§ 2 洛必达法则

在自变量的某个趋势下，$f(x), g(x)$ 同时是无穷小量(或无穷大量),

则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{0}{0}-$ 型(或 $\dfrac{\infty}{\infty}-$ 型) 不定式极限.

洛必达法则

1. $\frac{0}{0}-$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}-$ 型不定式极限.

定理1(洛必达法则) 设在 x 的某一变化过程中,

(1) $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}-$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}-$ 型不定式极限.

(2) $f'(x), g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 可为实数，$-\infty$, $+\infty$, ∞),

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

洛必达法则的证明

证 仅证明 $x \to a^{+}, \frac{0}{0}-$ 型的情况.

设在 $(a, a+\delta)$ 内 $f'(x), g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0,$

补充定义 $f(a) = g(a) = 0,$ 则 $f(x), g(x)$ 在 $[a, a+\delta)$ 内连续.

对于 $x \in (a, a+\delta),$ 在 $[a, x]$ 上应用柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x,$$

再令 $x \to a^{+},$ 得

$$\lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a^{+}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

不定式极限举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限，使用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)$.

解 这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限，使用洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

当 $x\to+\infty$ 时，有 $\ln x << x^\alpha$.

不定式极限举例

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

不定式极限举例

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{x}}(\alpha>0).$

解 当 $0<\alpha\le 1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha}{\mathrm{e}^{x}x^{1-\alpha}}=0.$$

当 $\alpha>1$ 时, 作 $[\alpha]$ 次洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{x}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha]+1)x^{\alpha-[\alpha]}}{\mathrm{e}^{x}}=0.$$

当 $x\to+\infty$ 时, 有 $x^{\alpha}<<e^{x}.$

2. 其他类型不定式极限

$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$ -型转化成 $\frac{0}{0}-$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}-$ 型不定式极限.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x,\ (\alpha>0).$

解

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^\alpha}{\alpha}=0.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x})$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

不定式极限举例

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sin x}} = e^2.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

解 $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}}$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

不定式极限举例

使用洛必达法则要适可而止.

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\sin x+x\cos x}=\infty.$$

否则 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{2}{2}=1.$$

不定式极限举例

洛必达法则是个充分条件.

例11 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解 用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$ 不存在.

直接算 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1.$$

不定式极限举例

计算 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 要比计算 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 容易.

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$.

解 直接洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{2x^6}$.

作变换 $y = \frac{1}{x^2}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{2y}{e^y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{2}{e^y} = 0.$$

不定式极限举例

尽量用等价无穷小.

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x+e^{-x}-2)\cos x}{\sin x(e^x-1)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x+e^{-x}-2)\cos x}{\sin x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$