内容小结

1. 平面图形的面积

边界方程
- 直角坐标方程
- 参数方程 $A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- 极坐标方程 $A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

小结

已知平行截面面面积函数的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

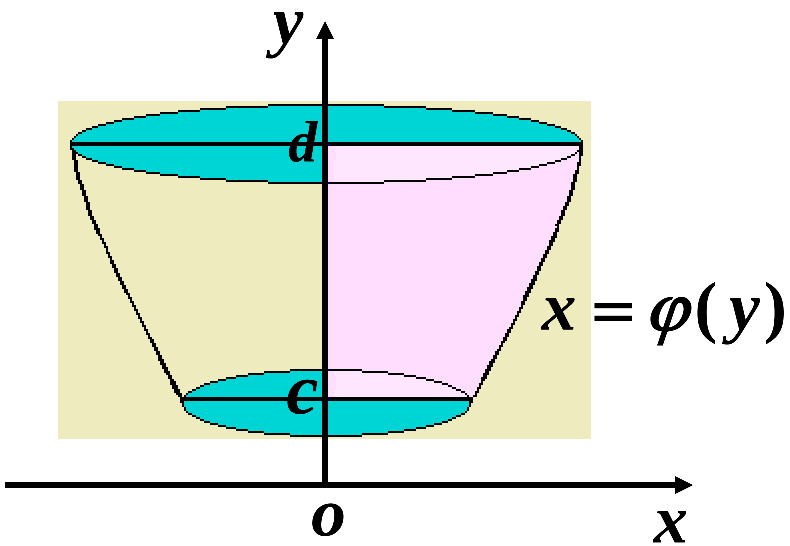
$\Longrightarrow$ 旋转体的体积

$$y=y(x)\begin{cases}\text{绕 } x \text{ 轴：} & A(x)=\pi y^2\\ \text{绕 } y \text{ 轴：} & A(x)=2\pi xy\end{cases}$$

(柱壳法)

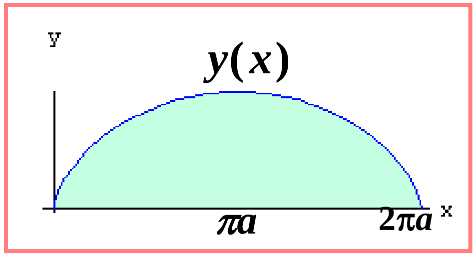
类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例 1 求摆线 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转的旋转体体积

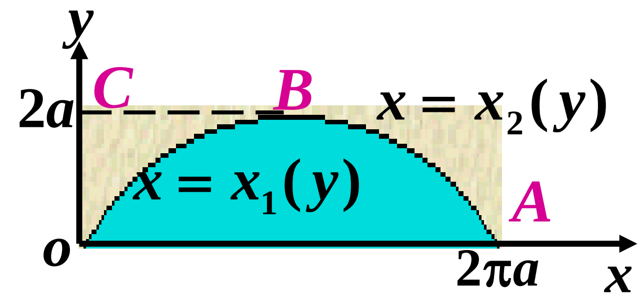


$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)dx$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt = 5\pi^2 a^3.$$

绕y轴旋转的旋转体体积



可看作平面图$OABC$与OBC

分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dt - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dt$$

注意上下限！

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3.$$

注 $\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{2\pi}(t^2\sin t-2t\sin^2 t+\sin^3 t)\mathrm{d}t \qquad (令\ u=t-\pi)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[-(\cancel{u^2}+2\pi u+\cancel{\pi^2})\sin u-2(\cancel{u}+\pi)\sin^2 u\right.$$
$$\left.-\cancel{\sin^3 u}\right]\mathrm{d}u$$

