*第九节 二元函数的泰勒公式

一、二元函数泰勒公式

二、极值充分条件的证明

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \frac{\left(\frac{-\Delta y^3}{\Delta y^2}\right)}{\Delta y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x,0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$$

11. 求下列函数的全微分

(1) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

解：$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \frac{du}{dz} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\therefore du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

(2) $u = \cos(x+y) + \sin(xy)$

$\frac{du}{dx} = -\sin(x+y) + y\cos(xy)$ $\quad \frac{du}{dy} = -\sin(x+y)$

学号 1021530 4467 姓名 宋珂

17. 设二元函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + \mathrm{e}^z = xy$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

令 $F(x,y,z)=z+e^z-xy=0$,

$F_x=-y$, $F_z=1+e^z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+e^z}\right)=\frac{1}{1+e^z}$$

15. 设 f 具有二阶连续偏导数， $z=f(\frac{y}{x},x^2y)$,求 z 的各种二阶偏导数.

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \frac{dz}{dx}=\frac{df}{d(\frac{y}{x})}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+2xy\cdot\frac{df}{d(x^2y)}=-\frac{y}{x^2}f_1+2xyf_2$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{2y}{x^3}f_1+2yf_2-\frac{y}{x^2}f_{11}+2xyf_{21}$$

同理可得 $\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{1}{x^2}f_{11}+xf_{12}+xf_{21}+x^4f_{22}=\frac{1}{x^2}f_{11}+x^4f_{22}+2xf_{21}$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dy\cdot dx}=-\frac{1}{x^2}f_1+2xf_2-\frac{y}{x^3}f_{11}-y\left(1+\frac{2}{x}\right)f_{12}+2x^3yf_{22}$$

*第九节 二元函数的泰勒公式

一、二元函数泰勒公式

二、极值充分条件的证明

记号 (设下面涉及的偏导数连续):

- $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$ 表示 $h\,f_x(x_0,y_0)+k\,f_y(x_0,y_0)$
- $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$ 表示

$$h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hk\,f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$$

- 一般地, $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)$ 表示

$$\sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p\, h^p k^{m-p} \left.\frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}\right|_{(x_0,y_0)}$$

定理1. 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有直到 $n+1$ 阶连续偏导数，$(x_0+h,\ y_0+k)$ 为此邻域内任一点，则有

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n \quad ①$$

其中 $$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k) \quad ②$$

$$(0<\theta<1)$$

① 称为 f 在点 (x_0,y_0) 的 ***n* 阶泰勒公式**，② 称为其**拉格朗日型余项**.

说明:

(1) 余项估计式. 因 f 的各 $n+1$ 阶偏导数连续, 在某闭邻域其绝对值必有上界 M, 令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则有

$$|R_n| \le \frac{M}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1} \qquad \left(\begin{array}{l} h=\rho\cos\alpha \\ k=\rho\sin\alpha \end{array}\right)$$

$$= \frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}$$

$$\Big\downarrow \text{利用} \max_{[0,1]}(x+\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{2}$$

$$\le \frac{M}{(n+1)!}(\sqrt{2})^{n+1}\rho^{n+1} = o(\rho^n)$$

(2) 当 $n = 0$ 时, 得二元函数的拉格朗日中值公式:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$
$$= h\, f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\, f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$
$$(0<\theta<1)$$

(3) 若函数 $z = f(x, y)$在区域D 上的两个一阶偏导数恒为零, 由中值公式可知在该区域上 $f(x, y) \equiv$ 常数.

例1. 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在点$(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

解: $$f_x(x,y)=f_y(x,y)=\frac{1}{1+x+y}$$

$$f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=\frac{-1}{(1+x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^p \partial y^{3-p}}=\frac{2!}{(1+x+y)^3} \qquad (p=0,1,2,3)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^p \partial y^{4-p}}=\frac{-3!}{(1+x+y)^4} \qquad (p=0,1,2,3,4)$$

