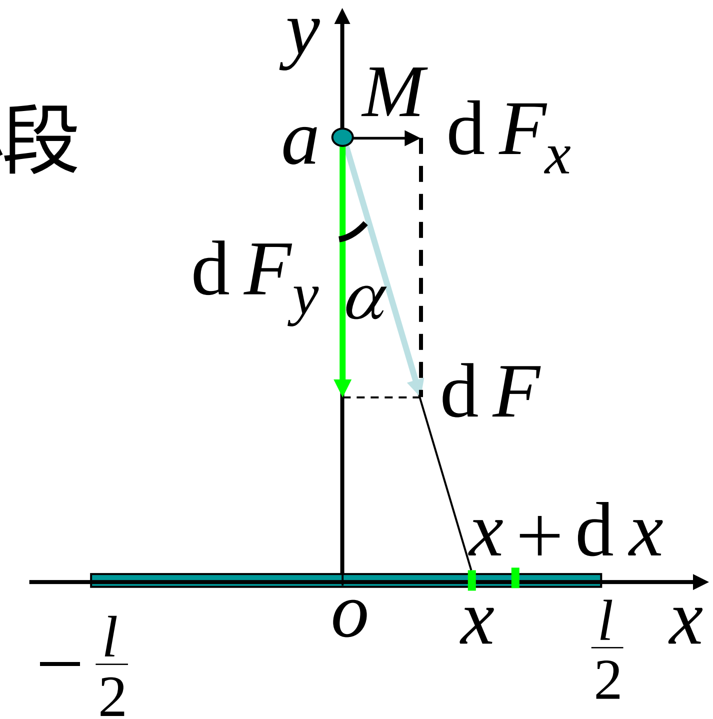


大小: $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向: 沿两质点的连线

若考虑**物体**对质点的引力, 则需用积分解决 .

例2. 设有一长度为 l, 线密度为μ 的均匀细直棒，在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试计算该棒对质点的引力.



解: 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+dx]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故垂直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\alpha$$

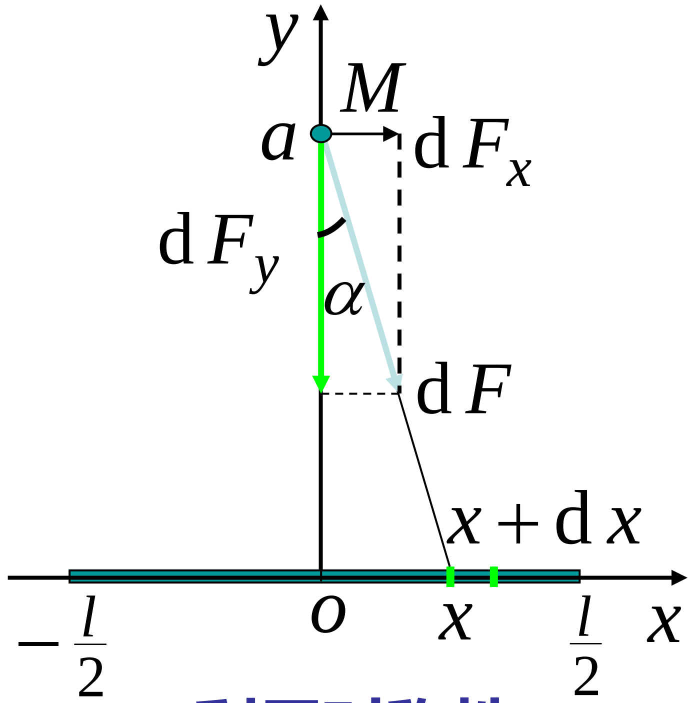
$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2k\,m\mu\,a\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -k\,m\mu\,a\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2k\,m\mu\,l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0.$

故棒对质点的引力大小为 $F = \frac{2k\,m\mu\,l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

说明:

