$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$: 若对任意给定的正数 ε，存在数 $\delta>0$,

使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

求极限方法：（1）用定义估计，

（2）用连续性，

（3）不定式极限（洛必达法则）

数列极限的例子：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0,(\alpha>0)$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0,(|q|<1)$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}=1,(a>0)$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$, (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

极限性质

极限性质：（1）有界性， （2）保号性， （3）不等式性质，

（4）迫敛性， （5）单调有界原理.

两个重要极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

等价无穷小: $\sin x \sim x,$

$\tan x \sim x,$

$\ln(1+x) \sim x,$

$e^x - 1 \sim x,$

当 $x \to 0.$

极限的例子

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{\sqrt{x+1}}=\frac{1+3}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=2.$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan\left(t^2\right)dt}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x^4)2x}{6x^5}=\frac{1}{3}.$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\mid_0^1=\ln 2.$$

连续函数

$f(x)$ 连续定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.　　在分段点要求左右极限.

初等函数在定义域内连续。

间断点的分类：

(1) 若 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 第一类间断点.

(a) 若 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 可去间断点.

(b) 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 跳跃间断点.

(2) 若 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在，

则称 x_0 是 $f(x)$ 第二类间断点.

待定系数例子

例 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求 $a,b.$

解 当 $x=2$ 时分母为零，所以分子也为零.

$$4+2a+b=0.$$

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+a}{2x-1}=\dfrac{4+a}{3}=2,$

所以 $a=2,\quad b=-8.$

导数及其应用

导数定义： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

基本求导公式和求导法则P98,　　微分,　　对数求导法.

隐函数求导:　对 $y^2-2xy+9=0$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

$$2yy'-2y-2xy'=0,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}.$$

参变量函数求导:　对 $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=\int_0^t ue^u\sin u\,du, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{te^t\sin t}{6t}=\frac{1}{6}e^t\sin t.$$

基本初等函数的导数公式

(1) $(C)' = 0.$ (2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$

(3) $(a^{x})' = a^{x}\ln a,$ $(e^{x})' = e^{x}.$

(4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

(5) $(\sin x)' = \cos x,$ $(\cos x)' = -\sin x,$

$(\tan x)' = \sec^2 x,$ $(\cot x)' = -\csc^2 x,$

$(\sec x)' = \sec x\tan x,$ $(\csc x)' = -\csc x\cot x.$

(6) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$(\arctan x)' = -(\operatorname{arc}\cot x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

求导法则

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$

(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad [ku(x)]' = ku'(x),$

(3) $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad [\frac{1}{v(x)}]' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$

(4) 反函数求导 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$

(5) 复合函数求导 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$

导数的应用

(1)曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的

切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

（2）单调性 $f'(x)>0$, $f(x)$ 严格递增,

$f'(x)<0$, $f(x)$ 严格递减，可用于证明不等式.

（3）凸性 $f''(x)>0$, $f(x)$ 向下凸,

$f''(x)<0$, $f(x)$ 向上凸， 拐点

（4）求极值，先求驻点 $f'(x)=0$, 不可导点, 用第一充分定理判断, 列表.

（5）求最大最小值：比较驻点，不可导点，区间端点函数值

（6）渐近线

垂直 $x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty.$

斜 $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx).$

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

用于证明恒等式、不等式，高一阶导数的根的存在性.

例 证明方程 $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3=0$ 只有一个实根.

证明： 令 $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$,

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

存在 $a<b$ 使得 $f(a)<0<f(b)$,

由根的存在定理知，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

$f'(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+x)^2>0$ 所以此根唯一.

不定积分

原函数: $F'(x)=f(x), x\in I$ $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

不定积分 $\int f(x)dx = F(x)+C.$

基本积分公式 P158, P174.

