姓名 学号 级 专业 学院

……密……封……线……

山东大学 2016--2017 学年上学期 高等数学（1）课程试卷评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题（本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。只要与下列答案等价即得满分，其他酌情给分.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的 $\varepsilon - N$ 的定义是对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时总有 $|a_n| < \varepsilon$.

2. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$，$x \neq 0$. 此题不写 $x \neq 0$ 不扣分.

3. 函数 $\sqrt{1+x}$ 的带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是 $1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2^2\cdot 2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n+o(x^n)$，$(x\to 0)$. 此题不写 $(x\to 0)$ 扣 1 分.

4. $|x|$ 的一个原函数是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, x\geq 0\\ -\dfrac{1}{2}x^2, x<0\end{cases}$.

5. 方程 $y'+y=1$ 的通解为 $y=1+Ce^{-x}$.

得分	阅卷人

二、选择题(请将答案写入下面每题的空格里。本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)。

1.A 2.B 3.B 4.B 5.B

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-nx^2}{1+nx}$，则其定义域为

A. $(-\infty,+\infty)$. B. $\{x \mid x\neq -\dfrac{1}{n}, n=1,2,3,\cdots\}$.

C. $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$. D. 以上皆不正确.

2. 设当 $x\to 0$ 时, $\sin x-(ax^2+bx)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则

A. $a=\dfrac{1}{6}, b=1$. B. $a=0, b=1$. C. $a=-\dfrac{1}{6}, b=1$. D. $a=-1, b=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶导数存在, 且 $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x^2}=1$, 则

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $f(x)=\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上

A. 单调增加, 凸的. B. 单调增加, 凹的.

C. 单调减少, 凸的. D. 单调减少, 凹的.

5. $\int_{-1}^{1}(1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx=$

A. π. B. $\dfrac{\pi}{2}$. C. 2π. D. $\dfrac{\pi}{4}$.

得分	阅卷人

三、计算题(本大题包含 8 小题，前两小题每题 5 分，后六小题每题 6 分，共 46 分。 请写出解答步骤)。

1. 计算微分 $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 原式 $=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$ ……(4 分)

$=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ……(5 分)

2. 计算高阶导数 $(x^2e^{2x})^{(10)}$.

解 由莱布尼兹公式得

$$(x^2e^{2x})^{(10)}=\sum_{n=0}^{10}C_{10}^n(x^2)^{(n)}(e^{2x})^{(10-n)}$$

$=x^2(e^{2x})^{(10)}+C_{10}^1(x^2)'(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2(x^2)''(e^{2x})^{(8)}$ ……(3 分)

$=(2^{10}x^2+10\cdot 2^{10}x+45\cdot 2^9)e^{2x}$ ……(5 分)

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(e-x)+(x-1)}$.

解 此极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\dfrac{-1}{e-x}+1} \text{……(3 分)}$$

$$=\frac{2e}{e-1} \text{……(6 分)}$$

或利用 Taylor 公式，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-(1-x+o(x))}{(1-\dfrac{1}{e}x+o(x))+(x-1)} \text{……(3 分)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{(1-\dfrac{1}{e})x+o(x)}$$

$$=\frac{2e}{e-1} \text{……(6 分)}$$

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{2}-1)^{n}$.

解 原极限 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(2\sqrt[n]{2}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}}$，……(2 分)

利用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2\cdot 2^{x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\cdot 2^{x}\ln 2}{2\cdot 2^{x}-1}=\ln 4， \text{……(5 分)}$$

所以由海涅定理，知原极限 $=e^{\ln 4}=4$ ……(6 分)

或

$$原极限=\lim_{n\to\infty}(2e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[2(1+\frac{1}{n}\ln 2+o(\frac{1}{n}))-1]^{n} \text{……(2 分)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n}))^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n})\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n})}}\right)^{\ln 4+o(1)} \text{……(5 分)}$$

$$=e^{\ln 4}=4 \text{……(6 分)}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解 做变换 $t=x-1$，则

