2019版

南卷汇

大一上线代 期中试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

南洋学生会

2018年线代期中试题

一、 单项选择（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 n 阶行列式 $D=0$，则

（A） D 中必有一行（列）元素全为零；

（B） D 中必有两行（列）得元素对应成比例；

（C）以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有唯一解；

（D）以 D 为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解。

2. 设 A,B 都是 n 阶方阵且等价，则必有

（A）当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=a$ ；（B）当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$ ；

（C）当 $|A|\neq a$ 时，$|B|=0$ ；（D）当 $|A|=a$ 时，$|B|=0$ ；

3. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二行加到第一行得 B，再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得 C。记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $C=$____________。

（A） $C=P^{-1}AP$ （B） $C=PAP^{-1}$ （C） $C=P^{T}AP$ （D） $C=PAP^{T}$

4. 设四阶矩阵 $A=(\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$，$B=(\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$，其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为四维列向量，且已知 $|A|=4, |B|=1$，则 $|A+B|=$

（A）5 （B）10 （C）40 （D）20

5. 设单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$

（A）$-\frac{3}{2}$ （B）-3 （C）0 （D）3

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 已知 n 阶行列式 D 的值为 $a\neq 0$，且 D 的每行元素之和都等于常数 b，则 D 的 j 列 $(1\leq j\leq n)$ 元素的代数余子式之和 $A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=$______________.

7. 设 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$，则 $D=$____________.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$I$ 为 3 阶单位矩阵，则 $(A+3I)^{-1}(A^2-9I)=$______________.

9. 过点 $P_1(1,-2,4),P_2(3,5,7)$ 的对称式直线方程为________________________________.

10. 以 $A(5,1,-1),B(0-4,3),C(1,-3,7)$ 为顶点的三角形的面积为_______________.

三、解答题（第 11 题 10 分，第 12-16 每题 12 分，共 70 分）

11. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{vmatrix}$

12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)$，已知 $\det(A)=a$，求 $\det(B)$.

南洋书院学生会

13. 设 4 阶矩阵 B 满足 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+12I$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

求矩阵 B

14. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}$，试讨论矩阵 A 的秩

15. 证明直线 $L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ 与 $L_2:x-4=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-4}{2}$ 位于同一平面，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程.

南洋书院学生会

16. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$，（1）求 A^{-1} （2）求 A 中所有元素代数余子式的和

2018年线代期中答案

一、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　2. D　3. B　4. C　5. A

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{a}{b}$　7. $2(b-a)(c-a)(c-b)$　8. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-4}{3}$　10. $12\sqrt{2}$

三．解答题（第 11 题 10 分，第 12-16 每题 12 分，共 70 分）

11. （12 分）解：$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=32$

12. （12 分）解：$B=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)=B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

记 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},|P|=12$，从而 $\det(B)=\det(A)\det(P)=12a$

13（12 分）$|A|=2,\ \left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}=\left(\frac{1}{8}A^*\right)^{-1}=8\left(A^*\right)^{-1}=8\times\frac{1}{|A|}A=4A$，

$$B=6(2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

14.（12 分）解：$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

当 $a\neq1$ 时，$r(A)=4$；当 $a=1$ 且 $b\neq-1$ 时，$r(A)=3$；

当 $a=1,b=-1$ 时，$r(A)=2$；

15.（12 分）解：设 $s_1=(3,2,1),M_1(-1,-1,-1);s_2=(1,-3,2),M_2(4,-5,4)$;

$$[s_1s_2M_1M_2]=\begin{vmatrix}5&-4&5\\3&2&1\\1&-3&2\end{vmatrix}=0,$$所以两直线共面。

L_1 的参数方程为：$\begin{cases}x=-1+3t\\y=-1+2t\\z=-1+t\end{cases}$ 将其代入 L_2 中，

得 $t=1$，交点坐标为 $(2,1,0)$

L_1,L_2 所在平面 π 的法向量 $n=s_1\times s_2=(7,-5,-11)$.

