2019版

南卷汇

大二概率论期末试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2017 概率论期末

一、单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、设随机变量 X_1与X_2，$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$ 是 X_1与X_2 相互独立地什么条件？（ ）

A. 充分条件 B. 充要条件 C. 充分不必要条件 D. 必要不充分条件

2、设 A、B、C 为随机事件，$P(C)>0, P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$，下列选项正确的是（ ）

$A.P(A\cup B|\bar{C})=P(A|\bar{C})+P(B|\bar{C});$　　$B.P(C(A\cup B))=P(AC)+P(BC);$

$C.P(A\cup B)=P(A|C)+P(B|C);$　　$D.P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B).$

3、设正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，样本容量 n 和置信度 $1-\alpha$ 都不变，则对不同样本的观测值，总体期望 μ 的置信区间长度 L（ ）

A. 变短　B. 变长　C. 不变　D. 不能确定

4、设随机变量 X 与 Y 均服从标准正态分布，则下列判断正确的是（ ）

A. X+Y 服从正态分布　　B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2　　D. $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

5、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}$ 为样本 (X_1,X_2) 的均值，则下列 μ 的无偏估计量中最有效的是（ ）

$A.\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　$B.\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$　$C.\frac{1}{2}\bar{X}+\frac{1}{2}X_2$　$D.\frac{1}{3}\bar{X}+\frac{2}{3}X_2$

6、设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$. $E(X^2)=$（ ）

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1、设随机事件 A_1,A_2,A_3 相互独立，且 $P(A_K)=\frac{k}{4}, k=1,2,3$，则这三个事件中不多于两个发生的概率是__________。

2、设二维随机变量（X, Y）联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, x^2<y<1\\ 0 \quad 其他\end{cases}$，当 $-1<x<1$ 时，条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=$______________。

3、二维正态分布 $(X,Y):N(1,2;1,2;\frac{1}{2})$，则 $\operatorname{cov}(2X+Y,2X-Y)=$__________。

4、设二维随机变量的概率分布如下：

X \ Y	0	1	2
−1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	

$F(X,Y)$ 为（X,Y）的联合分布函数，$F_X(x),F_Y(y)$ 分别为 X,Y 的边缘分布函数。

则 $F(1,1)=$________，$F_X(0)=$_________，$F_Y(1)=$_________。

5、设 $(X_1,X_2,\cdots,X_9)$ 为来自正态总体 $X:N(\mu,\sigma^2)$（σ^2 未知）的样本，样本均值与方差分别为 $\bar{x}=12,s^2=144$，则参数 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为____________________。

6、设随机变量 X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0,\ \ x\le 0\end{cases}$，则 $Y=e^{3X}$ 密度函数是 $f_Y(y)=$____________________.

三、解答题(每题 8 分，共 56 分)

1、设 X 表示从四个数 1,2,3,4 中任取一数，Y 表示从 1,2，•••，X 中任取一个数。求（1）$P(Y=2)$；（2）$P(X=2|Y=2)$。

2、设随机变量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2y^2}, x>1, y>1\\ 0, \qquad \text{其他}\end{cases}$，随机变量 Z=XY。

求（1）Z 的分布函数 （2）Z 的分布密度函数。

3、设 $X \sim U(-1,1)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的简单样本，$Q=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 。令 $Q^*=k(Q-\mu)$，其中 k,μ 都是常数，并且 $E(Q^*)=0,\ D(Q^*)=1$。求

（1）k 和 μ ；

（2）根据（1）中求出的常数 k 和 μ，当 n 充分大时，分别用中心极限定理和切比雪夫不等式估计概率 $P(|Q-\mu|>\frac{2}{|k|}$ 。

4、设二维随机变量（X, Y）的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} k, |x|<y<1, -1<x<1; \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$ 。求（1）常数 k；（2）边缘分布函数 $f_X(x), f_Y(y)$ ；（3）条件概率 $P(X<0|Y>\frac{1}{2})$

5、设 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$， X_1, X_2, X_3 相互独立，都与 X 同分布。求

（1） $P(X_2>X_1), P(X_1=X_3)$ （2） $P(\max\{X_1,X_2,X_3\}=1)$

6、设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0; \\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数且大于零，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的简单样本，求

（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$。（2）分别讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性。

7、设某种电池的工作时间服从正态分布，一批电池要出厂为检查其质量，现抽取了 5 个电池并观察到了五个电池的工作时间（小时）记为 $x_i, i=1,2,3,4,5$，经计算：

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=43.4, \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})=8.08^2$$

（1）如果出厂标准为 $\mu_0=50$（小时），方差 σ^2 未知，请问这批电池符合标准吗?

