第五章 定积分

第一节(1) 定积分的概念

问题的提出

定积分的定义

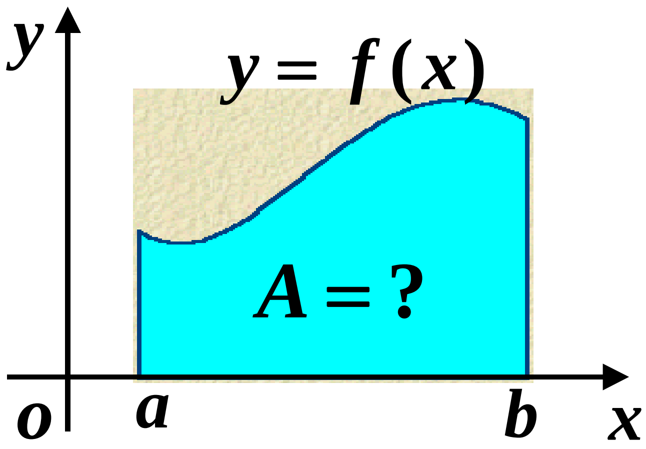
几何意义

定积分存在定理

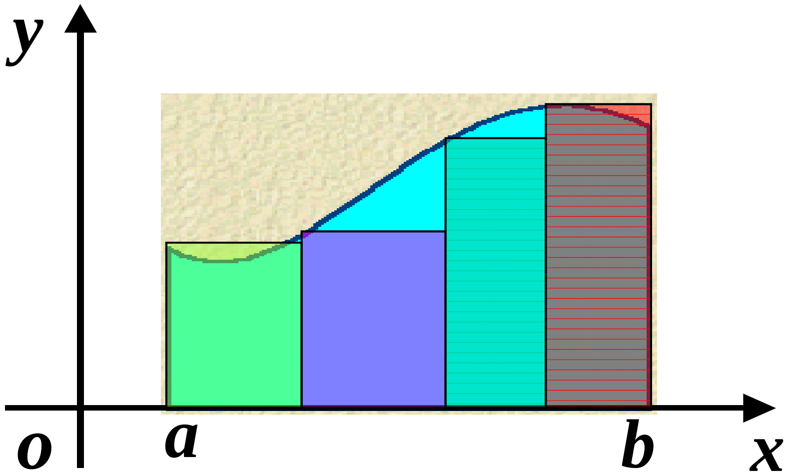
一、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

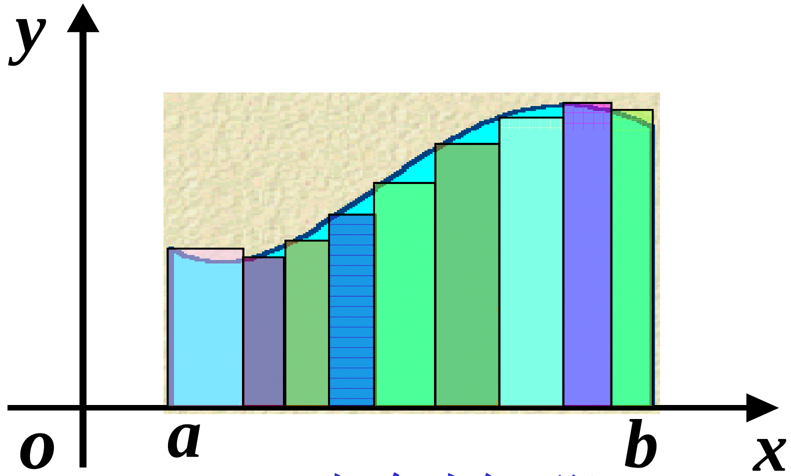
曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