第一类换元积分法（凑微分）

$$\int f(u)du = F(u)+C \quad 则 \quad \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x) = F(u(x))+C$$

第二类换元积分法

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C \qquad 则 \qquad \int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

分部积分法

$$\int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

2. 基本积分公式

(1) $\int 0 \mathrm{d}x = C.$

(2) $\int 1 \mathrm{d}x = x + C.$

(3) $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \ (a \neq -1, x > 0).$

(4) $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

(5) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$

(6) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

基本积分公式

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$

(8) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

(9) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C.$

(10) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C.$

(11) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C.$

(12) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C.$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

(14) $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C.$

基本积分公式

15. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$

16. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

17. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

18. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

19. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

基本积分公式

21. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \mathrm{d}x = \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$

23. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

24. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C.$

降幂 $\int x\sin xdx$ 升幂 $\int x^2\ln xdx$

复现 $\int e^x\sin xdx$ 递推

有理函数的不定积分

（1）分成多项式+真分式 （2）分解分母

（3）分解成分母中单因子为分母的真分式之和

有理三角函数的不定积分

$$t=\tan\frac{x}{2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

化成有理函数的不定积分

定积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

牛顿-莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

换元积分法 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 注意上下限的对应

分部积分法 $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

对偶函数 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

对奇函数 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

积分性质

证明（严格）积分不等式

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x > \int_0^1 e^{x^3}\mathrm{d}x$$

因为当 $x\in[0,1]$, $x^2 \ge x^3$, $e^{x^2} \ge e^{x^3}$, 且不恒等,所以 $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x > \int_0^1 e^{x^3}\mathrm{d}x$

积分中值定理应用

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=\dfrac{2}{e}\int_0^{\frac{1}{2}} e^x f(x)dx,$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0.$

证 令 $F(x)=e^x f(x),$ 由积分中值定理存在 $\eta\in[0,\dfrac{1}{2}],$ 使得

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} e^x f(x)dx = F(\eta)=ef(1)=F(1).$$

在 $[\eta,1]$ 应用微分中值定理存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0.$

$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x),$ 所以 $f'(\xi)+f(\xi)=0.$

定积分应用

平面区域面积

x-型图形: $$A=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

y-型图形: $$A=\int_c^d |g_2(y)-g_1(y)|\,\mathrm{d}y.$$

极坐标公式: $$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

曲线段长度: $$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \quad s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

旋转体体积: $$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

旋转面面积 $$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

广义积分 $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^3}dx \quad \int_2^3 \frac{x}{x^2-4}dx \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+5}$$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \text{部分和数列 } \{S_n\} \text{ 收敛，且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

两个重要例子：

几何级数 $$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1, \\ \text{发散}, & |q|\geq 1. \end{cases} \qquad (a \neq 0)$$

p-级数 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, & p>1, \\ \text{发散}, & p \leq 1. \end{cases}$$

正项级数

正项级数 $u_n \geq 0.$

比较判别法：$u_n \leq v_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

比较判别法的极限形式：设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

比式判别法：设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$

(1) 当 $\rho < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

根式判别法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$

(1) 当 $\rho<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

判别正项级数敛散性的步骤：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0,$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0,$

当 $u_n=O(\frac{1}{n^k})$ 时，用比较判别法，

当 u_n 以乘积形式出现时，用比式判别法，

当 u_n 是 n 次乘幂形式出现时，用根式判别法.

交错项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ (u_n>0)$ 莱布尼兹判别法：

$$(1)\ u_n \ge u_{n+1},\ (2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{ 收敛.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛： $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}=\begin{cases}\text{绝对收敛,} & p>1,\\ \text{条件收敛,} & 0<p\le 1,\\ \text{发散,} & p\le 0.\end{cases}$$

幂级数

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R, 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,

(i) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, $R = \frac{1}{\rho}$;

(ii) 当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$;

(iii) 当 $\rho = +\infty$ 时, $R = 0$.

$f(x)$ 的泰勒级数: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

$f(x)$ 的泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

初等函数的幂级数展开式

逐项求导： $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},\quad |x|<R,$

逐项积分： $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad |x|<R,$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad |x|<+\infty,$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad |x|<+\infty,$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad |x|<+\infty,$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad |x|<1.$$

例 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+1)2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+1)}{2(n+1)(n^2+1)}=0,$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域为 $(-\infty,\infty)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^n)'}{2^n(n-1)!}+e^{\frac{x}{2}}=x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n-1)!})'+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=x(\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!})'+e^{\frac{x}{2}}=x(\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{2^n})'+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=x(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}})'+e^{\frac{x}{2}}=(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})e^{\frac{x}{2}}.$$