第二章 一元微分学

第四节 不等式证明

不等式的问题内容丰富，变化较多，用到的知识和方法很广，在微积分中讨论的不等式主要是：用微分学证明的不等式和用积分学证明的不等式。本节主要讨论用微分学证明不等式。

用微分学证明不等式的主要工具就是导数，主要方法有：（1）利用单调性、极值与最值，（2）利用中值定理和 Taylor 公式，（3）利用凹凸性。

1. 利用单调性和极值与最值

我们总可以把欲证的不等式变形为: $f(x)\ge 0, x\in I$ 或 $f(x)>0, x\in I$

一般步骤为

(1) 求导 $f'(x)$；

(2) 确定 $f'(x)$ 在区间 I (I 可开,可闭,半开半闭,可以是有限区间,也可以是无限区间)上的符号；

(3) 若 $f'(x)$ 在区间 I 上有确定的符号,那么就可以判断 $f(x)$ 的单调性,进而证出不等式。比如若 $f'(x)\ge 0, x\in I$ 则有 $f(x)\ge f(a+0), f(x)\le f(b-0)$，$x\in I$（$a,b$ 分别表示 I 的左，右端点，可以是无穷），若可以判断 $f(x)$ 为严格单调增加，则上面不等式可改为严格不等式。

（4）若 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号有正有负，则可考虑 $f(x)$ 在 I 上的最大值或最小值，进而证出不等式。比如若 $f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值分别为 M, m，则 $f(x)\ge m, f(x)\le M, x\in I$。

（5）若 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号不能直接确定，可考虑再求导 $f''(x)$，通过 $f''(x)$ 去讨论 $f'(x)$ 的符号（按（3）或（4））。

值得注意的是：由于所作的辅助函数 $f(x)$ 不同，确定其符号的难易程度可能不同，所以作辅助函数可不拘一格作适当变形。不同辅助函数的构造一般来源于原不等式的不同的同解变形。

例 1：证明：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}\,(b>a>0)$

分析：不等式中有两个参数 a,b，用一元微分学的知识去处理时，一定要视为或变为单参数（或单变量）问题。一般有以下两个处理办法：

（1） 把其中一个参数视为常数，而另一个参数作变量。

（2） 作变换 $t=\varphi(a,b)$ 把原不等式变形为单变量的不等式。要注意的是所有变形必须是同解变形。

证明：$f(x)=\ln\frac{x}{a}-\frac{2(x-a)}{x+a}, x\ge a$，

则 $f(a)=0, f'(x)=\frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}$

可见 $x>a>0$ 时， $f'(x)>0$ 即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上严格单调增加，又 $b>a$ ，故有

$f(b)>f(a)=0$ ，即得 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$ 。

或： 原不等式变形为 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+\frac{b}{a}}$

令 $t=\frac{b}{a}$ ，则原不等式等价于

$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$ $(t>1)$

令 $f(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ $,t>1$

下面的证明过程学生自己完成。

例 2．设 $a\ge 1$，证明：当 $x\in[0,a]$ 时，成立不等式

$$0\le e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}$$

证明：先证左边不等式：

左边不等式变形为 $x+a\ln(1-\frac{x}{a})\le 0$

令 $f(x)=x+a\ln(1-\frac{x}{a})$

则 $f(0)=0, f'(x)=\frac{-x}{a-x}\le 0$， $x\in[0,a)$

故当 $x\in[0,a)$ 时， $f(x)\le f(0)=0$ ，从而原不等式成立，

又当 $x=a$ 时，原不等式成立.

总之对 $x\in[0,a]$，总成立不等式 $e^x-(1-\frac{x}{a})^a\ge 0$

再证右边不等式：

右边不等式变形为

$$(1-\frac{x}{a})^a e^x+\frac{x^2}{a}-1\ge 0$$

令 $F(x)=(1-\frac{x}{a})^a e^x+\frac{x^2}{a}-1$

则 $F(0)=0,F(a)=a-1,F'(x)=\frac{2x}{a}+(1-\frac{x}{a})^a e^x-(1-\frac{x}{a})^{a-1}e^x=\frac{x}{a}[2-e^x(1-\frac{x}{a})^{a-1}]$，

（至此，我们还不能马上确定：$F'(x)$ 非负，非正，还是有正有负．但可以看出 $F'(x)$ 的符号与

$g(x)=2-e^x(1-\frac{x}{a})^{a-1}$ 的符号相同： $g(0)=1, g(a)=2\,(a\neq 1), g'(x)=\frac{x-1}{a}e^x(1-\frac{x}{a})^{a-2}$，