平面方程为：$7x-5y-11z=9$

16.（10 分）解：对$\left(A\middle|I\right)$作初等行变换，得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A|=2\,,\qquad A^*=|A|\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=1$$

南洋书院学生会

2017 年期中线性代数与解析几何

一、单项选择题(请将正确选项填写在后面的括号中,每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 A 是 2 阶方阵, B 是 3 阶方阵, 且 $|A|=2$, $|B|=-2$, 则 $\left|-|A|B\right|=$(　)

(A) 4;　　(B) −4;　　(C) 16;　　(D) −16.

2. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 如果 A 和 B 的秩分别为 r 和 n, 则 $r(AB)-r(A)=$(　)

(A) 0;　　(B) r;　　(C) n;　　(D) $rn-r$.

3. 设 A, B 均为 2 阶方阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A|=1$, $|B|=2$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为(　)

(A) $\begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$;　　(B) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ B^* & O \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix} O & B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

4. 已知 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 若 $P^m A P^n = A$, 则下列选项中正确的是(　)

(A) $m=5$, $n=4$;　　(B) $m=5$, $n=5$;

(C) $m=4$, $n=5$;　　(D) $m=4$, $n=4$.

5. 设有直线 l: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 l(　)

(A) 平行于 π;　　(B) 垂直于 π;

(C) 在 π 上;　　(D) 与 π 斜交.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

6. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中(1,2)元的代数余子式 $A_{12}=-1$, 则 $A_{21}=$______.

7. 设矩阵 A 满足 $A^2+A=4I$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $(A-I)^{-1}=$________.

8. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $A^n=$______________.

9. 已知 $\|a\|=1$，$\|b\|=2$，$(a,b)=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\|2a-b\|=$______.

10. 若 4 点 $A(1,0,-2)$，$B(7,x,0)$，$C(-8,6,1)$，$D(-2,6,1)$ 共面，则 $x=$_____.

三、解答题(第 11 题 10 分；第 12—16 每题 12 分，共 70 分)

11. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&0&3&4&5\\1&2&0&4&5\\1&2&3&0&5\\1&2&3&4&0\end{vmatrix}$

12. 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足方程

$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B.

南洋书院学生会

13. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价, 求常数 a.

14. 讨论 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}$ $(n \geq 2)$ 的秩.

南洋书院学生会

15. 直线 L 过点 $P_0(1,0,-2)$，与平面 $\pi: 3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线 $L_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 相交，求 L 的对称式方程.

16. 设平面 π 与 $\pi_1: x-2y+z-1=0$ 垂直，且与 π_1 的交线落在 yoz 平面上，求 π 的方程.

南洋书院学生会

2017 线性代数与解析几何期中参考答案

1.C　　2.A　　3.D　　4.D　　5.B

6.　2　　7.　$\frac{1}{2}(A+2I)$　　8.　$2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$　　9.　2　　10.　4

11. 解法 1：第 1 行乘以-1 分别加到第 2, 3, 4, 5 行, 再把第 $k(k=2,3,4,5)$ 列的 $\frac{1}{k}$ 倍加到第 1 列, 得

$$D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&-2&0&0&0\\1&0&-3&0&0\\1&0&0&-4&0\\1&0&0&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&3&4&5\\0&-2&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-5\end{vmatrix}=480$$

解法二：$D=5!\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}=5!4\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=480$

12. 解：等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$ 两端左乘 A^*, 右乘 A, 得 $|A|B=A^*B+3|A|I$, 由

$|A^*|=8$, 知 $|A|=2$. 代入上式, 得 $(2I-A^*)B=6I$, 故

$$B=6(2I-A^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.$$

13. 解：因为两个同型矩阵等价的充要条件为秩相等, 故 $r(A)=r(B)$. 易知 $r(B)=2$,

故 $r(A)=2$. 从而 $\det(A)=\det\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$.

