课前练习题

1. 计算$\iint\limits_{D} \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma$，其中 D：$x+y=1$，$x=0$和$y=0$所围成.

2. 交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr \quad (a \geq 0).$$

第三节 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$,下列 "乘积和式" 极限

$$\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1．投影法 (“先一后二”)

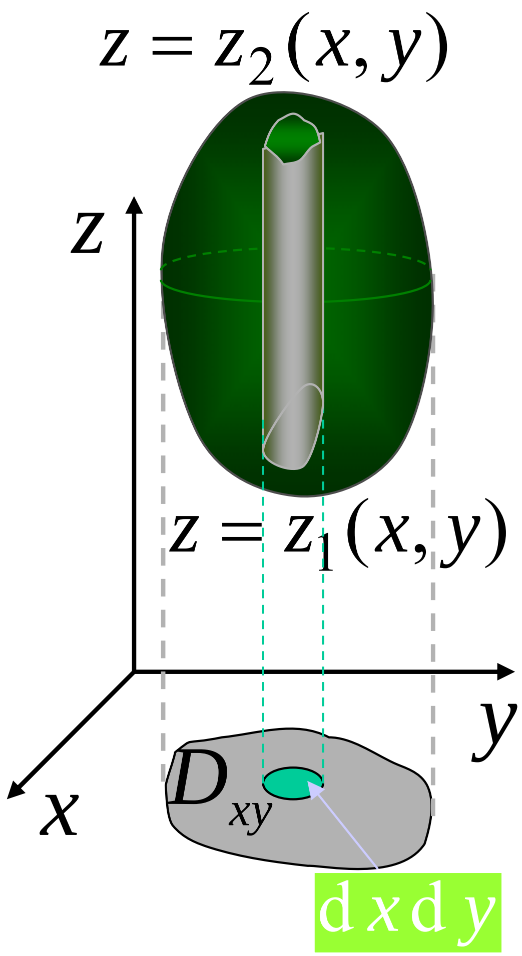
方法2．截面法 (“先二后一”)

方法3．三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases}$$



细长柱体微元的质量为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

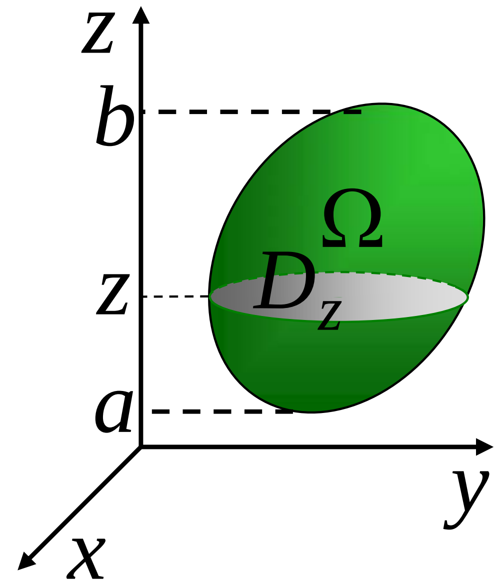
该物体的质量为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法2. 截面法 (“先二后一”)



$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$

以 D_z 为底, $\mathrm{d}\,z$ 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

该物体的质量为

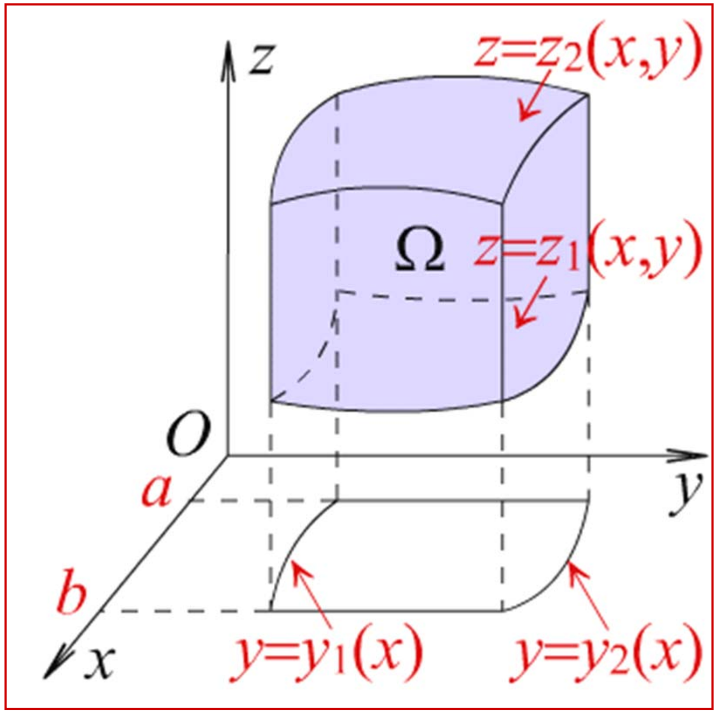
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{记作}}\int_a^b\mathrm{d}z\iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. 三次积分法