因此, $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)=h\,f_x(0,0)+k\,f_y(0,0)=h+k$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$

$$=h^2 f_{xx}(0,0)+2hk\, f_{xy}(0,0)+k^2 f_{yy}(0,0)=-(h+k)^2$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) =\sum_{p=0}^{3}\mathrm{C}_3^p\, h^p k^{3-p}\frac{\partial^3 f}{\partial x^p\partial y^{3-p}}\bigg|_{(0,0)}$$

$$=2(h+k)^3$$

又 $f(0,0)=0$,将 $h=x, k=y$ 代入三阶泰勒公式得

$$\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+R_3$$

其中

$$R_3=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\bigg|_{\substack{h=x\\k=y}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4}$$

$$(0<\theta<1)$$

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\quad (\text{或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

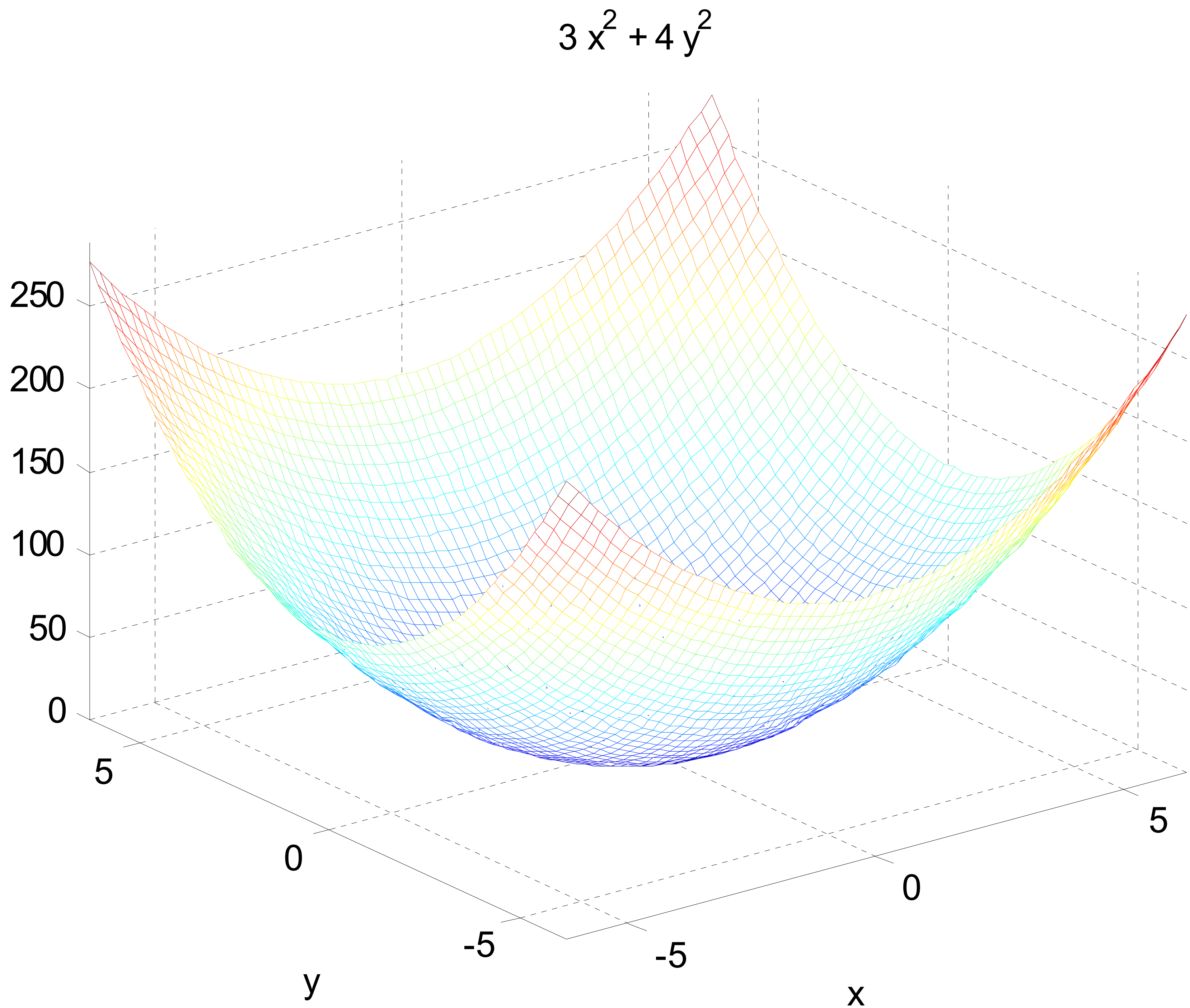
则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