（2）如果某采购员购买电池的标准为寿命不显著低于 50（小时），方差 σ^2 未知，请问这批电池符合采购员标准吗？（上述两个小题检验显著性水平均为 $\alpha=0.1$）

四、论述或证明题（每小题 4 分，共 8 分）

设随机变量 X 与 Y 均服从参数为 p 的（0-1）分布，即 $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$，

（1）设 X 与 Y 相互独立，$Z=X+Y$，证明：Z 服从二项分布，即 $Z: B(2,p)$。

（2）设 X 与 Y 不相关，请问 X 与 Y 是否相互独立？如果相互独立请给予证明。

备查分布表：

$\Phi(2.00)=0.9772, \Phi(2.50)=0.9938, \Phi(0.95)=0.8289, \Phi(0.97)=0.8340,$

$\Phi(1.645)=0.95, t_{0.05}(4)=2.1318, t_{0.1}(4)=1.28, t_{0.05}(8)=1.8595,$

$t_{0.1}(8)=1.3968, \chi^2_{0.05}(8)=15.507, \chi^2_{0.05}(4)=9.488$

16 年概率论与数理统计

一、填空题

1. 设 P(A)=0.6, P(B)=0.5, P(AB)=0.4, 则 P($\bar{A}\bar{B}$)=____。
2. 设袋中各有红、黄、蓝三种颜色的球各占 40%，35%，25%，现从中任取一球，发现不是红色球，则取到的是蓝色球的概率为____。
3. 设 X~G(p), Y~G(q)，且 X, Y 相互独立，G(p)是几何分布，即分布律为：$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2\ldots\ldots, 0<p<1$，则 P(X=Y)=____。
4. 设 X~P(λ)，且 E(X^2)=6，则 P(X=1)=____。
5. 设 (X, Y)~N(1, 2^2, -1, 3^2, 0.5)，则 D(3X+2Y)=____。
6. 设 X1, X2, . . . ，Xn 为来自正态总体 N(0, 1)的简单随机样本，则统计量$T=(n-1)S^2+n\bar{X}^2$服从的分布为____。

二、单项选择题

1. 设 X1 和 X2 是两个独立的连续型随机变量，它们的概率密度函数分别为 f1(x)和 f2(x)，分布函数分别为 F1(x)和 F2(x)，则下列命题正确的是（）。
A. f1(x)+f2(x)必为某随机变量的概率密度函数
B. f1(x)f2(x)必为某随机变量的概率密度函数
C. F1(x)+F2(x) 必为某随机变量的分布函数
D. F1(x)F2(x) 必为某随机变量的分布函数
2. 设 X, Y 独立同分布于 N(0, 1)，ζ=X+Y，η=X-Y，则错误的是（）。
A. ζ， η服从正态分布
B. ζ， η不相关
C. ζ， η不独立
D. ζ， η同分布
3. 下列关于上侧分位点的不等式正确的是（）。
A. $t_{0.025}(5)>t_{0.025}(6)>u_{0.025}$
B. $t_{0.025}(5)<t_{0.025}(6)<u_{0.025}$
C. $t_{0.025}(6)>t_{0.025}(5)>u_{0.025}$
D. $t_{0.025}(6)<t_{0.025}(5)<u_{0.025}$
4. 对总体参数进行假设检验，若在显著性水平 0.01 下不能拒绝原假设，则在显著性水平 0.05 下（）。
A. 必不拒绝原假设
B. 可能拒绝原假设，也可能不拒绝原假设
C. 必拒绝原假设
D. 既不拒绝原假设，也不拒绝备择假设

三、

教练购买了 5 个新球，放置在球袋中，每次都从中任取出 2 个球进行训练，用

后放回。(1).求第三次训练时取出的两个都是新球的概率；(2).若第三次训练时取出的两个都是新球，求第二次训练时取出一个新球的概率。（新球使用后成为旧球）

四、

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}x^4 & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^4$ 的概率密度。