当 $a=-1$ 时，$r(A)=1$; 当 $a=2$ 时，$r(A)=2$.

所以, 当 $a=2$ 时, 两个矩阵等价. (不讨论者, 扣 2 分)

南洋书院学生会

14. 解： $A \to \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix}$

当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时， $r(A)=n$；

当 $a=b=0$ 时， $r(A)=0$；

当 $a=b\neq 0$ 时， $r(A)=1$；

当 $a\neq b$ 且 $a=(1-n)b$ 时， $r(A)=n-1$.

15. 解法 1：设直线 L 的方向向量为 $a=(l,m,n)$. 因为直线 L 与平面

π：3x-y+2z+1=0 平行, 故直线 L 的方向向量 a 与平面 π 的法向量 $n=(3,-1,2)$ 垂直, 即有 $\qquad a\bullet n=3l-m+2n=0 \qquad (1)$

又直线 L 过点 P_0, 并且与直线 L_1 相交, 所以三向量 $\overrightarrow{P_0P_1},a_1,a$ 共面, 其中

$a_1=(4,-2,1)$ 是 L_1 的方向向量， $P_1(1,3,0)$ 为 L_1 上的点， $\overrightarrow{P_0P_1}=(0,3,2)$. 故有

$$\left[\overrightarrow{P_0P_1} \quad a_1 \quad a\right]=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \quad (2)$$

由(1)、(2)解得 $m=-\dfrac{25}{2}l$， $n=-\dfrac{31}{4}l$, 取 $l=4$, 得直线 L 的方向向量

$a=(4,-50,-31)$. 故所求直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$.

解法 2：令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z=t$, 则 $x=1+4t, y=3-2t, z=t$

可知直线 L_1 与直线 L 的交点可取做 $P_1(1+4t,3-2t,t)$, 故直线 L 的方向向量可取做

$\overrightarrow{P_0P_1}=(4t,3-2t,t+2)$ ， $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与平面 $3x-y+2z+1=0$ 的方向向量垂直, 即

$(4t,3-2t,t+2)\cdot(3,-1,2)=0$, 解得 $t=-\dfrac{1}{16}$, 故点 P_1 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$.

故直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{31}{16}\right)$， L 的对称式方程为

$$\frac{x-1}{\frac{-1}{4}}=\frac{y-0}{\frac{25}{8}}=\frac{z+2}{\frac{31}{16}},$$

即：$\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-0}{50}=\dfrac{z+2}{31}$.

解法 3：容易验证 P_0 在平面 π 上, 设直线 L_1 与平面 π 的交点为 P_1, 则连接 P_0P_1 的直线为所求直线 L. 将 $x=1+4t, y=3-2t, z=t$ 代入平面方程, 解得 $t=-\dfrac{1}{16}$, 故点 P_1 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16}\right)$. 故直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{31}{16}\right)$, 同解法 2, 得直线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-0}{50}=\frac{z+2}{31}$$

16. 解：交线为：$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 过此交线的平面束方程为 $x-2y+z-1+\lambda x=0$,

其法向量为 $\vec{n}=(\lambda+1,-2,1)$. 由 $\vec{n}\cdot(1,-2,1)=\lambda+1+4+1=0$ 得 $\lambda=-6$.

故所求平面 π 的方程为 $x-2y+z-1-6x=0$

南洋书院学生会

2016 年线性代数期中试题

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 关于 x 的代数方程 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$ 的全部根为____________.

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ____________.

3. 设向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,2,-3),\vec{c}=(0,-2,\lambda)$ 共面，则 $\lambda=$____________.

4. 设有向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,3,-3)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的正交射影向量 $\mathrm{Pr}\,oj_{\vec{a}}\vec{b}$ =__________.