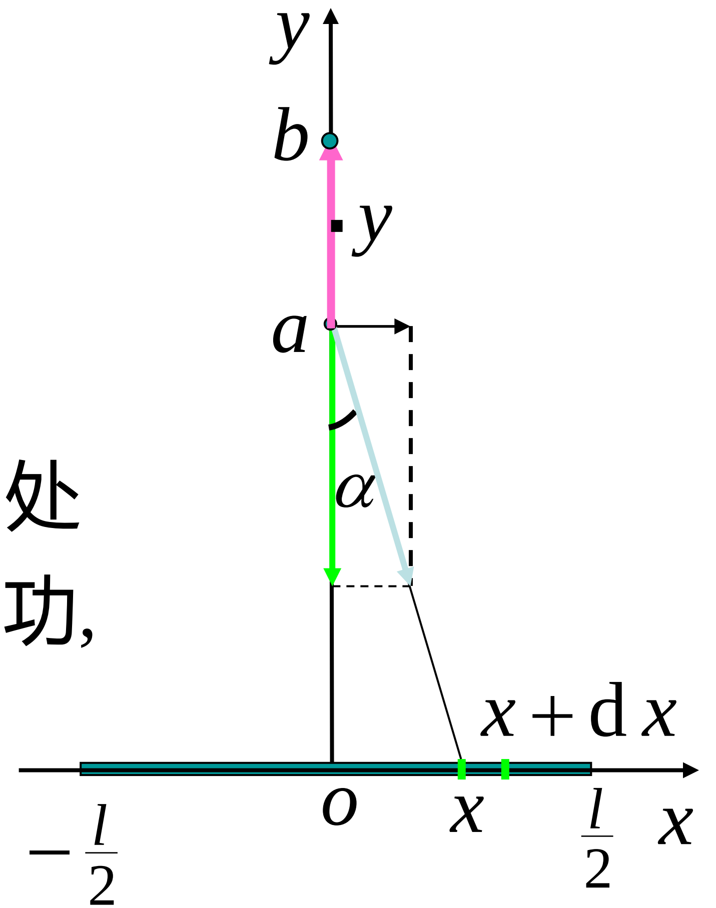
1) 当细棒很长时,可视 l 为无穷大,

此时引力大小为 $\dfrac{2km\mu}{a}$

方向与细棒垂直且指向细棒.

2) 若考虑质点克服引力沿 y 轴从 a 处移到 b $(a<b)$ 处时克服引力作的功,

则有



$$\mathrm{d}W = -\frac{2km\mu l}{y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$W = -2km\mu l\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$$

例3. 设星形线$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在点O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

提示: 如图.

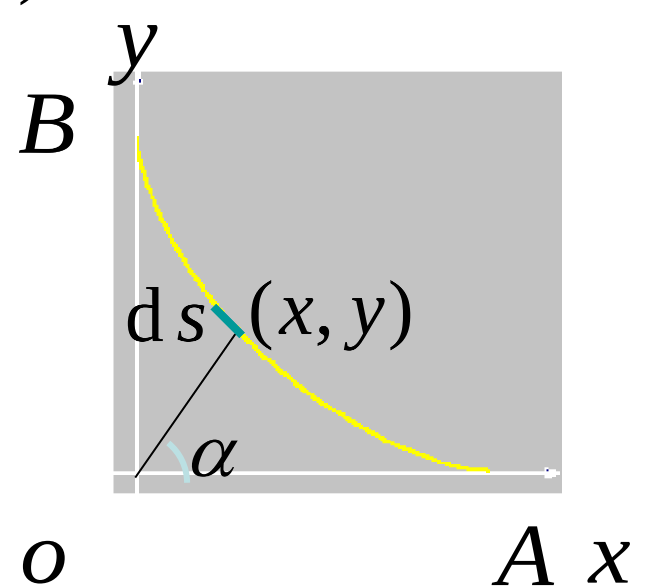
$$\mathrm{d}F = k\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s}{x^2+y^2} = k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

$$= k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$

$$= k\,x\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = k\,y\,\mathrm{d}s$$



$$F_x = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot \sqrt{[3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)]^2 + [3a\sin^2 t \cdot \cos t]^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= 3a^2 k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \sin t \,\mathrm{d}\, t = \frac{3}{5} k\, a^2$$

同理 $F_y = \frac{3}{5} k\, a^2$

故星形线在第一象限的弧段对该质点的

引力大小为 $F = \frac{3}{5}\sqrt{2}\, k\, a^2$

三、液体的压力

设液体密度为 ρ

深为 h 处的压强: $P = \rho g h$

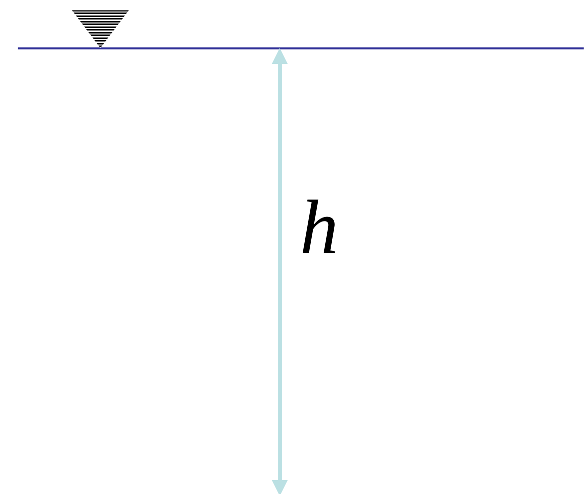
- 当平板与水面平行时,

平板一侧所受的压力为

$$F = \rho g h A$$

- 当h变化时，P不是常量，

所受压力问题就需用积分解决 .

