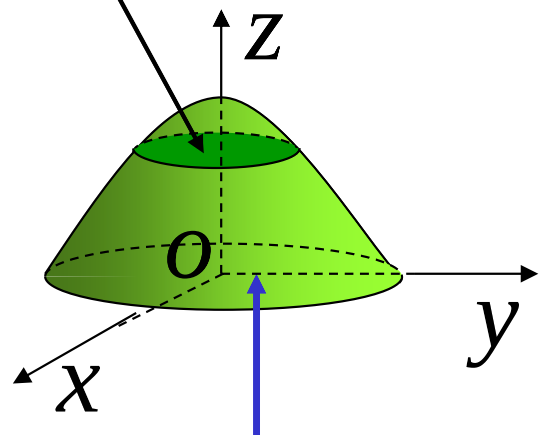
练习题

1.设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? **(2001考研)**

提示:

$$D_z : x^2 + y^2 \le [\tfrac{1}{2} h^2(t) - h(t) z]$$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则



$$V = \int_0^{h(t)} \mathrm{d} z \iint_{D_z} \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y$$

$$= \int_0^{h(t)} \frac{1}{2} \pi [h^2(t) - h(t) z] \mathrm{d} z = \frac{\pi}{4} h^3(t)$$

$$S = \iint_{D_0} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2} \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y$$

$$D_0 : x^2 + y^2 \le \tfrac{1}{2} h^2(t)$$

$$= \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y \qquad \text{(用极坐标)}$$

$$= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16 r^2} \, r \, \mathrm{d} r = \frac{13\pi}{12} h^2(t)$$

$$V=\frac{\pi}{4}h^3(t)\,,\qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Longrightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100$ (小时)

因此高度为130cm的雪堆全部融化所需的时间为100小时.

第四节 重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的重心

四、物体的转动惯量

三、物体的重心

设空间有n个质点, 分别位于(x_k, y_k, z_k), 其质量分别为m_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 由力学知, 该质点系的重心坐标为

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

设物体占有空间域Ω, 有连续密度函数$\rho(x, y, z)$,则采用 “大化小, 常代变, 近似和, 取极限” 可导出其重心公式, 即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的重心坐标就近似该物体的重心坐标. 例如,

$$x_G \approx \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $$y_G=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_G=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时，则得形心坐标：

$$x_G=\frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad y_G=\frac{\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$z_G=\frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$$ （$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为Ω的体积）

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的重心坐标为

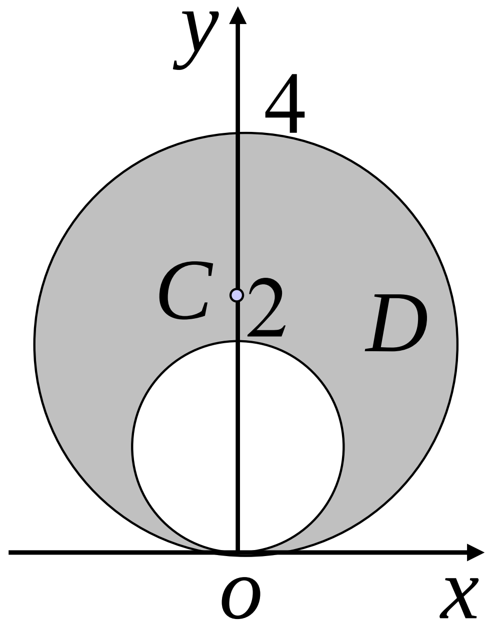
$$x_G=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$y_G=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$\rho=$常数时, 得D的形心坐标:

$$x_G=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad y_G=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}\quad (A\text{ 为 }D\text{ 的面积})$$

例5. 求位于两圆 $r = 2\sin\theta$ 和 $r = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的重心.



