第九章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

1.根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

（1）$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中积分区域 D 由直线 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成.

（2）$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 所围成.

2.设 D 是 (x,y) 面上的有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续且不变号，又 $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = 0$.试证明在区域 D 上 $f(x,y)=0$.

第二节 二重积分的计算

1.计算：$\iint\limits_D (3x+2y) d\sigma$，闭区域 D 由坐标轴与 $x+y=2$ 所围成.

2.化二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y) d\sigma$ 为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是：

（1）由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2\ (y\ge 0)$ 所围成的闭区域；

（2）由直线 $y=x, x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 所围成的闭区域；

3.画出积分区域，并计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D x\sqrt{y} d\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2, y=\sqrt{x}$ 所围成闭区域 .

（2）$\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x} d\sigma$，其中 D 是由 $y=x, y=\dfrac{x}{2}, x=2$ 所围成.

（3）$\iint\limits_D \dfrac{x^3}{y^2} dxdy$，其中 D 是由 $xy=2, y=1+x^2, x=2$ 围成区域.

4.改变下列二次积分的积分次序：

（1）$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy$；（2）$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy$.

5.求证：$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} e^y f(x) dx = \int_0^1 \left(e-e^{x^2}\right) f(x) dx$.

6.设$f\left(x\right)$在区间$\left[a,b\right]$上连续，证明：$\left[\int_a^b f\left(x\right)dx\right]^2 \le \left(b-a\right)\int_a^b f^2\left(x\right)dx$.

7.求由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=6-2x^2-y^2$所围成的立体的体积.

8.化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy$.

9．把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx$.

10.计算：（1）$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是由$x^2+y^2=4$所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D\left(4-x-y\right)d\sigma$，其中 D 是圆域：$x^2+y^2\le 2y$；

11.选用适当的坐标计算：$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中 D 是由$x=2,y=x,xy=1$所围成的闭区域.

第三节 三重积分

1. 把三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$化为三次积分，其中Ω分别是：

（1）由平面$x=1,x=2,z=0,y=x$和$z=y$所围成的区域；

（2）在第一卦限中由柱面$z=\sqrt{y}$与平面$x+y=4,x=0,z=0$所围成的区域；

（3）由抛物面$z=3x^2+y^2$和柱面$z=1-x^2$所围成的区域。

2. 计算 $\iiint_\Omega \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dV$，其中$\Omega$为平面$x+y+z=1$，$x=0,y=0$，$z=0$所围成的区域.

3. 用柱面坐标或球面坐标将三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$化为三次积分，其中Ω分别是如下各组不等式所确定的区域：

（1） $x^2+y^2+z^2\le a^2, x^2+y^2+z^2\le 2az$；

（2） $x^2+y^2+z^2\le a^2, z^2\le 3(x^2+y^2)$；

4. 在柱面坐标系中或球面坐标系中计算下列三重积分：

（1）$\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)dV$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2=2z$和平面$z=2$所围成的区域；

（2）$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的闭区域；

成的区域.

第四节 定积分的应用

1. 求圆$x^2+y^2=a^2$与$x^2+y^2=4a^2$所围的均匀环在第一象限部分的重心.