5. 点 $P(1,0,-1)$ 到直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$ 的距离 $d=$__________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知四阶行列式 D，其第 3 列元素分别为 1, 3, -2, 2，它们对应的余子式分别为 3，-2，1, 1，则行列式 D=（）

A. -5　　B. 5　　C. -3　　D. 3

7. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，则 A 中（）

A. 必有不等于 0 的 r 阶子式，所有 r+1 阶子式均为 0;
B. 必有等于 0 的 r 阶子式，没有不等于 0 的 r+1 阶子式;
C. 没有等于 0 的 r 阶子式，任何 r+1 阶子式均为 0;
D. 至少有一个 r 阶子式不为 0，没有等于 0 的 r-1 阶子式.

8. 设 A, B 为同阶可逆方阵，则下列结论正确的是（）

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(AB)^T=A^TB^T$

C. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　D. $|AB|=|A|\cdot|B|$

9. 设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$, 则 $\left|\dfrac{1}{4}(2A^*)\right|=$（）（$A^*$是 A 的伴随矩阵）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 4　　C. 16　　D. 32

10. 设$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=2$,则$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\vec{c}=$ （）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

二、计算与证明题（每小题 10 分，共 70 分）

11. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$.

12. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$的秩, 其中 a, b 为参数.

13. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，（1）试求 A^2 及 A^{-1} （2）若方阵 B 满足 $A^2+AB-A^{-1}=I$ (其中 I 为 4 阶单位阵)，求矩阵 B.

14. 求过原点且与直线 L₁：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及直线 L₂：$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$都平行的

南洋书院学生会

平面方程.

15. 求过点 $(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$， $L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

16. 设 A 为 n 阶非零实方阵，且 $A^*=A^T$（A^* 是 A 的伴随矩阵），证明 A 可逆.

17. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且 $A^3=\mathbf{0}$.

（1）求 a 的值；

（2）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中 I 为 3 阶单位阵，求 X

南洋书院学生会

2016 年线性代数期中答案

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 1，2，3　2. $\frac{1}{2}A^*=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 4\end{bmatrix}$　3. $\lambda=8$　4. $\frac{1}{3}\vec{a}$　5. $d=2\sqrt{6}$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. B　7. A　8. D　9. B　10. B

二、计算与证明题（每小题 10 分，共 70 分）

11.

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \dots & a\\ 1 & x & a & \dots & a\\ \dots & \dots & \dots & & \dots\\ 1 & a & a & \dots & x\end{vmatrix}\overset{4分}{==}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \dots & a\\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a\end{vmatrix}\overset{8分}{==}[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

12. $A\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & a-1 & b-2\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{bmatrix}\overset{6分}{\Rightarrow}\begin{cases}a=1,b=2,r(A)=2\\ a\neq 1,b=2,r(A)=3\\ a=1,b\neq 2,r(A)=3\\ a\neq 1,b\neq 2,r(A)=4\end{cases}$　（10 分）

13. (1)　$A^2=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=4I$，(3 分)　　$A^{-1}=\frac{1}{4}A$ (5 分)

(2) $4I+AB-\frac{1}{4}A=I\overset{6分}{\Rightarrow}A(\frac{1}{4}I-B)=3I\overset{7分}{\Rightarrow}B=\frac{1}{4}I-3A^{-1}=\frac{1}{4}(I-3A)$（10 分）

14. $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$（7 分），平面方程：$x-y+z=0$　（10 分）

15. 设所求直线 L 的方向向量为 $\vec{S}=(l,m,n)$，由于 L 与 L_1 相交$\Rightarrow$L 与 L_1 共面$\Rightarrow$

$\vec{AM},\vec{S_1},\vec{S}$共面$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$ （3 分），同理 由 L 与 L_2 相交得$\begin{vmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 4\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$

（6 分）解得 $l=0,n=2m$. 所以令 $\vec{S}=(0,1,2)$，所求直线方程为

$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.　（10 分）

法 2：点 $(1,1,1)$ 与 L_1 确定的平面方程为 $x-2y+z=0$；（4 分）

点 $(1,1,1)$ 与 L_2 确定的平面方程为 $x+2y-z-2=0$，（8 分）

故 L：$\begin{cases}x-2y+z=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$　（10 分）

