第五章 第四节

不定积分

$$\left.\begin{array}{l}\text{微分法:}\ F'(x) = (\ ?\ ) \\[2em] \text{积分法:}\ (\ ?\ )' = f(x)\end{array}\right\}\ \text{互逆运算}$$

不定积分的概念与性质
-直接积分法

一、 不定积分的概念

二、 直接积分法--基本积分表

三、不定积分的性质

一、 不定积分的概念

定义. $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$\int$ — **积分号;** $f(x)$ — **被积函数;**

x — **积分变量;** $f(x)\mathrm{d}x$ — **被积表达式.**

若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (\, C \text{ 为任意常数} \,)$$

C 称为**积分常数**
不可丢!

例如, $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

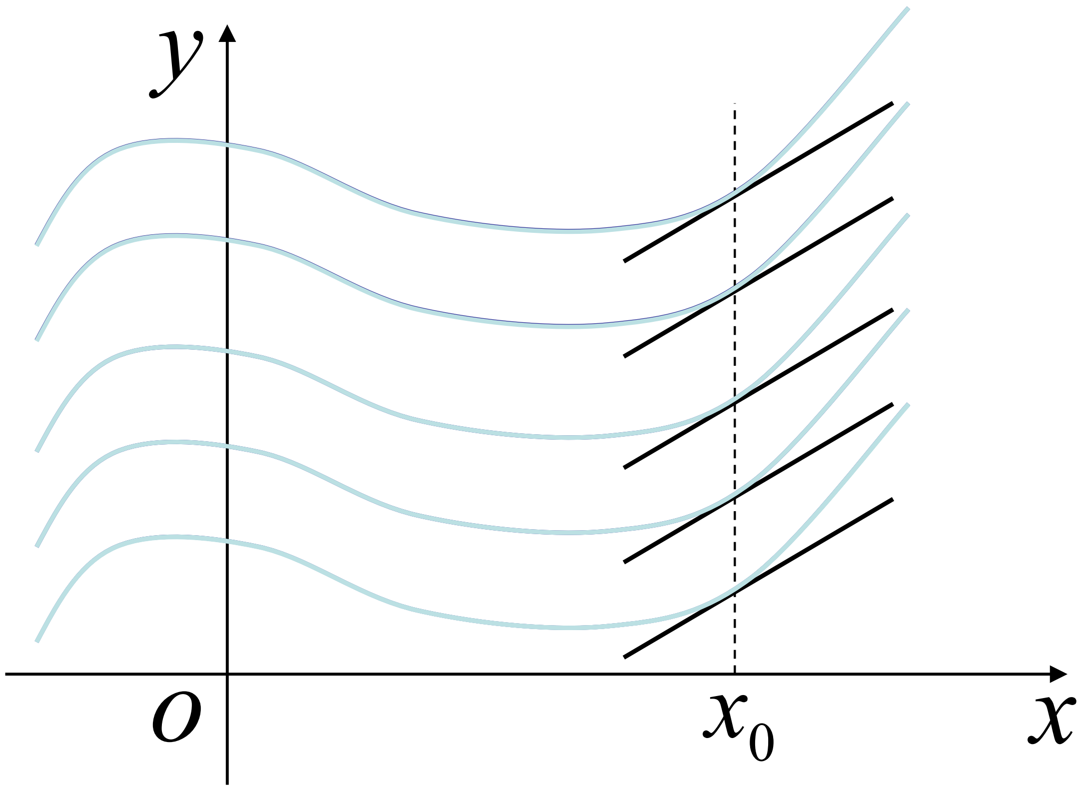
$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

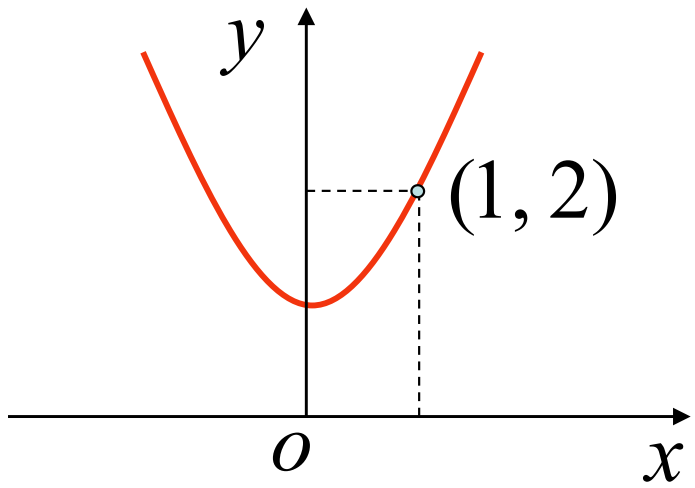
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例1. 设曲线通过点(1 , 2) ,且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: $\because \quad y' = 2x$

$$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$



所求曲线过点 (1 , 2) , 故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

从不定积分定义可知:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}\,F(x)=F(x)+C$

二、 基本积分表 (P134-135)

