内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[\ P(\xi_{\mathrm{k}}, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_{\mathrm{k}}, \eta_k)\Delta y_k\ ]$$

2. 性质

(1) L可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (\ i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意**积分弧段的方向**!

3. 计算

- 对有向光滑弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}\,t$$

- 对有向光滑弧 $L: y=\psi(x)$, $x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

• 对空间有向光滑弧Γ : $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:\alpha\to\beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

4. 两类曲线积分的联系

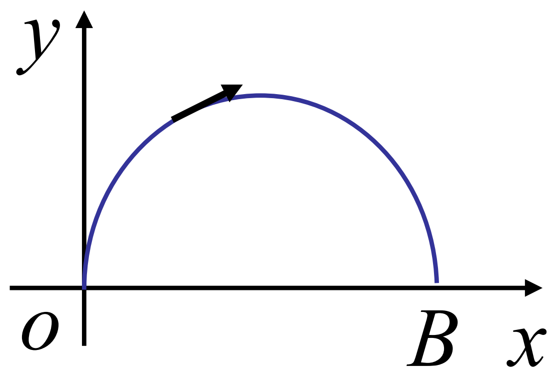
$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$

例8. 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分, 其中 L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

解: $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

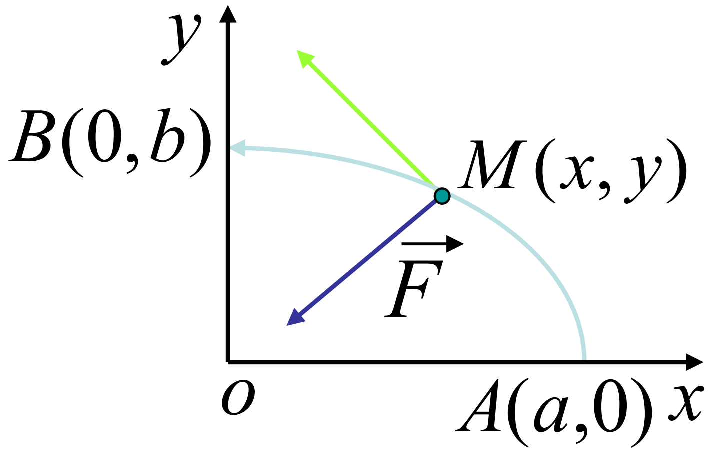
$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

思考与练习

1. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到原原点 O 的距离成正比, $\vec{F}$ 的方向恒指向原点，此质点由点 $A(a,0)$沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针移动到$B(0,b)$, 求力$\vec{F}$ 所作的功.



提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y), \vec{F}=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} -kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

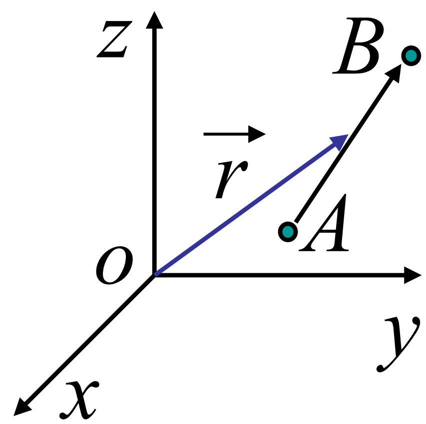
思考: 若题中$\vec{F}$的方向改为与$\overrightarrow{OM}$垂直且与 y 轴夹锐角,则

$\vec{F}=$ $\underline{k(-y,x)}$

$$W=\frac{k}{2}\left(a^2-b^2\right)$$

思考2. 一质点在力场$\vec{F}$作用下由点 $A(2,2,1)$ 沿直线移动到$B(4,4,2)$, 求 $\vec{F}$ 所作的功 W. 已知 $\vec{F}$ 的方向指向坐标原点, 其大小与作用点到 xoy 面的距离成反比.

解: $\vec{F} = \dfrac{k}{|z|}(-\vec{r}^{\,0}) = -\dfrac{k}{|z|}\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



$$W = \int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -k\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$L: \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2t+2 \quad (t:\ 0 \to 1) \\ z = t+1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$

$$= -k\int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}\,t}{t+1} = -3k\ln 2$$

