第一节

数列的极限

一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质与极限的四则运算

三、极限存在准则

二、收敛数列的性质与极限的四则运算

1. 收敛数列的极限唯一.

2. 收敛数列一定有界.

说明: 此性质反过来不一定成立 .

3. 收敛数列的保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0 \quad (< 0)$, 则$\exists N \in \mathrm{N}^+$, 当$n > N$

时, 有$x_n > 0 \ (< 0)$.

收敛数列的保号性--加强版

1.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0 \ \ (< 0)$，则$\exists N \in \mathrm{N}^+$，当$n > N$

时，有 $x_n > \dfrac{a}{2} > 0 \ \ \left(< \dfrac{a}{2} < 0\right)$.

2.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > b(< b)$，则$\exists N \in \mathrm{N}^+$，当$n > N$

时，有$x_n > b(< b)$.

3.若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，且$a > b$，则$\exists N \in \mathrm{N}^+$，

当$n > N$ 时，有 $x_n > y_n$.

4. 收敛数列的任一子数列收敛于同一极限 .

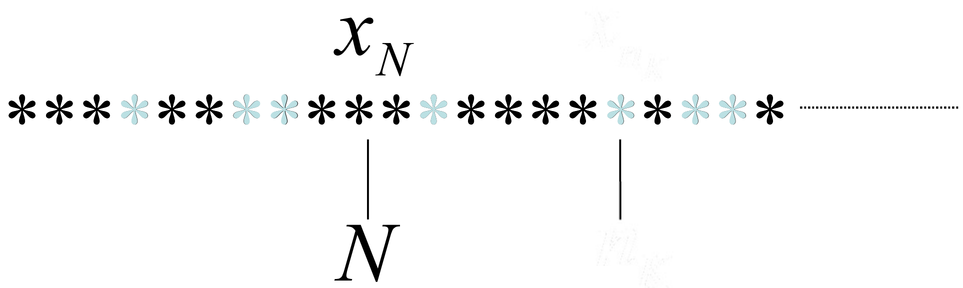
证: 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 .

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon$$

现取正整数 K, 使 $n_K \geq N$, 于是当 $k > K$ 时, 有

$$n_k > n_K \geq N$$



从而有 $\left| x_{n_k} - a \right| < \varepsilon$, 由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

说明:

由此性质可知，若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散.

例如,

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 发散！}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$$

极限的四则运算

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则有

$$(1) \lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$(2) \lim_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$(3) \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}(b \neq 0)$$

$$(4) \lim_{n\to\infty}\left(kx_n\right) = ka$$

$$(5) \lim_{n\to\infty}\left(x_n\right)^k = a^k$$

例. 设$a_0 \neq 0, \mathrm{b}_0 \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_{k-1} n + b_k} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, k = m \\ \infty, k < m \\ 0, k > m \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}\right) = \frac{1}{2}$$

设$a \neq$ -1 , $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \begin{cases} 1, & |a| > 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ 1/2, & a = 1 \end{cases}$

三、极限存在准则

迫敛性;　单调有界准则;　柯西准则 .

1. 两边夹准则 (准则1)　(迫敛性)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

例5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用夹逼准则 . 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$

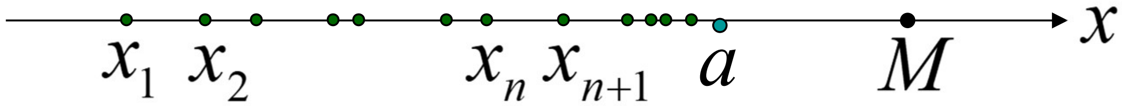
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

2. 单调有界数列必有极限（准则2）

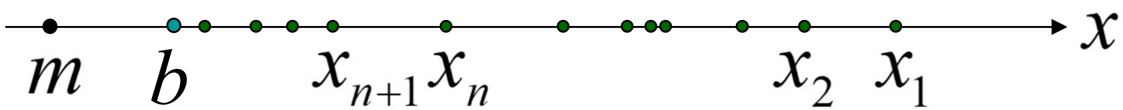
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ (\ge m)$$



例设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $x_1>0$, $a>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

利用极限存在准则

解: $\because x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a})=1$$

$\therefore$数列单调递减有下界，故极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$

则由递推公式有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A}) \Longrightarrow A=\pm\sqrt{a}$

$\because\ x_1>0,\ \therefore\ x_n>0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

例. 证明数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^{n}\right\}$ 与 $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ 都收敛且极限相同.

证：利用伯努里不等式

$$(1+x)^{n} \geq 1+nx,\ \ x>-1,\ \ n=1,2,3\cdots$$

（利用数学归纳法证明，作业！）

事实上

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\frac{(n(n+2))^n\cdot(n+2)}{(n+1)^{2n}\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{(n+1)^2})^n\cdot\frac{n+2}{n+1}\geq(1-\frac{n}{(n+1)^2})\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}=\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3}>1$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}}$$

$$= \frac{((n+1)^2)^{n+1}}{(n(n+2))^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= (1 + \frac{1}{n(n+2)})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$\geq (1 + \frac{n+1}{n(n+2)}) \cdot \frac{n+1}{n+2} > 1$$

所以

$$2 \le (1+\frac{1}{n})^{n} \le (1+\frac{1}{n})^{n+1} \le 4, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ **有极限 .**

记此极限为 e 即

，

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

e 为无理数 , 其值为 $e = 2.718281828459045\cdots$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot (1+\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} y_n = e = 2.71828\cdots$$

例8　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证　显然 $x_{n+1} > x_n$,　　$\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$,　$x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的；　　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$,　$x_{n+1}^2 = 3 + x_n$,　$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3 + x_n)$,

$A^2 = 3 + A$,　　解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e$$