第四节 几种特殊类型函数的积分

- 有理函数的积分
- 三角函数有理式的积分
- 简单无理函数的积分

一、有理函数的积分

有理函数的定义：

两个多项式的商表示的函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n<m$, 这有理函数是**真分式**；

(2) $n\geq m$, 这有理函数是**假分式**；

有理函数积分步骤：

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

1.分解：

（1）有理假分式→多项式＋有理真分式

（2）真分式→部分分式之和

▲ 利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

如：$\dfrac{x^5}{x^3+x-2}=x^2-1+\dfrac{2x^2+x-2}{x^3+x-2}$

▲ 根据代数学理论，有理真分式可以分解为下列四种类型部分分式之和。

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

2. 积分

难点　将有理函数化为最简分式之和.

设 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$ 是真分式.

由代数学定理:

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)}+\cdots+$$

$$\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}$$

$$+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)}$$

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i,N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$，分解后为$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$；

真分式化为部分分式之和的**待定系数法**

例1 $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because \quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore \quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

$$\therefore \quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例2 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 取 $x=1,\ \Rightarrow B=1$

取 $x=2$，并将 A,B 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例3 $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \dfrac{A}{1+2x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2}$,

$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x)$,

整理得 $1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A$,

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

分解后的部分分式必须是最简分式.

例4　求积分$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

解　$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln x - \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) + C.$$

例5 求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

说明 将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式； (2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$； (3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；

讨论积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$,

$$\because\ x^2+px+q=\underline{\left(x+\frac{p}{2}\right)}^2+\underline{q-\frac{p^2}{4}},$$

$$a^2=q-\frac{p^2}{4},$$

令 $x+\dfrac{p}{2}=t$

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}dt+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}dt \qquad b=N-\frac{Mp}{2},$$

$$(1)\quad n=1,\quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

$$(2)\quad n>1,\quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数.

结论 有理函数的原函数都是初等函数.

$$J_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x}{(x^2+a^2)^n}d(x^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x}{1-n}d(x^2+a^2)^{1-n}$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{-1}{n-1}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx\right]$$

$$\therefore J_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}J_{n-1}.$$

$$J_2=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}[\int\frac{1}{x^2+a^2}dx+\frac{1}{2}\int xd(\frac{1}{x^2+a^2})]$$

$$=\frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}[\frac{x}{(x^2+a^2)}-\int\frac{1}{(x^2+a^2)}dx]$$

$$=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C$$

注意：　有理函数积分尽量用其他方法

$$\int \frac{4}{x^3+4x}dx \qquad \int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}dx \qquad \int \frac{1}{x^8(x^2+1)}dx$$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx \qquad \int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx$$

$$\int \frac{4}{x^3+4x}dx \qquad \int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}dx \qquad \int \frac{1}{x^8(x^2+1)}dx$$

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4+x^2-x^2}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$$ 或 倒代换

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\frac{x^2+1-2x+2x}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x^8(x^2+1)}dx \qquad 令 t=\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx = -\frac{1}{3}\int x^3 d(x+1)^{-3}$$

$$= -\frac{1}{3}x^3(x+1)^{-3} + \frac{1}{3}\int (x+1)^{-3}dx^3 = -\frac{1}{3}x^3(x+1)^{-3} + \int x^2(x+1)^{-3}dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3(x+1)^{-3} - \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-2} - x(x+1)^{-1} + \int (x+1)^{-1}dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3(x+1)^{-3} - \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-2} - x(x+1)^{-1} + \ln|x+1| + C$$

$$I_n = \int \frac{x^n}{(x+1)^{n+1}}dx$$

$$= -\frac{1}{n}x^n(x+1)^{-n} + I_{n-1}$$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx, \quad 令 t=e^{\frac{x}{6}}, x=6\ln t, dx=\frac{6}{t}$$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx$$

$$=6\int \frac{1}{1+t+t^2+t^3}\frac{1}{t}dt=6\int \frac{1}{t(t+1)(t^2+1)}dt$$

$$=6\int [\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}]dt$$

二、三角函数有理式的积分

三角有理式的定义：

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之**三角有理式**.