16. $A^*=A^T\Rightarrow a_{ij}=A_{ij}(1\le i\le n,1\le j\le n)$　（2 分）

$|A|=a_{i1}A_{i1}+\ldots+a_{in}A_{in}=a_{i1}{}^2+a_{i2}{}^2+\ldots+a_{in}{}^2(1\le i\le n)$　（6 分）

因为 A 为非零矩阵，A 中至少有一个元素不为零，不妨设 $a_{i1}\ne 0$, 则 $|A|\ne 0$, 所以 A 可逆.

17. （1） $A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{bmatrix}a^3+3a & 3a^2 & -3a\\ 3a^2 & a^3 & -3a^2\\ 3a & 3a^2 & a^3-3a\end{bmatrix}=0\Rightarrow a=0$， $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（4 分）　　　　或 $|A|^3=a^3=0\Rightarrow a=0$

（2） $X-XA^2-AX+AXA^2=I\Rightarrow(I-A)X(I-A^2)=I$　（6 分）

$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ （7 分）, $(I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ （8 分），

$$X=(I-A)^{-1}(I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$ （10 分）

南洋书院学生会

线性代数部分

2015 年线性代数期中

一、填空题（每小题 2 分，共 24 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$__________.

2. 设 M_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元素的余子式，则 $2M_{42}+4M_{44}=$________

3. 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件为________

4. 设向量 $\vec{a}=(3,2,1),\vec{b}=(7,5,0)$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的射影 $(\vec{b})_{\vec{a}}=$__________

5. 过点 $(2,-1,3)$ 且与直线 $\frac{x+3}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z+6}{2}$ 平行的直线方程为__________

6. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，且 $PA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $r(A)=$______

7. 设 A,B 分别为 m 阶、n 阶可逆方阵，则 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$______

8. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=2$，则 $|-3A^*|=$______

9. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=$______

10. 设 3 个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}=2$，则 $\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\bullet(\vec{c}+\vec{a})=$________

南洋书院学生会

11. 已知矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 的第一行元素为 $a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=-1$，$A$ 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，则 $A=$______

12. 设 $\alpha_j (j=1,2,3)$ 均为 3 维列向量，方阵 $A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]$，，$B=[\alpha_1+2\alpha_2 \quad 2\alpha_2+3\alpha_3 \quad -\alpha_3]$，已知 $|A|=a$，则 $|B|=$__________

二、　单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．如果齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 λ 的值为　【　　】

a.　$\lambda\neq 1$　　b.　$\lambda=1$；　　c.　$\lambda\neq 3$；　　d.　$\lambda=3$

2．设 A,B 为同阶方阵，下列等式正确的是　【　　】

a.　$(AB)^T=A^TB^T$；　　b. $(AB)^*=A^*B^*$；

c.　$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$；　　d. $|AB|=|A||B|$.

3．设 A 为 n 阶可逆矩阵，下列等式不正确的是　【　　】

a. $|A^*|=|A|^{n\ 1}$；　　b. $A^*=|A|A^{\ 1}$；c. $A=\frac{1}{|A|}(A^*)^{\ 1}$；　　d. $(A^*)^{\ 1}=\frac{1}{|A|}A$

4．设有两点 $A(1,-2,3), B(3,2,1)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 y 轴正方向的夹角是　【　　】

a.　$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$；　　b.　$\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$　c．$\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$；　　d．$\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

5．两条直线 $L_1: x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}, L_2: x+1=y+4=\frac{z}{-2}$，则 L_1 与 L_2 的位置关系是　【　　】

a. 异面；　　b. 相交；　　c. 平行不重合；　　d. 重合

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$ 的值

2．设 3 阶矩阵 A,B 满足 $2A^{\ 1}B=B-4I$，其中 I 是 3 阶单位矩阵，

（1）证明：$A-2I$ 可逆；

（2）若 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A

3. 设$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$, 矩阵$A$满足$AP=PB$, 求$A$及$A^5$

