草稿　　仅供参考

# 2001—2002学年第三学期
# 《线性代数》期终考试试卷

一、填空题(33分，其中E表示单位矩阵，O表示零矩阵，$A^T$指矩阵A的转置矩阵)。

1. 设 $\alpha=(1,2)$，$\beta=(1,-1)$，则 $\alpha\beta^T=$______；$(\alpha^T\beta)^{999}=$______；

解：$\alpha\beta^T=(1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=1\times1+2\times(-1)=1-2=-1$；

$\beta\alpha^T=(1,-1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\times1+(-1)\times2=1-2=-1$；

$\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1,-1)=\begin{pmatrix}1\times1 & 1\times(-1)\\2\times1 & 2\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}$；

$$(\alpha^T\beta)^{999}=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{999个(\alpha^T\beta)}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{998个(\beta\alpha^T)}\beta$$

$$=\alpha^T(-1)^{998}\beta=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}.$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{pmatrix}$，则行列式 $|AB^{-1}|=$______；

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{vmatrix}=1\times3\times0+2\times1\times1+0\times0\times3-0\times3\times1-2\times0\times0-1\times1\times3$

$=2-3=-1$；

$|B|=\begin{vmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{vmatrix}=2\times5\times7=70$；

(注：上三角行列式的值等于其主对角线元素之积)

$|AB^{-1}|=|A||B^{-1}|=|A||B|^{-1}=(-1)\times\frac{1}{70}=-\frac{1}{70}$.

3. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$，则当参数 $k$______时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&k\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$，

而 $\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&k\\3&1&-1\end{vmatrix}=1\times2\times(-1)+3\times k\times3+1\times2\times1-1\times2\times3-2\times3\times(-1)-1\times k\times1$

$=-2+9k+2-6+6-k=8k$.

故当 $k=0$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

4. $2\times2$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^*=$ ______；

解：矩阵A的四个元素的代数余子式分别为：

$A_{11}=(-1)^{1+1}d=d$；　$A_{21}=(-1)^{2+1}b=-b$；

$A_{12}=(-1)^{1+2}c=-c$；　$A_{22}=(-1)^{2+2}a=a$；

故 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

5. 设矩阵A及A+E均可逆，$G=E-(A+E)^{-1}$，则 $G^{-1}=$ ______；

解：$G=E-(A+E)^{-1}=(A+E)(A+E)^{-1}-E(A+E)^{-1}$

$=[(A+E)-E](A+E)^{-1}=A(A+E)^{-1}$；

$G^{-1}=[A(A+E)^{-1}]^{-1}=[(A+E)^{-1}]^{-1}A^{-1}=(A+E)A^{-1}=AA^{-1}+EA^{-1}=E+A^{-1}$.

6. 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & E \\ E & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 ______；

解：（法一）设 $\begin{bmatrix} A & E \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix} A & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$，

即 $\begin{bmatrix} AX+U & AY+V \\ X & Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$，

由此可得：$X=0$；$Y=E$；$U=E$；$V=-A$；

所以 $\begin{bmatrix} A & E \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & -A \end{bmatrix}$.

（法二）$\begin{bmatrix} A & E & E & 0 \\ E & 0 & 0 & E \end{bmatrix}\xrightarrow{(-A)\times}\begin{bmatrix} 0 & E & E & -A \\ E & 0 & 0 & E \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & E \\ 0 & E & E & -A \end{bmatrix}$

由此可见 $\begin{bmatrix} A & E \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & -A \end{bmatrix}$.

7. 设A是 $6\times5$ 矩阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间是2维的，则齐次线性方程组 $A^Tx=0$ 的解空间是 ____ 维的.

解：因为A是 $6\times5$ 矩阵，故 $A^T$ 是 $5\times6$ 矩阵，因而齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $A^Tx=0$ 中的未知数的个数分别为A的列数和 $A^T$ 的列数，即分别为5和6.

又因为 $Ax=0$ 的解空间的维数应该等于 $5-$ 秩(A)，

$A^Tx=0$ 的解空间的维数应为 $6-$秩$(A^T)$，其中秩$(A^T)=$秩$(A)$.

根据题目条件可知 $5-$秩$(A)=2$. 即秩$(A)=3$.

从而 $A^Tx=0$ 的解空间的维数为 $6-$秩$(A^T)=6-$秩$(A)=6-3=3$.

8. 与向量 $\alpha=(1,0,1)^T$, $\beta=(1,1,1)^T$ 均正交的一个单位向量为________;

解：设 $\gamma=(a,b,c)^T$ 与 $\alpha,\beta$ 均正交，则 $\begin{cases} a+\quad c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$，这是一个齐次线性方程组，$(1,0,-1)^T$ 构成它的一个基础解系.

把 $(1,0,-1)^T$ 单位化可得 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

可见与 $\alpha,\beta$ 均正交的一个单位向量为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ 或者 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

9. 已知矩阵 $M=\begin{pmatrix}12 & 4\\ 3 & k\end{pmatrix}$, $A=MM^T$，则当数 $k$ 满足条件_____时 $A$ 是正定的;

解：$A=MM^T$ 正定 $\Leftrightarrow$ $M$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $|M|\neq 0$，即 $12k-3\times4\neq0$.

故当数 $k\neq1$ 时，$A$ 是正定的.

10. 若 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 满足 $A^2-3A+2E=0$，且有两个不同的特征值，则当参数 $k$ 满足条件______时，矩阵 $E+kA$ 是正定的.

解：$A^2-3A+2E=0 \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda$ 一定满足 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ $\Rightarrow \lambda=1$ 或 $2$.

又因为 $A$ 有两个不同的特征值，故 1 和 2 都是 $A$ 的特征值

由于 $A$ 是实对称矩阵，故存在可逆矩阵 $P$ 使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2\end{bmatrix}\xlongequal{记}\Lambda$$

于是 $P^{-1}(E+kA)P=P^{-1}EP+kP^{-1}AP=E+k\Lambda=\begin{bmatrix}1+k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1+k & & & \\ & & & 1+2k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1+2k\end{bmatrix}$

这表明 $E+kA$ 的特征值为 $1+k,\cdots,1+k,1+2k,\cdots,1+2k$.

而 $E+kA$ 正定 $\Leftrightarrow$ $E+kA$ 的特征值全大于0. 故 $1+k>0$, $1+2k>0$. 因而 $k>-\frac{1}{2}$.

二. (12分) 求矩阵方程 $XA=2X+B$ 的解，其中 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$.

解: $XA=2X+B \Rightarrow XA-X\cdot 2E=B \Rightarrow X(A-2E)=B \Rightarrow X=B(A-2E)^{-1}$.

而 $A-2E=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times 1\\ \times(-1)\end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right).$$

由此可见 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&1&-4\end{pmatrix}$.