一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令 $u = \tan\frac{x}{2}$ $\quad x = 2\arctan u$（万能置换公式）

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad dx = \frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例7 求积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$

解 由万能置换公式 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},$

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$= \int \frac{(1+u)^2 - (1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} du = \int \frac{1+u}{1+u^2} du - \int \frac{1}{1+u} du$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) - \ln|1+u| + C$$

$$\because \quad u = \tan \frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\left|\sec \frac{x}{2}\right| - \ln\left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| + C.$$

例8　求积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解（一）$u = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$= \frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}] + C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C.$$

解（二）修改万能置换公式，令 $u=\tan x$

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad dx=\frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

解（三） 可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \boxed{\csc^2 x}(1+\cot^2 x)dx$$

$$= -d(\cot x)$$

$$= -\int (1+\cot^2 x)d(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论 比较以上三种解法, 便知万能置换不一定是最佳方法, 故三角有理式的计算中先考虑其它手段, 不得已才用万能置换.

例9 求积分 $\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx.$

解 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx=\int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}dx$$

$$=\int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C.$$

三、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$, $R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}})$,

解决方法 作代换去掉根号.

令$t=\sqrt[n]{ax+b}$; 令$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}$;

例10 求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \frac{1+x}{x}=t^2$, $x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-\int (t^2-1)t\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int \frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例11 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

解　令 $t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5dt = dx,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1} + 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C.$$

说明 无理函数去根号时, 取根指数的**最小公倍数**.

例12 求积分 $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx.$

解 先对分母进行有理化

$$原式=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}dx$$

$$=\int(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+1}d(3x+1)-\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)$$

$$=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例13 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2$.

令 $t = \frac{x-1}{x+1}$，则有 $dt = \frac{2}{(x+1)^2}dx$，

原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$

$= -\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$

或 $\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \cdot (x^2-1).$

令 $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$, $x = -\frac{t^3+1}{t^3-1}$

$dx = \frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$

原式 $= \int \frac{\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt}{t\frac{4t^3}{(t^3-1)^2}} = \int \frac{3dt}{2t^2} = -\frac{3}{2t} + c$

$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$

四、小结

有理式分解成部分分式之和的积分.

（注意：必须化成真分式）

三角有理式的积分.（万能置换公式）

（注意：万能公式并不万能）

简单无理式的积分.

基本积分表(2)

(16) $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C;$

(17) $\int \cot x dx = \ln \sin x + C;$

(18) $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C;$

(19) $\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C;$

(20) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(21) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C;$

(22) $$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C;$$

(23) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

(24) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$$

(25) $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

(26) $$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. (a > 0)$$

(27) $$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

(28) $$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

积不出来函数

$$\int \sqrt{a^2 - k^2 \sin^2 x}\,dx\,(0 < k < a),\quad \int \sin x^2\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}dx,\qquad \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{1}{\ln x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx$$

绝大部分初等函数均不积出来！
（存在原函数，但原函数不能用初等函数表示）

练习 求下列不定积分：

1、$\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx$；

2、$\int \dfrac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$；

3、$\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$；

4、$\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

5、$\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$；

6、$\int \dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$；

7、$\int \dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$；

8、$\int \dfrac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$；

9、$\int \dfrac{x^3}{9+x^2}dx$；

10、$\int \dfrac{dx}{x(x^6+4)}$；

11、$\int \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

12、$\int \dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$；

13、$\int \dfrac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

14、$\int \dfrac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$.

求下列不定积分：

1、$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$；

2、$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

3、$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

4、$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$；

5、设$\int \tan^n xdx$，求证：

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$$，并求$\int \tan^5 xdx$.

答案

1、$a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$； 2、$\ln\ln\ln x+C$；

3、$-\ln(\cos\sqrt{1+x^2})+C$； 4、$\arctan e^x+C$；

5、$\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$； 6、$\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$；

7、$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C$；

8、$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{9-4x^2}}{4}+C$；

9、$\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$；

10、$\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C$；

11、$(\arctan\sqrt{x})^2+C$；

12、$\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C$；

13、$-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$； 14、$\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$.