五、

设(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(x+y) & -\frac{\pi}{4}<x,y<\frac{\pi}{4}\\ 0 & 其它\end{cases}$

（1） X,Y 是否相互独立？
（2） 求 Z=X+Y 的密度。

六、

先在区间(0,1)上任取一点 X，再从区间(0,X)上任取一点 Y，
（1）求 Y 的密度；
（2）求 P(X+Y>1)。

七、

设事件 A 是一次一次地发生，且相邻两次事件发生的时间间隔独立同分布于 E(5)(秒)。
（1） 求事件 A 第 5 次发生时刻和第 10 次发生时刻的协方差；
（2） 求事件 A 第 900 次发生在第 3 分钟内的概率。

八、

设总体 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ p & 2p & 1-3p\end{pmatrix}$，对 X 做 100 次独立观测，-2,0,1 分别出现 25,20,55 次，求 p 的矩估计和极大似然估计。

九、

已知 Y=lnX 服从正态分布 N(μ,1)，从总体 X 中抽取一个简单随机样本：0.50,1.25,0.80,2.00。求μ的置信度为 95%的双侧置信区间。($u_{0.025}$=1.96, $u_{0.05}$=1.645)

十、

已知某企业方便面的包装规定重量的方差应该不大于 0.009。现从一批产品中随机抽取 19 包方便面检测，得到样本方差为 0.013。假定方便面的重量服从正态分布，问能否认为这批方便面不符合规格（a=0.05）？

（$\chi^2_{0.025}(18)=31.526$，$\chi^2_{0.025}(19)=32.852$，$\chi^2_{0.05}(18)=28.869$，$\chi^2_{0.05}(19)=30.144$）

16 年概率论与数理统计答案

一、填空题

1. 0.3
2. 5/12
3. $\frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}$
4. $1-e^{-2}$
5. 108
6. $\chi^2(n)$

二、单项选择题

DCAB

三、

解：第一次训练放回后，袋中有 3 个新球，2 个旧球，所以第二次取球可能令 A_i={第二次取得 i 个新球}，

$P(A_0)=\frac{1}{C_5^2}=0.1$，$P(A_1)=\frac{3*2}{C_5^2}=0.6$，$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$

则，令 B={第三次取得 2 个新球}，

则 $P(B|A_0)=0.3$，$P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0$，

$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=0.1*0.3+0.6*0.1+0.1*0=0.09$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{2}{3}$$

四、

解：Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^4\le y)=\begin{cases}P\left(-\sqrt[4]{y}\le X\le\sqrt[4]{y}\right) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt[4]{y}}^{\sqrt[4]{y}}f(x)dx & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt[4]{y}}^{\sqrt[4]{y}}\frac{5}{2}x^4dx,0<y\le 1\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{5}{2}x^4dx,y>1\\ 0,y\le 0\end{cases}=\begin{cases}y^{\frac{5}{4}},0<y\le 1\\ 1,y>1\\ 0,y\le 0\end{cases}$$

故 $Y=X^4$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}y^{\frac{1}{4}},0<y\le 1\\ 0,其他\end{cases}$$

五、

解：（1）设 X 的边缘密度为$f_X(x)$，当$|x|<\frac{\pi}{4}$时，$f_X(x)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\,dy=\frac{1}{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$，当$|x|<\frac{\pi}{4}$时，$f_X(x)=0$。

由对称性，$f_Y(y)=f_X(y)$，而$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X, Y 不独立。

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$，由$-\frac{\pi}{4}<z-x<\frac{\pi}{4}$，有$z-\frac{\pi}{4}<x<z+\frac{\pi}{4}$，所以，当$z\le-\frac{\pi}{2}$或$z\ge\frac{\pi}{2}$时，$f_Z(z)=0$；

当$-\frac{\pi}{2}<z\le 0$时，$f_Z(z)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{z+\frac{\pi}{4}}\cos(z)dx=\left(z+\frac{\pi}{2}\right)cosz$；

当$0<z<\frac{\pi}{2}$时，$f_Z(z)=\int_{z-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(z)dx=\left(\frac{\pi}{2}-z\right)cosz$。

六、

解：由题设，$X\sim U(0,1)$，$Y|_{X=x}\sim U(0,x)$，

所以，$f(x,y)=f_X(x)f(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<y<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=0$；