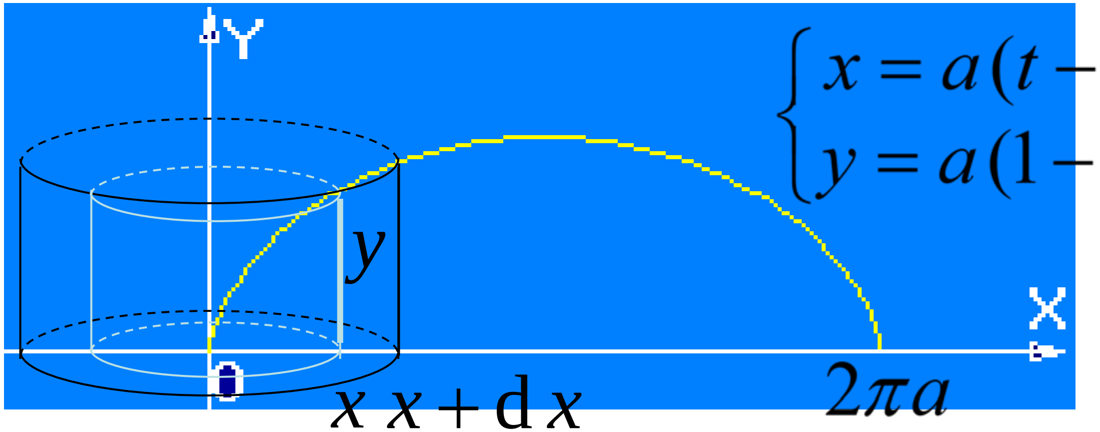
$$=-4\pi\underbrace{\int_0^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u}_{分部积分}-4\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u}_{关于\frac{\pi}{2}对称}$$

(利用“偶倍奇零”)

$$=-4\pi^2-8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=-4\pi^2-8\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-6\pi^2$$

说明: V_y 也可按柱壳法求出



柱面面积 $2\pi x \cdot y$　　　　柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}\,t$$

$$V_y = \cdots$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d}\, t$$

$$= 8\pi \ a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \mathrm{d}\, t$$

$$\Big\downarrow \ 令 u = \frac{t}{2}$$

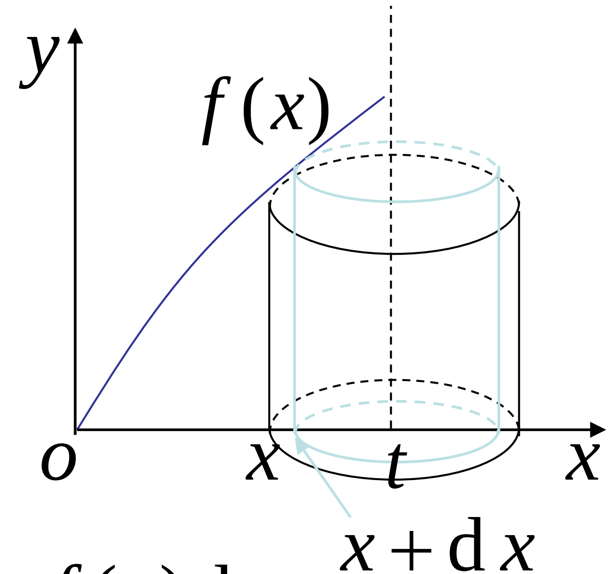
$$= 16\pi \ a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \, \mathrm{d}\, u$$

$$\Big\downarrow \ 令 v = u - \frac{\pi}{2}$$

$$= 16\pi \ a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{2v}_{奇函数} + \pi + \underbrace{\sin 2v}_{奇函数}) \underbrace{\cos^4 v}_{偶函数} \mathrm{d}\, v = 6\pi^3 a^3$$

例2. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geq 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x)$, $x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明:

$$V''(t)=2\pi f(t).$$



证: 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则

$$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

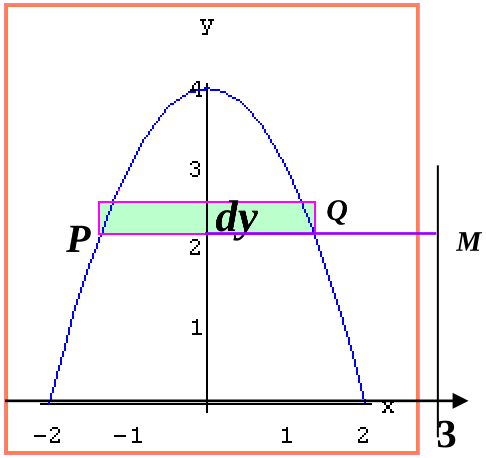
$$V'(t)=2\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\cancel{2\pi t\,f(t)}-\cancel{2\pi t\,f(t)}$$

故

$$V''(t)=2\pi\,f(t)$$

例 3 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转构成旋转体的体积.