由 $g'(x)=\frac{x-1}{a}e^x(1-\frac{x}{a})^{a-2}=0$ 得 $x=1$，而 $g(1)=2-e(1-\frac{1}{a})^{a-1}\to 2-e<0,(a\to 1+0)$。

可见 $g(x)$ 的符号情况比较复杂与 a 的具体值有关。这时我们按 $F'(x)$ 有零点和无零点两种情况讨论。 $F'(x)$ 有零点时，如能求出其零点，则可求出 $F(x)$ 的最值，问题就解决了。但本题中 $F'(x)$ 的零点求不出来。）

若 $F'(x)$ 在 $(0,a)$ 内无零点，则 $\min\limits_{x\in[0,a]}F(x)=\min(F(0),F(a))=0$

从而 $F(x)\geq 0, x\in[0,a]$，命题成立

若 $F'(x)$ 在 $(0,a)$ 内有零点，设 ξ 为 $F'(x)$ 的零点，则 ξ 满足：$2-e^{\xi}(1-\frac{\xi}{a})^{a-1}=0$

从而 $F(\xi)=(1-\frac{\xi}{a})^a e^{\xi}+\frac{\xi^2}{a}-1=2(1-\frac{\xi}{a})+\frac{\xi^2}{a}-1=1-\frac{2\xi}{a}+\frac{\xi^2}{a}=\frac{(\xi-1)^2}{a}+1-\frac{1}{a}\geq 0$

故 $\min\limits_{x\in[0,a]}F(x)=\min(F(0),F(\xi),F(a))=0$

从而 $F(x)\geq 0, x\in[0,a]$，命题成立

综上得当 $x\in[0,a]$ 时，成立不等式

$$e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\leq\frac{x^2}{a}e^{-x}$$

另解一：（分析：$e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\leq\frac{x^2}{a}e^{-x}\Leftrightarrow(1-\frac{x}{a})^a\geq(1-\frac{x^2}{a})e^{-x}$

若 $1-\frac{x^2}{a}\leq 0$，即 $x\geq\sqrt{a}$，结论成立，若 $1-\frac{x^2}{a}>0$，即 $0\leq x\leq\sqrt{a}$，则

$(1-\frac{x}{a})^a\geq(1-\frac{x^2}{a})e^{-x}\Leftrightarrow a\ln(1-\frac{x}{a})+x-\ln(1-\frac{x^2}{a})\geq 0$）

$x\geq\sqrt{a}$ 时，结论成立；

$0\leq x<\sqrt{a}$ 时，令 $F(x)=a\ln(1-\frac{x}{a})+x-\ln(1-\frac{x^2}{a})$

则 $F(0)=0, F'(x)=\frac{x(x^2-2x+a)}{(a-x)(a-x^2)}\geq 0\Rightarrow F(x)\geq 0, x\in[0,\sqrt{a}]$

综上得当 $x\in[0,a]$ 时，成立不等式

$$e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}$$

另解二：(分析：$e^{-x}-(1-\frac{x}{a})^a\le\frac{x^2}{a}e^{-x}\Leftrightarrow(1-\frac{x}{a})^a e^x\ge1-\frac{x^2}{a}$，由 $e^x=[e^{\frac{x}{a}}]^a\ge(1+\frac{x}{a})^a$，

得 $(1-\frac{x}{a})^a e^x\ge(1-\frac{x}{a})^a(1+\frac{x}{a})^a=(1-\frac{x^2}{a^2})^a$

如能证明 $(1-\frac{x^2}{a^2})^a\ge1-\frac{x^2}{a}$，那么问题就解决了，下面用 Taylor 公式来解决：

令 $f(t)=(1-t)^a,t\le1$，则由 Taylor 公式有: $f(t)=1-at+\frac{a(a-1)(1-\xi)^{a-2}}{2}(-t)^2\ge1-at$，

其中 ξ 介于 0 和 t 之间. 故有 $(1-\frac{x^2}{a^2})^a\ge1-a\times\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{a}$.