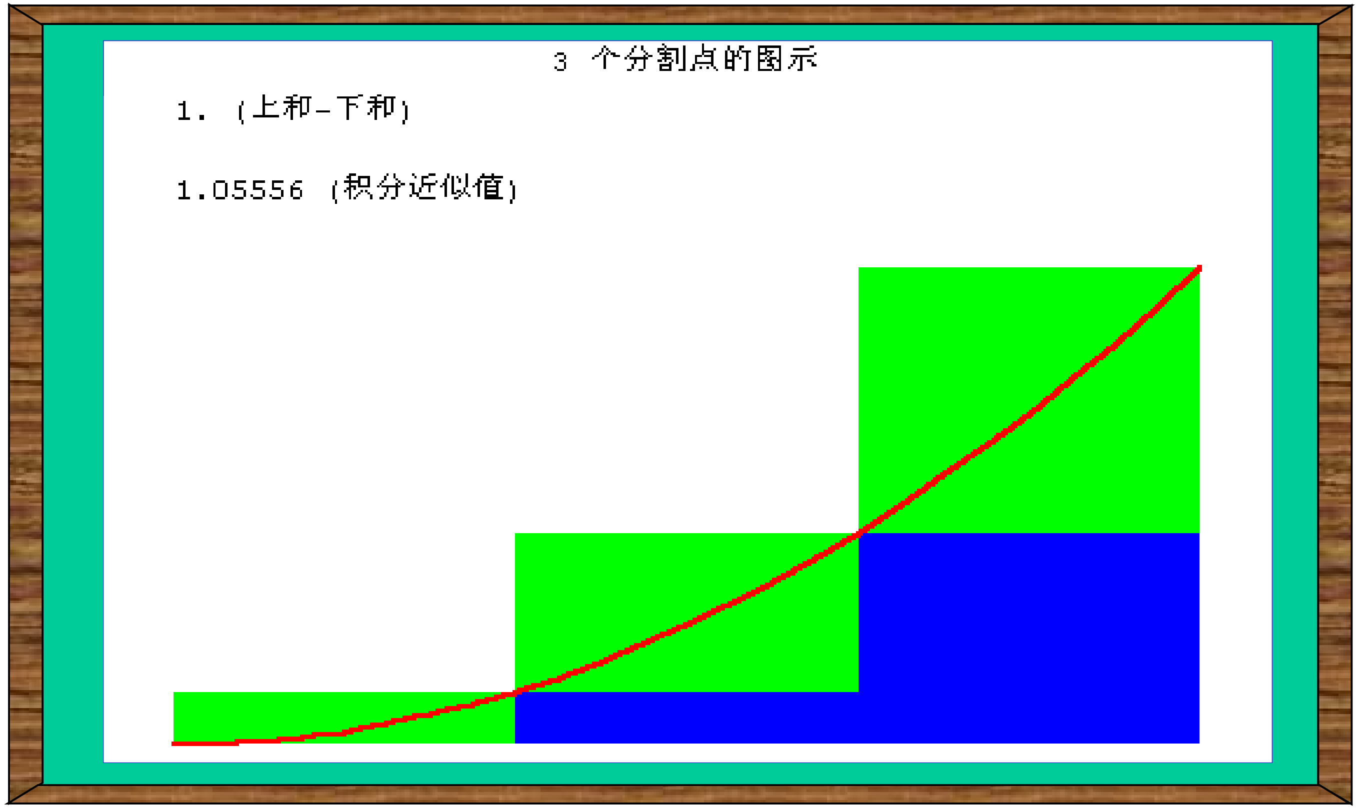
（四个小矩形）



（九个小矩形）

