§5 定积分的应用

求这样一种量 F 具有特点:

(1) 是与区间的整体量 $F([a,b])$, 它对于区间具有可加性.

即 $[a,b]$ 上的整体量可以分成小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的量 ΔF_i 之和.

(2) 而且 ΔF_i 可以表示成 $\Delta F_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

且 $\lim\limits_{\|x\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在.

(3) 这就有 $F = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

问题是实际工作中怎么找 $f(x)$?

微元法:

(1) 在 $[a,b]$ 内任取一个微小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$,

(2) 设 F 在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的部分量为 $\Delta F \approx f(x)dx$,

其中 $f(x)dx$ 称为所求量的微元.

(3) 则 $F = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

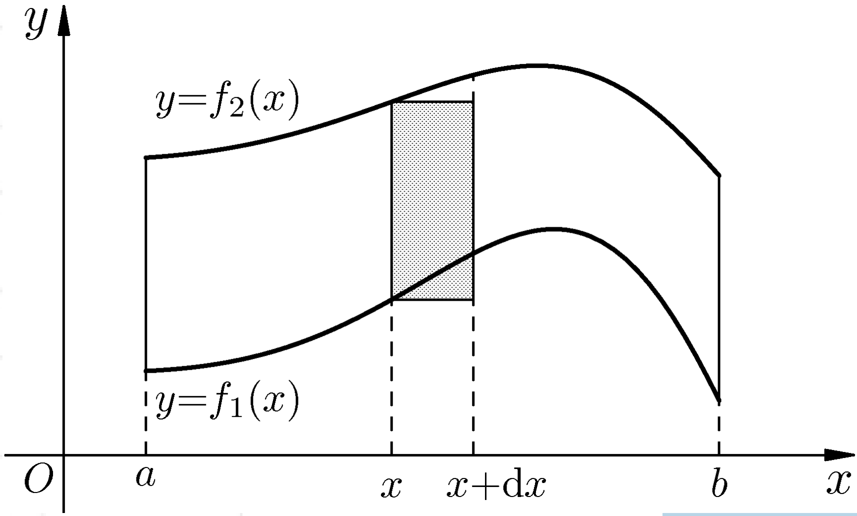
微元也记为 $dF = f(x)dx.$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标系下的面积公式

① 求由曲线 $y=f_2(x), y=f_1(x)$ 和直线 $x=a, x=b$

所围成平面区域的面积.



微元法:

在 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$ 上的面积 ΔA

约等于高为 $|f_2(x)-f_1(x)|$,

底长为 dx 的矩形面积.

面积微元为 $\mathrm{d}A = |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$

面积为 $A=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$

平面图形的面积

类似可 求由曲线 $x = g_1(y), x = g_2(y)$

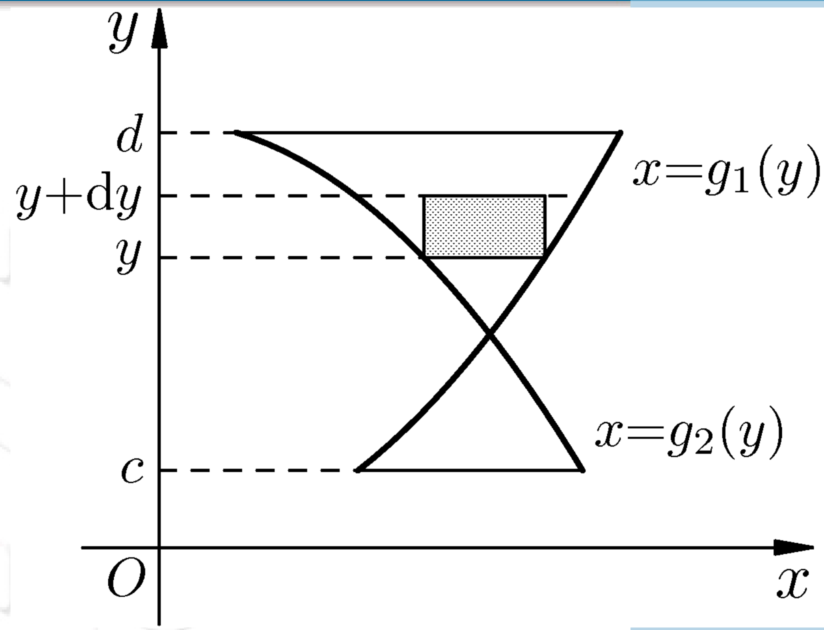
和直线 $y = c, y = d$

所围成平面区域的面积.