利用逆向思维

(1) $\int k\mathrm{d}x= kx+C$ (k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1)$

(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$

$x<0$ 时

$(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{x}$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

(13) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

(14) $\int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$

(15) $\int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$$

例3. 求 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式$=\int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$

三、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$

推论: 若 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$，则

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\mathrm{d}x}$$

例4. 求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

例5. 求 $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)} \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{x + (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C$$

例6. 求 $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $\displaystyle = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 不定积分的定义
- 不定积分的性质
- 基本积分表

2. 直接积分法:

利用**恒等变形**, **积分性质** 及 **基本积分公式**进行积分 .

常用恒等变形方法 $\begin{cases} \text{分项积分} \\ \text{加项减项} \\ \text{利用三角公式, 代数公式}, \cdots \end{cases}$

思考与练习

1. 若 e^{-x} 是 $f(x)$的原函数，则

$$\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}\,x = \underline{\quad -\frac{1}{2}x^2 + C \quad}$$

提示: $f(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$

$$f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

2. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \underline{\quad \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C \quad}$$

提示: 已知 $f'(x) = e^{-x}$

$$\therefore \quad f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

3. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 ($\boldsymbol{B}$) .

$(A)\quad 1+\sin x$;　　　　$(B)\quad 1-\sin x$;

$(C)\quad 1+\cos x$;　　　　$(D)\quad 1-\cos x$.

提示: 已知 $f'(x)=\sin x$

求 $(\ \boldsymbol{?}\ )'=f(x)$

即 $(\ \boldsymbol{?}\ )''=\sin x$

或由题意 $f(x)=-\cos x+C_1$，其原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=-\sin x+C_1x+C_2$$

不定积分

换元积分法

一、第一类换元法

二、第二类换元法

基本思路

设 $\underline{F'(u) = f(u)}$, $\underline{u = \varphi(x)}$ 可导，则有

$$\mathrm{d}F[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C = F(u) + C\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$= \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \;\underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}}\; \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

一、第一类换元法

定理1. 设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, $u=\varphi(x)$ 可导, **则有换元公式**

$$\int f[\varphi(x)]\underline{\varphi'(x)\mathrm{d}x} = \int f(u)\mathrm{d}u \Big|_{u=\varphi(x)}$$

即
$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\,\varphi(x)$$

(也称**配元法**, **凑微分法**)

例1. 求$\int (ax+b)^m \mathrm{d}x \quad (m \neq -1)$.

解: 令 $u = ax+b$,则 $\mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$, 故

$$\text{原式} = \int u^m \, \frac{1}{a} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(m+1)} (ax+b)^{m+1} + C$$

注: 当 $m = -1$ 时

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

想到公式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= \arctan u + C$$

解: $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

例3. 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0).$

解: $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

想到 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$$ (直接配元)

例4. 求 $\int \tan x \mathrm{d}x$.

解: $$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

类似

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

例5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$.

解:

$$\because \quad \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$\therefore \text{ 原式} = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

常用的几种配元形式:

$$(1)\ \int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\ \mathrm{d}(ax+b)$$

$$(2)\ \int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\ \mathrm{d}x^n$$

$$(3)\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\ \frac{1}{x^n}\ \mathrm{d}x^n$$

$$(4)\ \int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$$

$$(5)\ \int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\ \mathrm{d}\cos x$$

$$(6)\ \int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\ \mathrm{d}\tan x$$

$$(7)\ \int f(e^x)e^x\mathrm{d}x=\int f(e^x)\ \mathrm{d}e^x$$

$$(8)\ \int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\ \mathrm{d}\ln x$$

$$(9)\ \int f\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$(10)\ \int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(11) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$

(12) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$

例6. 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解: 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}\ln x}{1+2\ln x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right| + C$$

例7. 求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= 2\int e^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}(3\sqrt{x})$

$$= \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$$

例8. 求 $\int \sec^6 x\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int (\tan^2 x + 1)^2 \,\mathrm{d}\tan x$

$$= \int (\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1)\,\mathrm{d}\tan x$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

例9. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

解法1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

解法2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + C$$

$-\ln(1+e^{-x}) = -\ln[e^{-x}(e^x+1)]$ 两法结果一样