二、换元法

第一类换元法解决的问题

$$\underbrace{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x}_{\text{难求}} = \underbrace{\int f(u)\mathrm{d}u}_{\text{易求}}\Big|_{u=\varphi(x)}$$

若所求积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 难求，

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \text{ 易求},$$

则得第二类换元积分法 .

例1. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9}}$.

解: $I=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+C$

2. 求不定积分 $\int \frac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解: 利用凑微分法，得

$$\text{原式} = \int \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}(1+\sin^2 x)$$

令 $t = \sqrt{1+\sin^2 x}$

$$= \int \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int (1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$= 2t - 2\arctan t + C$$

$$= 2[\sqrt{1+\sin^2 x} - \arctan\sqrt{1+\sin^2 x}] + C$$

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解: 令 $x=\sin t$， $1+x^2=1+\sin^2 t$，$\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$

原式 $=\int \frac{\cos t}{(1+\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$

分子分母同除以 $\cos^2 t$

$$=\int \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t+\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{1+2\tan^2 t}\mathrm{d}\tan t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}\mathrm{d}\sqrt{2}\tan t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

不定积分之
有理函数的积分

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数积分的例子

1、三角函数有理式的积分

2、简单无理式的积分

一、 有理函数的积分

多项式函数： $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

有理函数： $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$

$n \geq m$**时,** $R(x)$**为假分式;** $n < m$ **时,** $R(x)$**为真分式**

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ **多项式 + 真分 式**

例如： $\dfrac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{3x^2(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} = 3x^2 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

有理函数 $=\!=$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$ 分解

根据代数学的一个重要结论 **—任一有理真分式在在实数域内，均可唯一分解成下面$\boxed{\text{四种部分分式}}$之和：**

$$\frac{A}{x-a};\quad \frac{A}{(x-a)^n};\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n};$$

$$(n\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

如果四种部分分式的积分可以解决，有理函数积分就解决了.

如何将真分式分解为部分分式之和？$R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

第一步： 对分母$Q_m(x)$在实数范围内标准分解：

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

(其中$p^2-4q<0,\ldots,r^2-4s<0$).

第二步： 根据分母因式分解的结 构，

写出$R(x)$的部分分式的待定形式 ：

(1) 一次单因式$(x-a)$, 对应一项 $\dfrac{A}{(x-a)}$;

(2) 一次k重因式$(x-a)^k$,对应k项：

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}$$

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

(其中$p^2-4q<0,\ldots,r^2-4s<0$).

(3) 二次单因式(x^2+px+q),对应一项 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

(4) 二次k重因式$(x^2+px+q)^k$,对应k项

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

第三步： 待定系数的确定：

（1）解线性方程组法;

（2）特殊值法;

四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0\,,\, n\neq 1)$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$; (2) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; (3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: (1) 待定系数法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore \quad A=(x-2)\cdot 原式\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot 原式\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad 原式=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=(1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1=\dfrac{4}{5}+C \\ \dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{2}{5} \\ C=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

例2. 计算 $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

解： 被积函数分解为可以写成

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

在等式两边同乘以$(x-1)(x^2+1)^2$，得

$$2x+2=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)$$

比较等式两边 x 的同次项的系数，得

$$\begin{cases}0=A+B\\0=C-B\\0=2A+B-C+D\\2=C-B+E-D\\2=A-C-E\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = C - B \\ 0 = 2A + B - C + D \\ 2 = C - B + E - D \\ 2 = A - C - E \end{cases}$$

由此解得 $\begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = -1, \\ D = -2, \\ E = 0. \end{cases}$

故 $$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

于是

原式 $$= \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}\,x - \int \frac{2x\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + C$$

注：将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)}$.

解法1：把被积函数分解为

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

去分母并比较两端 x 的同次幂函数可得，$A=C=E=0$，$B=-1$, $D=F=1$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^4(x^2+1)}=\int\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}\,x+\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}\,x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\arctan x+C$$

解法2： 设 $x=\dfrac{1}{t},\mathrm{d}\,x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}\,t.$ 于是

$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^4(x^2+1)}=-\int\frac{t^4}{t^2+1}\mathrm{d}\,t=-\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}\,t$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$$

解法3：设 $x=\tan t,\ \mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)}$.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)} &= \int\frac{\mathrm{d}t}{\tan^4 t} = \int\cot^2 t(\csc^2 t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 t-\int\cot^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 t-\int(\csc^2 t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 t+\cot t+t+C \\
&= -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C
\end{aligned}
$$

例4. 求 $I=\int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解: $$I=\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int \frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int \frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧
按常规方法较繁

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

按常规方法解:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}}$$

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 a , b , c , d . 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式 . 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A , B , C , D .

第三步 分项积分 . 此解法较繁！

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{令 } t = \tan\frac{x}{2}$$

$\boxed{\text{万能代换}}$

$\boxed{t \text{ 的有理函数的积分}}$

万能代换

令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} \mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$原式 = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例8. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (ab \neq 0)$.

解: 原式 $\displaystyle= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

改良的万能置换公式：

$$令\ t=\tan x,\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)\quad x=\arctan t$$

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$**的有理式**

用代换 $t=\tan x$ **往往更方便**.

$R(\sin x,\cos x)$满足：

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x);$$

例7. 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

解：方法一 万能代换．令 $t = \tan\frac{x}{2}$，**则**

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

原式 $= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)\,t^3}\mathrm{d}t$$

$$= \cdots\cdots$$

例7. 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

解：方法二　改良的万能代换. 令 $t = \tan x$,

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

原式 $= \int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} \cdot \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^3}\mathrm{d}t = \int (t^{-3} + \frac{1}{t})\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C$$

$$= -\frac{1}{2\tan^2 x} + \ln|\tan x| + C$$