第三节 泰勒(Taylor)公式

$$\text{用多项式近似表示函数 — 应用}\begin{cases}\text{理论分析}\\ \text{近似计算}\end{cases}$$

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

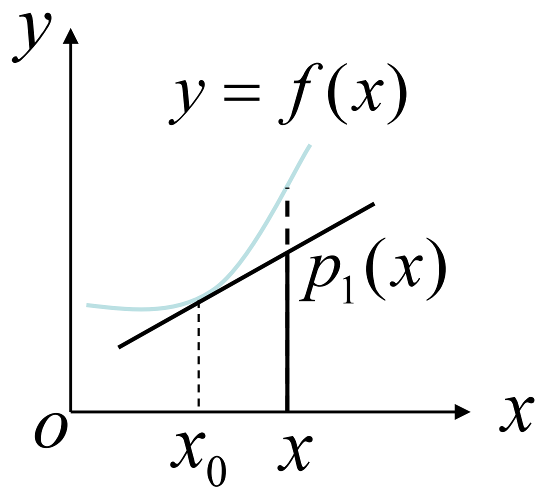
三、泰勒公式的应用

一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



以直代曲

特点：$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

需要解决的问题 $\begin{cases} \text{如何提高精度？} \\ \text{如何估计误差？} \end{cases}$

2. 余项估计

令 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$(称为余项)，则有

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \quad (\xi_1\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间})$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n-x_0)-0}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_n\text{ 之间})$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because\ p_n^{(n+1)}(x) = 0,\ \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ 时

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

$$\therefore\ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

泰勒中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n **阶泰勒公式**.

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的**拉格朗日余项**.

注意到 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为n 阶泰勒公式的**皮亚诺(Peano) 余项**.

* 可以证明:

$f(x)$ 在点 x_0 有直到n阶的导数

$\Longrightarrow$ ④ 式成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式变为拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

(2) 当 $n=1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

可见 $f(x)\approx f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{}$ $\boxed{\mathrm{d}f}$

误差 $R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在泰勒公式中若取 $x_0=0,\xi=\theta x\ (0<\theta<1)$,则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为**麦克劳林**（Maclaurin）**公式**.

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$,则有误差估计式

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=e^x$

$\because \quad f^{(k)}(x)=e^x, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$

$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$

(3) $f(x) = \cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$(0<\theta<1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

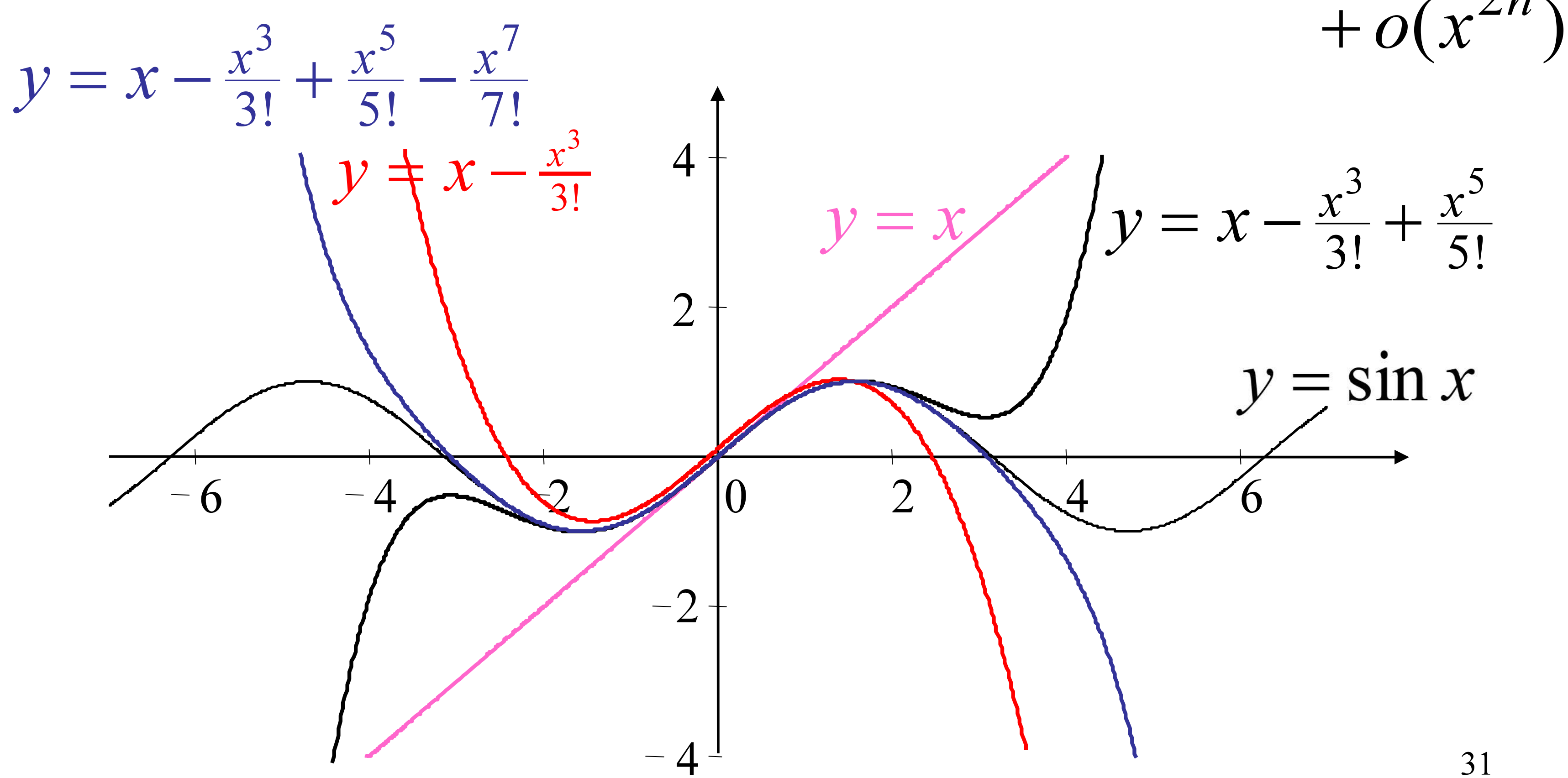
其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