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2-x}dx+\int_0^1 \sin x\,dx \text{……(3 分)}$$

$$=-\ln|2-x|\Big|_{-1}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{-1}$$

$$=1-\cos 1-\ln 2+\ln 3 \text{……(6 分)}$$

6. 求积分 $\int\dfrac{x^{2}}{(4-x^{2})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 做变换 $x=2\sin t$，$t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，则

$$原式=\int\frac{4\sin^{2}t}{(4-4\sin^{2}t)^{\frac{3}{2}}}2\cos t dt$$

$$=\int\tan^{2}t dt \text{……(3 分)}$$

$$=\int(\sec^{2}t-1)dt$$

$$=\tan t-t+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^{2}}}-\arcsin\frac{x}{2}+C \text{……(6 分)}$$

或 $原式=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{xd(4-x^{2})}{(4-x^{2})^{\frac{3}{2}}}=\int xd\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^{2}}}\right)$ ……(3 分)

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^{2}}}-\int\frac{1}{\sqrt{4-x^{2}}}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\frac{x}{2}+C$$ …………………………………………………….(6 分)

7. 求初值问题 $\begin{cases} y'-2xy=e^{x^2} \\ y\big|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解.

解 此是一阶线性非齐次常微方程, 可利用常数变易法或通解公式, 得通解为

$$y=e^{x^2}(x+C)$$ ……………………………………………………….(4 分)

代入初始条件, 得 $C=1$，所以特解为 $y=e^{x^2}(x+1)$ ………………………(6 分)

或 用凑微分法, 原方程等价于

$$e^{-x^2}dy-2xye^{-x^2}dx=dx,$$

即 $e^{-x^2}dy+yde^{-x^2}=dx$,

所以 $d(ye^{-x^2})=dx$,

因此 $ye^{-x^2}=x+C$，下略.

8. 求微分方程 $y''+2y'+y=\sin x$ 的通解.

解 对应的特征方程为 $r^2+2r+1=0$，得特征根 $r=-1,-1$ ………………………(2 分)

令原方程的特解 $y=a\sin x+b\cos x$，代入方程，得 $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$ ……………(4 分)

所以所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}-\dfrac{1}{2}\cos x$ …………………………………….(6 分)

得分	阅卷人

四、综合题(本大题包含 2 小题，第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分，请写出解答步骤)。

1. 要设计一垃圾桶: 下底面是半径为 r 的圆盘, 侧面是高为 h 的圆柱形, 上底面是向上凸的半球面. 当表面积一定时, 问 $\dfrac{h}{r}$ 为何值时桶的体积最大?

解 由题设，桶的表面积 $S=\pi r^2+2\pi rh+2\pi r^2=3\pi r^2+2\pi rh$,

由此得 $h=\dfrac{S}{2\pi r}-\dfrac{3}{2}r$.

注意到 $h>0$，可知 $0<r<\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ ……………………………………(2 分)

而桶的容积 $V(r)=\pi r^2h+\dfrac{2}{3}\pi r^3=\dfrac{S}{2}r-\dfrac{5}{6}\pi r^3$, ……………………………………(4 分)

由 $V'(r)=\dfrac{S}{2}-\dfrac{5}{2}\pi r^2=0$, 得唯一驻点 $r=\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}}\in(0,\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}})$, ………………(6 分)

$V''(\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}})=-\sqrt{5\pi S}<0$, 所以, $V(\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}})$ 是 $V(r)$ 的最大值…,

此时 $h=r$, 即 $\dfrac{h}{r}=1$. ……………………………………………………………(8 分)

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意的 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)>\int_0^x f(t)dt$，证明对任意的 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)>0$.

证 首先注意到 $f(0)>\int_0^0 f(t)dt=0$ ……………………………………………….(1 分)

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0$，$F(x)$ 在 $[0.1]$ 连续，且在(0,1)上可导，$F'(x)=f(x)$.

所以 在 $(0,1)$ 上，$F'(x)>F(x)$,.

由此得 $(e^{-x}F(x))'=e^{-x}(F'(x)-F(x))>0$……………………………….(3 分)

对任意的 $x\in(0,1]$，$G(t)=e^{-t}F(t)$ 在 $[0.x]$ 连续，且在 $(0,x)$ 上可导,

利用拉格朗日中值定理，可得 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得 $G(x)-G(0)=G'(\xi)x>0$,

因此 $G(x)>G(0)=F(0)=0$，即 $e^{-x}F(x)>0$,

所以 $F(x)>0$ 因此有 $f(x)>F(x)>0$ ……………………………….(6 分)

总之结论成立.

学院 专业 级 学号 姓名 密 封 线