§4 定积分的换元积分法、分部积分法

1. 定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

(1) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, 且当 $t\in[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$) 时，

$$a\le\varphi(t)\le b;$$

(2) $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$) 上连续，

则有**积分变换公式** $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这是因为若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$F(\varphi(t))$ 也是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t&=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\&=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \ (a > 0).$

解 令 $x = a\sin t,$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a\,|\cos t|\,a\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

例2 计算 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{x},$

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^2 \frac{1}{1+t}2tdt = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt$$

$$= 2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt$$

$$= 2[t-\ln|1+t|]_0^2$$

$$= 2(2-\ln 3).$$

例3 计算 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \mathrm{d}x.$

解 令 $x=\sin t,$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 t dt$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 t - 1) dt$$

$$= [-\cot t - t]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}.$$

偶函数、奇函数的积分

例4 证明若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$

令 $x=-t,$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$

同理可证：对奇函数有 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$

积分举例

例5 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 因为 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 是偶函数，$\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 是奇函数，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

积分性质

例6 证明若 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

例7 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2-\cos x-\sin x}\mathrm{d}x.$

解 由上例 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2-\cos x-\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x = -I,$

所以 $I = 0.$

2. 定积分的分部积分法

由 $\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b [u(x)v(x)]'\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]\Big|_a^b$

得 $\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

例8 求 $\int_0^2 xe^x\mathrm{d}x.$

解 $$\int_0^2 xe^x\mathrm{d}x=\int_0^2 x\mathrm{d}e^x$$
$$=xe^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x\mathrm{d}x$$
$$=2e^2-e^x\Big|_0^2$$
$$=e^2+1.$$

例9 求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx.$

解 $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln x dx$$

$$= -\left(x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx\right) + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e - (e-1)$$

$$= 2 - \frac{2}{e}.$$

积分举例

例10 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$ 证明

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3 \cdots 3}{n-2 \cdots 4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3 \cdots 4}{n-2 \cdots 5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n(>1)\text{为正奇数}. \end{cases}$$

证 当 $n \geq 2$ 时，

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x)$$

$$= -(\sin^{n-1} x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \ ,$$

积分举例

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

因此 $$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots$$

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3\cdots3}{n-2\cdots4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0, & n\text{为正偶数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3\cdots4}{n-2\cdots5}\cdot\dfrac{2}{3}I_1, & n(>1)\text{为正奇数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3\cdots3}{n-2\cdots4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3\cdots4}{n-2\cdots5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n(>1)\text{为正奇数}.\end{cases}$$

定积分的近似计算

根据定积分的定义， $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ，

则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i ,$$

或 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i .$$

在几何意义上，这是用一系列小矩形来近似小曲边梯形面积的结果，

所以把这个近似计算法称为矩形法。

n 等分时，得到积分的矩形公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).$$

将矩形法的两个公式平均得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\Delta x_i \ ,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right),$$

此近似式称为定积分的梯形法公式.