任取区间 $[y, y+\mathrm{d}y] \subset [c, d]$,

面积微元为 $\mathrm{d}A = |g_2(y) - g_1(y)|\,\mathrm{d}y.$

面积为 $A = \int_c^d |g_2(y) - g_1(y)|\,\mathrm{d}y.$



平面图形的面积举例

例**1** 求由 $y=\sin x$ 与 $y=\sin 2x\,(0\le x\le \pi)$ 所围平面图形的面积.

解 由 $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\sin 2x, \end{cases}$ $\quad 0=\sin 2x-\sin x=\sin x(2\cos x-1),$

$\sin x=0$ 得 $x_1=0, x_2=\pi,$ $\quad 2\cos x-1$ 得 $x_3=\dfrac{\pi}{3}.$

两曲线交点为 $(0,0), (\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}), (\pi,0).$

所求面积为

$$A=\int_0^{\pi}|\sin 2x-\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/3}(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\pi/3}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=[\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\pi/3}+[\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$=\frac{5}{2}.$$

平面图形的面积举例

例2 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围平面图形的面积.

解 由 $\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$ $y^2=2y+8,$ $(y+2)(y-4)=0,$

得$y_1=-2, y_2=4,$

两曲线交点为 $(2,-2),(8,4).$

所求面积为 $A=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y$

$$=[\frac{1}{2}(y+4)^2-\frac{1}{6}y^3]_{-2}^{4}$$

$$=18.$$

平面图形的面积举例

例3 计算抛物线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=x$ 所围平面图形的面积.

解 由 $\begin{cases} y=2-x^2, \\ y=x, \end{cases}$ $\quad x=2-x^2,\quad (x+2)(x-1)=0,$

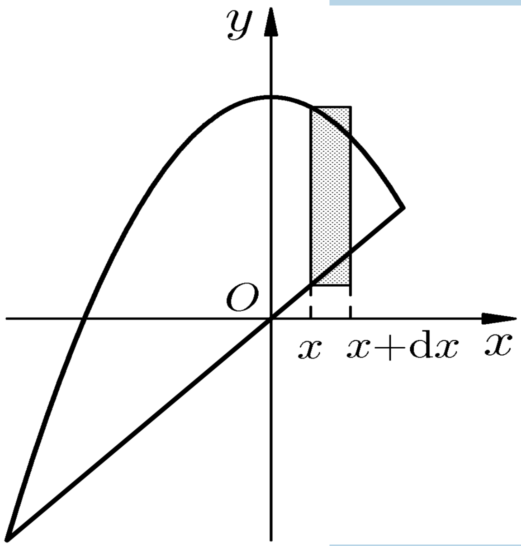
得 $x_1=-2, x_2=1,$

两曲线交点为 $(-2,-2), (1,1).$

所求面积为 $A=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx$

$$=[2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{9}{2}.$$



参数曲线决定的曲边梯形的面积

② 求由参数曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 和直线 $x=a=\varphi(\alpha)$, $x=b=\varphi(\beta)$,

$y=0$ 所围平面图形的面积.

面积元素为 $dA=|y(x)|\,\mathrm{d}x$,

所求面积为 $A=\int_a^b |y(x)|\,\mathrm{d}x.$

用换元法

$$A=\int_a^b |y(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$$=\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\,\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

例4　求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 的面积.

解　由对称性

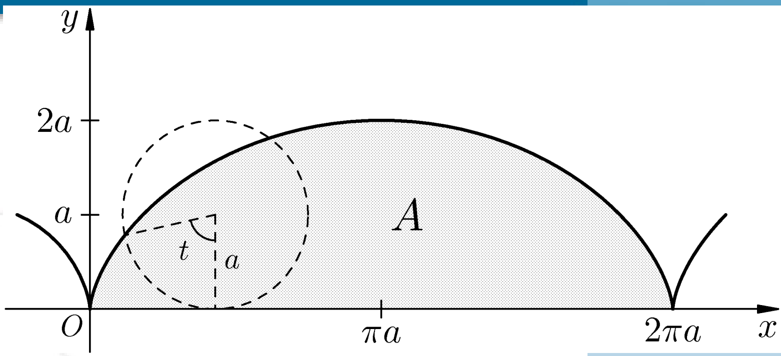
$$A = 4\int_0^a |y| \mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |b\sin t|(a\cos t)' \mathrm{d}t$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \mathrm{d}t = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= 2ab[t - \frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi ab.$$

例5 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$



的一拱与 x 轴所围平面图形的面积.