三. (12分) 设3阶方阵 $A$ 有特征值 1(二重) 和 $-1$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其相应于特征值1的特征向量，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是其相应于特征值 $-1$ 的特征向量.

1. 求 $A$ 及 $A^{9999}$.
2. 若3阶实对称矩阵 $B$ 的特征值也是 1(二重) 和 $-1$，证明: $A$ 与 $B$ 必定相似.

解: 1. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$，$A=P\Lambda P^{-1}$.

由 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$ 可得

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，于是 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$.

$$A^{9999}=\underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{9999个(P\Lambda P^{-1})}=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\cdots\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda E\Lambda E\cdots\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{9999}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1^{9999}&0&0\\0&1^{9999}&0\\0&0&(-1)^{9999}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

证明2：若3阶实对称矩阵B的特征值也是1（二重）和−1，
则B也与$\Lambda$相似，同时由上一小题可知A与$\Lambda$相似，
所以，A与B相似。

四.（12分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_2 + px_3 - 2x_4 = q \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (p+3)x_4 = -1. \end{cases}$$

1.问参数p，q满足什么条件时，该方程组无解；有唯一解，有无穷多解？
2.当方程组有无穷多解时，求出其通解（写成向量形式）。

解：记该方程组的系数矩阵为A，增广矩阵为(A, b)。

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 3 & 2 & 1 & p+3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) & \times(-3) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 0 & -1 & -2 & p & -1 \end{pmatrix} \times\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 0 & -1 & -2 & p & -1 \end{pmatrix} \times 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{pmatrix} \overset{记}{=} B.$$

1. 由上可见：当$p+2=0$且$q+1\neq 0$ 即$p=-2$且$q\neq -1$时 $r(A)<r(A,b)$
此时，原方程组无解；
当$p+2\neq 0$ 即$p\neq -2$时 $r(A)=r(A,b)=4$，
此时，原方程组有唯一解；
当$p+2=0$且$q+1=0$ 即$p=-2$且$q=-1$时 $r(A)=r(A,b)=2<4$，
此时，原方程组有无穷多解。

2. 当$p=-2$，$q=-1$时，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=C.$

C对应的方程组为$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

由此可得$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$ 所以此时原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 $C_1$、$C_2$ 为任意实数.

五.(12分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. 求一 $4\times2$ 矩阵 $B$，使得 $AB=0$，且秩$(B)=2$;

2. 问：是否存在秩大于2的矩阵 $C$ 使得 $AC=0$？为什么？

解：1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3),\ \times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1 & -3\\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times(-1)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-\frac14) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由此可得齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系：

$\xi_1=(-3/4,\ -1/4,\ 1,\ 0)^T$，$\xi_2=(-1/4,\ -3/4,\ 0,\ 1)$.

令 $B=(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/4\\ -1/4 & -3/4\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $B$ 为一个 $4\times2$ 矩阵，$AB=0$ 且秩$(B)=2$;

2. 设矩阵 $C$ 满足 $AC=0$，则 $C$ 的列向量都是 $Ax=0$ 的解，因而 $C$ 的列向量组能由 $\xi_1$、$\xi_2$ 线性表示，可见 $C$ 的秩 $\le 2$.
这就是说，不存在秩大于2的矩阵 $C$ 使得 $AC=0$.

六.(12分) 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

1. 求参数 $k$ 的值；2. 求一正交矩阵 $Q$，使得 $Q^TAQ=B$.

解：1. 因为 $A$ 与 $B$ 相似，所以 $|A|=|B|$，而 $|A|=(3k-1)4$，$|B|=32$，
故 $k=3$.
(另解：因为 $A$ 与 $B$ 相似，所以它们的迹相等
即 $k+3+4=4+2+4$，故 $k=3$).

2. 先求正交矩阵 $P$ 使 $P^TA_1P=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$.

$|\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-2)$

故 $A_1$ 的特征值为 4 和 2.

由 $4E-A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times 1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 可得 $(4E-A_1)x=0$ 的基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

由 $2E-A_1=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 可得 $(2E-A_1)x=0$

的基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

于是令 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，则 $P^TP=E$，且 $P^TA_1P=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$.

再令 $Q=\begin{pmatrix}P&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2&0\\\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^TQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $Q$ 为正交矩阵

且 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=B$.

七.（7分）证明题：

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是矩阵 $A$ 的两个互异的特征值，$\eta_1,\eta_2$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_1$ 的线性无关的特征向量，$\eta_3$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_2$ 的特征向量，

证明：$\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 线性无关.

证明：假若 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 线性相关，则由 $\eta_1,\eta_2$ 线性无关可知 $\eta_3$ 能由 $\eta_1$，$\eta_2$ 线性表示，设 $\eta_3=k_1\eta_1+k_2\eta_2$，则有：

$$\lambda_2\eta_3=A\eta_3=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2=k_1\lambda_1\eta_1+k_2\lambda_1\eta_2$$
$$=\lambda_1(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=\lambda_1\eta_3$$

故 $(\lambda_2-\lambda_1)\eta_3=\lambda_2\eta_3-\lambda_1\eta_3=0$，而 $\lambda_1\neq\lambda_2$，即 $\lambda_2-\lambda_1\neq0$，

可见 $\eta_3=0$，但 $\eta_3$ 作为 $A$ 的属于 $\lambda_2$ 的特征向量一定是非零的

这一矛盾表明：$\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 线性无关.

2. 已知$n$阶方阵$A$相似于对角阵，并且矩阵$A$的特征向量均是矩阵$B$的特征向量，（注：$A$，$B$的特征值未必相同）.

证明：$AB=BA$.

证明：因为$n$阶方阵$A$相似于对角阵，所以$A$有$n$个线性无关的特征向量，记为$p_1, p_2, \cdots, p_n$.

又因为$A$的特征向量都是$B$的特征向量，可见$B$也有$n$个线性无关的特征向量：$p_1, p_2, \cdots, p_n$.

于是有：$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda$，其中$P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为$A$的对应于$p_1, p_2, \cdots, p_n$的特征值.

同时$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}=\Lambda'$，其中$\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$为$B$的对应于$p_1, p_2, \cdots, p_n$的特征值.

由此可得：$A=P\Lambda P^{-1}$，$B=P\Lambda' P^{-1}$，

且 $\Lambda\Lambda'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\lambda_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1'\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\lambda_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda'\Lambda$.

因而 $AB=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda' P^{-1})=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda' P^{-1}=P\Lambda\Lambda' P^{-1}$

$=P\Lambda'\Lambda P^{-1}=P\Lambda' P^{-1}P\Lambda P^{-1}=BA$.