解: 利用对称性可知 $x_G = 0$

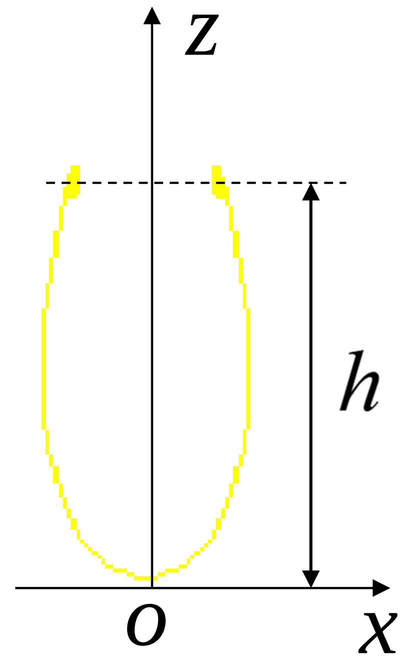
而 $$y_G = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$

例6. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的重心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上, 故其坐标为

$$x_G = y_G = 0,\ z_G = \frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱坐标, 则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$, 因此

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$V=\frac{\pi}{9}h^3(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2)$$

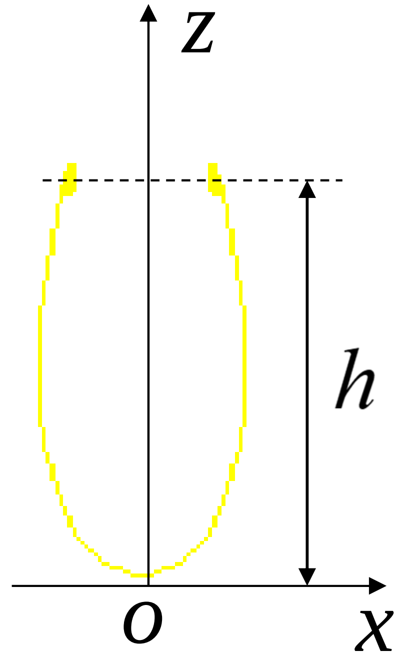
$$\iiint_\Omega z d x \mathrm{d} y \mathrm{d} \mathrm{z}$$

$$=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^h \frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{9}h^3(3-\frac{3}{2}h+\frac{1}{5}h^2)$$

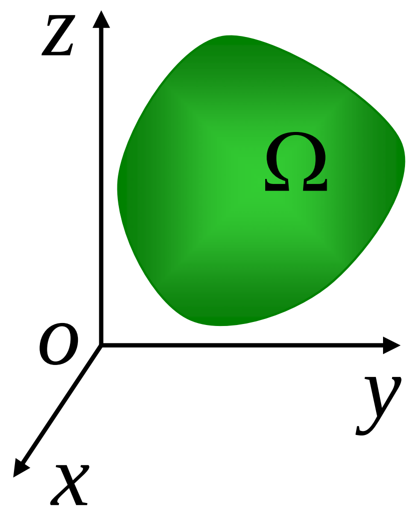
$$\therefore \quad z_G=h\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$



四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω , 有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 该物体位于$(x\ ,y\ ,z)$ 处的微元对 z 轴的转动惯量为



$$\mathrm{d}\,I_z=(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

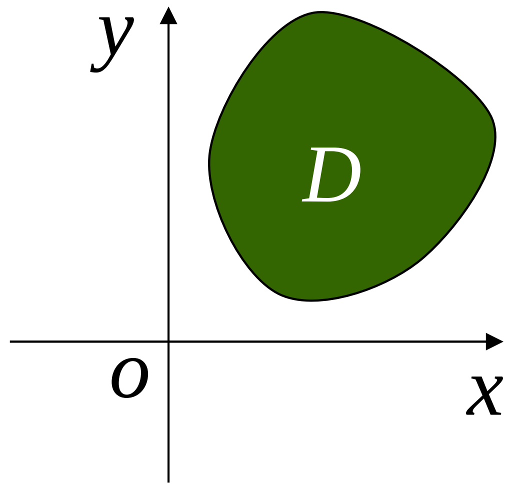
如果物体是平面薄片, 面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

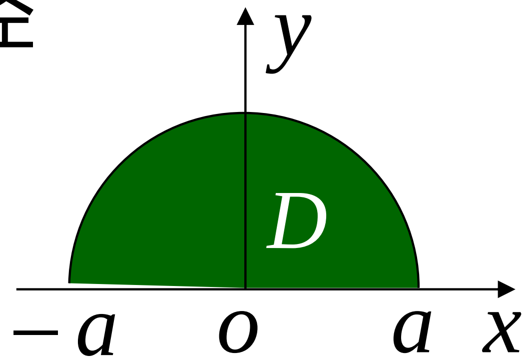
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例7.求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu\, y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu \iint_D r^3 \sin^2\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