解 旋轮线的一拱对应参数 $t \in [0, 2\pi]$,

$$A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)(a(t-\sin t))'\mathrm{d}t$$

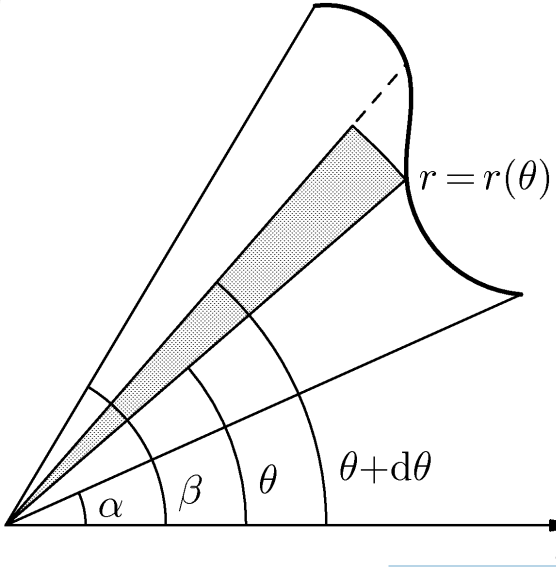
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= a^2 (\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

(2) 极坐标系下的面积公式

求由曲线 $r=r(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积. $(0\le\alpha\le\beta\le 2\pi)$



任取 $[\theta,\theta+d\theta]\subset[\alpha,\beta]$,

对应小曲边扇形的面积微元为 $\mathrm{d}A=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$,

所求面积为 $$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

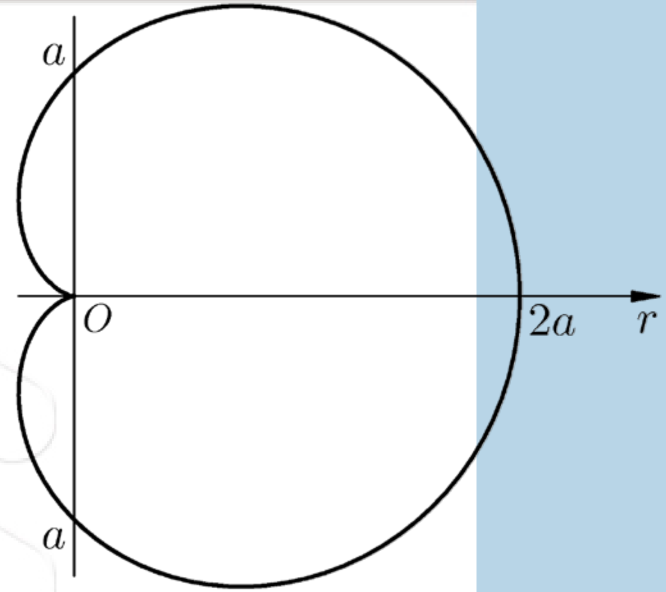
直角坐标与极坐标的关系:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

平面图形的面积举例

例6 求心型线 $r = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$

所围平面图形的面积.



解 由对称性

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

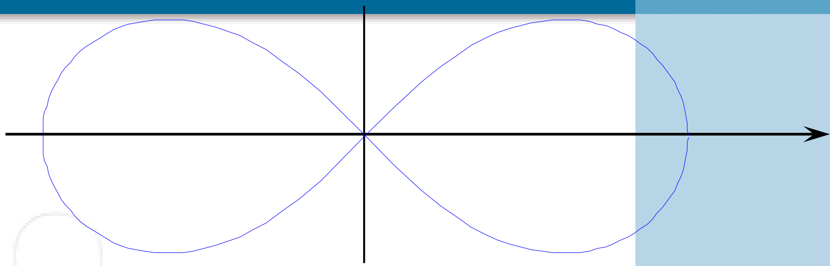
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

平面图形的面积举例

例7 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta,\ a > 0$



所围平面图形的面积.

解 由 $a^2\cos 2\theta \geq 0$ 得

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ \ or\ \ \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}.$$

由对称性得面积

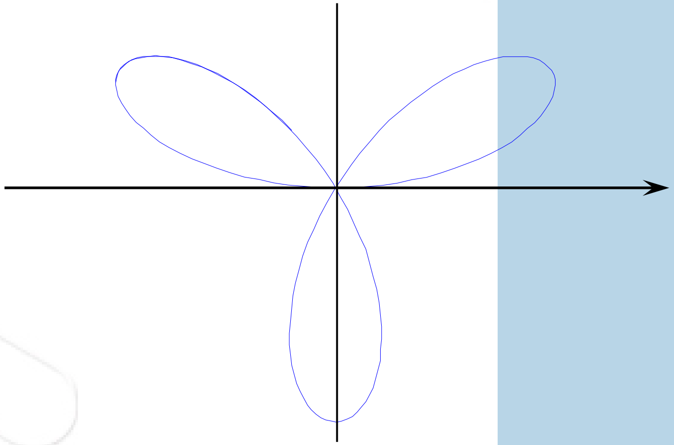
$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2.$$

例8 求三叶玫瑰线 $r=\sin 3\theta$

所围平面图形的面积.