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-lny$；

$$P(X+Y>1)=\iint_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=1-ln2$$

七、

设事件 A 第 n-1 次到第 n 次发生的时间间隔为 T_n，则 $\{T_n\}$ 独立同分布与 E(5)，事件 A 第 5 次发生时刻 $W_5=\sum_{k=1}^{5}T_k$ 和第 10 次发生时刻 $W_{10}=\sum_{k=1}^{10}T_k$，所以，

$\text{cov}(W_5,W_{10})=\sum_{k=1}^{5}D(T_k)=5*\frac{1}{5^2}=\frac{1}{5}$;

事件 A 第 900 次发生时刻 $W_{900}=\sum_{k=1}^{900}T_k$，$EW_{900}=180$，$DW_{900}=36$, 由中心极限定理，$W_{900}$ 近似于正态分布 $N(180,6^2)$，

所以，$P(120<W_{900}<180)\approx\varphi\left(\frac{180-180}{6}\right)-\varphi\left(\frac{120-180}{6}\right)=\varphi(10)-0.5\approx0.5$

八、

（1）$\mathrm{EX}=1-5\mathrm{p}$，样本一阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{100}(-2*25+1*55)=\frac{5}{100}$，

令 $1-5\mathrm{p}=\frac{5}{100}$，得p的矩估计 $\hat{\mathrm{p}}=\frac{19}{100}$;

（2）极大似然函数 $L(p)=p^{25}(2p)^{20}(1-3p)^{55}=2^{20}p^{45}(1-3p)^{55}$，对数极大似然函数 $ln\,L(p)=20\ln2+45\ln p+55\ln(1-3\mathrm{p})$，

$\frac{d(ln\,L(p))}{dp}=\frac{45}{p}-\frac{165}{1-3p}$，令 $\frac{d(ln\,L(p))}{dp}=0$，得 p 的极大似然估计 $\hat{\mathrm{p}}=\frac{3}{20}$。

九、

Y 的样本观测值为 ln0.5, ln1.25, ln0.8, ln2，计算有 $\bar{y}=0$， μ 的 95%双侧置信区间为 $\left(\bar{y}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025},\bar{y}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\right)=(-0.98,0.98)$。

十、

对正态总体方差做 x^2 检验，

原假设 $H_0:\sigma^2\le0.009$，备择假设 $H_1:\sigma^2>0.009$，检验统计量 $x^2=\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为:

$W=\{x^2>x_{1-\alpha}^2(n-1)\}=\{x^2>28.869\}$，由题设条件 $x^2=\frac{18*0.013}{0.009}=26\notin$ W，因此没有充分理由认为这批方便面不符合规格。

2016 年 6 月概率论与数理统计期末试题

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设 $(X,Y) \sim N(0,4,0,4,\frac{1}{2})$，则 $D(X+Y)=$_________。

2. 设随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，对任意实数 z， $P\{\max\{X,Y\}>z\}=$_____。

3. 设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，则在 5 次重复试验中至少失败一次的概率为________。

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，且 $EX=\mu, DX=\sigma^2$，记

$$A_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad B_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$$，若 $\hat{\mu}^2=A_1^2+cB_2$ 是 μ^2 的无偏估计量，

则常数 $c=$_________。

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 未知， σ^2 已知，欲使 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不超过给定 $L(L>0)$，则样本容量 n 至少需取________。其中 $0<\alpha<1, \Phi(z_\alpha)=\alpha$ 。

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，$1\le m<n$，则统计量

$$Y=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}X_k)^2+\sum_{k=m+1}^{n}X_k^2$$ 服从的分布为_________。

7. 将 n 只球（1~n 号）随机地放进 n 只盒子（1~n 号）中去，一只盒子装一只球。若将一只球装入与球同号码的盒子中，称为一个配对，记 X 为配对的个数，则 $EX=$__________。

二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设 A,B 为任意两事件，则下列关系成立的有（ ）。

（A） $(A\cup B)-B=A$；　　（B） $(A\cup B)-B=A-B$；

（C） $(A-B)\cup B=A$；　　（D） $(A-B)\cup B=AB$.

2. 设随机变量 X 存在数学期望 EX 和方差 $DX\neq 0$，则对任意正数 ε，下列不等式成立的是（ ）。

（A） $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}>\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$； （B） $P\{|X-EX|<\varepsilon\}<1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$；

（C） $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\sqrt{DX}\}\le\dfrac{1}{\varepsilon^2}$； （D） $P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{E|X-EX|^2}{\varepsilon^2}$.

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E|X-\mu|^6=$（ ）。

（A） $3\sigma^6$； （B） $5\sigma^6$； （C） $15\sigma^6$； （D） $48\sigma^6$.

4. 从 0~9 这十个数中任意取出 4 个排成一串数字，则所排成的数字是首尾非 0 的奇数的概率为（ ）。

（A） $\dfrac{41}{90}$； （B） $\dfrac{1}{9}$； （C） $\dfrac{4}{9}$； （D） $\dfrac{1}{10}$.

5. 在下列函数中，可以作为随机变量的概率密度函数的是（ ）。

（A） $f_1(x)=\begin{cases}-\sin x,\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\\ 0,\text{其它}\end{cases}$； （B） $f_2(x)=\begin{cases}\sin x,\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\\ 0,\text{其它}\end{cases}$；

（C） $f_3(x)=\begin{cases}\cos x,\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\\ 0,\text{其它}\end{cases}$； （D） $f_4(x)=\begin{cases}1\text{-}\cos x,\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\\ 0,\text{其它}\end{cases}$.

6. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为来自总体 X 的一个样本，则下列各式中正确的是（ ）。

（A） $\sum_{k=1}^{15}X_k\sim N(0,15)$； （B） $\sum_{k=1}^{15}X_k^2\sim\chi^2(15)$；

（C） $\dfrac{\sum_{k=1}^{5}X_k}{\sqrt{\sum_{j=6}^{15}X_j^2}}\sim t(10)$； （D） $\dfrac{2\sum_{k=1}^{5}X_k^2}{\sum_{j=6}^{15}X_j^2}\sim F(5,10)$.

7. 设总体 X 的概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(\pi-\theta)},\theta\le x<+\infty\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，（参数 θ）， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体 X 的样本值，则参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=$

（A） $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$； （B） $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$； （C） $\bar{x}$； （D） $\dfrac{1}{\bar{x}}$.

三、（满分 10 分）

已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=a+b\arctan x, -\infty<x<+\infty$，试求：

（1）确定常数 a,b；（2）写出 X 的概率密度 $f(x)$；

（3）求 $P\{-1<X\le\sqrt{3}\}$；（4）求 c，使得 $P\{X>c\}=\dfrac{1}{4}$.

四、（满分 12 分）

接连不断地掷一颗骰子，直到出现小于 5 点为止，以 X 表示最后一次掷出的点数，以 Y 表示掷骰子的次数.

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的分布律；

（2）求 (X,Y) 关于 X 的边沿分布律，(X,Y) 关于 Y 的边沿分布律；

（3）证明 X 与 Y 相互独立.

五、（满分 8 分）

设某昆虫产 k 个卵的概率为 $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$，（$\lambda>0$ 为常数），$k=0,1,2,\cdots$，每个卵能孵化成幼虫的概率为 $p(0<p<1)$，且各个卵能否孵化成幼虫是相互独立的，试求：

（1）该昆虫没有后代的概率；（2）该昆虫有后代的概率.

六、（满分 8 分）设 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$， X,Y 相互独立，求 $E(\max(X,Y))$.

七、（满分 10 分）

设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 为考生的成绩，算得平均成绩$\bar{x}=65.5$分，标准差$s=15$分，问在检验水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

（$t_{0.975}(36)=2.0281, t_{0.975}(35)=2.0301, t_{0.95}(36)=1.6883,$
$t_{0.95}(35)=1.6896, u_{0.975}=1.96, u_{0.95}=1.65,$
$\chi^2_{0.025}(35)=20.569, \chi^2_{0.975}(35)=53.20$

此处需要注意，所有给出的分位数都是下侧分位数：例如设$X\sim N(0,1), 0<\alpha<1$，称满足$P(X\le u_\alpha)=\alpha$的点u_α为X的下侧α分位数。）

八、（满分 10 分）从正态分布总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$中抽取了$n=20$的样本$X_1, X_2, \cdots, X_{20}$.

求：（1）$P(0.37\sigma^2\le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})^2\le 1.76\sigma^2)$；

（2）$P(0.37\sigma^2\le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\le 1.76\sigma^2)$.