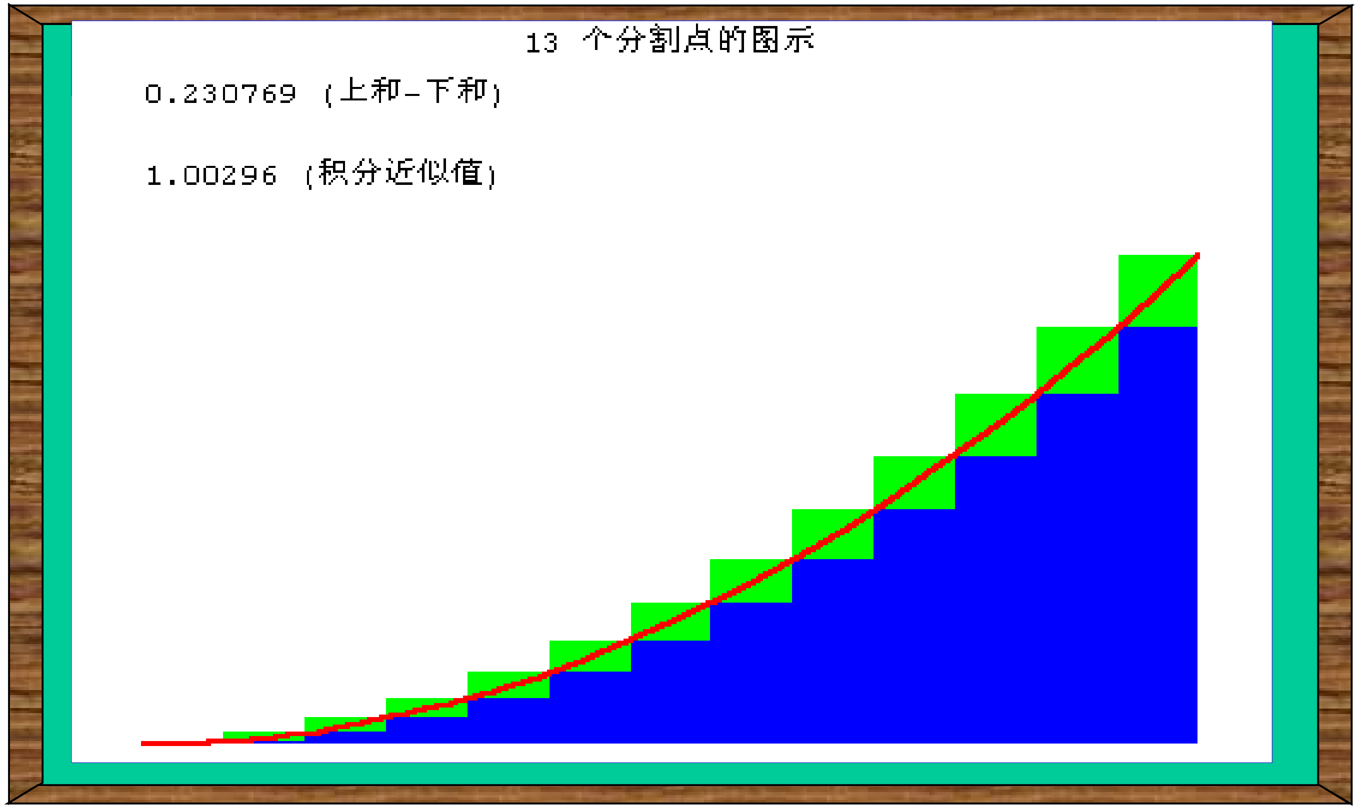
显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