解 由 $\sin 3\theta \ge 0$ 得

$$\theta \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right],\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right].$$

由对称性得面积

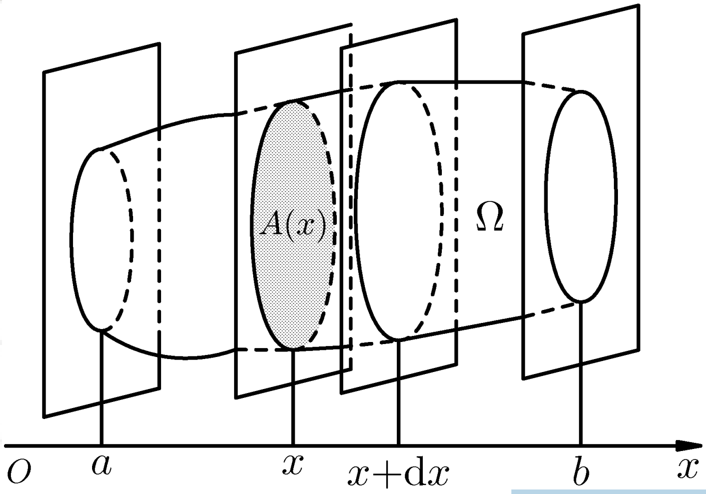
$$A=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta \mathrm{d}\theta \;=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{6}\sin 6\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \;=\frac{\pi}{4}.$$

2. 已知平行截面面积的立体的体积

设空间立体介于垂直于 x 轴的两平面

$x = a, x = b\ (a < b)$ 之间,



设 x 处的截面面积为连续函数 $A(x)$,

任取 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$,

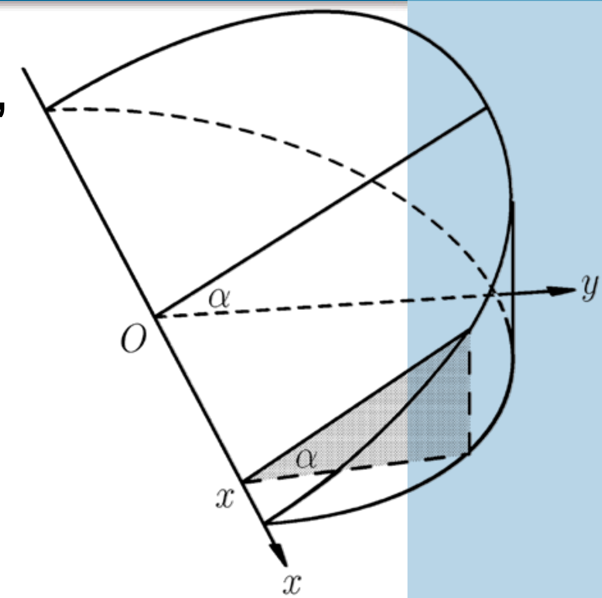
对应的小空间立体体积近似等于 底面积为 $A(x)$,

高为 dx 薄柱体的体积.

体积微元为 $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$,

所求体积为 $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

立体体积举例



例9 一直径为 $2a$ 的圆柱体,被经过底直径的一平面所截,截面与底面之夹角为 α，求所截得的立体体积.

解 如图建轴, 底圆 $y=\sqrt{a^2-x^2},\ |x|\le a,$

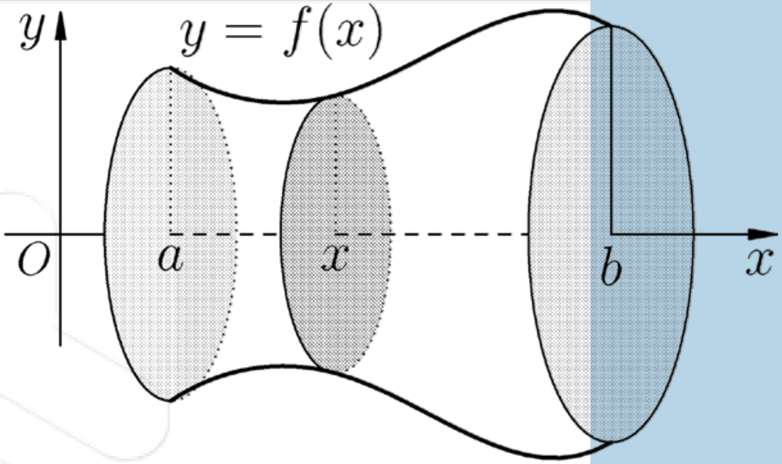
在 x 处的截面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha\ ,$$

故所求体积

$$V=2\int_0^a\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\tan\alpha(a^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^a$$

$$=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha.$$



由 $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得立体称为旋转体.