解 取积分变量为 y, $y\in[0,4]$



体积元素为

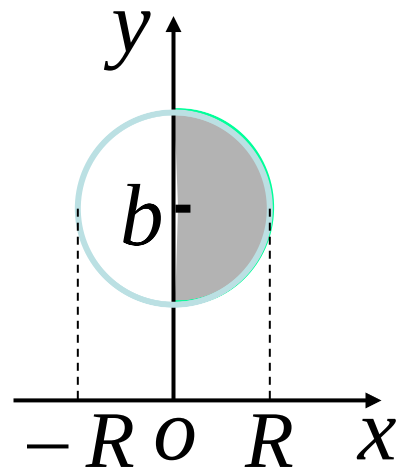
$$dV=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]dy$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]dy$$

$$=12\pi\sqrt{4-y}\,dy,$$

$$\therefore V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=64\pi.$$

3. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2 \quad (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V .



提示: 上下半圆为 $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$$y'=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

求体积 :

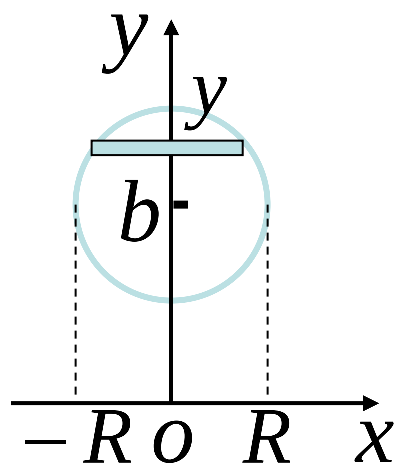
方法1 利用对称性

$$V=2\int_0^R \pi\left[(b+\sqrt{R^2-x^2})^2-(b-\sqrt{R^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2R^2b$$

上下半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

方法2 用柱壳法



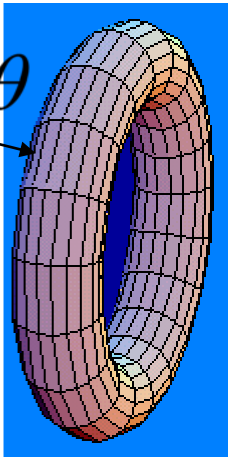
$$\mathrm{d}V = 2\pi y \cdot 2x \cdot \mathrm{d}y$$

$$V = 4\pi \int_{b-R}^{b+R} y\sqrt{R^2 - (y-b)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi^2 R^2 b$$

说明: 上式可变形为

$$\mathrm{d}V = \pi R^2 \cdot b\,\mathrm{d}\theta$$



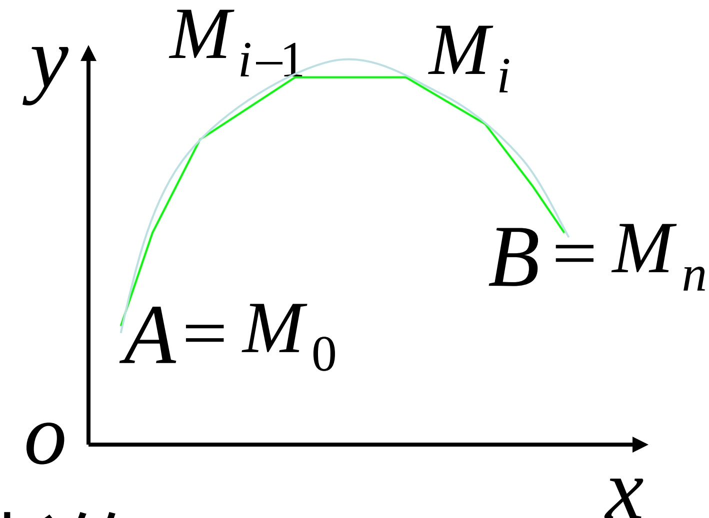
$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} \pi R^2 \cdot b\,\mathrm{d}\theta$$

此式反映了环体微元的另一种取法(如图所示).