（$t_{0.975}(20)=2.086, t_{0.975}(19)=2.093, t_{0.99}(20)=2.53,$
$t_{0.99}(19)=2.539, u_{0.975}=1.96, u_{0.95}=1.65, \chi^2_{0.01}(19)=7.4,$
$\chi^2_{0.99}(19)=35.20, \chi^2_{0.025}(20)=7.4, \chi^2_{0.995}(20)=35.20$

以上数据皆是下侧分位数（定义见第七题））。

概率论与数理统计 2016 期末（A）答案

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 12　2. $1-F(z,z)$　3. $1-p^5$　4. $-\frac{1}{n-1}$　5. $(\frac{2\sigma}{L}F_{1-\frac{\alpha}{2}})^2$

6. $Y=\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+\sum_{\lambda=m+1}^{n}X_\lambda^2\sim\chi^2(n-m+1)$　7. 1

二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. B　2. C　3. C　4. C　5. A　6. D　7. B

三、（10 分）

解 (1) 由分布函数的性质，$0=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\arctan x)=a+b(-\frac{\pi}{2})$,

$1=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\arctan x)=a+b(\frac{\pi}{2})$,

于是 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{\pi}$.(3分)

(2) $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$;(6分)

(3) $P\{-1<X\le\sqrt{3}\}=F(\sqrt{3})-F(-1)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1))$

$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\pi}\cdot(-\frac{\pi}{4})=\frac{7}{12}$;(8分)

(4) 由 $P\{X>c\}=1-P\{X\le c\}=1-F(c)=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan c)$, 得

1-（$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$arctanc）$=\frac{1}{4}$, 即 $\frac{1}{\pi}\arctan c=\frac{1}{4}$,

故 $c=1$(10分)

四、（12 分）

解(1)依题意知，X的可能取值为1,2,3,4;

Y的可能取值为1,2,3⋯

于是(X,Y)的分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1},i=1,2,3,4;\ j=1,2\cdots\cdots$$ （4分）

$$(2)P\{X=i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4},i=1,2,3,4;$$

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=4\times\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{j-1},\ j=1,2\cdots(10分)$$

(3)由于$P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{j-1}$

即成立$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\},i=1,2,3,4;\ j=1,2\cdots$

所以X与Y相互独立⋯(12分)

五、

解　设A=该昆虫有后代，　$B_k=$该昆虫产k个卵，$k=0,1,2\cdots$,

易知，事件组$B_0,B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是一完备事件组，

$$P(B_k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},k=0,1,2\cdots,$$

$\overline{A}=$该昆虫没有后代=每个卵都没有孵化成幼虫，

$P(\overline{A}|B_k)=(1-p)^4,k=0,1,2\cdots(4分)$

由全概率公式得

$$(1)P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{+\infty}P(B_k)P(\overline{A}|B_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(1-p)^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p},\cdots(6分)$$

(2)从而 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-e^{-\lambda p}$(8分)

六、（8 分）

解

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ (2分)$$

$$E(\max\{X,Y\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy(4分)$$

$$=\iint_{D_1}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{D_1}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy(6分)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_x^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_x^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(8分)$$

其他方法参考此标准适当给分

七、（10 分）

解 检验假设$H_0:\mu=\mu_0=70$

检验统计量$T=\dfrac{\bar{x}-70}{s/\sqrt{n}}\sim t(35)$

临界值$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)=t_{0.975}(35)=2.0301$

比较$|T|=\left|\dfrac{65.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.8<2.0301=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)$

所以接受假设$H_0:\mu=\mu_0=70$

认为这次考试全体考生的平均成绩为70分

八、（10 分）

解 $(1)\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\frac{19S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(19)$$

$$P(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \le 1.76\sigma^2)$$

$$= P(7.4 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \le 35.2)$$

$$= P(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \le 35.2) - P(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 \le 7.4)$$

$$= 0.99 - 0.01 = 0.98$$

$$(2)\sum_{i=1}^{20}(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(20)$$

$$P(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \mu)^2 \le 1.76\sigma^2)$$

$$= P(7.4 \le \sum_{i=1}^{20}(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \le 35.2)$$

$$= P(\sum_{i=1}^{20}(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \le 35.2) - P(\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \le 7.4)$$

$$= 0.995 - 0.025 = 0.97$$