

## §6 广义积分

定积分定义中有两个基本条件:

- (1) 积分区间 [a,b] 是有限区间,
- (2)被积函数在积分区间上是有界的。

下面考虑放松这两个条件,讨论两类广义积分,或称非正常积分。

一、无限区间上的广义积分

形如 
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$
,  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 

的积分称为积分区间为无限的广义积分.

# NORMAL SERVICE OF FELL SERVICE

### 无限区间上的广义积分定义

定义6.7.1 设函数 f(x) 在  $[a,+\infty)$  上有定义,

且对任意 A(A>a), f(x) 在 [a,A] 上可积。若极限

$$\lim_{A\to +\infty}\int_a^A f(x)dx = I,$$

则称广义积分  $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$  存在或收敛,

且称此极限值 I 为广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的积分值,

记作

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = I.$$

若极限不存在,则称广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散。

# NORMAL CHIVERSITY

#### 无限区间上的广义积分定义

定义6.7.1 b 设函数 f(x) 在  $(-\infty, a]$  上有定义,

且对任意 A(A < a), f(x) 在 [A,a] 上可积。若极限

$$\lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x) dx = I,$$

则称广义积分  $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$  存在或收敛,

且称此极限值 I 为广义积分  $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$  的积分值,

记作

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) dx = I.$$

若极限不存在,则称广义积分  $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$  发散。



#### 无限区间上的广义积分定义

若对确定的点 a, 广义积分

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$
都收敛,则称广义积分 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

若广义积分 
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$
 与  $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$  中至少有一个发散,

则称广义积分 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$
 发散。

#### 无限区间广义积分例子

**例** 讨论广义积分 
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$
,  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  的敛散性。

解: 
$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^A = \arctan A, \quad \overline{\text{m}} \lim_{A \to +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$$

因此,广义积分 
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$
 收敛, 且  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 

类似地, 
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{A \to -\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}.$$

广义积分 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

收敛.



## 无限区间广义积分例子

**例** 讨论广义积分 
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0)$$
 的敛散性。

解: 当时 
$$= \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_a^A = \frac{A^{1-p} - a^{1-p}}{1-p},$$

因此 
$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty.$$

因此,当时 
$$1$$
 广义积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  收敛, 其值为:  $\frac{a^{1-p}}{p-1}$ . 当时  $1$  广义积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  发散。



#### 广义积分的简写

计算无穷限积分时,一般应先在有限区间上求定积分,然后再取极限, 为方便起见,这两个步骤可以简写成

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中  $F(+\infty)$  应理解为极限  $\lim_{A\to +\infty} F(A)$ .

**例** 计算广义积分 
$$\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt (p > 0).$$

解: 
$$\int_{0}^{+\infty} t e^{-pt} dt = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} dt$$
$$= -\frac{e^{-pt}}{p^{2}} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{p^{2}}.$$



## 二、无界函数的广义积分

把定积分推广到被积函数有无穷型间断点的非正常情形。

形如 
$$\int_a^b f(x)dx.$$

$$\left(\lim_{x \to b^{-}} f(x) = \infty \qquad \text{in} \quad \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \infty \quad \right)$$

的无界函数积分称为无界函数的广义积分。



### 无界函数的广义积分定义

**定义6.7.2** 设 
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$
, 对任意小的正数  $\mathcal{E}$ ,

$$f(x)$$
 在  $[a+\varepsilon,b]$  上可积, 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=I,$$

则称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  存在或收敛,

且称此极限值 I 为广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  的积分值,记作

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = I.$$

若极限不存在,则称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散。



### 无界函数的广义积分定义

定义6.7.2b 设  $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ , 对任意小的正数  $\mathcal{E}$ ,

f(x) 在  $[a,b-\varepsilon]$  上可积,若极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = I,$$

则称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  存在或收敛,

且称此极限值 I 为广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  的积分值,记作

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = I.$$

若极限不存在,则称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散。



#### 无界函数的广义积分定义

设是 
$$(a,b)$$
 内的一点,且  $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ ,若广义积分 
$$\int_a^c f(x)dx$$
 与  $\int_c^b f(x)dx$ 

都收敛,则称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛,且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

若广义积分  $\int_a^c f(x)dx$  与  $\int_c^b f(x)dx$  中至少有一个发散,

则称广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散。



#### 无界广义积分例子

**例** 讨论广义积分  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$  的敛散性。

解: 因为 
$$\lim_{x\to a^{-}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$$
, 由于

$$\lim_{x \to \varepsilon^{+}} \int_{0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \lim_{x \to \varepsilon^{+}} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{0}^{a-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