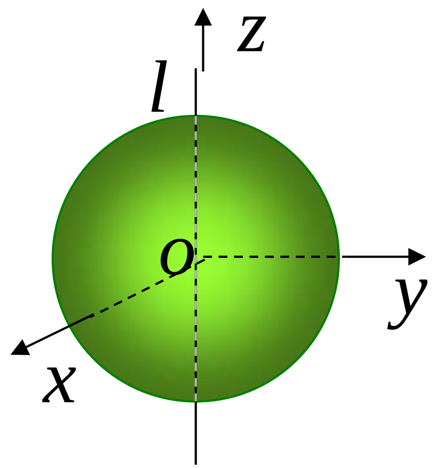
$$= \mu \int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^a r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\mu a^4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M = \dfrac{1}{2}\pi a^2 \mu$

$$= \frac{1}{4} M a^2$$

例8. 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{(用球坐标)}$$

$$= \rho \iiint_\Omega \underline{(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)} \cdot r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^4\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

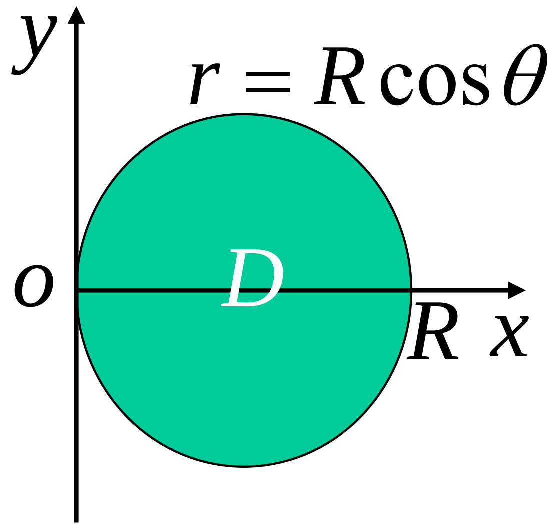
重积分习题课

P80 4(2) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

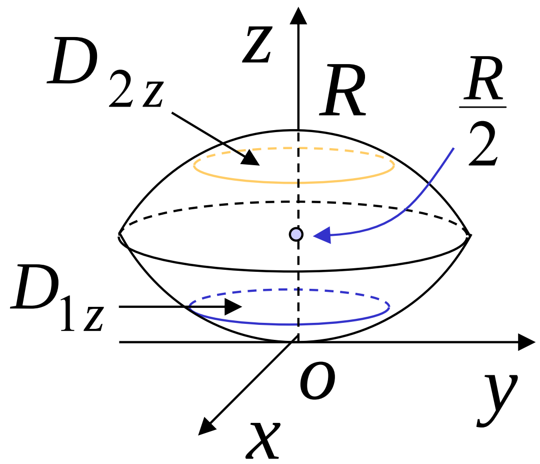


$$原式 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$$

P101. 5(1).计算积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ ($R>0$)的公共部分.



提示： 由于被积函数缺 x , y ,

利用 "**先二后一**" 计算方便

.

$$\text{原式}=\int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{1z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{2z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

P101. 5(3). 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解法1 利用“先二后一”计算.

$$D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^c\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

***解法2** 利用三重积分换元法. 令

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = cr\cos\varphi$$

则

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi, \quad \Omega': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} |J|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\iiint_{\Omega'} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi abc$$

例．设 $f(u)\in C,\ f(0)=0,\ f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$，

其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

解: 在球坐标系下

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)\,r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^t f(r)\,r^2\,\mathrm{d}r$$

$$F(0)=0$$

利用洛必达法则与导数定义,得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，**证明**

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 左端 $=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x)+f^2(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \boxed{D:\begin{cases} a\le x\le b \\ a\le y\le b\end{cases}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{b-a}{2}\left(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b f^2(y)dy\right)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx = \text{右端}$$