二、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda \to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| M_{i-1} M_i \right|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

(证明略)

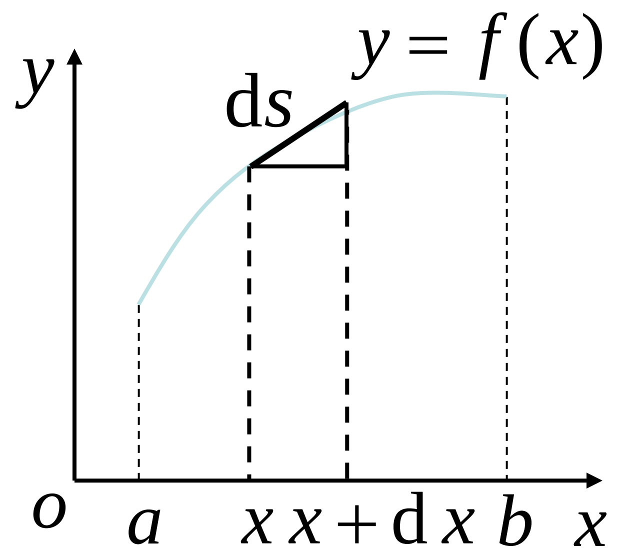
(1) 曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$



因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, 则得

弧长元素(弧微分) :

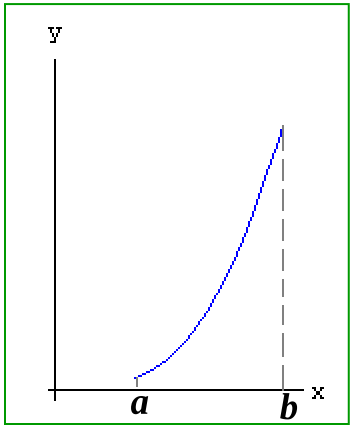
$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(自己验证)}$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例 1 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.



解 $\because y'=x^{\frac{1}{2}}$,

$$\therefore ds=\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\sqrt{1+x}dx,$$

所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例 2　计算曲线$y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$的弧长$(0\le x\le n\pi)$.

解　$y'=n\sqrt{\sin\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sqrt{\sin\frac{x}{n}}$,

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,dx$$

$$\underline{\underline{x=nt}}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot n\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)dt=4n.$$

例 3 证明正弦线 $y = a\sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{1+a^2}\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的周长.

证 设正弦线的弧长等于 s_1

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,dx,$$

设椭圆的周长为 s_2

$$s_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt,$$

根据椭圆的对称性知

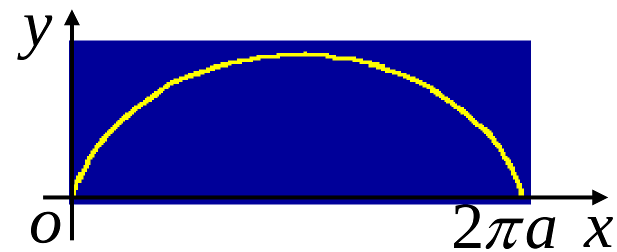
$$s_2 = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1+a^2)(\cos t)^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,dx = s_1,$$

故原结论成立.

例4. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$

$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$

$= 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

例5　求极坐标系下曲线$r = a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^3$的长.

$(a > 0)\qquad (0 \le \theta \le 3\pi)$

解　$\because\ r' = 3a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 \cdot \cos\frac{\theta}{3} \cdot \frac{1}{3} = a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 \cdot \cos\frac{\theta}{3}$,

$$\therefore\ s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^6 + a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^4\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{3\pi}\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a.$$

五、小结

平面曲线弧长的概念

弧微分的概念

$$\text{求弧长的公式}\begin{cases}\text{直角坐标系下}\\ \text{参数方程情形下}\\ \text{极坐标系下}\end{cases}$$

思考题

闭区间$[a,b]$上的连续曲线$y=f(x)$是否一定可求长?