第三节

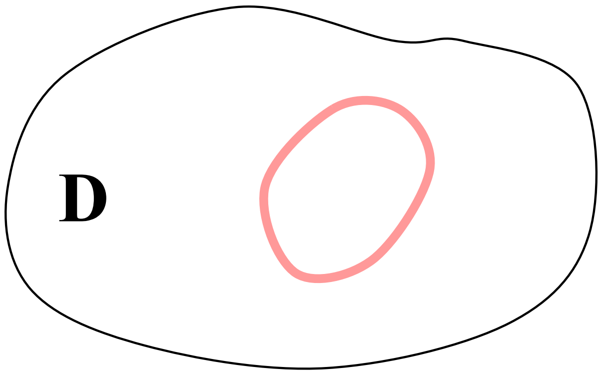
格林公式及其应用

一、格林公式

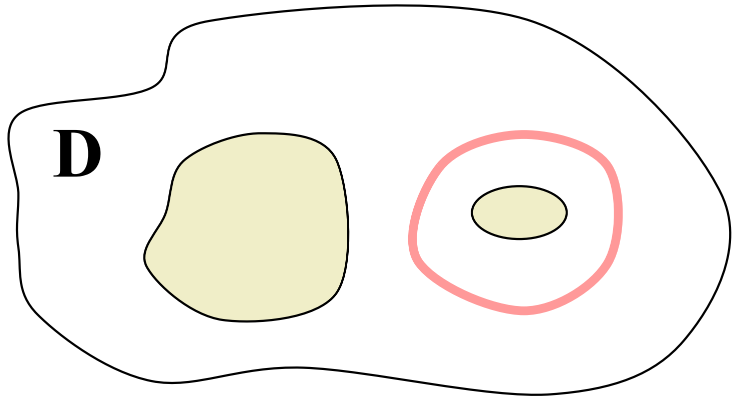
二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

一、区域连通性的分类

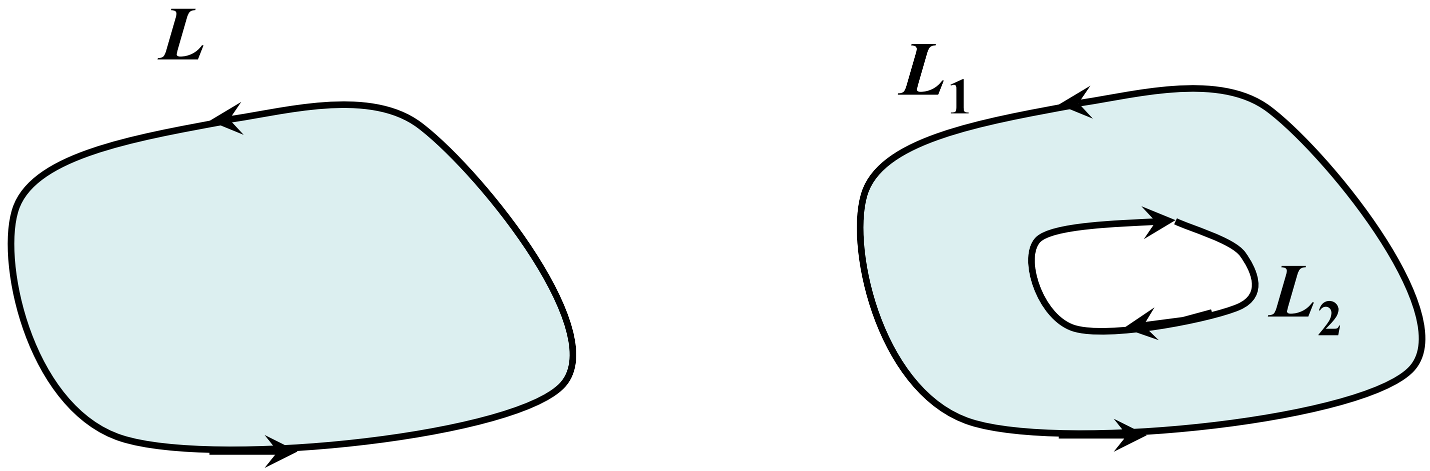
设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域.



单连通区域



复连通区域



边界曲线L的正向：当观察者沿边界行走时, 区域

D 总在他的左边.

一、 格林公式

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （**格林公式**）

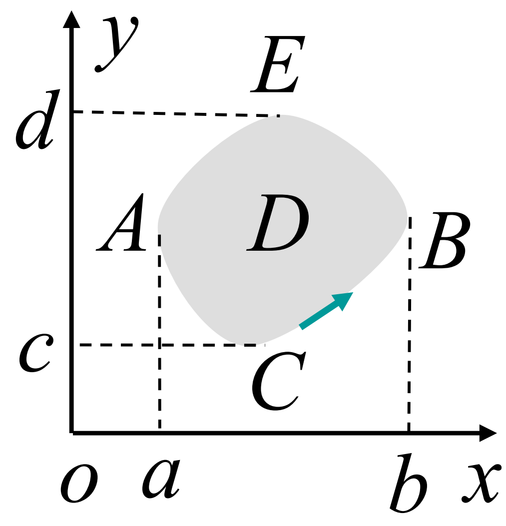
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明: 1) 若D既是X-型区域，又是Y-型区域，且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

