100

《高等数学B》小测验1

2021.10.13

姓名[redacted] 学号[redacted]

1. 判断函数 $y=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$ 的奇偶性，并给予证明。（15分）

为奇函数

证明：该函数的定义域为R 关于原点对称

取 $f(x)=y=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$ $f(-x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)$

$f(x)+f(-x)=\ln(1)=0$.

综上，$f(x)=y$ 为奇函数

2. 求函数 $y=\begin{cases}x-2 & 0<x\le 1\\ 3-(x-3)^2 & 1<x\le 3\end{cases}$ 的反函数.（15分）

在 $x\in[0,1]$ 时 $y\in[-2,-1]$.

$x=y+2$

在 $x\in(1,3]$ 时 $y\in(-1,3]$ $3-y=(x-3)^2$.

其中 $x-3\le 0$. 故 $x-3=-\sqrt{3-y}$ $x=3-\sqrt{3-y}$

综上反函数为 $y=\begin{cases}x+2, & -2<x\le -1\\ 3-\sqrt{3-x}, & -1<x\le 3.\end{cases}$

3. 填空（30分，每题5分）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=($ 0 $)$ $(\alpha>0)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=($ 0 $)$ $(|q|<1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=($ 1 $)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}C^{1/n}=($ 1 $)$ $(C>0)$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=($ 1 $)$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=($ e $)$.

4. 用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-4}=\frac{2}{3}$.（10分）

证明：对 $\forall\varepsilon>0$ 由 $\left|\frac{2n+1}{3n-4}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，得 $|3n-4|>\frac{11}{3\varepsilon}$

在 $n\ge 2$ 时，$3n-4>0$. 即 $3n-4>\frac{11}{3\varepsilon}$ $n>\frac{4}{3}+\frac{11}{9\varepsilon}$

取 $N=[\frac{4}{3}+\frac{11}{9\varepsilon}]$ 故 在 $n>N$ 时 对任意 $\varepsilon>0$, $\left|\frac{2n+1}{3n-4}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$

由定义，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-4}=\frac{2}{3}$

5. 求下列数列和函数的极限，需写出必要的解题过程 (20 分，每题 10 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+2}{3n^2+5n+1}$；

解原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}$ 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

故原式 $=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})+5}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})+3}=\dfrac{5}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8})$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}$

$=\dfrac{6}{4+4+4}=\dfrac{1}{2}$

T6 正儿八经的解法

~~有在点~~ 令 $F(x)=3f(x)-f(a)-2f(b)$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$F(a)F(b)=-2[f(a)-f(b)]^2\leq 0$

当 $f(a)=f(b)$ 时取 $\xi=a$

当 $f(a)\neq f(b)$ 时 $F(a)F(b)<0$

由根的存在定理 存在 $\xi\in(a,b)$

使得 $F(\xi)=0$ 综上

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证：在 $[a,b]$ 上必存在点 ξ，使 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$.

(10 分)

证明：根据最值定理，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

$f(x)$ 有在最大值 M 和最小值 m.

则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有在最大值

$m\leq f(a)\leq M$. $m\leq f(b)\leq M$.

$\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}f(b)\leq\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}M=M$.

$\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}f(b)\geq\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}m=m$.

$\frac{1}{3}f(a)$ 故 取 $\mu=\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}f(b)$ $m\leq\mu\leq M$.

根据介值定理，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故

必有在点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=K\in(m,M)$

在 $m\neq M$ 时 $f(\xi)=\mu$ 在 (a,b) 上一定有在

即 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$ 在 $[a,b]$ 上必有在点 ξ.

在 $m=M$ 时 $f(a)=f(b)$ 则 在 $[a,b]$ 上必有在点 ξ 使 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$

综上 在 $[a,b]$ 上必存在点 ξ 使 $3f(\xi)=f(a)+2f(b)$

《高等数学 B》小测验 II

95

姓　　名: [redacted]　　学　　号: [redacted]

一、计算以下积分（每题 10 分，共 60 分）.

1. $\int \frac{x^2-1}{x}\mathrm{d}x$

原式 $= \int (x - \frac{1}{x})dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$

2. $\int \frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2}\mathrm{d}x$

原式 $= \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= -\int \frac{d(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{1}{1-\sin x} + C$

3. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$

原式 $= \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2dx}{x^2+1}$

$= \ln|x-1| + 2\arctan x + C$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\mathrm{d}x$

原式 $= \int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{2\cos t}{\sin t} dt$

$\boxed{\begin{array}{l} 取 e^x = \sin^2 t \\ x = \ln(\sin^2 t) = 2\ln(\sin t) \\ \frac{dx}{dt} = 2\frac{\cos t}{\sin t} \end{array}}$

$= 2\int \csc t\, dt$

$= 2\ln|\csc t - \cot t| + C$

$= 2\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{e^x}}\right| + C$

$= \ln\left(\frac{2-e^x-2\sqrt{1-e^x}}{e^x}\right)$

5. $\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$

原式 $= x\arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

6. $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln\sqrt{x}}$

原式 $= \int_{e^2}^{e^4} \frac{d(\ln x)}{\frac{1}{2}\ln x}$

$x \in (e^2, e^4)$ 无瑕点

$= 2\int_{e^2}^{e^4} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$

$= 2\int_2^4 \frac{dx}{x}$

$= 2\ln|x|\Big|_2^4 = 2\ln 2$

原式 $= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{\sin(x^2)\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x\sin x)}{2\sin(x^2)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

二、(10 分) 计算以下极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}$.

$\lim\limits_{x\to0}\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt = 0 = \lim\limits_{x\to0}(1-\cos x^2)$ 且两函数连续

根据洛必达法则

原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{d\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{dx}}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\ln(1+x\sin x)}{2\sin x\cos x}$ $\quad \lim\limits_{x\to0}(x\sin x)=0$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot x\sin x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\tan x = 0$

三、(10 分) 利用定积分定义，计算以下极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2}\right)$.

原式 $= \lim \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{\sqrt{2n}}{n}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n^2}}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$

$= \int_0^1\sqrt{x}\,dx = \left(\dfrac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$

四、(10 分) 计算由抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2+8$ 所围成图形的面积.

令 $y=x^2=-x^2+8$ 得 $x=2$ 或 $x=-2$ 此时 $y=4$

$y_1=x^2$ $y_2=8-x^2$ 根据偶函数的对称性

$\dfrac{1}{2}S = \int_0^2 |y|\,dx = \int_0^2|y_2-y_1|\,dx = \int_0^2(8-2x^2)\,dx$

$= (8x)\Big|_0^2 - 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \dfrac{32}{3}$ $\quad S=\dfrac{64}{3}$

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)$.

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

$+C$

根据积分中值定理 存在一点 $x_1\in(\frac{2}{3},1)$ 使得

$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx = f(x_1)\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}f(x_1)$

则 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx = f(x_1) = f(0)$

由于 $f(0)=f(x_1)$ 且 $f(x)$ 在 $[0,x_1]$ 连续，在 $(0,x_1)$ 可导

故 根据罗尔中值定理，至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$

$\xi\in(0,x_1)$ 由于 $x\in(\frac{2}{3},1)$

故 $\xi\in(0,1)$ 使 也成立 原题得证