无穷级数 (2021. 11)

1. 117已知 $u_n(x)$ 满足 (n为正整数)

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$$

且 $u_n(1) = \dfrac{e}{n}$. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和. ($= e^x \ln(1-x),\quad x \in [-1, 1)$)

2. 214设 $a_n > 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 证明:

    1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛.

    2) 当 $\alpha \le 1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

3. 513设函数 $f(x)$在$x = 0$ 的某个邻域内二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

4. 3114求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n-1}{2^{2n-1}}$ 的和. ($S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$; $= \frac{10}{9}$)

5. 527设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

6. 625 (1) 将函数 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展成 $F-$ 级数, 并证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$;
($f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + ...)$)
(2) 求积分 $\int_0^\infty \frac{u}{1+e^u} du$ 的值. ($= \frac{\pi^2}{12}$)

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可微, 且满足 $|f'(x)| \le mf(x)$, 其中 $m \in (0, 1)$. 任取实数 a_0, 定义 $a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \cdots$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

(以下为课外演练题.)

8. 判别下列级数的敛散性.
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}\ (a > 0)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\sin\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}$.

9. 设$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$，$n = 1, 2, \cdots$. 试证：
1) 数列$\{a_n\}$收敛；2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$收敛.

10. 已知正项数列$\{a_n\}$单调递减, 且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散, 试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛? 说明理由.

11. 已知正项数列$\{a_n\}$单调递增. 试证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛的充分必要条件是数列$\{a_n\}$有界.

12. 设函数 $f(x)$在$x = 0$ 的某个邻域内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A > 0$．请分别判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

13. 417设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数,

    1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

    2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) < 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

14. 624设 $p > 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_{n+1}^p = x_n^p + x_n^{2p}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛, 并求其和.
    $(= 4^p)$

15. 714求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.
    ($(-\infty, +\infty)$, $S(x) = \begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1} + \frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1) & x \neq 1\\ 2 & x = 1\end{cases}$)