（装订线内不要答题）

复旦大学计算机科学技术学院

2009-2011 学年第二学期《线性代数》期终考试试卷

B卷 共 8 页

课程代码：COMP120004.02 **考试形式：闭卷** 2010 年 9 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业____________学号__________姓名__________成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、 计算 n 阶行列式的值： （共 20 分）

1. $A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ （10 分）

2. $B_n = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 + x_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n + x_n \end{vmatrix}$ （10 分）

（装订线内不要答题）

二、假设 A 是 n 阶方阵，对于任意 n 阶可逆阵 X 都有 $AX = XA$，请证明 A 为纯量阵，即存在常数 c 使得 $A = cI_n$。（11 分）

三、设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是复数域上三维线性空间 V 的一组基，T 是 V 的一个线性变换，它在这组基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，即 $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$。求：$T$ 的所有的特征值与特征向量。 (12 分)

四、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。求

（1） 求一个正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 是一个对角阵；

（2） 设 $f(x)=x^n-2x^{n-2}+3$，求 $f(A)$。 （共 12 分，每小题 6 分）

（装订线内不要答题）

五、设向量$\alpha_1=(1,1,-1,2),\alpha_2=(2,-1,3,0),\alpha_3=(0,-3,5,-4),\beta_1=(1,2,2,1),\beta_2=(4,-3,3,1)$，请分别求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+L(\beta_1,\beta_2)$和$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的维数及一个基。（12 分）

六、设 $P_4[x]$ 是实数域 R 上的次数不超过 4 的多项式全体，

$f_1=1+x+2x^3, f_2=x+x^2-x^4, f_3=3+2x-x^2+6x^3+x^4, f_4=2x^3+3x^4, f_5=1+x-3x^4$。求

f_1,f_2,f_3,f_4,f_5 的极大线性无关组。（12 分）

七、设 V 是实数域 R 上的 n 维线性空间，T 是 V 上的线性变换，且 $T^2 = T + 2I_n$，其中 T 不为纯量阵，I_n 是 V 上的恒等变换。证明：

1) T 的特征值-1 和 2;

2) 对任意的向量 $\xi \in V$，有 $(T + I_n)\xi \in V_2$，$(T - 2I_n)\xi \in V_{-1}$；

3) $V = V_{-1} + V_2$ 且 $V_{-1} \cap V_2 = \{0\}$，其中 V_{-1} 与 V_2 分别是属于-1 与 2 的特征子空间。

(共 9 分，每小题 3 分)

（装订线内不要答题）

八、设A为n阶方阵，B为m阶方阵。试证明$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$相似于对角阵当且仅当$A,B$都相似于对角阵。　　（12 分）