思考题解答

不一定．仅仅有曲线连续还不够，必须保证曲线光滑才可求长．

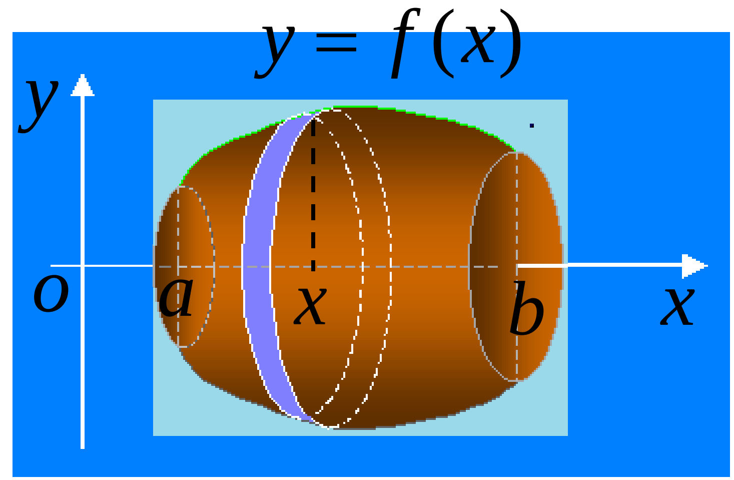
4、旋转体的侧面积

设平面光滑曲线 $y=f(x)\in C^1[a,b]$, 且 $f(x)\geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的侧面积 .

取侧面积元素: 位于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ \mathrm{d}x$$



积分后得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ \mathrm{d}x$$

注意: 侧面积元素

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s \neq 2\pi y\,\mathrm{d}x$$

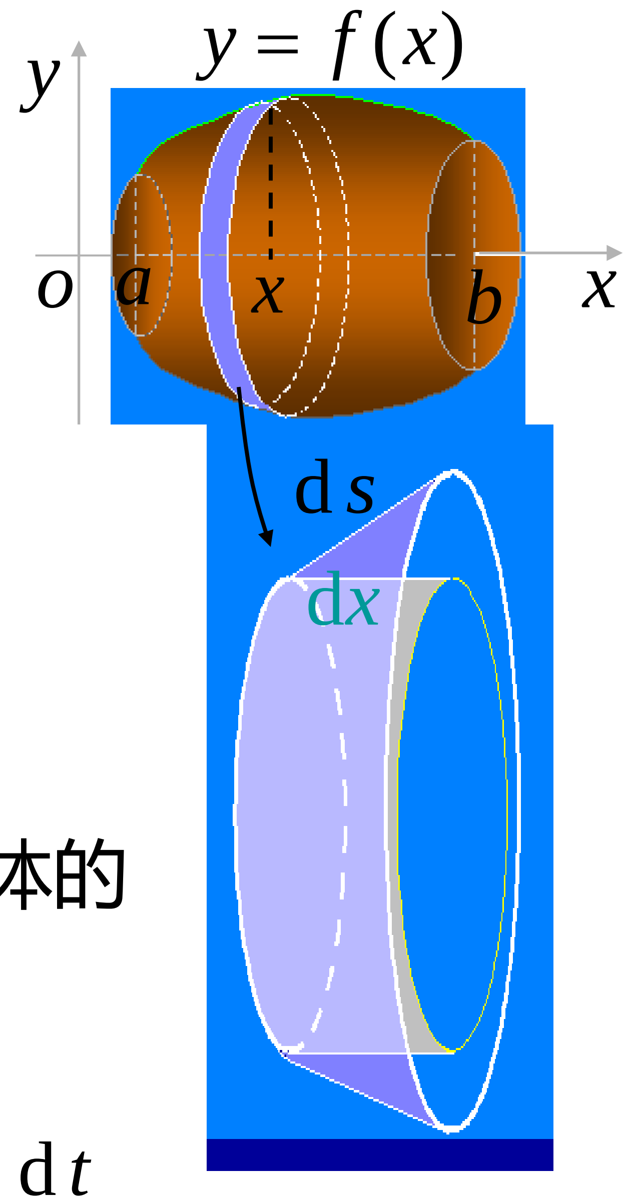
因为$2\pi y\,\mathrm{d}x$ 不是薄片侧面积$\triangle S$ 的的线性主部 .