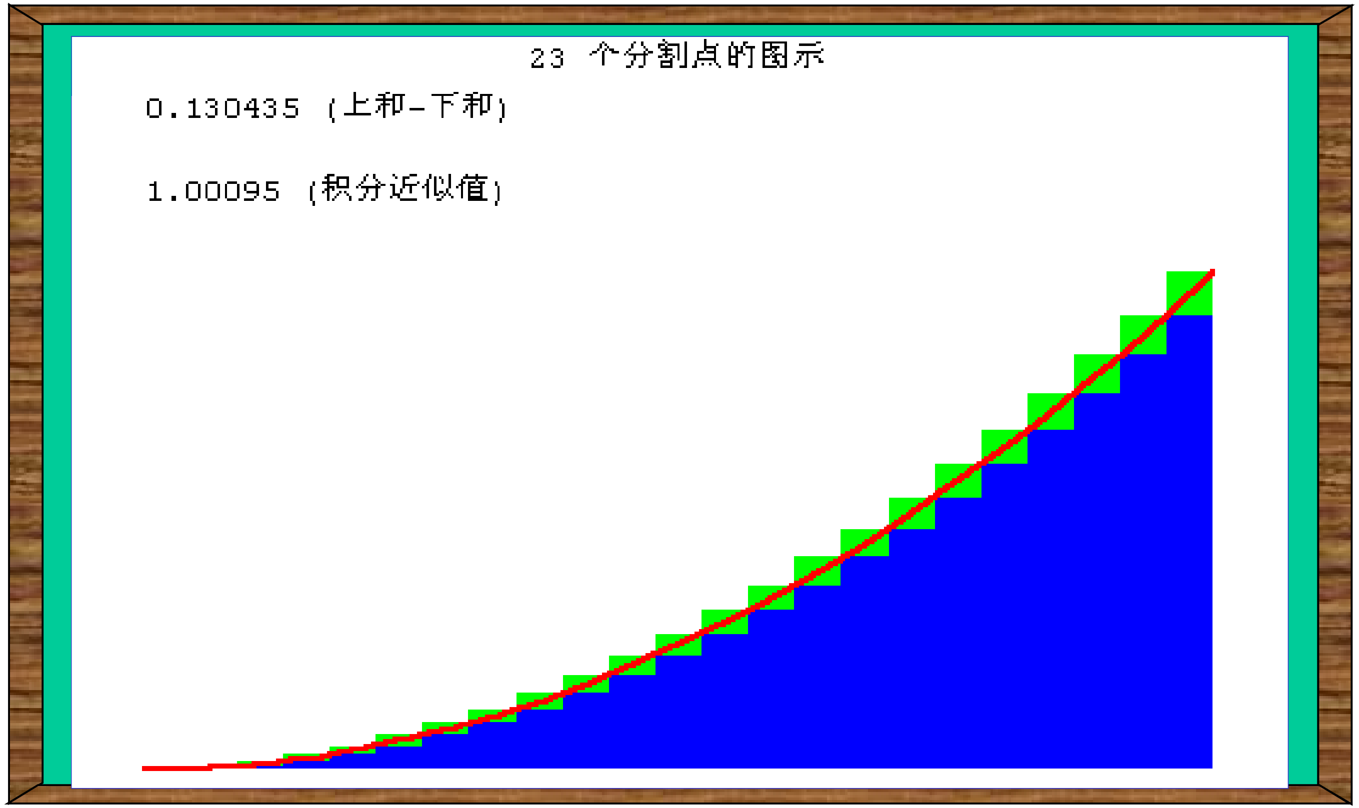


观察下列演示过程，注意当分割加细时，

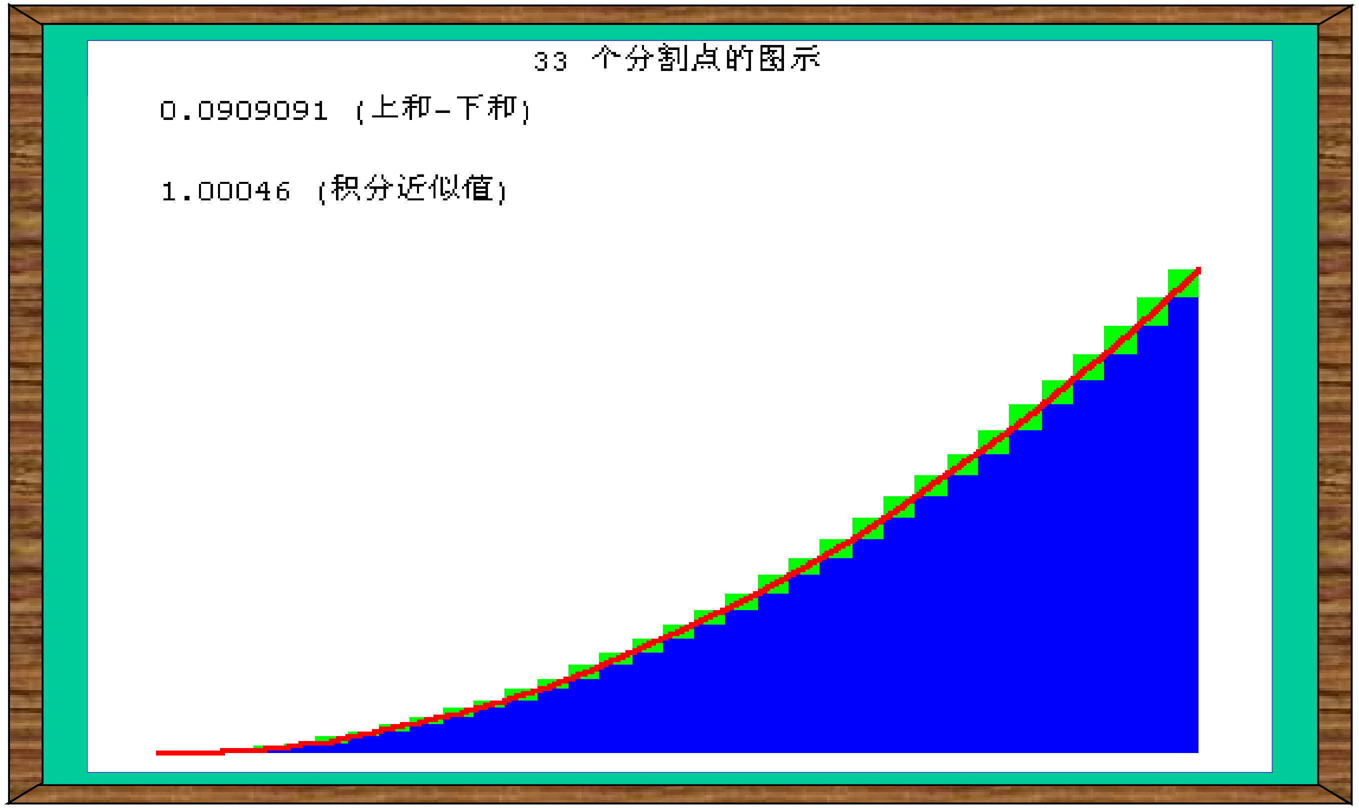
矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



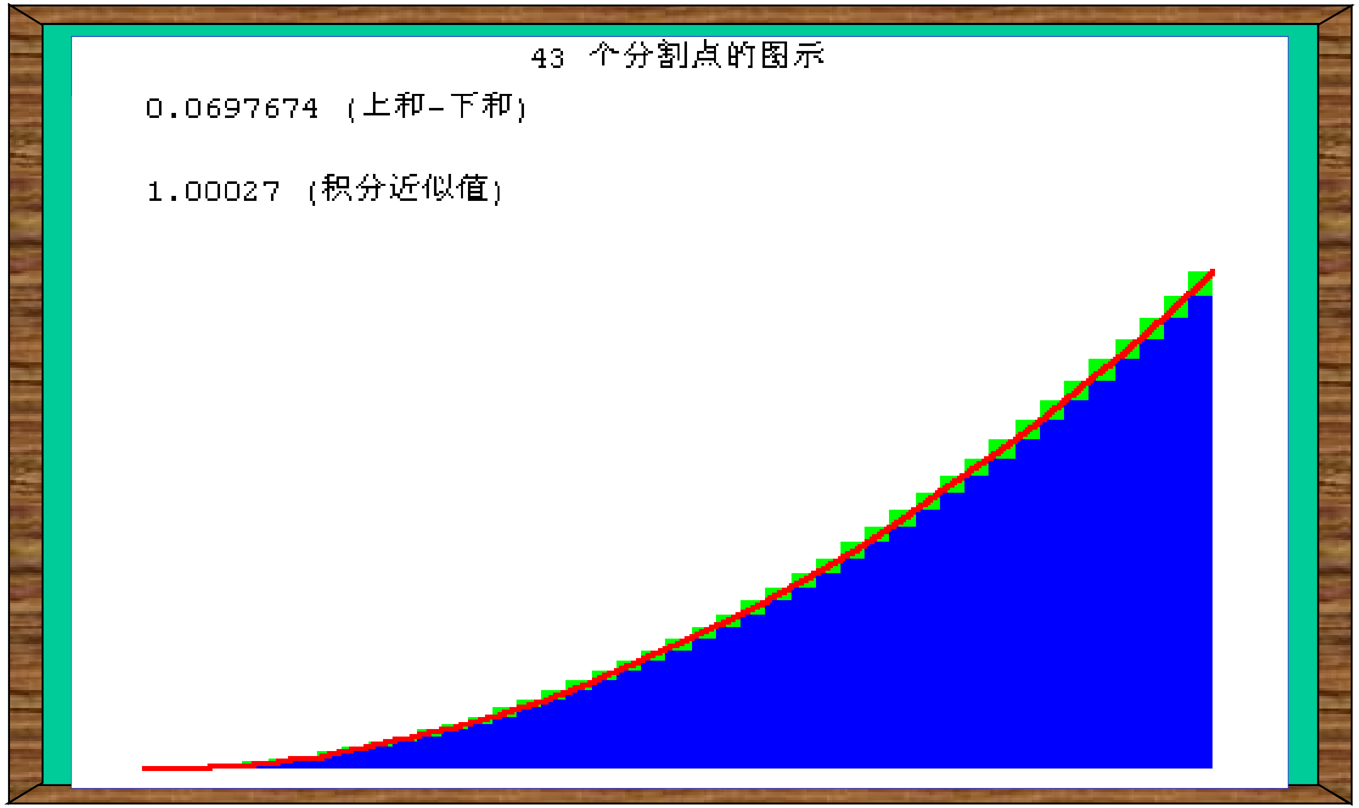
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



