高等数学B期中测验试题答案

一、（1）求函数 $f(x)=\ln(3^x-9)+\arcsin\dfrac{2x-1}{5}$ 的定义域；

解： 要使函数有意义，必须 $\begin{cases} 3^x-9>0, \\ -1\le\dfrac{2x-1}{5}\le 1. \end{cases}$

所以所求的定义域为 $[-2,3]\cap(2,+\infty)=\left(2,3\right]$.

（2）求函数 $y=1+\ln(x+3)$ 的反函数。

解：函数的值域为 $(-\infty,+\infty)$. 解出 x

$$x=e^{y-1}-3.$$

因此所求反函数为 $y=e^{x-1}-3,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

二、计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+8x-9}$;

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+8x-9}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+9)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+9}=-\dfrac{1}{10}$.

(2) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 b}{x-b}$;

解: $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 b}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{2\sin x\cos x}{1}=2\sin b\cos b$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x$;

解：$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})^x}{(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}$;

解：$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\frac{1}{2}(1+x^3)^{-1/2}3x^2}=2.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

解：$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\,\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

三、求下列函数的导数或微分：

（1）设$y = x\arcsin x - \frac{1}{2}\ln(1+x^3)$, 求 y';

解：$y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{1+x^3}$.

（2）设 $y = \frac{1-x^3}{\sqrt[3]{x}}$, 求 y';

解：

$$y' = (x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{8}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}.$$

（3）设 $y=\sin^2 x\cos x^2$，求 y';

解：

$$y'=2\sin x\cos x\cos x^2-2x\sin^2 x\sin x^2.$$

（4）设 $y=e^{ax}\sin bx,$ 求 dy;

解：$y'=(e^{ax})'\sin bx+e^{ax}(\sin bx)'$

$$=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx).$$

$$dy=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)dx.$$

（5）设 $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$， 求 dy.

解：取对数 $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)$,

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2},$$

$$y'=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{1+x^2}\right).$$

$$dy=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)dx.$$

四、（1）证明：当 $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ 时，有 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x.$

证明：令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad f(0) = 1.$

则 $f(x)$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，当 $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ 时，

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ 严格递减.

当 $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ 时，$1 = f(0) > f(x) = \dfrac{\sin x}{x} > f(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi},$

所以 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x.$

（2）求函数 $f(x)=x^3+x^2-x+2$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

解： $f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内的驻点： $x=\dfrac{1}{3}.$

$f(-1)=3,\qquad f(2)=12,\qquad f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{49}{27}.$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$

上的最大值为 $f(2)=12,$

最小值为 $f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{49}{27}.$

五、设曲线的参数方程为 $x = b\sin^3 t,\ y = b\cos^3 t, (b > 0, 0 \le t < 2\pi)$

(1) 求过点 $(x(t_0), y(t_0))$ 的切线方程.

解：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-b3\cos^2 t\sin t}{b3\sin^2 t\cos t} = -\cot t.$$

过点 $(x(t_0), y(t_0))$ 的切线方程为

$$y - y(t_0) = -\cot t_0(x - x(t_0)),$$

即

$$y - b\cos^3 t_0 = -\cot t_0(x - b\sin^3 t_0).$$

（2）证明当 $t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 时，切线被坐标轴所截线段的长度为常数.

$$y - b\cos^3 t_0 = -\cot t_0 (x - b\sin^3 t_0)$$

证明 切线与坐标轴的交点为

$$(0, b\cos^3 t_0 + b\cot t_0 \sin^3 t_0) = (0, b\cos t_0),$$

$$(b\cos^3 t_0 \tan t_0 + b\sin^3 t_0, 0) = (b\sin t_0, 0).$$

切线被坐标轴所截线段的长度为

$$\sqrt{(-b\sin t_0)^2 + (b\cos t_0)^2} = b.$$

所以，结论成立.

六（1）设 $f_n(x)=x^2+nx-1,(n$ 为正整数），证明存在唯一

$$a_n\in\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right),$$ 使得 $f_n\left(a_n\right)=0.$

证明： $$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2+n\cdot\frac{1}{n}-1=\left(\frac{1}{n}\right)^2>0,$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2+n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)-1=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2+1-\frac{1}{n}-1$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2-\frac{1}{n}<0,$$

由根的存在性定理知，存在点 $a_n\in\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right),$ 使得 $f_n\left(a_n\right)=0.$

由 $f_n'(x)=2x+n>0,$ 所以，此解唯一。

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

解：由 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}<a_n<\dfrac{1}{n}$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<(1+a_n)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}\frac{n-1}{n^2}n}=e,$$

由迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e.$

七、已知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{2x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{3}{4}.\quad 求\quad f(0), f'(0).$$

解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{2x}+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{2x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)\lim\limits_{x\to 0}x=0,$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(-\frac{1}{2})}{x}$$

$$=\frac{3}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{2x^2}\quad=\frac{3}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{4x}$$

$$=\frac{3}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4(1+x)}\quad=1.$$

八、设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上二阶可导，且存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(a)=f(b)=0, f(c)>0.$ 证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0.$

证明：因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上二阶可导，

所以 $f'(x), f(x)$ 在区间 $[a,b]$上连续.

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 对函数 $f'(x)$ 用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,

使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$