若光滑曲线由参数方程

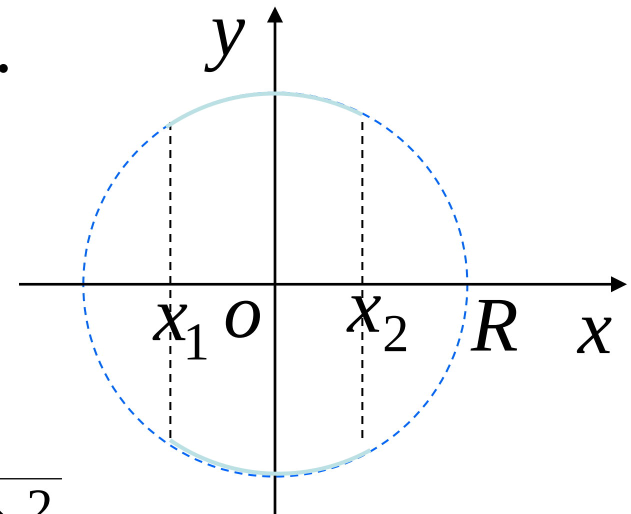
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出, 则它绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



例1. 计算圆 $x^2+y^2=R^2$在$x\in[x_1,x_2]\subset[-R,R]$上绕 x 轴旋转一周所得的球台的侧面积 S .



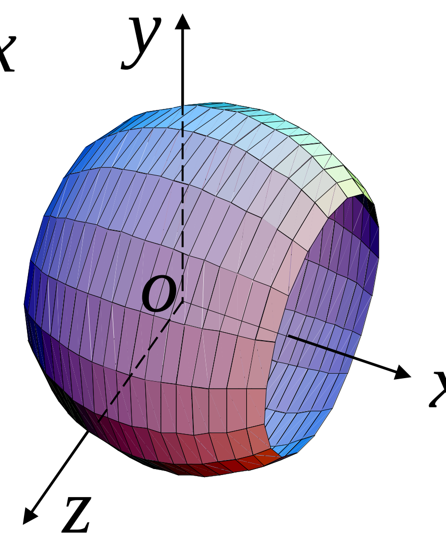
解: 对曲线弧

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\ \ x\in[x_1,x_2]$$

应用公式得

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}R\,\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1)$$



当球台高 $h=2R$ 时, 得球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

例2. 求由星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的表面积 S .

解: 利用对称性

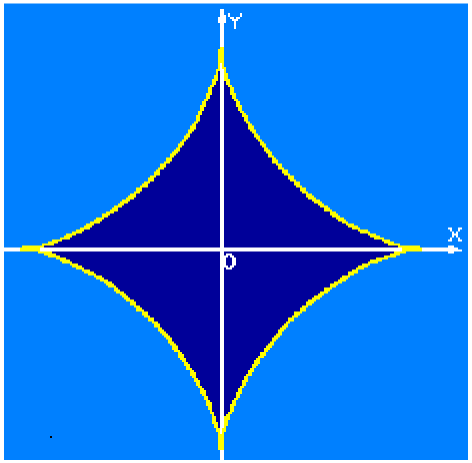
$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t$$