# 2003-2004学年第3学期 《线性代数》期末考试试卷



## 一. 填空题(24分).

1. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A^n=$ ________;

解：令 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=\Lambda+B$，$\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $A^n=(\Lambda+B)^n=\Lambda^n+C_n^1\Lambda^{n-1}B+C_n^2\Lambda^{n-2}B^2+\cdots+C_n^{n-1}\Lambda B^{n-1}+B^n$

$$=\Lambda^n+n\Lambda^{n-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\lambda&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}.$$

2. 假设向量组 $A$: $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\t\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}t\\1\\-1\end{pmatrix}$，则当参数 $t$ 满足条件 ________ 时，向量组 $A$ 的秩为1；________ 时，$A$ 的秩为2；________ 时 $A$ 的秩为3；

解：$$(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}-1&1&t\\1&t&1\\t&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times 1,\ \times t}\begin{pmatrix}-1&1&t\\0&t+1&t+1\\0&t+1&t^2-1\end{pmatrix}\times(-1)$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&t\\0&t+1&t+1\\0&0&(t+1)(t-2)\end{pmatrix},$$ 可见，当 $t=-1$ 时 $A$ 的秩为1；当 $t=2$ 时，$A$ 的秩为2；当 $t\neq-1$ 且 $t\neq2$ 时 $A$ 的秩为3.

3. 若向量 $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\b\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\-1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}$ 的特征向量，则 $(a,b)=$ ____;

解：若 $\eta$ 为 $A$ 的特征向量，则存在 $\lambda$ 使 $A\eta=\lambda\eta$ 即

$$\begin{pmatrix}1&a&1\\-1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\b\end{pmatrix},$$ 亦即 $$\begin{pmatrix}1+a+b\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda b\end{pmatrix},$$ 由此可得 $\begin{cases}a=-3,\\b=3,\\\lambda=1,\end{cases}$

故 $(a,b)=(-3,3)$.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1\\1&b\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，且 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$，则参数 $a,b$ 满足条件 ________;

解：$(A+B)(A-B)=A^2-B^2\Leftrightarrow A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2\Leftrightarrow AB=BA$,

而 $AB=\begin{pmatrix}a&1\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b\\a&1\end{pmatrix}$.

所以参数 $a, b$ 满足条件: $a=b$.

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&4\\3&-1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$ 与对角阵$\Lambda$相似, 则 $x$ 满足条件: ________.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-4\\-3&\lambda+1&-x\\-1&0&-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-4)$. 故A的特征值为 $\lambda_1=-1$(二重)和$\lambda_2=4$.

若$\Lambda$与对角阵相似, 则齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=0$ 有两个线性无关的特征向量. 因而 $3-r(\lambda_1E-A)=2$, 即 $r(\lambda_1E-A)=1$.

而 $\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-4&0&-4\\-3&0&-x\\-1&0&-1\end{pmatrix}$. 可见 $x$ 应该满足条件: $x=1$.

6. 若 $A=\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a, b, c$ 满足条件 ______.

解: $A=\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1&b\\a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+b^2&a+bc\\a+bc&a^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=\pm1$.

7. 若对满足条件 $A^2+3A-4E=0$ 的实对称矩阵A, $aE+A$ 都是正定矩阵, 则实数$a$必须满足条件 ________.

解: 对于满足条件 $A^2+3A-4E=0$ 的实对称矩阵A, 其特征值$\lambda$一定满足 $\lambda^2+3\lambda-4=0$. 故 A 的可能的特征值有 1和$-4$.

于是 $aE+A$ 的可能的特征值有: $a+1$ 和 $a-4$.

要使 $aE+A$ 总是正定的, 则 $a+1$ 和 $a-4$ 均大于0. 故 $a>4$.

二.(8分). 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&x&x\\1&1&1&x\\x&1&1&1\\x&x&1&1\end{pmatrix}$ 的行列式 $\det(A)$ 的值.

解: $$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&x&x\\1&1&1&x\\x&1&1&1\\x&x&1&1\end{vmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\quad\times(-x)\\ \\ \\ \\ \end{array}=\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&0&1-x&0\\0&1-x&1-x^2&1-x^2\\0&0&1-x^2&1-x^2\end{vmatrix}=(1-x^2)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&0&1&0\\0&1&1+x&1+x\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-(1-x^2)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1&x&x\\0&1&1+x&1+x\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=(x^2-1)(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=(x^2-1)(1-x^2).$$

三（15分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix}3\\3\\q\end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. 若$\eta$是线性方程组$Ax=b$的解，试求$p,q$的值，并求这时$Ax=b$的通解，
2. 若$Ax=b$有无穷多组解，但$\eta$不是$Ax=b$的解，求$p,q$的值.

解：1. 若$\eta$是线性方程组$Ax=b$的解，即 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\q\end{pmatrix}$，

而 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&p&2\\1&2&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\p+1\\3+p\end{pmatrix}$，故 $p+1=3$，$3+p=q$，由此可得 $p=2$，$q=5$.

此时 $(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&2&2&3\\1&2&2&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1 & \times(-1)\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&3&3&6\\0&1&1&2\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\times(-1)$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=1\\x_2+x_3=2\end{cases}$，由此可得$Ax=b$的通解：

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$，其中$c$为任意常数.

2. 由1可知，若$\eta$不是$Ax=b$的解，则 $p\neq 2$ 或 $q\neq 5$.

$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&p&2&3\\1&2&p&q\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1 & \times(-1)\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&p+1&3&6\\0&1&p-1&q-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&p-1&q-3\\0&p+1&3&6\end{pmatrix}\times(-p-1)$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&p-1&q-3\\0&0&4-p^2&-pq+3p-q+9\end{pmatrix}$.

因为$Ax=b$有无穷多组解，所以 $4-p^2=-pq+3p-q+9=0$.

由此可得 $\begin{cases}p=2\\q=5\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}p=-2\\q=-3\end{cases}$.

四.（15分）解矩阵方程 $XA=2X+B$. 其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

解：$XA=2X+B\Rightarrow XA-X\cdot 2E=B\Rightarrow X(A-2E)=B\Rightarrow X=B(A-2E)^{-1}$.

其中 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，

由 $\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\times(-1)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 2 & \times 1\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&2\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ 可得

$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

五. (15分) 设λ为参数，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$

1. 写出二次型 $f$ 的矩阵；

2. 求一正交变换 $X=QY$ 将 $f$ 化成标准形，并写出相应的标准形.

解：1. $f$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

2. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$. 由此可得 $A$ 的特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$（二重）

$(\lambda_1E-A)x=0$ 的一个基础解系为：$\xi_1=(1,0,-1)^T$. 单位化得 $p_1=(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2})^T$；

$(\lambda_2E-A)x=0$ 的一个基础解系为：$\xi_2=(0,1,0)^T$, $\xi_3=(1,0,1)^T$，它们已经是正交的了，单位化得：$p_2=(0,1,0)^T$, $p_3=(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^T$.

于是令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$，则 $Q$ 为正交矩阵. 且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

对应地，正交变换 $X=QY$ 将 $f$ 化为：$f(x_1,x_2,x_3)=2y_2^2+2y_3^2$.

