

一、(12 分, 每小题 4 分)

(1) 求函数 $f(x) = \sqrt{25-x^2} + \ln(x-1)$ 的定义域;

(2) 设 $f(x) = x^2 + 2x + 3$, 求 $f(x+2)$;

(3) 证明函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

二、计算下列极限 (25 分, 每小题 5 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x^2+5}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$;

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\arctan x}}{x^2 \sin x}$.

三、求下列函数的导数或微分 (20 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $y = 3x^2 - x + 6$, 求 y' ;

(2) 设 $y = e^x \cos 3x$, 求 dy ;

(3) $y = \arctan \frac{x^2+1}{x^2-1}$, 求 y' ;

(4) 设 $y = x^{\cos \frac{1}{x}}$ ($x > 0$), 求 y' .

四、(6 分) 求函数 $f(x) = \frac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点并说明其类型, 若是可去间断点, 则补充

定义函数值后使它连续.

五、(12 分, 每小题 6 分)

(1) 求曲线 $e^y + xy = e$ 在点 (0,1) 处的切线方程和法线方程.

(2) 设 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

六、(12 分, 每小题 6 分)

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

(2) 求函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在 $[-1, 3]$ 上的最大值和最小值.

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 证明: 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使

$$f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi = 0.$$

八、(7 分) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处具有二阶导数, 且 $f''(0) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}.$$