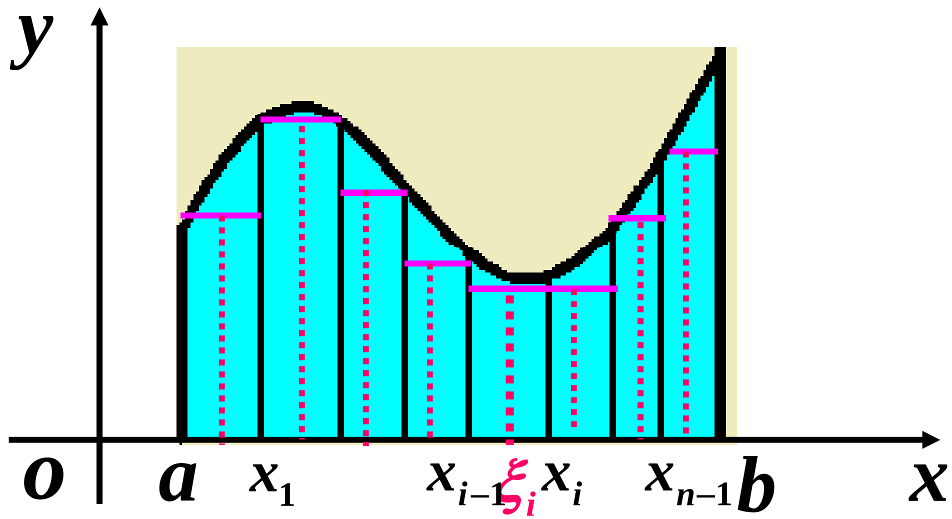
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



（1）分割

曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；



（2）近似

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，曲边梯形面积用小矩 形面积(以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高)近似：

$$A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

（3）求和

曲边梯形面积的近似值为 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为 $A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

（2）近似 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $\underbrace{\Delta s_i}_{\text{部分路程值}} \approx v\underbrace{(\tau_i)}_{\text{某时刻的速度}}\Delta t_i$

（3）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法， 也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda\to 0$时，和S总趋于确定的极限I， 我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

积分上限

积分和

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

几点说明：

（1）定积分是一个数值，它仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) 规定: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$