（注：若将 $Q$ 取为 $Q=(p_2,p_3,p_1)=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\1&0&0\\0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

对应地，正交变换 $X=QY$ 将 $f$ 化为：$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$.）

六. (12分) 设3阶矩阵 $A$ 的特征值是 1（二重）和 2，且 $\alpha=(1,0,1)^T$, $\beta=(0,1,0)^T$ 是 $A$ 的对应于特征值1的特征向量，$\gamma=(1,0,-1)^T$ 是 $A$ 的对应于特征值2的特征向量，求矩阵 $A$ 及 $(A-2E)^n$.

解：令 $P=(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}$，

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&3/2\end{pmatrix}$.

又因为 $P^{-1}(A-2E)P=P^{-1}AP-P^{-1}2EP=\Lambda-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{记}{=}B$

故 $A-2E=PBP^{-1}$，$(A-2E)^n=(PBP^{-1})^n=\underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}_{n个(PBP^{-1})}=PB^nP^{-1}$

而 $B^n=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $(A-2E)^n=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n/2&0&(-1)^n/2\\0&1&0\\(-1)^n/2&0&(-1)^n/2\end{pmatrix}$.

七.(5分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\1&y\end{pmatrix}$, 问: 当参数 $x$, $y$ 满足什么条件时矩阵方程 $AX=B$ 有解, 但 $BY=A$ 无解?

解: 记 $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, 则 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $Ax=b_1$ 和 $Ax=b_2$ 都有解.

$BY=A$ 无解 $\Leftrightarrow$ $By=a_1$ 和 $By=a_2$ 中至少有一个无解.

$$(A,b_1,b_2)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&x&1&y\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&x-4&-5&y-2\end{pmatrix}.$$

由此可见, 当 $x\neq4$ 时, $r(A)=r(A,b_1)=r(A,b_2)=2$. 此时 $AX=B$ 有解;

$$(B,a_1,a_2)=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&y&2&x\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&y&2&x\\3&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&y&2&x\\0&1-3y&-5&2-3x\end{pmatrix}$$

由此可见, 当 $y=\frac{1}{3}$ 时, $r(B)=1<2=r(B,a_1)=2$. 此时 $BY=A$ 无解.

综上所述, 当 $x\neq4$ 且 $y=\frac{1}{3}$ 时 $AX=B$ 有解, 但 $BY=A$ 无解.

八.(6分)证明题:

1. 已知向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示. 若向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的秩为2, 证明: $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

证明: 因为向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示,

所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\le r(\alpha_1,\alpha_2)$,

若 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$, 则 $2\le r(\alpha_1,\alpha_2)\le 2$,

由此可得 $r(\alpha_1,\alpha_2)=2$, 故 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

2. 设2阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 且 $a+d=2$, $ad-bc=1$. 若 $b,c$ 不全为零.

证明: $A$ 不与任何对角阵相似.

证明: 设 $A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2$, 则 $\lambda_1+\lambda_2=a+d=2$, $\lambda_1\lambda_2=|A|=ad-bc=1$.

故 $\lambda_1=\lambda_2=1$.

假若 $A$ 相似于对角阵, 则存在可逆矩阵 $P$, 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

于是可得: $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 但这与 $b,c$ 不全为零矛盾!

所以 $A$ 不与任何对角阵相似.

# 2004－2005学年第三学期
# 《线性代数》期终考试试卷



一、(27分) 填空题

1. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&a\\b&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$，且 $AB=BA$，则 $a,b$ 的值分别为______；

解：$AB=\begin{pmatrix}4&a\\b&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3a\\2b&15\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&a\\b&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2a\\3b&15\end{pmatrix}$，

可见 $AB=BA \Leftrightarrow 3a=2a$ 且 $2b=3b \Leftrightarrow a=b=0$

2. 设对任意的向量 $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$AX=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\4a+5b+6c\end{pmatrix}$，则矩阵 $A=$______；

解：(法一：直接观察) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$.

(法二) 既然 $X$ 是一个 $3\times1$ 的矩阵且 $AX$ 是一个 $2\times1$ 的矩阵，那么 $A$ 必为一个 $2\times3$ 的矩阵。设 $A=(A_1,A_2,A_3)$，其中 $A_1,A_2,A_3$ 为 $A$ 的列向量，在 $AX=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\4a+5b+6c\end{pmatrix}$ 中依次取 $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 可得

$A_1=A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0\\4+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$，$A_2=A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2+0\\0+5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$，$A_3=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+3\\0+0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

故 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$.

3. 设3阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(3\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2)$. 若 $A$ 的行列式 $|A|=3$，则矩阵 $B$ 的行列式 $|B|=$______；

解：$|B|=|3\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2|=|3\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2|+|-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2|$

$=3|\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2|-|\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2|=3|\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1|-|\alpha_3,\ \alpha_1,\ \alpha_1-\alpha_2|$

$=3|\alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_1|-|\alpha_3,\ \alpha_1,\ -\alpha_2|=-3|\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1|+|\alpha_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2|$

$=3|\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_2|-|\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_2|=2|\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_2|=-2|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=-2|A|=-6.$

4. 设 $A$ 为 $n$ 阶可逆方阵，$2n$ 阶矩阵 $B=\begin{pmatrix}E&A\\0&A\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为______；

解：(法一) 设 $B^{-1}=\begin{pmatrix}X&Y\\U&V\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}E&A\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\\U&V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}X+AU&Y+AV\\AU&AV\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}$，

由此可得：$X+AU=E$，$Y+AV=0$，$AU=0$，$AV=E$，

故 $X=E$，$Y=-E$，$U=0$，$V=A^{-1}$，于是 $B^{-1}=\begin{pmatrix}E&-E\\0&A^{-1}\end{pmatrix}$.

(法二) $\begin{pmatrix}E&A&E&0\\0&A&0&E\end{pmatrix}\xrightarrow{(-E)\times}\begin{pmatrix}E&0&E&-E\\0&A&0&E\end{pmatrix}\xrightarrow{A^{-1}\times}\begin{pmatrix}E&0&E&-E\\0&E&0&A^{-1}\end{pmatrix}$

由此可见 $\begin{pmatrix}E&A\\0&A\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}E&-E\\0&A^{-1}\end{pmatrix}$.

5. 齐次线性方程组 $3x_1+2x_2+3x_3=0$ 的一个基础解系为 ________;

解: 以 $x_2, x_3$ 为自由未知量, 依次取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 故该方程组的一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

6. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的, 则参数 $t$ 的取值范围是 ________;

解: $f$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{pmatrix}$, 其顺序主子式依次为 $A_1=2>0$; $A_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$;

$A_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{vmatrix}=1-t^2/2$, 故 $f$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A_1, A_2, A_3$ 全大于0 $\Leftrightarrow 1-\frac{t^2}{2}>0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

7. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&a+2\end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则参数 $a, b, c$ 的值分别为 ________;

解: $A^TA=\begin{pmatrix}a&c\\b&a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&a+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2&ab+ac+2c\\ab+ac+2c&b^2+(a+2)^2\end{pmatrix}$,

$A$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E \Leftrightarrow a^2+c^2=b^2+(a+2)^2=1$ 且 $ab+ac+2c=0 \Leftrightarrow a=-1$ 且 $b=c=0$.