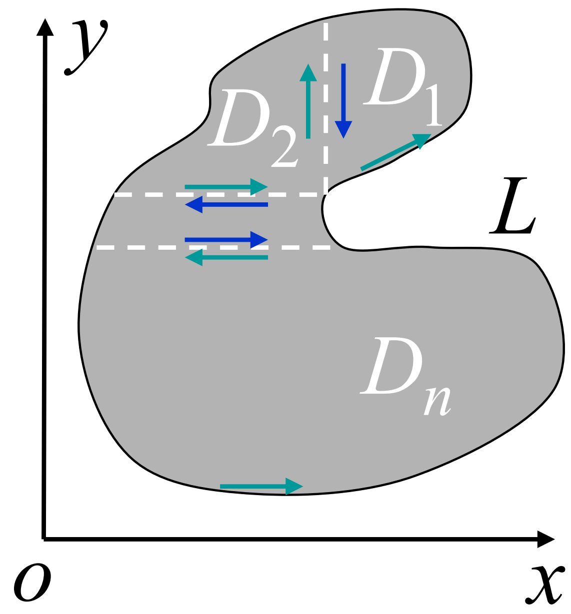
同理可证

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad (\partial D_k \text{表示} D_k \text{的正向边界})$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证毕

格林公式 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 *L* 所围区域 *D* 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta\le 2\pi$ 所围面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi\,ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

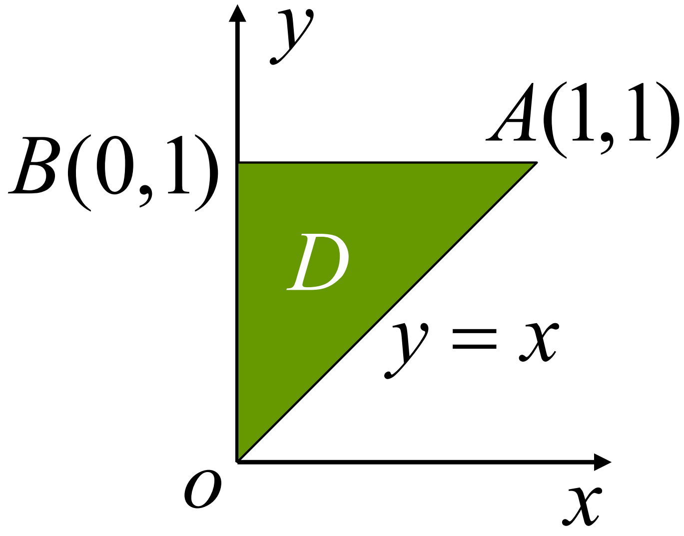
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式 , 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .



解: 令 $P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}x\,e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}}x\,e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

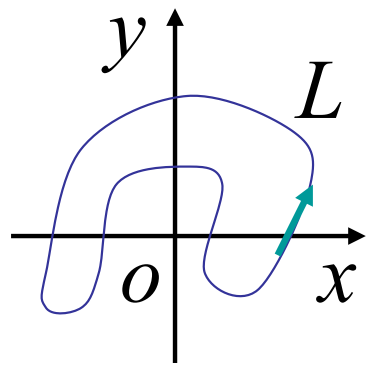
例3. 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

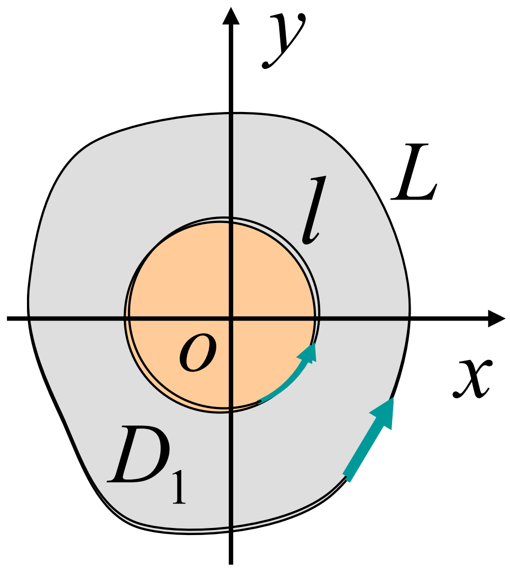
则当$x^2+y^2 \neq 0$时，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D，当$(0,0) \notin D$时，由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时，在D内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，记L和l^-所围的区域为 D_1，对区域D_1应用格林公式，得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore \quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$