武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C.$

3. （10 分）设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

4. （10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

5. （8 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$ $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$，

$\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$；$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2)^T$ 是 R^4 中的两组基。求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标；

6.（8 分）设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$，（1）求矩阵 A 的秩.（2）求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

7.（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都正交，证明：$\beta=0$.

8.（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1 \end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

9.（12 分）设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t=1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

10.（8 分）设 r 是 n 阶矩阵 A 的秩 $(n\geq 2)$，r' 是其伴随矩阵 A^* 的秩，问 r' 与 r 之间有什么关系？并说明理由。

武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(x-k)$$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C.$

解 $$X-A=CB^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=CB^{-1}+A=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. （10 分）设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

解　由所给关系得 $(A+2B)(A-B)-(A-B)=0$　　即 $(A+2B-E)(A-B)=0$

由 $|A-B|\neq 0$ 知: $A=E-2B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

4. （10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

解 记 $B=\varphi(A)$，且 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-4\lambda^{-2}+5$

由题设 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1，所以 $\varphi(A)$ 的特征值为

$\varphi(2)=2^3-2^2-42^{-2}+5=8$，$\varphi(-1)=(-1)^3-(-1)^2-4(-1)^{-2}+5=-1$

$\varphi(-1)=(1)^3-(1)^2-4(1)^{-2}+5=1$ 故 $|B|=\varphi(2)\varphi(-1)\varphi(1)=-8$

5、（8 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$ $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$，$\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$；

$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2)^T$ 是 R^4 中的两组基。

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标；

解　由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=B^{-1}C .$$

即 $\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

于是，由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵为：$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

而 $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{B} \,\vdots\, \boldsymbol{\xi}')$，$\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/13 \end{array}\right)=(\boldsymbol{E} \,\vdots\, \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\xi}')$，

所以，$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. (8 分) 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$，（1）求矩阵 A 的秩.（2）求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

解：（1）对 A 作初等行变换：$A \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故秩 $(A)=2$.

（2）分别记矩阵 A 的列向量分别为 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，α_6

由 $A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故 α_1，α_2 为矩阵 A 列向量组的一个极大无关组，且有

$\alpha_3 = -4\alpha_1 - 2\alpha_2$，$\alpha_4 = -28\alpha_1 - 12\alpha_2$，$\alpha_5 = -37\alpha_1 - 16\alpha_2$，$\alpha_6 = 13\alpha_1 + 5\alpha_2$

7.（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都正交，证明：$\beta = 0$.

解： 由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，故 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。设 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$

两边与 $\alpha_i (i = 1, \cdots, n)$ 作内积，得 $0 = (b, \alpha_i) = k_1(\alpha_1, \alpha_i), (\alpha_1, \alpha_i) \neq 0,$ 得 $k_i = 0 (i = 1, \cdots, n)$

故 $\beta = 0$.

8、（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda+1)z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ (\lambda+1)x + \lambda y + (2\lambda+3)z = 1 \end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

解： $\because |A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{vmatrix} = 2\lambda(-1) = -2\lambda \quad \therefore$ 当 $\lambda \neq 0$ 时，原方程组有唯一解

当 $\lambda = 0$ 时，$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore X = k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

9、（12 分）设二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t = 1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

解：（1）$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2t \\ 0 & 2t & 3 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 2 > 0$，$\Delta_2 = 6 > 0$

$\Delta_3 = |A| = 2(9 - 4t^2) > 0 \Rightarrow |t| < \dfrac{3}{2}$ 故当 $|t| < \dfrac{3}{2}$ 时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定。

（2）当 $t = 1$ 时，$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$

$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 5$

$e_1 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，$e_2 = (1, 0, 0)^T$，$e_3 = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

在正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$之下。

f 化成标准形：$y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$

10. （8 分）设 r 是 n 阶矩阵 A 的秩 $(n \geq 2), r'$ 是其伴随矩阵 A^* 的秩，问 r' 与 r 之间有什么关系？并说明理由。

解 （1）当 $r = n$, 则 $r' = n.$

（2）当 $r = n-1$, 则有 $|A| = 0$, 故 $A^* A = 0$, 得 $n -$ 秩 $(A^*) \geq n-1$, 即秩 $(A^*) \leq 1$; 又由 $r = n-1$

知 $A^* \neq 0$, 故秩 $(A^*) \geq 1$, 从而有 $r' = 1$,（A_{i1} 中至少有一不为零）

（3）当 $r < n-1$ 时 $A_{ij} = 0 (i, j = 1, \cdots, n)$. 故 $r' = 0.$