8. 假设3阶矩阵 $A$ 的特征值为 $2, 1, -1$, 则行列式 $|A+A^{-1}|$ 的值为 ________;

解: 因为3阶矩阵 $A$ 的特征值为 $2, 1, -1$,

所以存在可逆矩阵 $P$ 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\overset{记}{=}\Lambda$.

于是 $A=P\Lambda P^{-1}$, $A^{-1}=(P\Lambda P^{-1})^{-1}=(P^{-1})^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1}=P\Lambda^{-1}P^{-1}$, 而 $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

故 $|A+A^{-1}|=|P\Lambda P^{-1}+P\Lambda^{-1}P^{-1}|=|P(\Lambda+\Lambda^{-1})P^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda+\Lambda^{-1}|\cdot|P^{-1}|$

$=|P|\cdot|\Lambda+\Lambda^{-1}|\cdot|P|^{-1}=|\Lambda+\Lambda^{-1}|=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}&0&0\\0&1+1&0\\0&0&-1-1\end{vmatrix}=-10$.

9. 若实二次型 $f, g$ 的矩阵分别为 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&a&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 $f, g$ 的正惯性指数相同, 负惯性指数也相同的充分必要条件是参数 $a, b$ 满足 ________.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-a&0\\-1&&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\lambda(\lambda-2)$, 故 $A$ 的特征值为 $a, 0, 2$, $r(A)\le 2$,

而 $B$ 的特征值为 $2, b, 2$, $r(B)\ge 2$, $B$ 的正惯指数 $\ge 2$.

故 $f, g$ 的正.负惯指数对应相等 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$ 且 $A$ 与 $B$ 的正惯指数相同

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=2$ 且 $a>0 \Leftrightarrow a>0$ 且 $b=0$.

二. (14分) 假设n阶矩阵A满足$A^2+2A-3E=0$. 证明:

1. 矩阵A及A+E可逆, 并分别求$A^{-1}$及$(A+E)^{-1}$;
2. 若$A\neq E$, 则矩阵A+3E肯定不可逆.

证明: 1. $A^2+2A-3E=0 \Rightarrow A(A+2E)-3E=0 \Rightarrow A(A+2E)=3E \Rightarrow A\cdot\frac{1}{3}(A+2E)=E$

$\Rightarrow$ A可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2E)$;

$A^2+2A-3E=0 \Rightarrow (A+E)(A+E)-4E=A^2+2A+E-4E=A^2+2A-3E=0$

$\Rightarrow (A+E)(A+E)=4E \Rightarrow (A+E)\frac{1}{4}(A+E)=E$

$\Rightarrow$ A+E可逆, 且 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{4}(A+E)$.

2. $A^2+2A-3E=0 \Rightarrow (A-E)(A+3E)=0$.

假若A+3E可逆, 则 $A-E=(A-E)(A+3E)(A+3E)^{-1}=0\cdot(A+3E)^{-1}=0$

由此可得 $A=E$, 这与$A\neq E$矛盾! 故A+3E不可逆.

三. (14分). 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组$Ax=b$有无穷多组解. 试求参数λ的值. 并求方程组的通解(要求用$Ax=b$的一个特解及相应的齐次线性方程组的基础解系表示).

解: $(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times(-\lambda)} \begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&-2-\lambda\end{pmatrix}\times 1 \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&-2-\lambda\end{pmatrix}\stackrel{记}{=}B$

因为$Ax=b$有无穷多组解, 故$r(A)=r(A,b)<3$. 因此 $(1-\lambda)(\lambda+2)=-2-\lambda=0$.

可见$\lambda=-2$. 此时 $B=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-\frac{1}{3}) \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1) \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C$

对应的齐次线性方程组化为 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$, 令$x_3=1$, 则 $x_1=x_2=x_3=1$.

可见齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为 $\xi_1=(1,1,1)^T$.

C对应的非齐次线性方程组为 $\begin{cases}x_1-x_3=1\\x_2-x_3=0\end{cases}$, 令$x_3=0$得 $x_1=1$, $x_2=0$

可见$\eta^*=(1,0,0)^T$是$Ax=b$的一个特解, 于是$Ax=b$的通解为

$\eta=k(1,1,1)^T+(1,0,0)^T$, 其中k为任意常数.

四. (15分). 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&-1&0\\1&a&3\end{pmatrix}$ 相似于对角阵.

1. 求参数a的值, 并求A的特征值及相应的特征向量;

2. 求一个可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并写出相应的对角阵；

3. 问：是否存在正交矩阵 $Q$，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵？试说明你的理由.

解：1. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -3 & -4\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ -1 & -a & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-4)$，

故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=4$，

由于 $A$ 相似于对角矩阵，故 $A$ 有两个线性无关的特征向量与 $\lambda_1=-1$ 对应.

因而 $(\lambda_1E-A)x=0$ 的基础解系由两个线性无关的解向量构成.

这表明 $r(\lambda_1E-A)=1$，

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -a & -4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\\ \\ \end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3-a & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\\ \\ \end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 3-a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可见 $3-a=0$，即 $a=3$.

此时，解得 $(\lambda_1E-A)x=0$ 的一个基础解系：$\xi_1=(-3,1,0)^T$，$\xi_2=(-4,0,1)^T$

故对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 $k_1$、$k_2$ 不全为零.

$(\lambda_2E-A)x=0$ 的一个基础解系为：$\xi_3=(1,0,1)^T$.

故对应于 $\lambda_2=4$ 的全部特征向量为 $k\xi_3$，其中 $k\neq0$.

2. 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $P$ 为可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

3. 假若存在正交矩阵 $Q$ 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ 为对角阵，

则 $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T=(Q^T)^T\Lambda^TQ^T=(Q\Lambda Q^T)^T=A^T$.

即 $A$ 为对称矩阵，但题目所给的矩阵 $A$ 并不是对称的.

这个矛盾表明不存在正交矩阵 $Q$ 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

五.（12分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，求矩阵 $X$，使得

$DXA=2DX+B$.