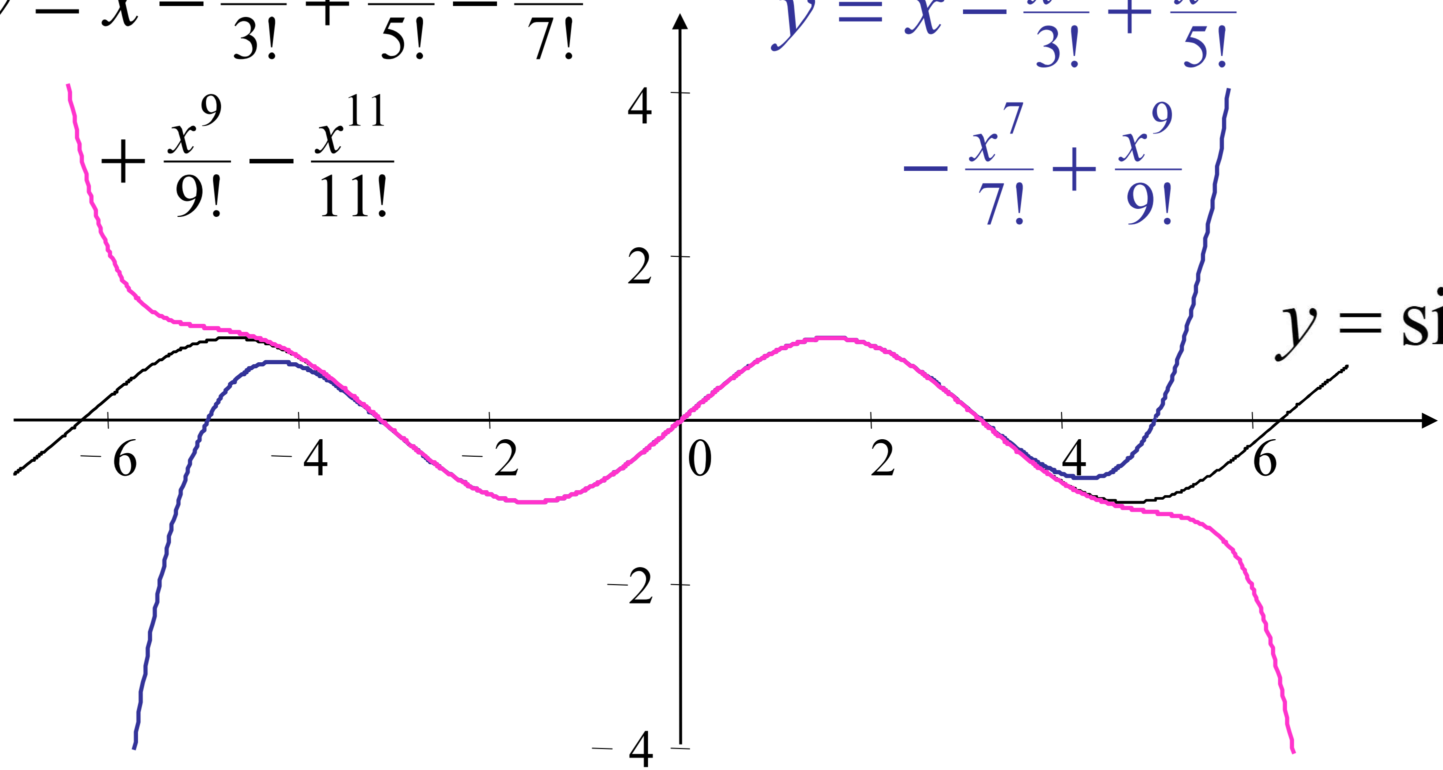


泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$



1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $\left| R_n(x) \right| \le \dfrac{M}{(n+1)!} \left| x \right|^{n+1}$

M 为 $\left| f^{(n+1)}(x) \right|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

例1. 计算无理数 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

令 $x = 1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \underline{\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$, 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

例2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值, 使其精确到 0.005 , 试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $$\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$$

解得 $$|x| \le 0.588$$

即当 $|x| \le 0.588$ 时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005 .

2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$. 可用洛必达法则

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解：用泰勒公式将分子展开到x^4

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$e^{-x^2/2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-x^2/2)^2}{2!}+o(x^4).$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-x^2/2)^2}{2!}\right)+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

例5， 设函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C, \lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$,

证明:$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0.$

证明：用泰勒公式

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},$$

两式分别相加减，得

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+1)-f(x-1)\big)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$\lim_{x\to\infty} f''(x)=C+C-2C+0=0, \lim_{x\to\infty} f'(x)=\frac{1}{2}(C-C)=0.$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例6. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证: $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

3. 利用泰勒公式求高阶导数

已知$f(x)=x^2\sin x$,求$f^{(2m+1)}(0)$，$f^{(2m)}(0)$.

解：

$$x^2\sin x = x^2\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o\left(x^{2m-1}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k+1}}{(2k-1)!}+o\left(x^{2m+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}2k(2k+1)x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2m+1}\right),$$

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^{m-1}2m(2m+1), f^{2m}(0)=0$$

内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0 = 0$ 时为**麦克劳林公式**.