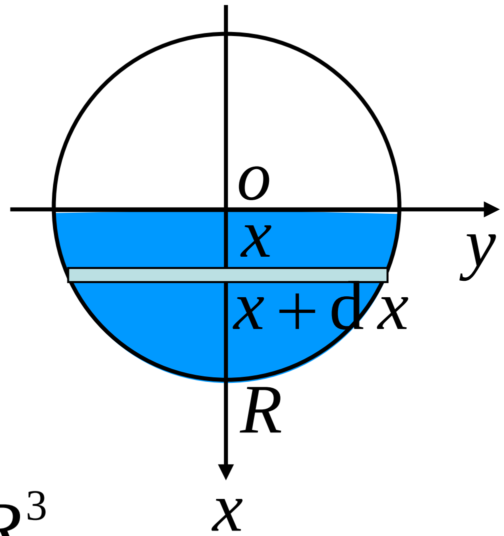


面积为 A 的平板

例4. 一水平横放的半径为R 的圆桶,内盛半桶密度为ρ 的液体，求桶的一个端面所受的侧压力.

解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \quad (0 \le x \le R)$$



利用对称性，压力微元为

$$\mathrm{d}P = \rho g x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

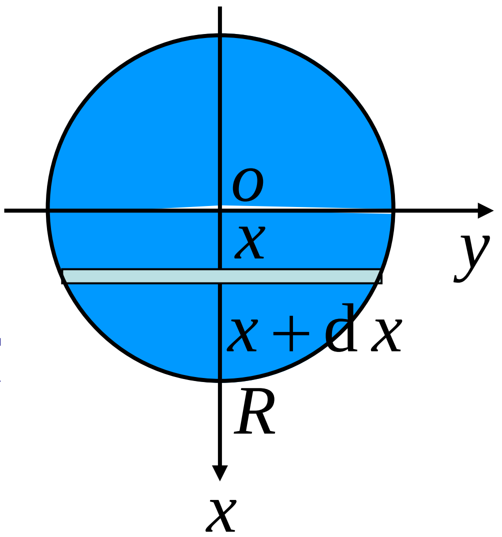
端面所受压力为

$$P = \int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\rho g}{3}R^3$$

说明: 当桶内充满液体时, 小窄条上的压强为 $\rho g\,(R+x)$,

压力微元为 $\mathrm{d}P = 2\,\rho g(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为



$$P = \int_{-R}^{R} 2\,\rho g(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数

$$= 4R\rho g\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = R\sin t$

$$= 4R\rho g\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R$$

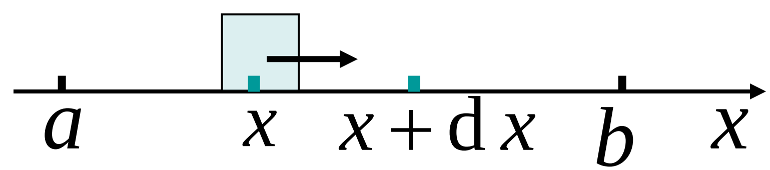
$$= \pi\rho g R^3$$

四、 变力沿直线所作的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功 .

在$[a,b]$上任取子区间$[x,x+\mathrm{d}\,x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$



因此变力$F(x)$ 在区间$[a,b]$上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

例5. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m, 底圆半径为3m, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功？

解: 建立坐标系如图. 在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g\cdot\rho\cdot\pi 3^2\,\mathrm{d}x \quad (\mathrm{KN})$$

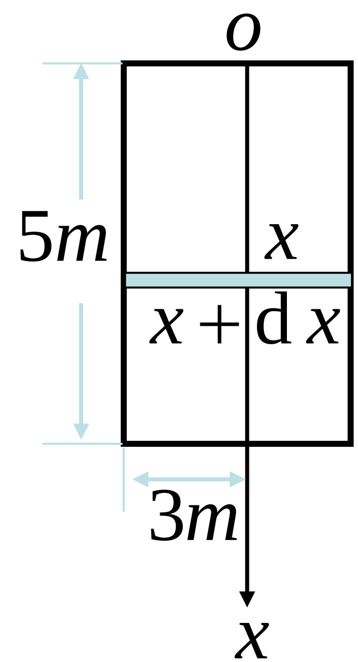
这薄层水吸出桶外所作的功(**功元素**)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi\rho g\, x\,\mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi\rho g x\,\mathrm{d}x = 9\pi\rho g\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5$$

$$= 112.5\pi\rho g \quad (\mathrm{KJ})$$



设水的密度为 ρ

内容小结

1.用定积分求一个分布在某区间上的整体量 Q 的步骤:

(1) 先用微元分析法求出它的微分表达式 $\mathrm{d}Q$

一般微元的几何形状有: **条**、**段**、**环**、**带**、**扇**、**片**、**壳** 等.

(2) 然后用定积分来表示整体量 Q , 并计算之.

2.定积分的物理应用:

物体质量，压力，引力，功.