解：$DXA=2DX+B\Rightarrow DXA-2DX=B\Rightarrow D(XA-2X)=B\Rightarrow DX(A-2E)=B$

$\Rightarrow X=D^{-1}B(A-2E)^{-1}$，其中 $D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac13\end{pmatrix}$，$A-2E=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\times(-\frac12)\\ \times(-\frac13)\\ \times(-1)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac12 & -\frac12 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac13 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \times(-1)\\ \times\frac12\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac12 & \frac13 & -\frac12\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac13 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

由此可得 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12 & \frac13 & -\frac12\\ 0 & -\frac13 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，故 $X=\begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12 & \frac13 & -\frac12\\ 0 & -\frac13 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac14 & \frac13 & -\frac34\\ -\frac13 & \frac19 & -\frac13\end{pmatrix}$.

六 (12分) 假设3维列向量 $\alpha_1=(1,0,a)^T$, $\alpha_2=(0,1,b)^T$; $\beta_1=(1,2,1)^T$, $\beta_2=(-1,1,2)^T$, $\beta_3=(1,1,c)^T$. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 等价.

1. 求 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的秩及其一个极大线性无关组, 并求参数 $a,b,c$ 的值;

2. 令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 求满足 $AX=B$ 的矩阵 $X$.

解: 1. 因为 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$ 有一个二阶子式 $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0$, 所以 $r(A)\geq2$.

又因为 $A$ 一共只有2列, 所以 $r(A)=2$. 可见向量组 $\alpha_1,\alpha_2$ 的秩为2

由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 等价, 故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的秩也为2.

注意到 $\beta_1,\beta_2$ 的分量不成比例, 故 $\beta_1,\beta_2$ 线性无关, 因而 $\beta_1,\beta_2$ 就是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的一个极大线性无关组.

由 $\alpha_1,\alpha_2$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 等价还可以看出 $\alpha_1,\alpha_2$ 也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的极大无关组, 因此矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 的秩应该是2. 故由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\a&b&1&2&c\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-a)\\\times(-b)\\\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&1-a-2b&2+a-b&c-a-b\end{pmatrix}$$ 可见

$1-a-2b=2+a-b=c-a-b=0$.

由此可得: $a=-1$, $b=1$, $c=0$.

2. 对 $A$ 和 $B$ 进行分块, 使 $A=\begin{pmatrix}E\\A_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$, 其中 $A_1=(a,b)$, $B_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$,

$B_2=(1,2,c)$. 若 $AX=B$, 则 $\begin{pmatrix}X\\A_1X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\A_1\end{pmatrix}X=AX=B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$.

故 $X=B_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

七. (6分) 假设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2=2A$.

1. 证明: 关于矩阵的秩有 $r(2E-A)+r(A)=n$, 并且 $A$ 相似于对角阵;

2. 若 $r(A)=r$, 求行列式 $|A+E|$ 的值.

证明1: 一方面, 由 $A^2=2A$ 得 $(2E-A)A=2EA-A^2=2A-A^2=0$,

故 $A$ 的列向量都是齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$ 的解,

因而 $r(A)\leq n-r(2E-A)$, 即 $r(2E-A)+r(A)\leq n$.

另一方面, $n=r(2E)=r[(2E-A)+A]\leq r(2E-A)+r(A)$

所以 $r(2E-A)+r(A)=n$.

由 $A^2-2A=0$ 可知 $A$ 的特征值只可能是0和2,

$(0E-A)x=0$ 和 $(2E-A)x=0$ 的基础解系中分别含有 $n-r(-A)$ 和 $n-r(2E-A)$ 个线性无关的向量, 于是 $A$ 一共有 $[n-r(-A)]+[n-r(2E-A)]$

个线性无关的特征向量，而 $[n-r(-A)]+[n-r(2E-A)]$
$=n-r(A)+n-r(2E-A)=2n-[r(A)+r(2E-A)]=2n-n=n.$
所以 $A$ 相似于对角阵.

解2. 由1可知 $A$ 相似于 $\mathrm{diag}(2,\cdots,2,0,\cdots,0)$ 其中有 $r(A)$ 个2，$n-r(A)$ 个0.
即存在可逆矩阵 $P$ 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\ r(A)\text{行} \\ \}\ n-r(A)\text{行} \end{array} \stackrel{记}{=} \Lambda.$$

而 $|\Lambda+E|=\begin{vmatrix} 3 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}=3^{r(A)}.$

故当 $r(A)=r$ 时，$|A+E|=|P|^{-1}|A+E|\cdot|P|=|P^{-1}||A+E|\cdot|P|=|P^{-1}(A+E)P|$
$=|P^{-1}AP+P^{-1}EP|=|\Lambda+E|=3^r.$

---

友情提醒：

1. 本试题解答仅供参考，其中的方法未必是最好的，结果也未必完全正确；
2. 仅仅能看懂本试题解答是不够的，要想学好《线性代数》还应该吃透教材，按照教学大纲的要求打好基础；要想得到高分还应该独立做完这几套试卷以及教材上的习题；
3. 为了节约纸张，在复印本试题解答时请双面复印.

张小向
E-mail: z990303@seu.edu.cn

---

祝大家学习进步！

2007.4.13

# 2006-2007 学年第 3 学期(上)《线性代数》试卷

一. (18%)填空题($\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵).

1. 假设 $\alpha = (1, 3)$, $\beta = (1, -1)$, 则 $(\alpha^T\beta)^{100} =$ ________.

解: $\alpha^T\beta = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}(1,-1) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -3\end{pmatrix}$, $\beta\alpha^T = (1,-1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = -2$,

$$(\alpha^T\beta)^{100} = \underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\ldots(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)}_{100\text{ 个}\alpha^T\beta} = \alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\ldots(\beta\alpha^T)}_{99\text{ 个}\beta\alpha^T}\beta = \alpha^T(-2)^{99}\beta = -2^{99}\alpha^T\beta$$

$$= \begin{pmatrix}-2^{99} & 2^{99}\\ -3\times2^{99} & 3\times2^{99}\end{pmatrix}.$$

2. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

解: (法一) $|\boldsymbol{A}| = 1\times4 - 2\times3 = 4 - 6 = -2$. $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

(法二) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\times(-3) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\times1 \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\times(\tfrac{-1}{2})$

$\to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)\times(\tfrac{-1}{2})$. 由此可得 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

3. 若 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$ 的行列式等于 2, 矩阵 $\boldsymbol{B} = (\beta, \gamma, \alpha)$, 则矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ = ______.

解: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)| = |(\alpha, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)| + |(\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha)|$

×(−1) ×(−1)

$= |(\alpha, \beta+\gamma, \gamma)| + |(\beta, \gamma, \gamma+\alpha)| = |(\alpha, \beta, \gamma)| + |(\beta, \gamma, \alpha)| = |\boldsymbol{A}| - |(\beta, \alpha, \gamma)|$

×(−1) ×(−1)

$= |\boldsymbol{A}| + |(\alpha, \beta, \gamma)| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{A}| = 2 + 2 = 4.$

4. 齐次线性方程组 $3x + 2y - 5z = 0$ 的一个基础解系是________________.