$$\cdot\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^2$$



星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

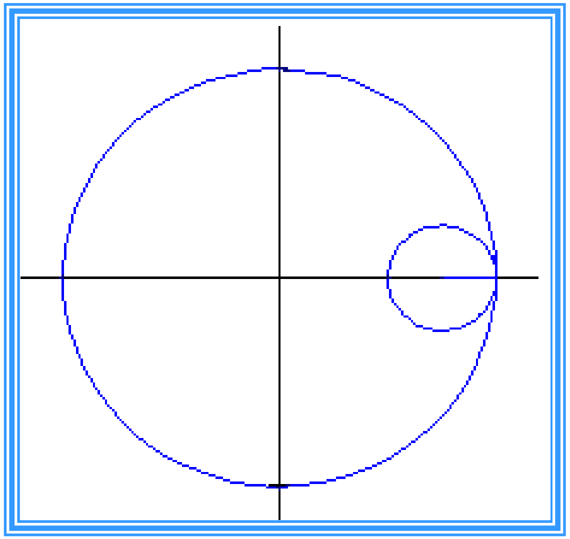
星形线是内摆线的一种.(当小圆在圆内沿圆周滚动时, 小圆上的定点的轨迹为是内摆线)

大圆半径

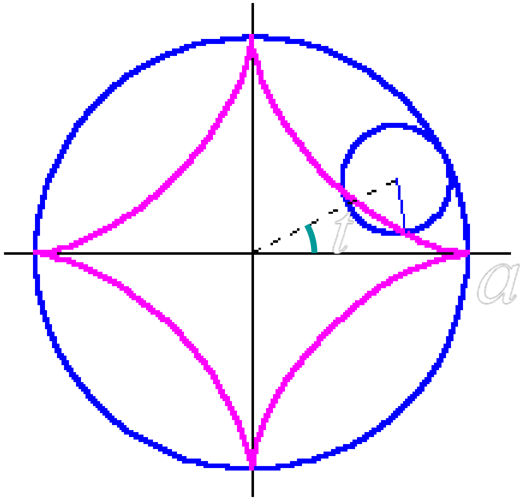
$R = a$

小圆半径

$r = \dfrac{a}{4}$



点击图片任意处播放开始或暂停



3. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ \ (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V 及表面积 S .

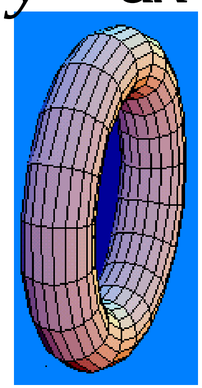
提示: 上下半圆为 $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}\qquad y'=\mp\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

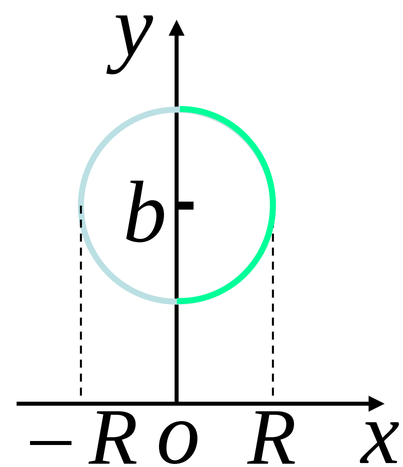
$$S=2\int_0^R 2\pi(b+\sqrt{R^2-x^2})\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+2\int_0^R 2\pi(b-\sqrt{R^2-x^2})\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

二者 y'^2 相同

$$=8\pi b\int_0^R\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=4\pi^2 bR$$



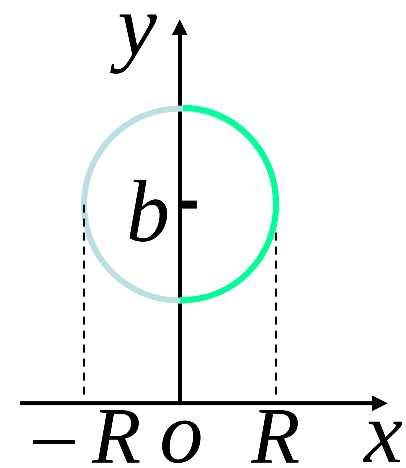


利用对称性

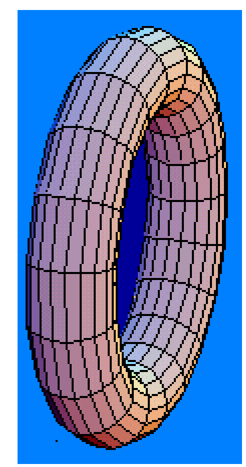
上式也可写成 $S=2\pi R\cdot 2\pi b=\int_0^{2\pi}2\pi R\cdot b\,\mathrm{d}\theta$

它也反映了环面微元的另一种取法.

