

1. 计算反常积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$  的值。

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^7 + x^6)^{1/7} - (x^7 - x^6)^{1/7}]$

3. 求不定积分  $\int \frac{1 + \sin x}{(1 + \cos x) \sin x} dx, x \in (0, \pi/2)$

4. (1) 证明  $\forall x > 0$ , 有  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

(2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2})]$

5. 求悬挂线  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [0, 1]$  的弧长  $l$

6. 设  $\ln \cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4), x \rightarrow 0$ , 求实数  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  的值。

7. 求函数  $f(x) = -3x^5 + 5x^3 + 2$  的所有极值。

8. 设函数  $y = y(x)$  满足  $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, t \in (0, \pi/4)$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$

9. 设函数  $f$  在开区间  $(0, +\infty)$  上连续且只有唯一的极值点  $x_0$ , 证明如果  $x_0$  为  $f$  的极大值点, 则  $x_0$  必为  $f$  的最大值点。

10. 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内可导,  $f(0) < 0$ , 且  $\forall x > 0, f'(x) > 1$ , 证明方程  $f(x) = 0$  在  $[0, +\infty)$  上有唯一的实根。

11. 设函数  $f$  在  $(0, 1)$  上有定义且满足

$\forall x_1, x_2, x_3 \in (0, 1), x_1 < x_2 < x_3$ , 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$\forall n \in \mathbb{Z}, a_n = (n+2) \left[ f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \right]$ , 证明数列  $\{a_n\}$  收敛。

12. 设  $f$  是  $[0, 1]$  上得连续函数且满足  $\forall x \in [0, 1], \int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^3}{2}$ ,

证明  $\int_0^1 [f(t)]^2 dt \geq \frac{5}{12}$