解: 依次取 $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5/3\\0\\1\end{pmatrix}$, 于是该方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1 = (-2/3, 1, 0)^T,\ \xi_2 = (5/3, 0, 1)^T.$$

注: 本题答案不唯一, 比如还可以取 $\xi_1 = (-2, 3, 0)^T$, $\xi_2 = (5, 0, 3)^T$.

5. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, -3, -2, -4)^T$, $\alpha_4 = (3, 1, 4, 1)^T$ 的一个极大线性无关组是________________.

解: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\2 & -1 & -3 & 1\\3 & 1 & -2 & 4\\4 & 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$ ×(−2) ×(−3) ×(−4) $\to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\0 & -5 & -5 & -5\\0 & -5 & -5 & -5\\0 & -8 & -8 & -11\end{pmatrix}\times(\tfrac{-1}{5}) \to$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&-5&-5&-5\\0&-8&-8&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+5r_2,\ r_4+8r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可见该向量组的一个极大线性无关组是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

注：本题答案不唯一，比如还可以取$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$；也可以取$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. 但$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关取，因此$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不是该向量组的极大线性无关组.

6. 若矩阵$\begin{pmatrix}1&a\\2&b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$合同，则参数 $a, b$ 满足条件____________________.

解：记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\2&b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$,

又因为$\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$，故$\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP})^T=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{P}^T)^T=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$，可见$\boldsymbol{A}$是对称矩阵，故$a=2$.

再由$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同可知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的秩和正惯性指数，而$\boldsymbol{B}$的秩和正惯性指数分别为 2 和 1，因此$\boldsymbol{A}$的秩和正惯性指数也分别为 2 和 1，于是$\boldsymbol{A}$的两个特征值$\lambda_1$和$\lambda_2$一个是正的一个是负的，从而$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2<0$.

由于 $a=2$，所以$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\2&b\end{vmatrix}=b-4$. 因而 $b<4$.

二. (12%)选择题.

1. 假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，数 $k\neq 0$，则正确的命题是(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$;　　(B) $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$;

(C) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;　　(D) $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

解：① 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}|=1$, $|\boldsymbol{B}|=0$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=2$，而$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=1$;

② 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $k=2$，则$|\boldsymbol{A}|=1$, $|k\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4$，而 $k|\boldsymbol{A}|=2$;

③ 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=2$, $r(\boldsymbol{B})=1$, $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2$，而 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=3$;

④ 设$r(\boldsymbol{A})=r$，即$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式的阶数为$r$，取其中的一个$r$阶非零子式记为$D$

$$=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}&a_{i_1i_2}&\cdots&a_{i_1i_r}\\a_{i_2i_1}&a_{i_2i_2}&\cdots&a_{i_2i_r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i_ri_r}&a_{i_ri_2}&\cdots&a_{i_ri_r}\end{vmatrix}，则k\boldsymbol{A}中有一个与之对应的r阶子式\begin{vmatrix}ka_{i_1i_1}&ka_{i_1i_2}&\cdots&ka_{i_1i_r}\\ka_{i_2i_1}&ka_{i_2i_2}&\cdots&ka_{i_2i_r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i_ri_r}&ka_{i_ri_2}&\cdots&ka_{i_ri_r}\end{vmatrix}=k^rD$$

$\neq 0$，可见$r(k\boldsymbol{A})\geq r=r(\boldsymbol{A})$. 类似地，可以证明$r(\boldsymbol{A})\geq r(k\boldsymbol{A})$. 因此$r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})$.

(换一个角度) $k\neq 0\Rightarrow k\boldsymbol{A}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过各行乘以非零的数 $k$ 得到的$\Rightarrow k\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价$\Rightarrow$ $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

(再换一个角度) $k\neq 0\Rightarrow k\boldsymbol{E}$ 可逆 $\Rightarrow r(k\boldsymbol{A})=r((k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

故选 D.

2. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$，则不与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$;　　(C) $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$.

解: $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$以及$\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$都是 2 阶方阵而且都有两个不同的特征值 1 和 2, 可见它们都与$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$相似, 因此$\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$都与 $\boldsymbol{A}$ 相似. 又因为相似的矩阵具有相同的行列式, $|\boldsymbol{A}| = 2$, 而$\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix} = -3$, 可见$\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(换一个角度) 因为相似的矩阵具有相同的迹, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 1+2 = 3$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix} = 0+2 = 2$, 可见$\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(再换一个角度) 因为相似的矩阵具有相同的特征值, $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值分别为 1 和 2, 而$\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$的两个特征值分别为$-1$ 和 3, 可见$\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

故选 D.

3. 假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则正确的命题是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关; (B) $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关;

(C) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行向量组都线性相关; (D) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组都线性相关.

解: ① 取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关;

② 取 $\boldsymbol{A} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关;

③ 设$\boldsymbol{A}$为$l\times m$矩阵, $\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$的行向量依次记为$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, 由于$\boldsymbol{A}$都是非零矩阵, 故可取$\boldsymbol{A}$的一个非零行$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})$. 由$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$可知

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{im}\beta_m = \mathbf{0},$$

这就是说, 存在一组不全为零的数$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$使得$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{im}\beta_m = \mathbf{0}$, 可见$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$线性相关.

(换一个角度) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) < m$ $\Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的列向量组线性相关 $\Rightarrow \boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

故选 B.

三. (16%)设线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 - x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

1. 参数 $k$ 取何值时, 线性方程组有唯一解? $k$ 取何值时, 方程组没有解?
2. 当 $k$ 取何值时, 方程组有无穷多组解? 当方程组有无穷多组解时, 求其通解.

解: $\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&-1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix} \begin{matrix}\times 1 \quad \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&k+1&k-1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&k+1&k-1&k^2+4\end{pmatrix} \times(\tfrac{-1}{2})$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&k+1&k-1&k^2+4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\quad\times(-k-1)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{k+2}{2}&0\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&0&\frac{k(3-k)}{2}&k(k-4)\end{pmatrix}$$

由此可见，当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 3$ 时，该方程组有唯一解；当 $k=3$ 时，该方程组无解；

当 $k=0$ 时，该方程组有无穷多组解，此时 $\begin{pmatrix}1&0&\frac{k+2}{2}&0\\0&1&\frac{k-2}{2}&4\\0&0&\frac{k(3-k)}{2}&k(k-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

故 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=4\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3+4\end{cases}$，由此可得该方程组的通解 $\begin{cases}x_1=-c,\\x_2=c+4,\text{ 其中 } c \text{ 为任意实数},\\x_3=c,\end{cases}$

写成向量的形式就是 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$.

(换一个角度) 该方程组的系数矩阵的行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=k(3-k)$.