4. 设四阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix}$的秩为 3，试求常数$a$的值

5. 求过点$P_1(-1,0,2),P_2(1,1,1)$且与平面$x+y+z+1=0$垂直的平面方程

6. 求点$P(1,2,3)$到直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+z-3=0\end{cases}$的距离

四．证明题（第 1 题 7 分，第 2 题 5 分，共 12 分）

1．设α为n维非零列向量，$A=I-\alpha\alpha^T$，其中I为n阶单位矩阵，证明：$A^2=A\Leftrightarrow\alpha^T\alpha=1$;

2. 设A,B均为 n 阶方阵，且满足$A^2=I,B^2=I,|A|+|B|=0$. 证明：$|A+B|=0$

南洋书院学生会

参考答案

2015 年线代期中

一、填空题（每小题 2 分，共 24 分）

1. 12

2. -140

3. $\exists$不全为零的常数k_1,k_1,k_3满足$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$或混合积为零$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$

4. $\dfrac{31}{\sqrt{14}}$　　5. $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$　　6. r(A)=2

7. $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$　　8. -108　　9. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 18 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

10.　4　　11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　　12. -2a

二、单选题（每小题 2 分，共 10 分）

1. b　　2. d　　3. c　　4. b　　5. a

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

1. 原式

$$\overset{\text{第 }2,3,\dots,n\text{列乘 }1}{\underset{\text{加到第一列(5 分)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{第 1 行乘}(-1)\text{加}}{\underset{\text{到其它各行(4 分)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ (b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}$$

2.（1）证明：由$2A^{-1}B=B-4I\overset{3\text{ 分}}{\Longrightarrow}2B=AB-4A$

$$\overset{2\text{ 分}}{\Longrightarrow}(A-2I)(B-4I)=8I$$

$$\text{得}(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$$

（2） 由（1）得，$A=2I+8(B-4I)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$　　(2 分)

$$(B-4I)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2\text{ 分})$$

3. 解：$|P|=-1$ $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$（3 分）得$A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$（3 分）

$$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{（3 分）}$$

4. 解：由于 $\mathrm{r(A)}=3$ $\therefore |A|=0$ $|A|=(3a+1)(1-a)^3$ 得$a=1$或a=$-\frac{1}{3}$（5 分）

若 $a=1$ 得 $\mathrm{r(A)}=1$. 若a=$-\frac{1}{3}$ A的左上角的 3 阶子式等于$\frac{16}{27}\neq 0$ （4 分）

所以 a=$-\frac{1}{3}$

5. 解：$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,-1)$。平面$x+y+z+1=0$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$

所求平面的法向量$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-3,1)$ （5 分）

所求平面方程：$2(x+1)+(-3)(y-0)+(z-2)=0$即$2x-3y+z=0$（4 分）

6. 解：直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$过点$P_0(0,4,3)$， $\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-2)$（5 分）

点到直线的距离$d=\frac{\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}=\frac{\|-4i-2j+k\|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ （4 分）

四、证明题

1. 证明：“$\Rightarrow$” $A^2=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)=I-2\alpha\alpha^T+(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=\ I-\alpha\alpha^T$（2 分）

$$(1-\alpha\alpha^T)\ \alpha\alpha^T=0$$

由于α为非零n维列向量，$\alpha\alpha^T$不是零矩阵

所以 $1-\alpha\alpha^T=0$ ，$\alpha\alpha^T=1$

“$\Leftarrow$” $A^2=I-2\alpha\alpha^T+(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=\ I-\alpha\alpha^T=A$

2. 由题意可得：$|A+B|=-|A+B|$ $\therefore 2|A+B|=0$

南洋书院学生会

2014 年线性代数期中

1、（本题 20 分） 计算行列式的值

（1）$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

（2）已知A是 3 阶矩阵，B是 4 阶矩阵，且$|A| = 12$，$|B| = -6$，求矩阵

$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A \\ -B & C \end{pmatrix}$的行列式$|D|$的值.