2．利用微分中值定理和 Taylor 公式

例 2．(1)证明: $\sin x<x,\ x>0$ (2) 证明:对 $0<a<b\le\frac{\pi}{2}$,成立不等式: $\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}$

证明：(1) 方法一（用拉氏中值定理证明)：当 $x\ge\frac{\pi}{2}$ 时，不等式成立，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，由拉氏中值定理知 $\exists\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos\xi<1\Rightarrow\sin x<x$$

综上知结论成立.

方法二（用 Taylor 定理证明)：当 $x\ge\frac{\pi}{2}$ 时，不等式成立，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，由 Taylor 定理知 $\exists\xi\in(0,x)$，使得 $\sin x=x-\frac{\sin\xi}{2}x^2<x$

综上知结论成立.

方法三（用凹凸性证明)：当 $x\ge\frac{\pi}{2}$ 时，不等式成立，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，由于函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上为凸函数，故曲线 $y=\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$ 在点 $x=0$ 处的切线 $y=x$ 下方，即有 $\sin x<x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$，综上知结论成立.

方法四:用单调性证明也很简单.

方法五:用积分知识证明很简单.

(2) 方法一（用拉氏中值定理证明)：由拉氏中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,a),\xi_2\in(a,b)$，使得

$$\frac{\sin a}{a}=\cos\xi_1,\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos\xi_2\Rightarrow\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\Rightarrow\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}$$

方法二（用柯西中值定理证明）：(分析：原不等式变形为 $\frac{\sin a}{\sin b}>\frac{a}{b}$，若令 $f(x)=\sin x, g(x)=\sin\frac{b}{a}x$，则该不等式为 $\frac{f(a)-f(0)}{g(a)-g(0)}>\frac{a}{b}$，再用柯西中值定理很容易证得，证明过程学生自己完成.)

方法三（直接利用单调性证明）：（分析：本题结论实际上就是函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调减少，因此只需证明 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调减少，利用导数可以证明此结论：$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\tan x}{x^2\cos x}<0$）

另外本题也可以利用积分学知识证明：

$$\frac{\sin b}{b}=\frac{1}{b}\int_0^b\cos xdx=\frac{1}{a}\int_0^a\cos\frac{b}{a}tdt<\frac{1}{a}\int_0^a\cos tdt=\frac{\sin a}{a}$$

例 4．求证 $\frac{x}{\sin x}<\frac{\tan x}{x}\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

分析：本题等价于证明 $\sin x\tan x>x^2$，考虑计函数 $f(x)=\sin x\tan x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$，经计算有 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2$，如能说明 $f'''(x)>0\ (0<x<\frac{\pi}{2})$ 问题就解决了

证明：令 $f(x)=\sin x\tan x$，则 $f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x=\sin x+\tan x\sec x$，

$$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\sec x\tan^2 x=\cos x+2\sec^3 x-\sec x$$

$$f'''(x)=-\sin x+6\sec^2 x\sec x\tan x-\sec x\tan x=\frac{\sin x(6-\cos^2 x-\cos^4 x)}{\cos^4 x}$$

所以 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(x)>0\ (0<x<\frac{\pi}{2})$

由 Taylor 公式有

$\sin x\tan x=x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3>x^2$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，于是命题得证

注:本题可用单调性证明:原不等式等价于 $\ln\sin x+\ln\tan x-2\ln x>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$，

令 $f(x)=\ln\sin x+\ln\tan x-2\ln x$，则有

$$f'(x)=\frac{x\cos^2 x-2\sin x\cos x+x}{x\sin x\cos x}$$

注意到 $f'(x)$ 中,分母的符号可确定是正的,只需考虑分子的符号.令

$g(x)=x\cos^2 x+x-2\sin x\cos x$，则有

$g'(x)=3\sin^2 x-2x\sin x\cos x=\sin x\cos x(3\tan x-2x)>0, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

从而当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $g(x)>g(0)=0$

因此 $f'(x)>0, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内严格单调增加,又 $f(0+0)=0$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $f(x)>f(0+0)=0$,从而得结论.

总结：用中值定理证明不等式的一般步聚：,先将欲证的不等式变形为 $f(x)\le M, a\le x\le b$,

然后用中值定理得 $f(x)=g(\xi)$,再说明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上总有 $g(x)\le M$,证明就完成了. 用 Taylor 公式证明不等式时,一定是选择拉氏余项.

