内容小结

1. 区域

- 邻域 : $U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集 • R^n空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $P \in D \subset \mathrm{R}^n$

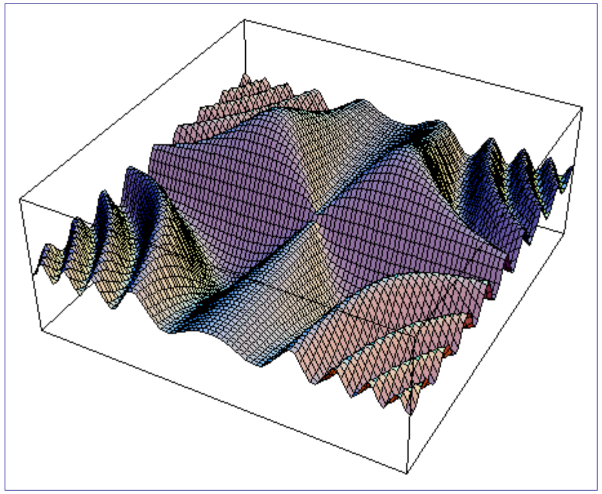
常用 $\begin{cases} \text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |PP_0| < \delta \text{时},$$

$$\text{有} |f(P) - A| < \varepsilon$$

例　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \overset{u = x^2 y}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1,$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0, \quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$$

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法是否正确?

解法1 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=0$

解法2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{k}{1+k}=0$

解法3 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

$$原式=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0$$

三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点 .同时还可看到, 本题极限不存在 .

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r , θ 的变化应该是任意的.

例　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　令　$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\quad (\rho>0)$

则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $\rho\to 0.$

$$0\le\left|\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{\rho^2\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|}{\rho}$$

$$=\rho\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|\le 2\rho,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

四、 多元函数的连续性

定义3 . 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续,否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点 .

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理：若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M]$, $\exists Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

* (4) $f(\mathrm{P})$ 必在D 上一致连续 . (一致连续性定理)

(证明略)

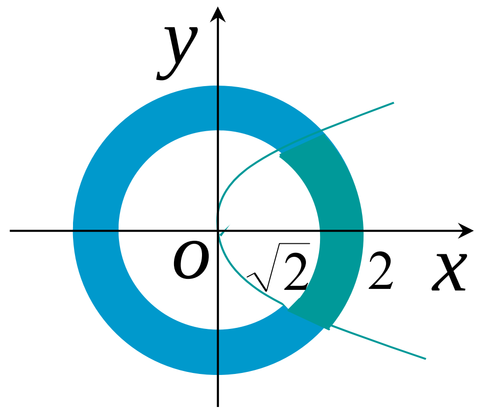
例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} \left|3-x^2-y^2\right| \le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2 \le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$



7. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数 , 故连续.

又 $$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在？

解： 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$， 取 $y=x^{\alpha}-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.

第二节

偏 导 数

一、 偏导数概念及其计算

二、高阶偏导数

一、 偏导数定义及其计算法

定义1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x

的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}$；

$f_x(x_0,y_0)$； $f_1'(x_0,y_0)$.

注意： $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数，也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),\ f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x,y),\ f_2'(x,y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数 .

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

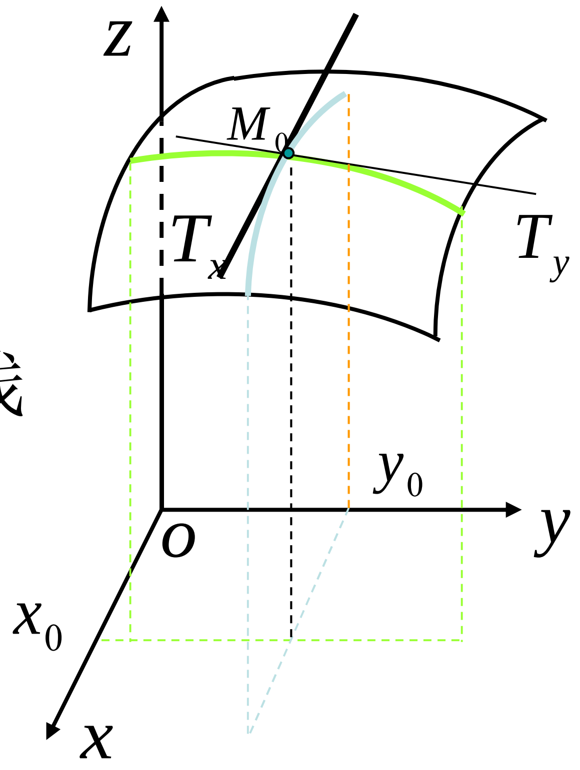
$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x,y,z) = ?$$

二元函数偏导数的几何意义:



$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

例1．求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1 , 2) 处的偏导数.

解法1: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

解法2: $z\big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)} = (2x+6)\Big|_{x=1} = 8$$

$$z\big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)} = (3+2y)\Big|_{y=2} = 7$$

例2. 设 $z = x^y \ (x > 0, 且\ x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证：$\because \ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore \ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例 3　设$z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x'$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\qquad(\sqrt{y^2}=|y|)$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y'$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{(-xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}\operatorname{sgn}\frac{1}{y}\qquad(y\neq 0)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x\neq 0\\ y=0}}\quad \text{不存在.}$$

3、偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导 $\longrightarrow$ 连续，

多元函数中在某点偏导数存在 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 连续，

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

依定义知在$(0,0)$处，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

但函数在该点处并不连续. 偏导数存在 $\not\longrightarrow$ 连续.

二、高阶偏导数

函数$z = f(x, y)$的二阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

纯偏导

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$$

混合偏导

定义：二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.