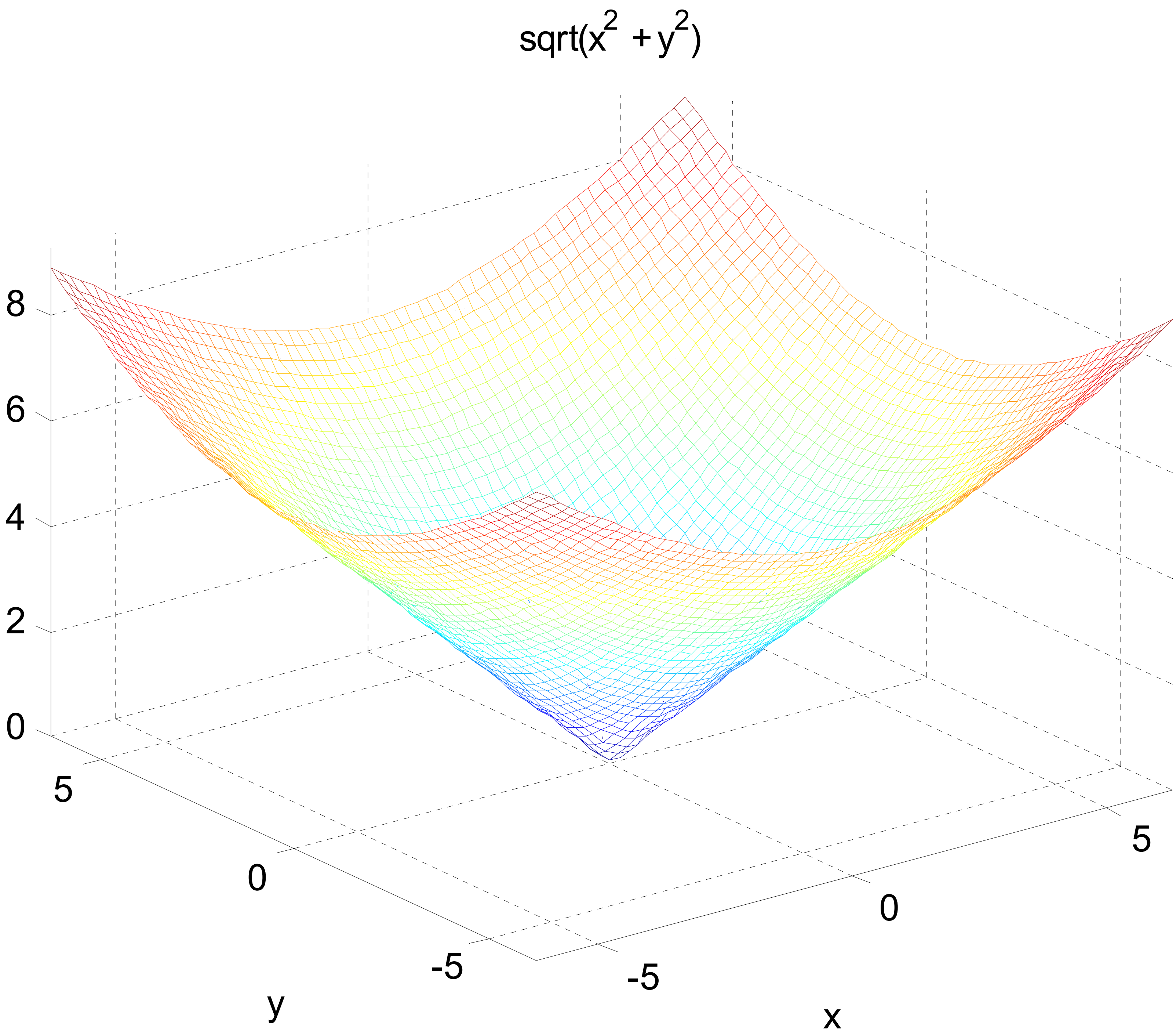
例如：

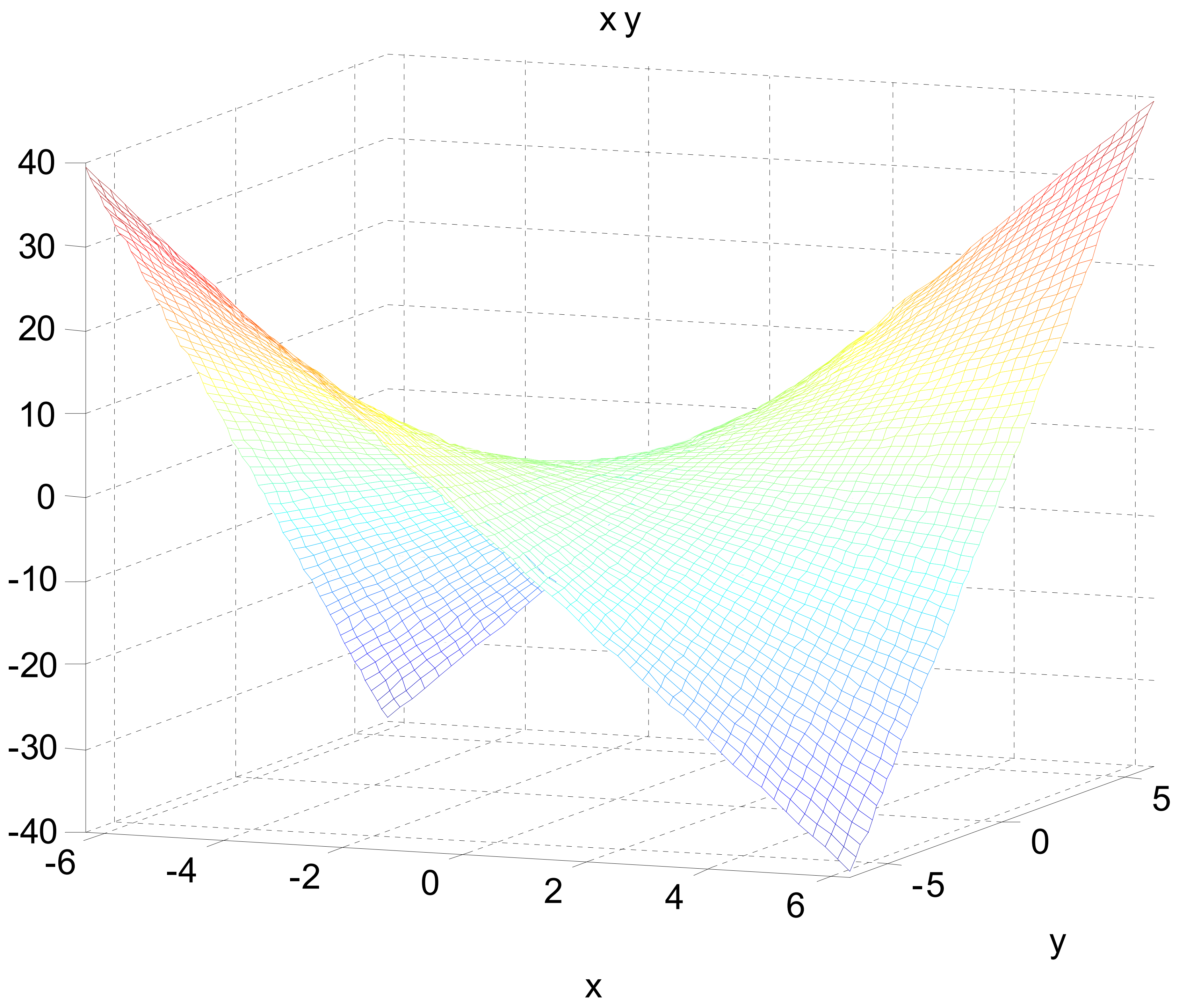
$z=3x^2+4y^2$ 在点 $(0,0)$ 有极小值;

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 有极小值;

$z=xy$ 在点 $(0,0)$ 无极值.


$3x^2 + 4y^2$
0
50
100
150
200
250
5
0
-5
y
-5
0
5
x


sqrt(x^2 + y^2)
8
6
4
2
0
5
0
-5
y
-5
0
5
x


x y
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
5
0
-5
y

定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f_x'(x_0,y_0)=0\,,\quad f_y'(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值 , 故

$$z=f(x,y_0)\text{ 在 } x=x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z=f(x_0,y)\text{ 在 } y=y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为驻点 .

但驻点不一定是极值点.