在 $[a,b]$ 上 x 处的截面积为

$$A(x)=\pi f^2(x),$$

故体积为 $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

类似的, 由 $x=g(y), y=c, y=d, x=0$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为 $V=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$

立体体积举例

例10 求底半径分别为 r 和 R, 高为 h 的圆台的体积.

解 如图建坐标系, 在 $[0,h]$ 上以直线

$$y=\frac{R-r}{h}x+r$$

为曲边的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体就是底半径分别为 r 和 R, 高为 h 的圆台. 故所求体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi h}{3(R-r)}\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^3\Big|_0^h$$

$$=\frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

例11 证明由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi ab^2.$

证 上半椭圆方程为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a].$$

所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\frac{b^2}{a^2}[a^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

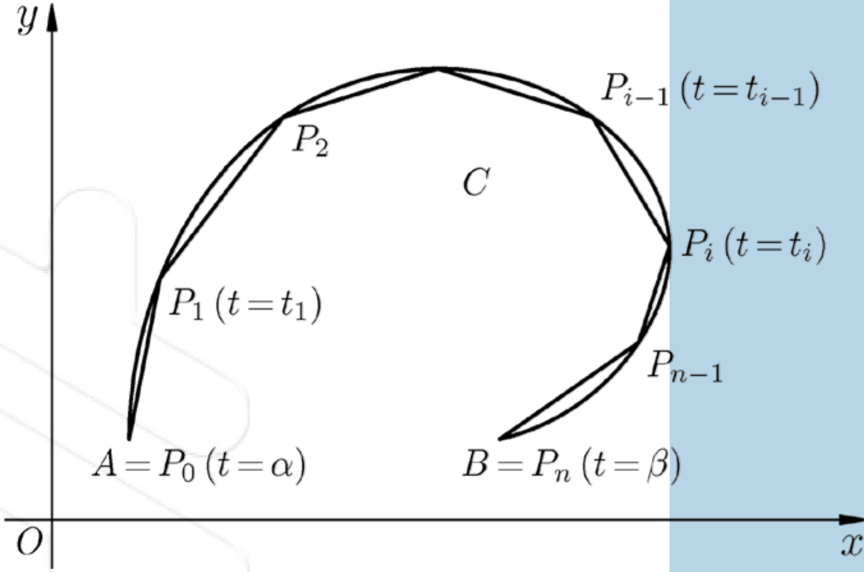
3 平面曲线的弧长

在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取 $n-1$ 个分点

$$A=P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_i,\cdots,P_n=B$$

记 $|P_{i-1}P_i|(i=1,2,\ldots,n)$ 为弦长,

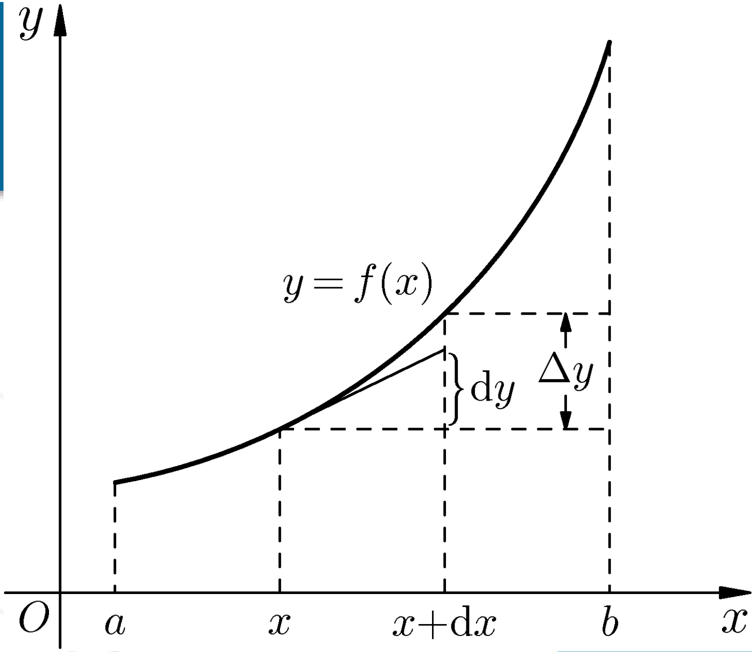
$$\lambda=\max_{1\le i\le n}|P_{i-1}P_i|,$$



若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$ 存在，则称 $\overset{\frown}{AB}$ 可求长.