上下半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$



利用对称性



$$S = 2\int_0^R 2\pi\left(b + \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+ 2\int_0^R 2\pi\left(b - \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

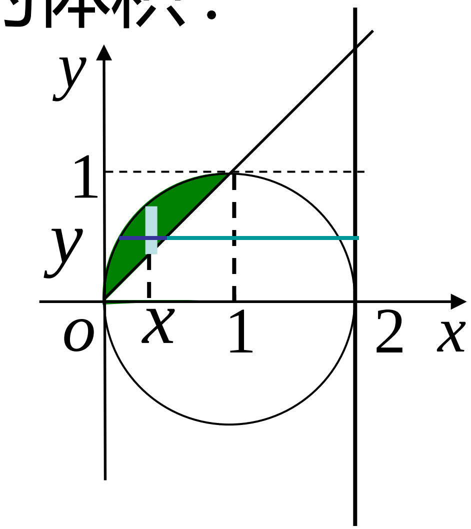
二者 y'^2 相同

$$= 8\pi b\int_0^R \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi^2 bR$$

上式也可写成 $S = 2\pi R\cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} 2\pi R\cdot b\,\mathrm{d}\theta$

它也反映了环面微元的另一种取法.

4. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.



提示： 选 x 为积分变量.

旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$$

若选 y 为积分变量, 则

$$V=\pi\int_0^1\left[\,2-(1-\sqrt{1-y^2})\,\right]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\,\mathrm{d}y$$

内容小结

1. 平面图形的面积

边界方程

- 直角坐标方程
- 参数方程 $A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- 极坐标方程 $A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

2. 平面曲线的弧长

弧微分： $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

曲线方程

- 直角坐标方程
- 参数方程方程
- 极坐标方程 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

3. 已知平行截面面积函数的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

⟹ 旋转体的体积

$$y=y(x)\begin{cases}\text{绕 } x \text{ 轴：} & A(x)=\pi\,y^2\\ \text{绕 } y \text{ 轴：} & A(x)=2\pi\,xy \quad \text{(柱壳法)}\end{cases}$$

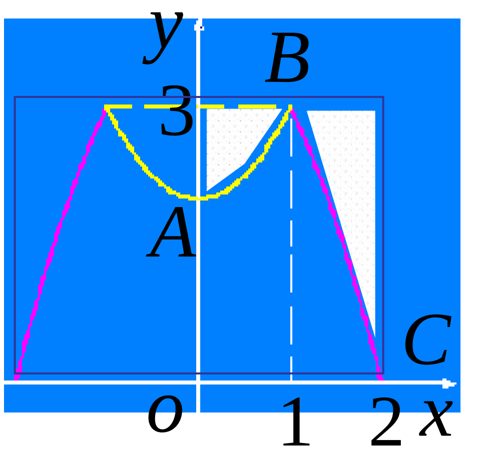
4. 旋转体的侧面积

$y=y(x)$ 绕 x 轴旋转，侧面积元素为 $\mathrm{d}S=2\pi y\,\mathrm{d}s$

(注意在不同坐标系下 ds 的表达式)

例6. 求曲线$y=3-|x^2-1|$与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转得的旋转体体积. (94 考研)

解: 利用对称性，在第一象限



$$y=\begin{cases} x^2+2, & 0\le x\le 1 \\ 4-x^2, & 1< x\le 2 \end{cases}$$

故旋转体体积为

$$V=\pi\cdot 3^2\cdot 4-2\int_0^1 \pi[3-(x^2+2)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$-2\int_1^2 \pi[3-(4-x^2)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=36\pi-2\pi\int_0^2 (x^2-1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi$$