一元微积分学 (2021. 01)

1. 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$; $\left(=\frac{2}{\pi}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]$; $\left(=-\frac{e}{2}\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty}[n\sin(\pi n!e)]$; $(=\pi)$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$, 其中 $a,b,c>0$; $\left(=\sqrt[3]{abc}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; $\left(=e^{-\frac{1}{2}}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$; $(=0)$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数; $\left(=e^{\frac{n-1}{2}e}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$; $(=0)$

(k) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$; $\left(=e^{\frac{1}{4}}\right)$

(l) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$ $\left(=\frac{\sin\theta}{\theta},\ 1\right)$;

(m) 4115 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{t+\cos t}dt$. $(=0)$

2. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导，且 $f(a)=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$. $\left(=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}\right)$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处附近有定义，且在 $x=1$ 处可导，并已知 $f(1)=0, f'(1)=2$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$. $\left(=\frac{1}{2}\right)$

4. 设 $f(1)=0, f'(1)$ 存在. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^x-1)\sin x}$. $\left(=\frac{3}{2}f'(1)\right)$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，并且无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$. $(=0)$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任一固定的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$ (其中 $n\in\mathbb{N}$). 证明函数列 $\{f(x+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于0.

7. 求 $x\to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

8. 设 $\{a_n\}$ 为数列, a,λ 为有限数. 证明：
(1) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
(2). 若存在正整数p，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

9. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$. $(=2)$

10. 设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$. $\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$

11. 设函数 $f(x)$在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leq A$, $|f''(x)|\leq B$. 证明：对任意 $x\in[0,1]$, 有 $|f'(x)|\leq 2A+\dfrac{B}{2}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明：
(1) 存在一个 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f(\xi)=\xi$;
(2) 存在一个$\eta\in(0,\xi)$, 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta$.

14. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β, 使得对于 $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$. 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

15. 设 $n>1$ 为整数, $F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)dt$. 证明：方程 $F(x)=\dfrac{n}{2}$ 在 $(\dfrac{n}{2},n)$ 内至少有一个根.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0$, $\lim\limits_{h\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$, 且存在一点 x_0 使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)>0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$上点 $p=(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距. $(=2)$

18. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3, 使得
$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

19. 设 $f\in C^4(-\infty,+\infty)$, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x+\theta h)}{2!}h^2$, 其中 θ 是与 x,h 无关的常数. 证明 f 是不超过三次的多项式.

20. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定. 求 $y(x)$ 的极值. $(y(0)=-1, y(-2)=1)$

21. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

22. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程. $(y''-y'-2y=e^x-2xe^x)$

23. 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leq x\leq 1$ 时, $y\geq 0$, 又已知该抛物线与x轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定a,b,c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. $\left(a=-\frac{5}{4}, b=\frac{3}{2}, c=1\right)$

24. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geq 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$, 求点 A 的坐标. $(=(1,1))$

25. 设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f''(x)+f(x)-\dfrac{1}{1+x}\int_0^y f(t)dt=0$, 且 $f(0)=1$, 试证: 当 $x\geq 0$ 时, 有 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

26. 是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)|<1$, $\int_0^2 f(x)dx\leq 1$? 请说明理由.

27. 设 $|f(x)|\leq\pi$, $f'(x)\geq m>0\ (a\leq x\leq b)$. 证明 $\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|\leq\dfrac{m}{2}$.

28. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1)$, $0<f'(x)<1$. 试证当 $a\in(0,1)$,

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2 > \int_0^a f^3(x)dx.$$

29. 设函数 $f\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$, $\int_0^1 xf(x)dx=1$. 试证:
(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使 $f(x_0)>4$;
(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使 $f(x_1)=4$.

30. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt\right)dx$. $\left(=\frac{\pi}{2}\right)$

31. 设 n 为正整数, 计算 $\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx$. $(=4n)$

32. 计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$. $\left(=\frac{\pi^3}{8}\right)$

33. 设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{sx}x^n dx$, $n=1,2,\cdots$.

34. 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|dx$. $\left(=\frac{e^{2\pi}+1}{5(e^{2\pi}-1)}\right)$

35. 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0 +\infty e^{-xt^2}dt$. 求 $u(x)$ 的初等函数表达式. $\left(=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\right)$

36. 证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的.

37. 求最小实数 C, 使得满足 $\int_0^1|f(x)|dx=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\le C$. $(=2)$

38. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且满足 $\int_0^1 f(x)dx=1$. 求一个这样的函数 $f(x)$, 使得积分 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx$ 取得最小值. $\left(=\frac{4}{\pi(1+x^2)}\right)$

39. 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离. $\left(=\sqrt{\frac{19}{2}}\right)$

40. 求通过直线 $l:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\ 5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.
$(3x+4y-z+1=0,\quad x-2y-5z+3=0)$

41. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi t\end{cases}$ 所确定. 且 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$. $\left(=t^3+\frac{1}{2e}t^2+\left(\frac{1}{e}-3\right)t+2\ \ (t>-1)\right)$

42. 712 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程. $(xy+yz+zx=0)$

43. 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线,线密度为ρ . 在点 $(0,h)$ 处(其中$h>0$)有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力. $\left(=(F_x,F_y)=\left(\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}},\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)\right)\right)$

44. 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x_n$. $(=b)$

45. 设 $f(x)\in C[a;b]$. 证明：$2\int_a^b f(x)dx\int_x^b f(t)dt=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

46. 设函数 $f(x)\in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

47. 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $I = \int_0^1 f(x)dx \neq 0$. 证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2, 使得

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}.$$