且称 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$ 为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度.

平面曲线的弧长公式



设曲线方程为 $y = f(x), x \in [a, b]$,

区间 $[x, x+\Delta x] \subset [a, b]$

上的曲线段的弧长用弦长来近似,

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\approx \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

弧长微元为 $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

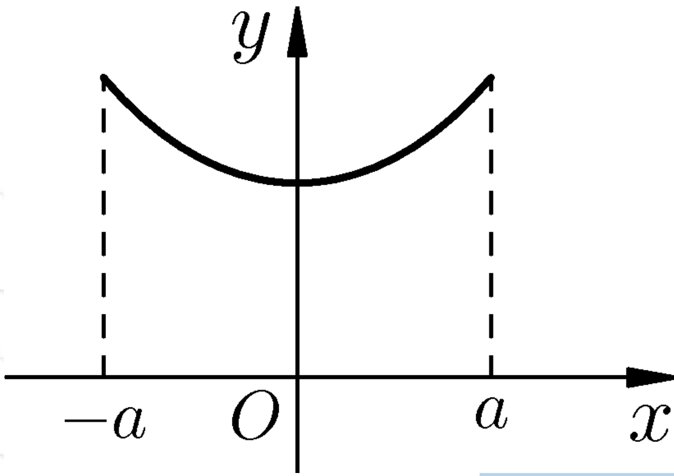
弧长公式为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$

弧长举例

例12　求悬链线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\ (a>0)$ 在 $[-a,a]$ 上的弧长.

解　$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}),$$



故弧长为

$$s=2\int_0^a\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\mathrm{d}x$$

$$=a(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\Big|_0^a=a(e-e^{-1}).$$

平面曲线的弧长公式

设曲线方程为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$

弧长微元为 $ds = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$

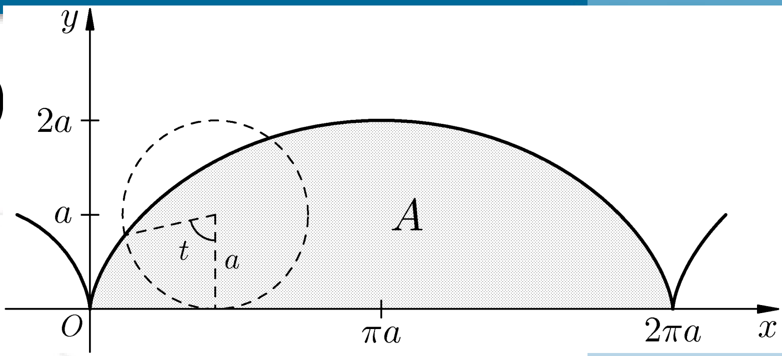
弧长公式为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$

一般弧长微元公式为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \begin{cases} \underset{x=\varphi(t),\, y=\psi(t)}{=\!=\!=\!=} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ \underset{x=x,\, y=y(x)}{=\!=\!=\!=} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\ \underset{x=x(y),\, y=y}{=\!=\!=\!=} \sqrt{(x'(y))^2 + 1}\,\mathrm{d}y \end{cases}$$

例13 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0$

第一拱的弧长.



解 旋轮线的一拱对应参数 $t \in [0, 2\pi]$,

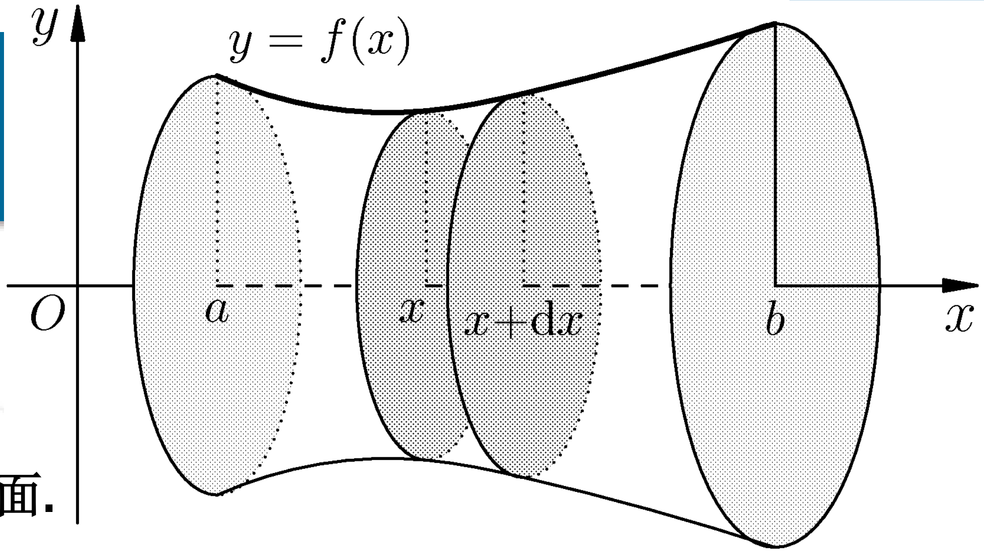
$$x' = a(1 - \cos t), \qquad y' = a \sin t,$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1 - \cos t)}\mathrm{d}t = 2a\,|\sin\frac{t}{2}|\mathrm{d}t,$$