３．利用凹凸性

主要是利用（１）凹凸性定义　（２）凹凸曲线在切线和割线一侧的几何特性

例５．设 $p>0, q>0, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$a>0, b>0$，证明：

$$ab\le \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

分析：不等式变形 $\ln(\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q)\ge \ln ab=\dfrac{1}{p}\ln a^p+\dfrac{1}{q}\ln b^q$，若记 $\alpha_1=\dfrac{1}{p}, \alpha_2=\dfrac{1}{q}$，

$x_1=a^p, x_2=b^q$，上面不等式即为 $\ln(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\ge \alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2$，这正是函数 $f(x)=\ln x$ 的凸性.

证明：令 $f(x)=\ln x$，则有 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$，故 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数，由凸函数定义有

$$f(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q)\ge \frac{1}{p}f(a^p)+\frac{1}{q}f(b^q)$$

从而得结论.

４．其他：比如用幂级数展开，定积分的知识证明不等式

例如　由 $1>\cos x\,(x\ne 2k\pi)\Rightarrow \int_0^x dt>\int_0^x \cos t dt \Leftrightarrow x>\sin x\Rightarrow \int_0^x t dt>\int_0^x \sin t dt$

$\Leftrightarrow \cos x>1-\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow \int_0^x \cos t dt>\int_0^x (1-\dfrac{t^2}{2})dt \Leftrightarrow \sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}$，$x>0$

练习题:

1．证明:$\dfrac{1}{x(1+x)}>\ln^2(1+\dfrac{1}{x}),\ x>0$

（令$t=\dfrac{1}{x}$，则原不等式等价于 ：$\dfrac{t^2}{(1+t)}>\ln^2(1+t),t>0.$ 可用单调性证明）

2. 设$a>\ln 2-1$，证明：

$$x^2-2ax+1<e^x,x>0$$

(可用单调性证.而证$f'(x)>0$时用最值,其中$f(x)=e^x-x^2+2ax-1$)

3．求证：

(1)当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,有$\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$

(2)如果ΔABC是锐角三角形，那么$\sin A+\sin B+\sin C>2$．如果是直角三角形此不等式还成立吗？如果是钝角三角形此不等式还成立吗？

(分析：由（1）很容易得到（2）．对（1），左边是函数$y=\sin x$，而右边函数$y=\dfrac{2x}{\pi}$正是曲线$y=\sin x$上的两点$(0,0),(\dfrac{\pi}{2},1)$的连线的方程．利用$y=\sin x$的凸性很容易得结论．)

4.求证:

(1)$\dfrac{1+x}{1+x^2}\le\dfrac{1+\sqrt{2}}{2},x>0$　(2)$2\arctan x<3\ln(1+x),x>0$

((1)实际上就是证明左边在$(0,+\infty)$内的最大值是右边,(2)用柯西中值定理再结合(1)的结论)

5. 求证：当$x>0$时,$\dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots x^{2n-1}}\le\dfrac{n+1}{n}$,且等号成立当且仅当$x=1$.

($x=1$时等号成立, 当$x\ne1$时, 令

$$f(x)=\frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots x^{2n-1}}-\frac{n+1}{n}=\frac{n(1-x^{2n+2})-(n+1)(x-x^{2n+1})}{nx(1-x^{2n})},$$

分母的符号容易定下来,关键要证明分子$g(x)=n(1-x^{2n+2})-(n+1)(x-x^{2n+1})\begin{cases}>0,0<x<1\\<0,x>1\end{cases}$?

$$g'(x)=-(n+1)[2nx^{2n}(x-1)-x^{2n}+1],g''(x)=-(n+1)x^{2n-1}(2n+4n^2)(x-1)$$

当$0<x<1$时,$g''(x)>0\Rightarrow g'(x)<g'(1)=0\Rightarrow g(x)>g(1)=0$

当$x>1$时,$g''(x)<0\Rightarrow g'(x)<g'(1)=0\Rightarrow g(x)<g(1)=0$)

6. 证明:$1+x^2<2^x,0<\ x<1$

(利用 $f(x)=2^x-1-x^2$ 的凹凸性)

7. 设 $a>0,b>0$，证明: $p>1$时,有

$$a^p+b^p\ge 2^{1-p}(a+b)^p$$

(利用 $f(x)=x^p$ 的凹凸性很容易证明)

8.证明: $x>0$时,有$e^{\frac{x}{2}}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{e^x+1}{2}$

(本题有很多方法可证,还可以利用幂级数展开去证明:

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n},\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\frac{e^x+1}{2}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2n!}$$

比较三个展式的系数便可得结论.)