- xy型区域
- yz型区域
- zx型区域



xy型区域：

$$\Omega=\left\{z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y), y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\right\}$$

设区域 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy}:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_{a}^{b}\mathrm{d}z\iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_{a}^{b}\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

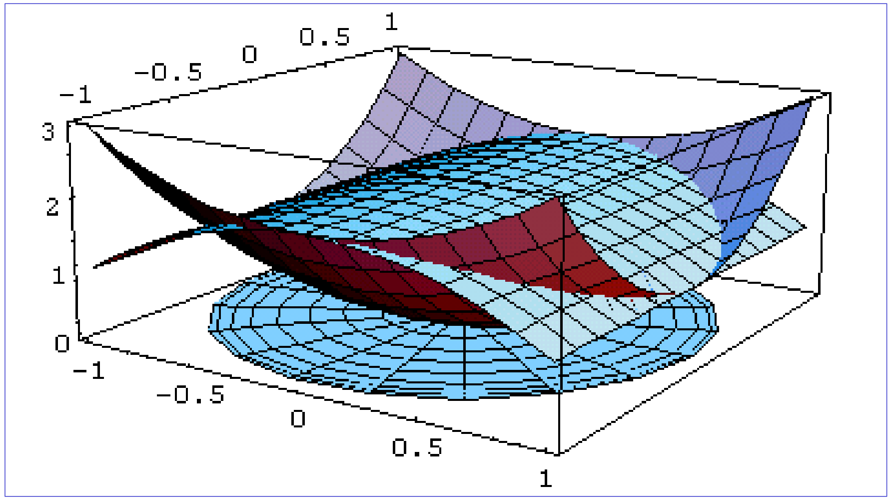
三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例 1　化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域Ω为由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域.

解　由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$，得交线投影区域

$$x^2+y^2\le 1,$$

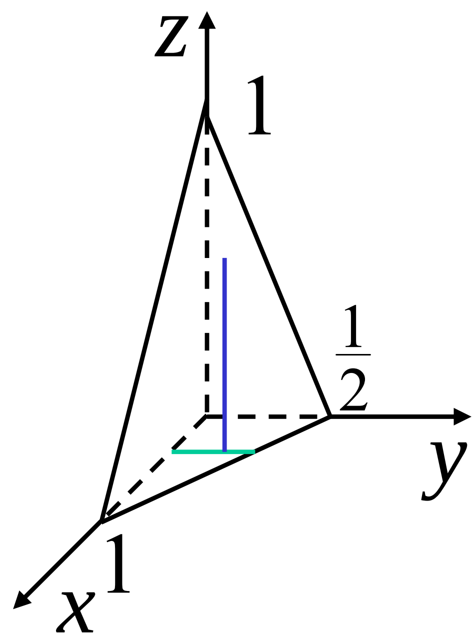
故 Ω： $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}, \\ x^2+2y^2\le z\le 2-x^2 \end{cases}$



$$\therefore I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz.$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .

解: $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-x-2y\\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x)\\ 0\le x\le 1\end{cases}$



$$\therefore \iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

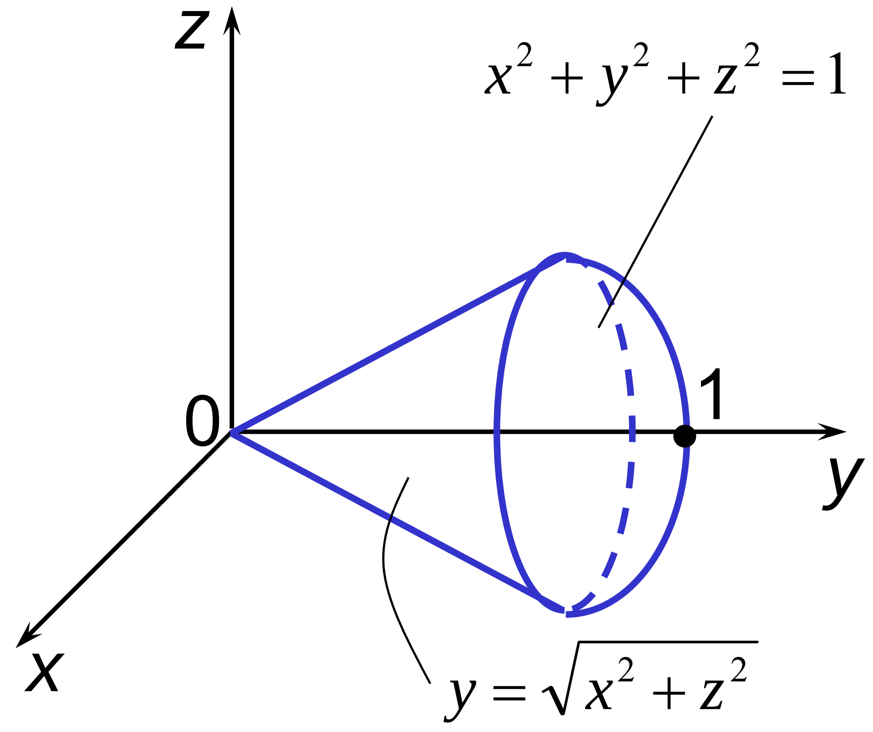
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

例3. 计算$\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=1$

与锥面$y=\sqrt{x^2+z^2}$所围成的区域.

解：

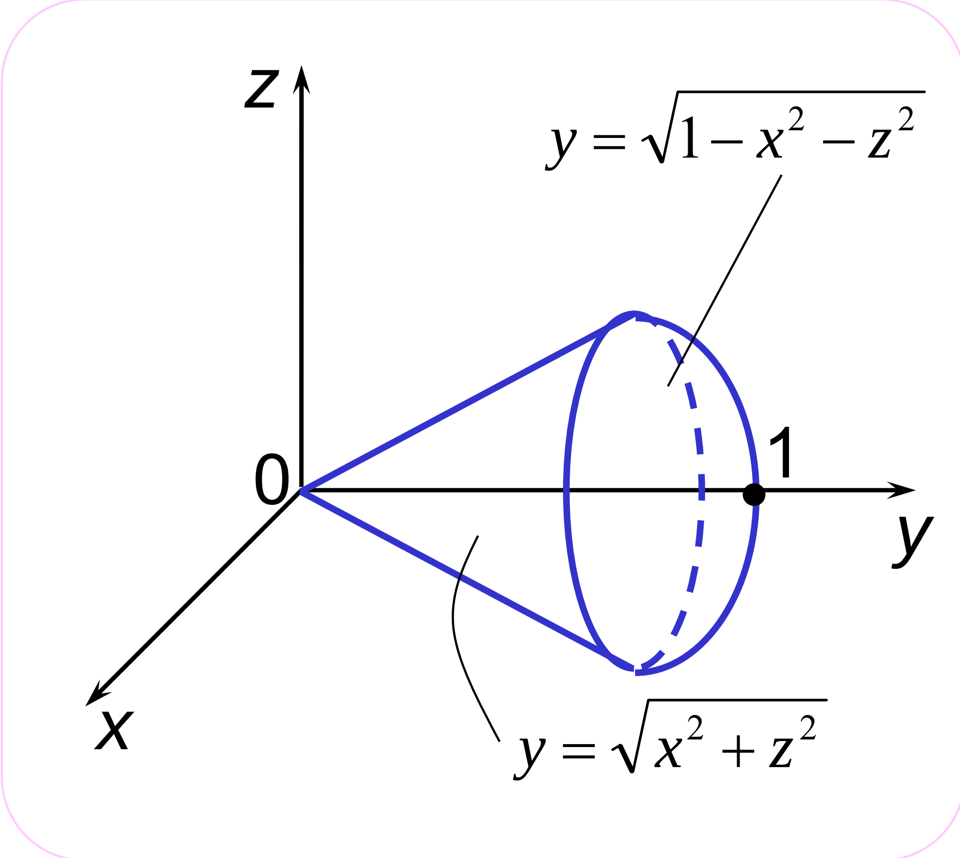


$$\iiint_{\Omega} y\,dxdydz = \iint_{D_{xz}} dxdz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} y\,dy$$

$$= \iint_{D_{xz}} \left[\frac{1}{2} - (x^2 + z^2)\right] dxdz \quad (令 x = r\cos\theta, z = r\sin\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) \cdot r\,dr$$

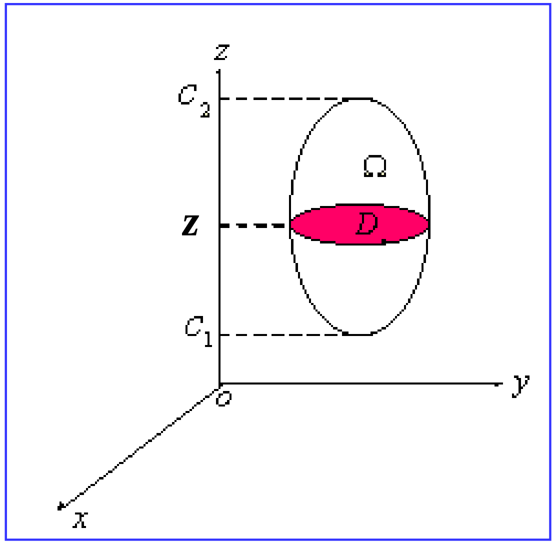
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) \cdot r\,dr = \frac{\pi}{4}.$$



截面法的一般步骤：

(1) 把积分区域Ω向某轴（例如 z 轴）投影，得投影区间$[c_1, c_2]$；

(2) 对$z \in [c_1, c_2]$用过z轴且平行xoy平面的平面去截Ω，得截面D_z；



(3) 计算二重积分$\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)dxdy$

其结果为z的函数$F(z)$；

(4)最后计算单积分$\int_{c_1}^{c_2} F(z)dz$即得三重积分值.

关于利用对称性积分:

设有界闭区域Ω的形状关于xoy面对称,

且 $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$,

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = 0.$

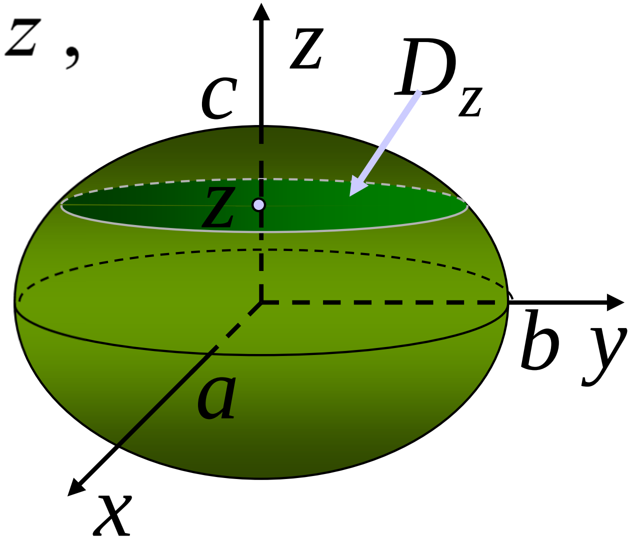
若 $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$,

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z)dv,$

其中 Ω_1是Ω中处于xoy面上方部分.

例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx\,dy\,dz$，

其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} -c \le z \le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用"先二后一"

$$\therefore \quad \iiint_{\Omega} z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_{-c}^{c} z^2 \, dz \iint_{D_z} dx\,dy$$

$$= 2\int_0^c z^2 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

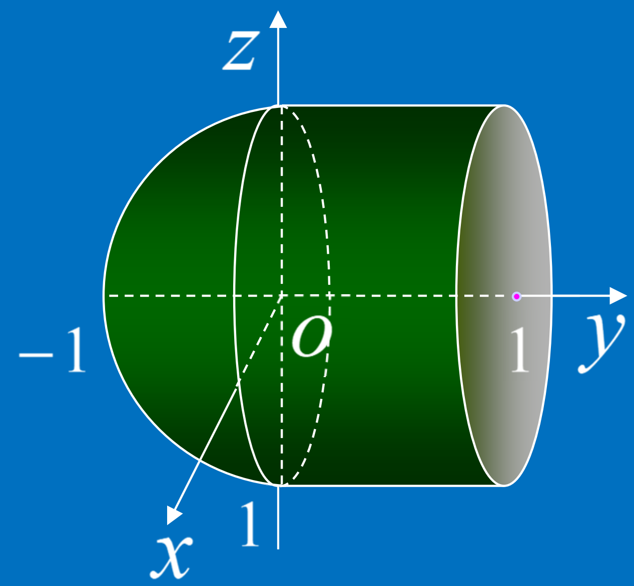
提示: 利用对称性

$$原式 = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

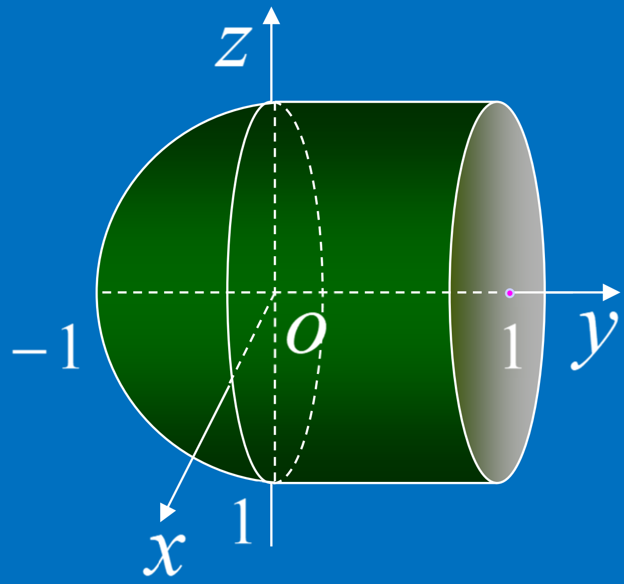
$$= 0$$

奇函数

例3. 计算 $I=\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.



解: Ω由$y=-\sqrt{1-x^2-z}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围, 故可表为



$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

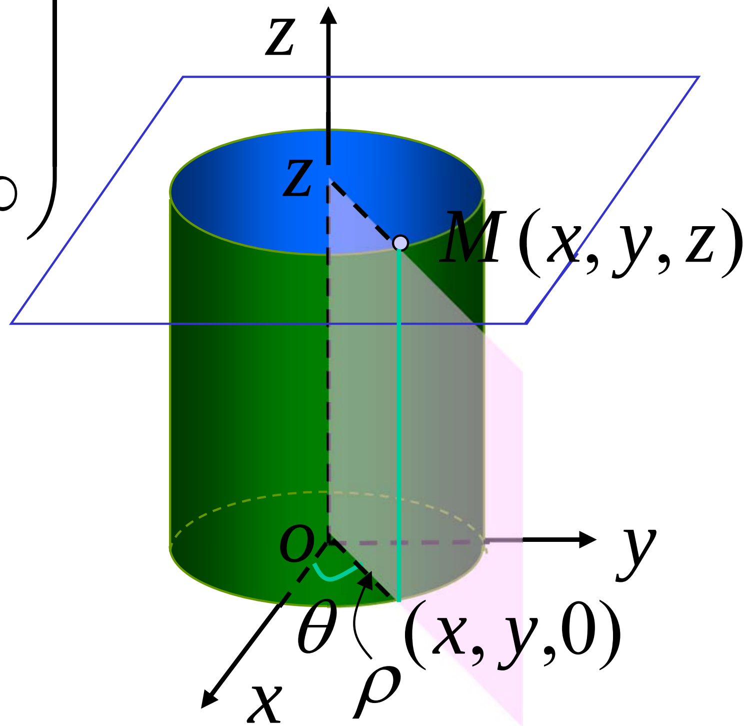
$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\mathrm{d}y$$

$$=\cdots=\frac{28}{45}$$

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$,将x,y用极坐标ρ,θ代替,则(ρ,θ,z) 就称为点M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

$\rho=$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$z=$ 常数 ⟶ 平面