故弧长为

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

4. 旋转曲面面积



由 $[a,b]$ 上的连续曲线

$$y=f(x)\ (\geq 0)$$

绕 x 轴旋转一周所得曲面称为旋转曲面.

$[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$ 上相应的小旋转曲面面积可用圆台的侧面积近似.

$$\Delta A\approx\pi(f(x)+f(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

面积微元为 $\mathrm{d}A=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

旋转曲面面积为 $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$

例14 求半径为 R 的球面面积.

解 球面由半圆

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\quad(-R\le x\le R)$$

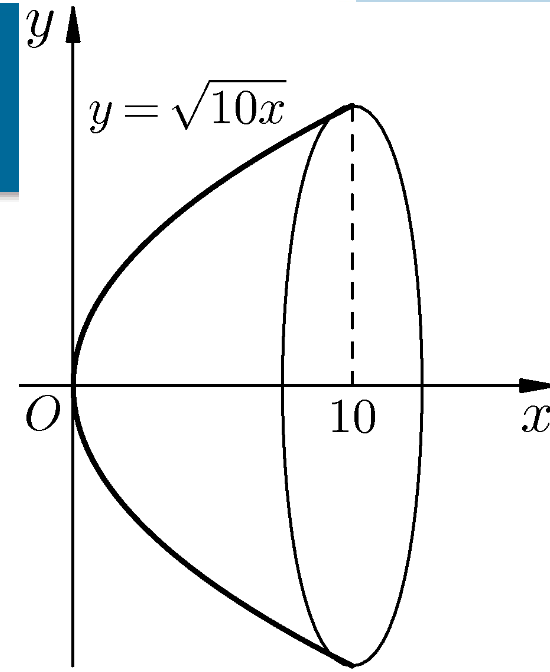
绕 x 轴一周所得, 故球面面积为

$$A=2\cdot 2\pi\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\cdot 2\pi\int_0^R R\cdot\mathrm{d}x=4\pi R^2.$$

旋转面面积举例

例15 汽车前灯反光镜面可以近似地看成由抛物线 $y^2=10x$ 在 $x=0$ 到 $x=10\ cm$ 间的一段曲线绕 x 轴旋转而成, 求此反光镜面积.

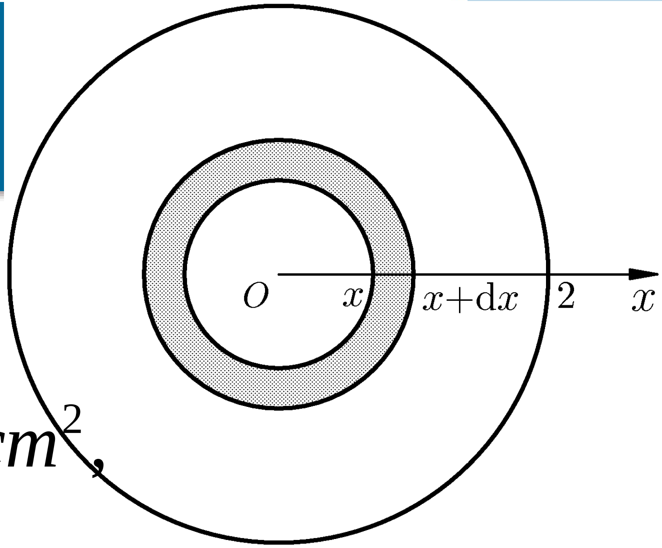


解 $y=\sqrt{10}\sqrt{x},\quad y'=\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{x}},$

反光镜面积为

$$A=2\pi\int_0^{10}\sqrt{10x}\sqrt{1+\frac{5}{2x}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{10}\sqrt{10x+25}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi}{10}\cdot\frac{2}{3}(10x+25)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}=\frac{2\pi}{15}\left(125^{\frac{3}{2}}-25^{\frac{3}{2}}\right)\approx 533(cm^2).$$



(1) 物体的质量

例16 设半径为 $r=2\,cm$ 圆片上点面密度与其到圆心距离的平方成正比, 边沿处之面密度为 $8g/cm^2$, 求该圆片的质量.