例如, $z=xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0\,,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)\,,B=f_{xy}(x_0,y_0)\,,C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定 , 需另行讨论.

证: 由二元函数的泰勒公式, 并注意

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \ f_y(x_0, y_0) = 0$$

则有 $\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$

$$= \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)hk + f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2]$$

由于 $f(x, y)$ 的二阶偏导数在点(x_0, y_0) 连续, 所以

$$f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = A + \alpha$$

$$f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = B + \beta$$

$$f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = C + \gamma$$

其中α, β, γ是当$h \to 0$, $k \to 0$时的无穷小量，于是

$$\Delta z = \frac{1}{2}[\underline{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2}] + \frac{1}{2}[\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2]$$

$$= \frac{1}{2}Q(h,k) + o(\rho^2) \qquad (\rho = \sqrt{h^2 + k^2})$$

因此当$|h|$, $|k|$很小时，Δz的正负号可由$Q(h,k)$确定.

(1) 当$AC - B^2 > 0$时，必有$A \neq 0$，且A与C同号，

$$\because Q(h,k) = \frac{1}{A}[(Ah^2 + 2ABhk + B^2k^2) + (AC - B^2)k^2]$$

$$= \frac{1}{A}[(Ah + Bk)^2) + (AC - B^2)k^2]$$

可见，当$A > 0$时，$Q(h,k) > 0$，从而$\triangle z > 0$，因此$f(x,y)$在点(x_0, y_0)有极小值；

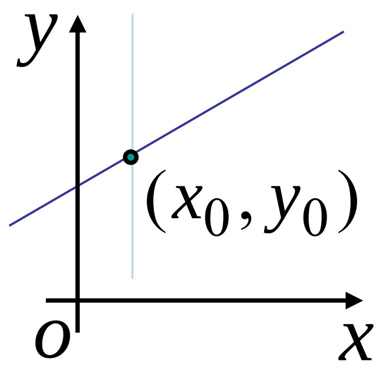
当$A<0$时, $Q(h,k)<0$, 从而 $\Delta z<0$, 因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 ;

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 若A , C不全为零, 无妨设 $A\neq 0$,

则 $$Q(h,k)=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2)+(AC-B^2)k^2]$$

当(x,y)沿直线 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 接近(x_0,y_0) 时, 有 $Ah+Bk=0$, 故 $Q(h,k)$ 与 A 异号;

当(x,y)沿直线 $y-y_0=0$ 接近(x_0,y_0)时, 有 $k=0$, 故 $Q(h,k)$ 与 A 同号.



可见 Δz 在 (x_0,y_0) 邻近有正有负, 因此 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)无极值 ;

若 $A=C=0$,则必有 $B\neq 0$， 不妨设 $B>0$，此时

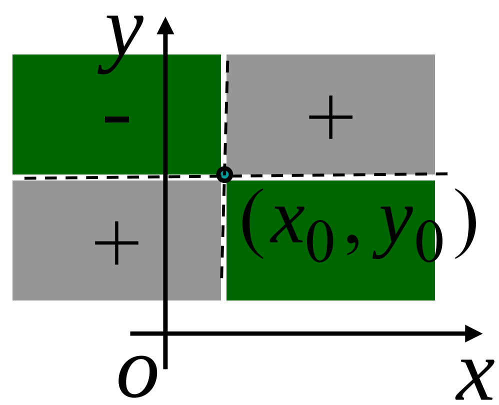
$$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2=2Bhk$$

对点 (x_0+h, y_0+k)

当 h, k 同号时，$Q(h,k)>0$，从而 $\Delta z>0$，

当 h, k 异号时，$Q(h,k)<0$，从而 $\Delta z<0$，

可见 Δz 在 (x_0, y_0) 邻近有正有负，



因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 无极值；

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，

若 $A\neq 0$，则 $Q(h,k)=\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2$

若 $A=0$，则 $B=0$， $Q(h,k)=Ck^2$

$\left.\right\}$ $Q(h,k)$ 可能为零或非零

此时

$$\Delta z = \frac{1}{2} Q(h,k) + o(\rho^2)$$

因为 $Q(h,k)=0$ 时, Δz 的正负号由 $o(\rho^2)$ 确定, 因此不能断定 $(x_0\ ,y_0)$ 是否为极值点 .