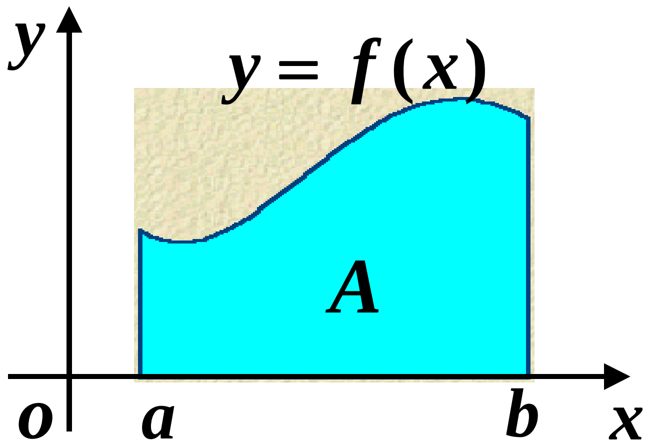
(3) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x)dx$ 所表示的和式的极限与 $[a,b]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关.

三、定积分的几何意义

$$f(x) \geq 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

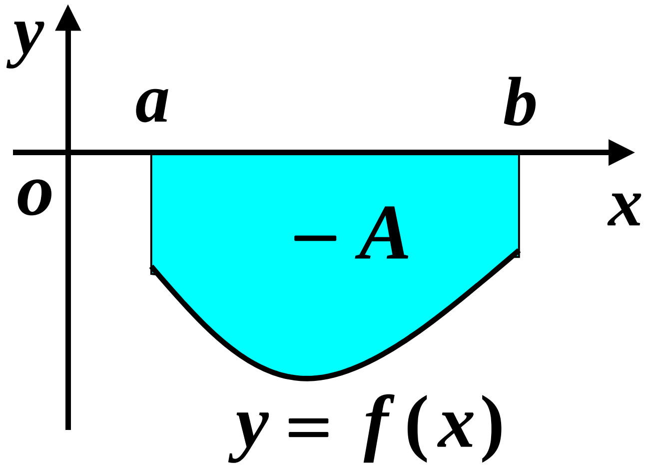
曲边梯形的面积



$$f(x) \leq 0,$$

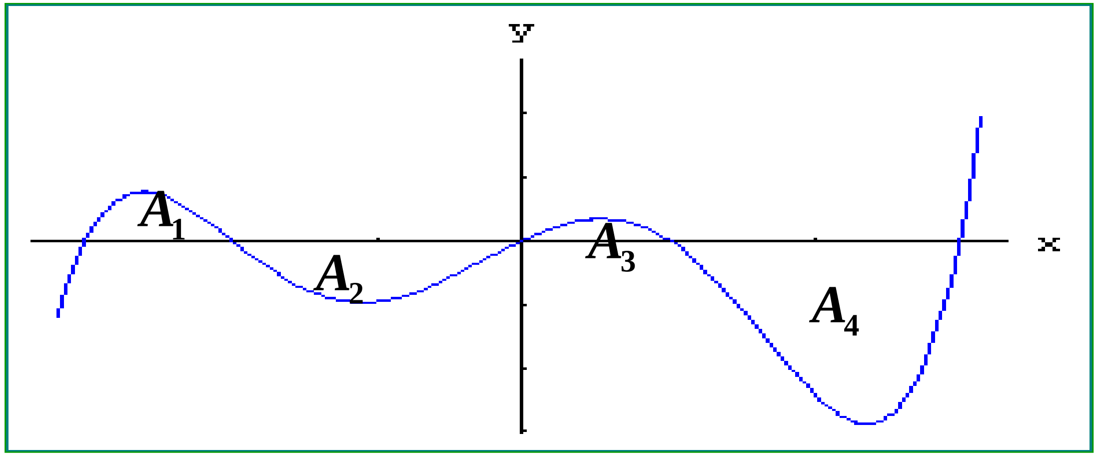
$$\int_a^b f(x)dx = -A$$

曲边梯形的面积
的负值



三、定积分的几何意义

$f(x)$在区间$[a,b]$变号时,

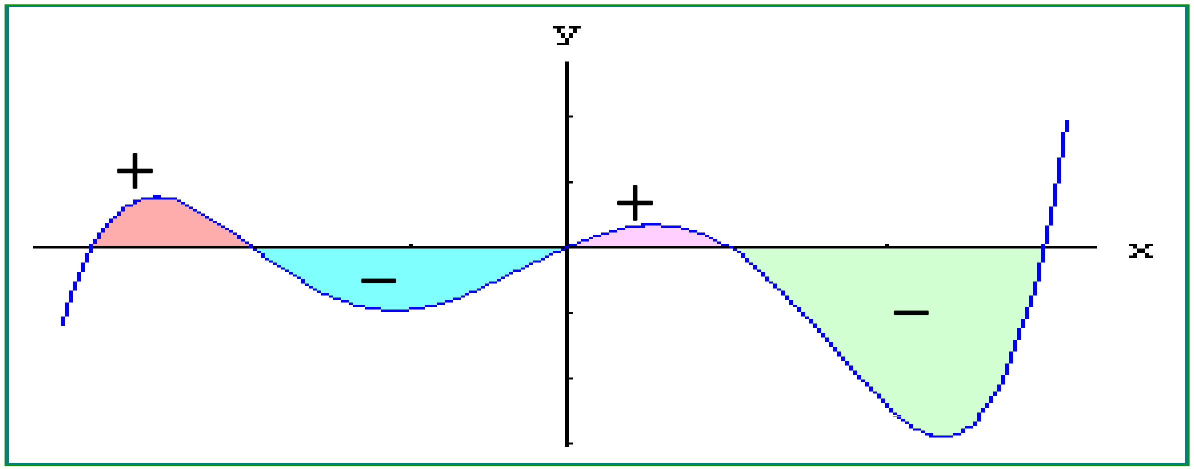


$\int_a^b f(x)dx$ 是面积的代数和.

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x = a, x = b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



四、定积分的存在定理

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在

区间 $[a,b]$ 上可积.

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

因为$\int_0^1 x^2 dx$可积，故和式极限与区间的分法

及ξ_i的选取无关.

解 将$[0,1]n$等分，分点为$x_i = \frac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i,$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{3}}\sum_{i=1}^{n}i^{2}=\frac{1}{n^{3}}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\qquad \lambda\to 0\Rightarrow n\to\infty$$

$$\int_{0}^{1}x^{2}dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i}^{2}\Delta x_{i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

几何上是曲线$y=x^2$,直线$x=1$及x轴围成的曲边三角形面积.

例2 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

解 在$[1,2]$中插入分点 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$,

典型小区间为$[q^{i-1}, q^i]$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

小区间的长度$\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$,

取$\xi_i = q^{i-1}$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(q-1)\ =n(q-1)\qquad \text{取}q^{n}=2\ \ \text{即}q=2^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = n(2^{\frac{1}{n}}-1),$$

$$\because \lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \ln 2,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1) = \ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx\ = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i\ = \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1) = \ln 2.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

把 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ 表示成定积分

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx.$$

或者 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_1^2\frac{1}{x}dx.$$

例3：将下列和式极限表示成定积分.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\Big)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

五、小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限．

2．定积分的思想和方法：

分割	→	化整为零
⇓		⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）
求和	→	积零为整
⇓		⇓ 取极限
取极限	→	精确值——定积分

思考

1.设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

2：将和式极限，表示成定积分.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$$

1.设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

证明 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

极限运算与对数运算换序得

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

指数上可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和．分割是将$[0,1]$ n等分

分点为$x_i = \frac{i}{n}$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

因为 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且 $f(x)>0$

所以 $\ln f(x)$ 在[0,1]上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \ln f(x)dx$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$= e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

2：将和式极限，表示成定积分.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$$

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

思考

利用定积分的几何意义，说明下列等式：

1、$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ ；

2、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ；