第一章　函数、极限、连续

第一节　函数

例 1：（1）按周期性和奇偶性 $y=\ln(\sec x+\tan x)$ 是__________。

（2）设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$, 则 $f(f(x))=$_________。

（3）设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 则 $f(f(f(x)))$ 的定义域为_________。

解：（1）以 2π 为周期的奇函数

（2） $f(x)=|1+x|-|1-x|=\begin{cases}-2, x\le -1\\ 2x, -1<x\le 1\\ 2, x>1\end{cases}$

$$f(f(x))=\begin{cases}-2, f(x)\le -1\\ 2f(x), -1<f(x)\le 1\\ 2, f(x)>1\end{cases}$$

即 $f(f(x))=\begin{cases}-2, x\le -\dfrac{1}{2}\\ 4x, -\dfrac{1}{2}<f(x)\le \dfrac{1}{2}\\ 2, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

（3） $f(f(f(x)))=\dfrac{x}{\sqrt{1-3x^2}}$，定义域为 $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

例 2：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$，证明：$f(x)$ 为周期函数.

分析：本题就是要找一个 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，由题中所给的条件容易猜到 T 应该是一个整数,这就有思路了：由 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，得 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，至此可得 $f(x+3)=-f(x)$，由此等式可得 $f(x+6)=f(x)$，于是命题得证．解答过程不再重述.

例 3．设 $f(x)$ 在 $x\ne 0$ 时满足 $3f(x)+4x^2f(-\dfrac{1}{x})+\dfrac{7}{x}=0$，

（1） 求 $f(x)$ 的表达式；

（2） 求 $f(x)$ 的极值.

解：（1）由已知

$$3f(x)+4x^2f(-\frac{1}{x})+\frac{7}{x}=0 \qquad (1)$$

令 $x=-\frac{1}{t}$，代入式（1）得

$3f(-\frac{1}{t})+\frac{4}{t^2}f(t)-7t=0$，即 $3f(-\frac{1}{x})+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0$ （2）

由（1）和（2）可得 $f(x)=4x^3+\frac{3}{x}$.

（2） 略

例 4．设 $f(x)$ 可导且 $f'(0)=1$，对于任意 x,y 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

求 $f(x)$

解：令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

由题设有

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

令 $y\to 0$，得 $f'(x)=1+2x$

解此微分方程并注意到 $f(0)=0$，得 $f(x)=x+x^2$.

练习题

1．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，$a\neq 0$，证明：$f(x)$ 为周期函数 (证明：$f(x+2a)=f(x)$))

2．设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3})=x, f(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$

(对等式 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3})=x$ （1）中的 x 分别用 $\frac{x}{3},\frac{x}{3^2},\cdots,\frac{x}{3^{n-1}}$ 代替后得

$\sin f(\frac{x}{3})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^2})=\frac{x}{3}$ （2）

$\sin f(\frac{x}{3^2})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^3})=\frac{x}{3^2}$ （3）

$\cdots,\sin f(\frac{x}{3^{n-1}})-\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3^n})=\frac{x}{3^{n-1}}$ （n）

$(1)+(2)\times\frac{1}{3}+(2)\times\frac{1}{3^2}+\cdots+(n)\times\frac{1}{3^{n-1}}$ 得

$\sin f(x)-\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{x}{3^n})=\frac{9}{8}x(1-\frac{1}{3^{2n}})$，令 $n\to\infty$ 得 $f(x)=\arcsin\frac{9x}{8}$

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的邻域内有界，且满足方程

$$f(x)-qf(qx)=x^2 \quad (0<q<1)$$

求 $f(x)$.（答案： $f(x)=\dfrac{x^2}{q^3}$ ）

4．设 $f(x)$ 对任意实数 x,a 满足

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = f(x) \quad (a \neq 0)$$

证明： $f(x)$ 为线性函数.

（我们知道 $f(x)$ 为线性函数 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 为常数，由题设可以判断 $f(x)$ 可导．先将方程变形为

$\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = 2af(x)$ ，然后两边对 a 求导得 $f(x+a)+f(x-a)=2f(x)$ ，再对 a 求导,）