解 按右图建立极轴, 设面密度为 $\mu = kr^2$.

由 $\mu(2)=8$ 得 $k=2$, 所以 $\mu = 2r^2$.

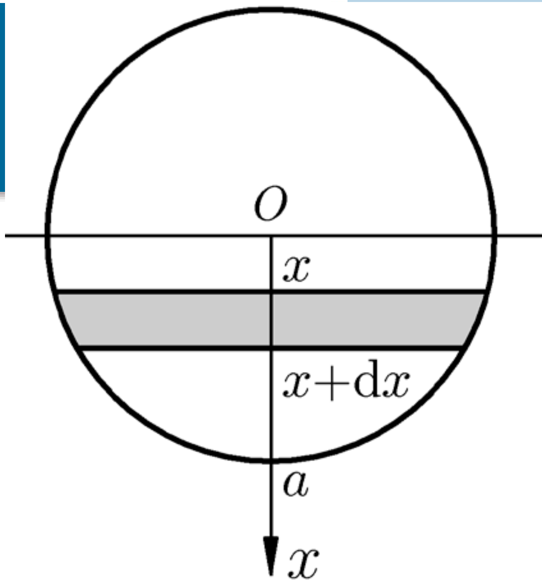
任取微小区间 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0,2]$,

对应圆环的面积微元为 $2\pi x \mathrm{d}x$,

圆环的质量微元为 $\mathrm{d}m = 2x^2 \cdot 2\pi x \mathrm{d}x = 4\pi x^3 \mathrm{d}x$,

圆片的质量为 $m = \int_0^2 4\pi x^3 \mathrm{d}x = \pi x^4 \big|_0^2 = 16\pi(g)$.

(2) 液体的压力



例 **16** 设一竖直的圆形闸门，其半径为 a m，当水面齐闸门中心时，求闸门所受的压力.

解 如右图建立坐标轴，

任取区间 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0, a]$，

对应条状区域的面积元为 $\mathrm{d}A = 2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，

压强 $p \approx \rho g x$， 其中 $\rho = 10^3\ kg/m^3,\ g = 9.8\ N/kg.$

压力微元为 $\mathrm{d}F = 2\rho g x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，

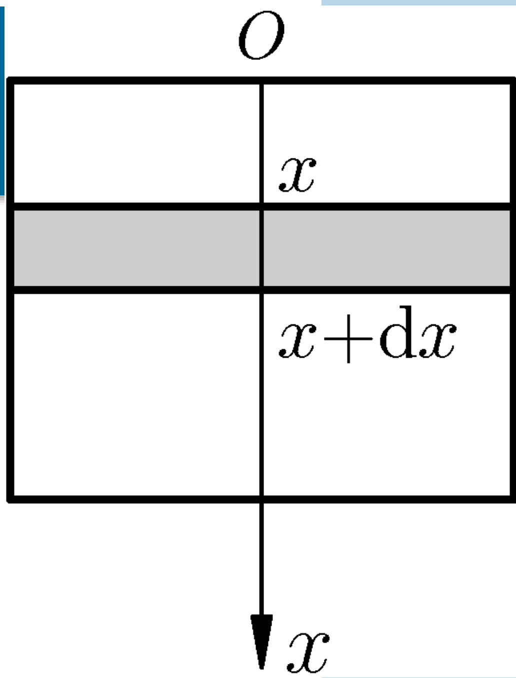
闸门所受的压力

$$F = 2\rho g \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\rho g \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3}\rho g a^3.$$

(3) 功

例 17 一圆柱状水池，池口直径为 $4\,m$，深 $3\,m$，池中盛满了水，求将全部水抽到池口外所作的功.



解 如右图建立坐标轴，

任取微小区间 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0,3]$,

对应薄层水的体积微元为 $\pi \cdot 2^2 \mathrm{d}x = 4\pi dx\ (m^3)$,

重量微元为 $9.8 \times 4\pi dx\ (kN)$,

抽出这层水所作的功微元为 $\mathrm{d}W = x \cdot (9.8 \cdot 4\pi \mathrm{d}x)$,

全部水抽出所作的功

$$W = 9.8 \times 4\pi \int_0^3 x\mathrm{d}x = 19.6\pi x^2 \Big|_0^3 = 176.4\pi \approx 554.$$

（4） 平均值

设有 n 个数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，称 $\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$ 为这 n 数的平均值.

讨论怎么求一个连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

把区间 $[a,b]$ n 等分,得分点:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i,

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值可近似等于 $f(\xi_i)$ 的平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值定义为

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$