当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 3$ 时, $\boldsymbol{D}=k(3-k)\neq 0$, 此时该方程组有唯一解；

当 $k=3$ 时，该方程组的增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&3&4\\-1&3&-1&9\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1\quad\times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&4&2&13\\0&-2&-1&-8\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&-2&-1&-8\\0&4&2&13\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times 2\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&-2&-1&-8\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$，可见此时该方程组无解；

当 $k=0$ 时，该方程组的增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&4\\-1&0&-1&0\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1\quad\times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&1&-1&4\\0&-2&2&-8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times 2\\ \\ \end{matrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=4\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3+4\end{cases}$，由此可得该方程组的通解 $\begin{cases}x_1=-c,\\x_2=c+4,\text{ 其中 } c \text{ 为任意实数},\\x_3=c,\end{cases}$

写成向量的形式就是 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$.

四. (16%)设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{2008}$.

解: $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&2&-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{2008} = \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\dots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})}_{2008\text{ 个 }P\Lambda P^{-1}}$$
$$= P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\dots(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1}$$
$$= P\underbrace{\Lambda\Lambda\dots\Lambda\Lambda}_{2008\text{ 个 }\Lambda}P^{-1} = P\Lambda^{2008}P^{-1} = PEP^{-1} = PP^{-1} = E.$$

(另解) $AP = P\Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&2&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = E$

$\Rightarrow A^{2008} = E.$

五. (14%)已知向量 $\eta = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix}3&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

1. 求参数 $a, b$ 的值, 并求 $A$ 的相应于特征向量 $\eta$ 的特征值;
2. 问: 矩阵 $A$ 是否相似于对角阵? 说明你的理由.

解: 1. 设 $A$ 的相应于特征向量 $\eta$ 的特征值为 $\lambda$, 即 $A\eta = \lambda\eta$,

则 $\begin{pmatrix}0\\2+a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$,

由此可得 $\lambda = 0, a = -2, b = 0$.

2. $A$ 的特征多项式 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-3&1&-2\\-5&\lambda+2&-3\\1&0&\lambda+1\end{vmatrix} = \lambda^3$. 可见 $A$ 的特征值为 0(三重).

$$0E - A = -A = \begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1\\-5&2&-3\\-3&1&-2\end{pmatrix} \begin{matrix}\times5\ \ \times3\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix} \times(-\tfrac{1}{2}) \to \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可见 $r(0E - A) = 2$, 因而 $(0E - A)x = \mathbf{0}$ 只有 1 个线性无关的解向量, 也就是说矩阵 $A$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 而 $A$ 的阶数为 3, 所以矩阵 $A$ 不与对角矩阵相似.

(换一个角度) 假若矩阵 $A$ 与对角矩阵 $\Lambda$ 相似, 则由 $A$ 的特征值为 0(三重)可知 $\Lambda = O$, 于是 $r(A) = r(\Lambda) = 0$, 因而 $A = O$, 这与 $A = \begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix} \neq O$ 矛盾. 此矛盾表明矩阵 $A$ 不与对角矩阵相似.

六. (14%)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, 求一正交矩阵 $Q$ 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵.

解: $A$ 的特征多项式 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3)$.

可见$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$.

$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$,

它们已经是正交的了, 再单位化得

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}},$$

$(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^{\mathrm{T}},$$

令$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**注**: 若$(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系取为$\xi_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 则需要先正交化再单位化, 即:

令$\boldsymbol{p}_1 = \xi_1, \boldsymbol{p}_2 = \xi_2 - \dfrac{[\xi_2, \boldsymbol{p}_1]}{[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1]}\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

再令$\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_2 = \dfrac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$,

最后令$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

七. (10%)假设$n$维实行向量$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n), \beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$, 矩阵$\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

1. 证明: $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵当且仅当$\alpha, \beta$线性相关;
2. 当$\alpha, \beta$线性相关时, 求实数 $k$ 的取值范围, 使得 $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

**证明**: 1. 因为$\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$,

所以$\boldsymbol{A}$是对称矩阵$\Leftrightarrow a_ib_j = a_jb_i\ (\forall i, j = 1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow \alpha, \beta$的分量成比例$\Leftrightarrow \alpha, \beta$线性相关.

(换一个角度) 因为$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\beta = \|\alpha\|^2\beta, \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{\mathrm{T}} = \alpha\beta^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha$.

若$\boldsymbol{A}$是对称矩阵, 则$\|\alpha\|^2\beta = \alpha\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha$.

当$\alpha = \boldsymbol{0}$ 时, $1\alpha + 0\beta = \boldsymbol{0}$; 当$\alpha \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\|\alpha\|^2 \neq 0$ 且$-(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\alpha + \|\alpha\|^2\beta = \boldsymbol{0}$.

因而$\alpha, \beta$线性相关.

反过来, 若$\alpha, \beta$线性相关, 则存在不全为零的数$k_1, k_2$使得$k_1\alpha + k_2\beta = \boldsymbol{0}$.

当$k_1 \neq 0$ 时, $\alpha = -\dfrac{k_2}{k_1}\beta, \boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = (-\dfrac{k_2}{k_1}\beta)^{\mathrm{T}}\beta = -\dfrac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (-\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta)^{\mathrm{T}} = -\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}(\beta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -\frac{k_2}{k_1}\beta^{\mathrm{T}}\beta = \boldsymbol{A};$$

当$k_2 \neq 0$ 时, $\beta = -\dfrac{k_1}{k_2}\alpha, \boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \alpha^{\mathrm{T}}(-\dfrac{k_1}{k_2}\alpha) = -\dfrac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (-\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)^{\mathrm{T}} = -\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -\frac{k_1}{k_2}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \boldsymbol{A}.$$

由此可见 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

2. 若$\alpha, \beta$中有一个为零向量，则$\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \boldsymbol{O}$，于是$k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$是正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $k\boldsymbol{E}$是正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $k > 0$.

若$\alpha, \beta$都不为零向量，则由$\alpha, \beta$线性相关可知，存在(非零的)$t$ 使得$\beta = t\alpha$.

于是$\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.

一方面, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le \mathrm{r}(\beta) = 1$，另一方面由$\alpha$不为零可知存在某个$a_i \neq 0$，于是$\boldsymbol{A} = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$中有一个元素$ta_i^2 \neq 0$，可见$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \ge 1$.

综合上述两个方面可知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 且由$\boldsymbol{A}\alpha^{\mathrm{T}} = t\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = (t\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha^{\mathrm{T}}$可见

$$\lambda = t\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = t(a_1^2 + ... + a_n^2)$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的唯一的非零的特征值，于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} t(a_1^2+\cdots+a_n^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})\boldsymbol{Q} = k\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} k+t(a_1^2+\cdots+a_n^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

因此$k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$是正定矩阵 $\Leftrightarrow k + t(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) > 0$ 且$k > 0$.

当 $t > 0$ 时, $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow k > 0$;

当$t < 0$ 时, $k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$是正定矩阵 $\Leftrightarrow k > -t(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$.