因此,广义积分 
$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
 收敛,

### 无界广义积分例子

**例** 讨论广义积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} (p > 0)$  的收敛性。

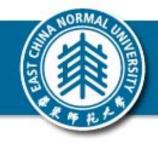
解: 当財
$$\neq 1$$
 
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{p}} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p},$$

因此 
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$
广义积分 
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{p}} \quad \text{收敛,其值为: } \frac{1}{1-p}.$$

广义积分 
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$
 收敛, 其值为:  $\frac{1}{1-p}$ 

当**时**≥1 广义积分 
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$
 发散。



# 三、「一函数

对广义积分 
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$
, 可以证明

广义积分 
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad 收敛,$$

广义积分 
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$
 发散。

因此对 
$$s \in (0, +\infty)$$
, 积分值  $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 

定义了 S 的一个函数,称为  $\Gamma$  -函数。

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$



# 厂-函数的性质

$$\Gamma$$
-函数的递推公式  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ,  $(s>0)$ .

证明: 
$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx$$
.  

$$= -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s \Gamma(s).$$

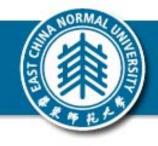
对正整数 
$$n$$
,  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!$ .

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{x}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} u^{2(s-1)} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} u^{2s-1} e^{-u^2} du.$$

下学期证明 
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

可以求出 
$$\Gamma(n+\frac{1}{2})$$
.



#### 第一宇宙速度

人造地球卫星在地面附近绕地球做匀速圆周运动所必须具有的速度,

叫做第一宇宙速度.

设卫星在半径为常数 r(>R) 的圆上运动,速度为  $\mathcal{V}_{m{ ext{ o}}}$  轨迹为

$$(x, y) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t)).$$

速度向量为 
$$(x', y') = r(-\sin\theta, \cos\theta) \frac{d\theta}{dt},$$

因此 
$$v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = r \frac{d\theta}{dt}$$
,

即得 
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

#### 第一宇宙速度

加速度 
$$(x'', y'') = -r(\cos \theta, \sin \theta)(\frac{d\theta}{dt})^2$$
,

 $(x', y') = r(-\sin\theta, \cos\theta) \frac{d\theta}{dt}$ 

离心力为 
$$F = m(x'', y'') = -m(\cos\theta, \sin\theta) \frac{v^2}{r}$$
,  $|F| = m \frac{v^2}{r}$ .

此离心力与重力平衡,且卫星离地球较近,  $r \approx R$ ,

$$mg \approx m \frac{v^2}{R}$$
.

地球半径  $R = 6.371 \times 10^6 m$ , 地球表面的重力加速度  $g = 9.81 m / s^2$ ,

得第一宇宙速度 
$$v \approx \sqrt{gR} \approx 7.9 \text{km/s}$$
.



#### 第二宇宙速度

在地球表面垂直发射火箭,要使火箭克服地球引力远离地球,

其速度至少要有多大?

设地球质量为 M, 火箭质量为 m, 按万有引力定律,

在距地心  $x(\geq R)$  处火箭所受到的引力为

$$F(x) = \frac{GMm}{x^2}.$$

G 为万有引力常数,由于在地球表面 x=R 时 ,地球对火箭的引力就是火箭的重量,  $\dfrac{GMm}{R^2}=mg$  ,

因此 
$$F(x) = \frac{mgR^2}{x^2}.$$



#### 第二宇宙速度

火箭在地球引力场中从地面上升到距离地心 r(>R) 处所作的功为

$$\int_{R}^{r} \frac{mgR^{2}}{x^{2}} dx = mgR^{2} (\frac{1}{R} - \frac{1}{r}).$$

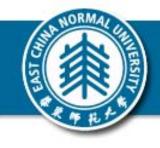
令  $r \rightarrow +\infty$ , 火箭克服地球引力远离地球需作的功为

$$W = \lim_{r \to +\infty} \int_{R}^{r} \frac{mgR^{2}}{x^{2}} dx = mgR.$$

由能量守恒定律,火箭能远离地球的速度  $oldsymbol{\mathcal{V}}$  至少需要满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR,$$

得第二宇宙速度 
$$v = \sqrt{2gR} \approx 11.2 km/s$$
.



#### 第三宇宙速度

如果物体的速度等于或大于16.7km/s,物体就摆脱了太阳引力的束缚,

飞到太阳系以外的宇宙空间去.我们把这个速度叫第三宇宙速度