2、（本题 20 分） 已知$|\vec{a} + \vec{b}| = 4$，$|\vec{a} - \vec{b}| = 18$，求$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$与$\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3、（本题 20 分）

（1）已知 3 阶矩阵A满足：$A^3 + A + E = 0$，证明$A + 2E$可逆，并求出$(A + 2E)^{-1}$.

（2）3 阶矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

4、（本题 20 分） 已知直角坐标系中的 4 个点A（3,−1,0），B（3,−1,0），C（$5, -\frac{5}{2}, -1$），问：这四个点是否在同一平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由.

5、(本题20分) 设矩阵$A = (a_{ij})_{3\times3}$，满足条件$a_{33} = -1$及$a_{ij} = A_{ij}, i, j = 1,2,3$. 其中$A_{ij}$是元素$a_{ij}$的代数余子式.

（1）求$|A|$.（2）解线性方程组$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2014 年线代期中

1、（1）
$$|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\-1&2&0&0&0\\-1&0&3&0&0\\-1&0&0&4&0\\-1&0&0&0&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}&1&1&1&1\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{vmatrix}$$

$$=\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)*2*3*4*5=394$$

（2）（经过 12 次列对换后可化成分块下三角矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}A&0\\C&-B\end{pmatrix}$）

$$|D|=(-1)^{12}\left|\frac{1}{2}A\right||-B|=(\frac{1}{2})^3|A|\times(-1)^4|B|=-9$$

2、$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4^2=16$ ①

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=18^2=324$ ②

① +②得：$2\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)=340$

① −②得：$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-308$

$\therefore |\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2=170$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-77$

3、（1）$(A+2E)(A^2-2A+5E)=A^3+A+10E=9E$

$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)$ 故可逆，值为$\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)$

（2）$(A^*)^{-1}=\left|A^{-1}|A|\right|^{-1}=\frac{(A^{-1})^{-1}}{|A|}=\frac{A}{|A|}$

$|A|=2\times5\times1=10$

$$\therefore (A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

南洋出品，必属精品

4、$\overrightarrow{AB}=(-4,0,1)$ $\overrightarrow{AC}=(0,3,1)$ $\overrightarrow{AD}=(2,-\frac{3}{2},-1)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -\frac{3}{2} & -1\end{vmatrix}=0 \quad \therefore \overrightarrow{AB}\ .\overrightarrow{AC}\ .\overrightarrow{AD}\text{共面}$$

$\therefore A.B.C.D$四点共面

该平面法向量(i,j,k)为$\begin{vmatrix}i & j & k\\ -4 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-3,4,-12)//(3,-4,12)$

该平面为：$3x-4y+12z-13=0$

5、（1）由题意知：$A^*=A^T$，故有$AA^*=AA^T=A^TA=|A|E$

$\therefore |A|^2=|A|^3$ （$|AA^{\mathrm{T}}|=|A|^2,\left||A|E\right|=|A|^3$）

$\therefore |A|=0$或1

又$\because |A|={a_{31}}^2+{a_{32}}^2+{a_{33}}^2=1+{a_{32}}^2+{a_{33}}^2>0$

$\therefore |A|=1$

（2）$Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^TAx=A^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x=A^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\because A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & 0\\ a_{12} & a_{22} & 0\\ a_{13} & a_{23} & -1\end{bmatrix}$ 故$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore x=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

南洋书院学生会

2013 年线性代数期中

一、（10 分）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3\cos x_1 & 2+3\cos x_2 & 2+3\cos x_3 \\ 4\cos x_1+5\cos^2 x_1 & 4\cos x_2+5\cos^2 x_2 & 4\cos x_3+5\cos^2 x_3 \end{vmatrix}$$

二、（10 分）

设n阶矩阵A与B均非单位阵I，且$AB=A+B-I$，求行列式$|A-I|$和$|B-I|$的值。

三、（10 分）

设A与B均为n阶正交矩阵（即$A^{-1}=A^T$，且为实矩阵），满足$|A|+|B|=0$，求行列式$|A+B|$的值。

四、（10 分）

在线性方程组$Ax=b$中，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。已知$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk}=-1$，$\sum\limits_{k=1}^{n} b_kA_{kn}=3$，求x的第n个分量$x_n$的值。

五、（15 分）

设$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，试用两种方法求$A^{-1}$。

六、（15 分）

设有直线L_1:$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{-4}$和$L_2$:$\begin{cases} x-z=9 \\ y+4z=-17 \end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系。若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点。

七、（15 分）

设n阶矩阵A满足$A^3=2I$，$B=A^2-2A+2I$，证明B可逆并求B^{-1}。

八、（15 分）

设A是n阶矩阵，r（A）$=r$，证明：必存在n阶可逆矩阵B及秩为r的n阶矩阵C满足$C^2=C$，使$A=BC$。

2013 年线代期中答案

一、

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3cosx_1 & 2+3cosx_2 & 2+3cosx_3 \\ 4cosx_1+5cos^2x_1 & 4cosx_2+5cos^2x_2 & 4cosx_3+5cos^2x_3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3-\frac{4}{3}r_2}{\overset{r_2-2r_1}{=====}}\ 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ cosx_1 & cosx_2 & cosx_3 \\ cos^2x_1 & cos^2x_2 & cos^2x_3 \end{vmatrix}$$

南洋书院学生会

$= 15(cosx_2 - cosx_1)(cosx_3 - cosx_1)(cosx_3 - cosx_2)$（范德蒙德行列式）

二、由$AB = A + B - I$可得：$(A-I)(B-I) = 0$

则$|A-I| = 0$或$|B-I| = 0$

若$|A-I| \neq 0$，则有$A-I$可逆，

于是$B - I = 0(A-I)^{-1} = 0$，即$B = I$，矛盾。所以$|A-I| = 0$

同理，$|B-I| = 0$。

三、$A^TA = A^{-1}A = I$，$|A|^2 = |A||A^T| = |AA^T| = 1$，

由$|A| + |B| = 0$得，$|A||B| = -|A|^2 = -1$

所以$|A+B| = |A(I + A^{-1}B)| = |A(B^{-1} + A^{-1})B|$

$= |A||A^T + B^T||B| = |A||B||A+B| = -|A+B|$

于是$|A+B| = 0$

四、$x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kn}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk}} = -3$

五、$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

方法一：$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A^*$（课本 P49）

方法二：$[A|B] \xrightarrow{\text{行变换}} [I|A^{-1}B]$（课本 P68）

方法三：设$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

则$A^2 = (I + \alpha\alpha^T)^2 = I + 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = I + 5\alpha\alpha^T = I + 5(A - I)$

(注：$\alpha^T\alpha = 3$)

整理得：$A(A - 5I) = -4I$

所以$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

六、共面且相交

平面方程为$13x+6y+11z-15=0$

交点为（3,7，-6）

七、因为$A\frac{A^2}{2}=I$，所以$A^{-1}=\frac{A^2}{2}$

因为$A^3+8I=10I$，所以$(A+2I)^{-1}=\frac{A^2-2A+4I}{10}$

同理，$(A-I)^{-1}=A^2+A+\mathrm{I}$

于是

$$B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A+2I)(A-I)$$

$$B^{-1}=(A-I)^{-1}(A+2I)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I)$$

八、由秩标准型有关定理，必存在n阶可逆矩阵P、Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$$

令$B=PQ$，$C=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$，即为所求。

南洋书院学生会

更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。