1、 $\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1-x^2})]+C$；

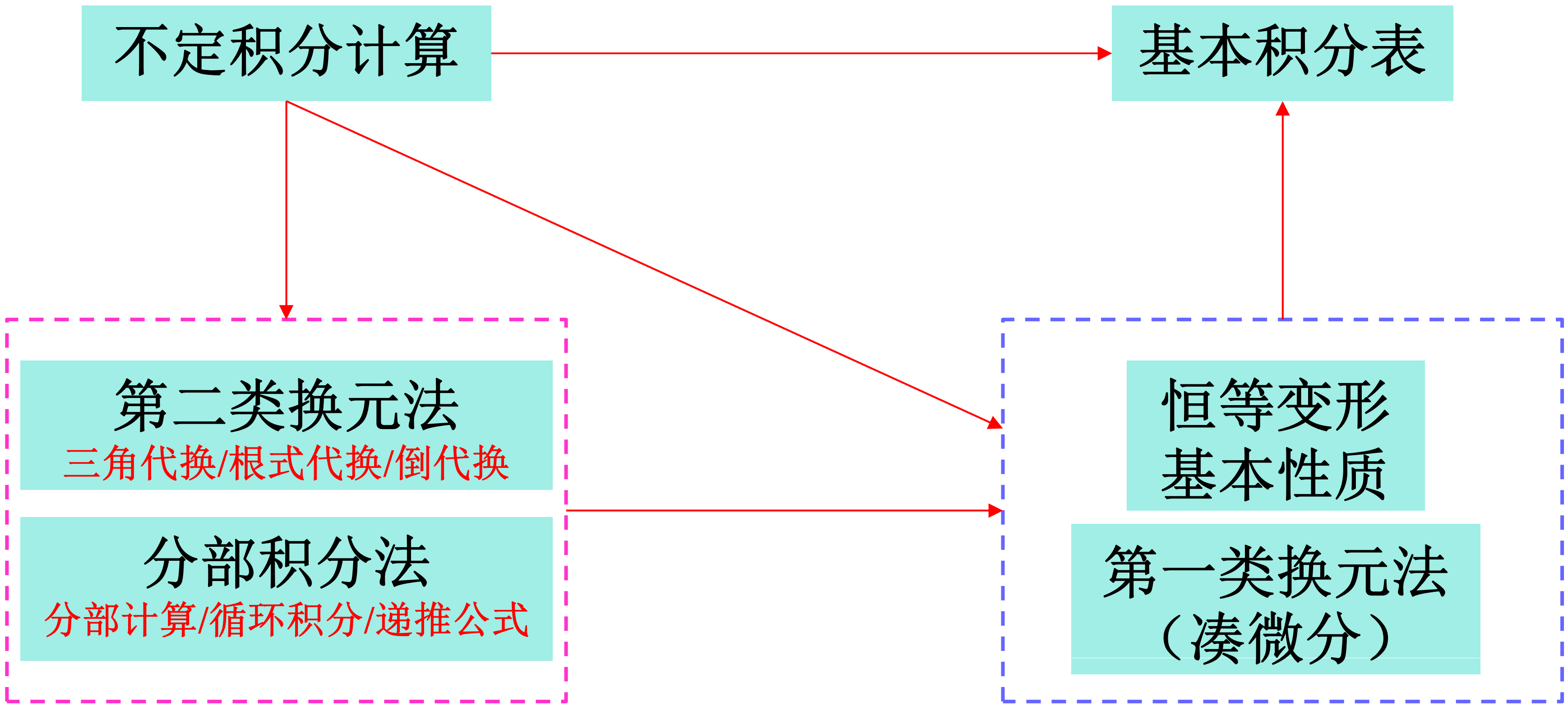
2、 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；

3、 $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$；

4、 $3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-2a\sqrt{x(2a-x)}$

$$+\frac{a-x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

不定积分计算流程图


不定积分计算
基本积分表
第二类换元法
三角代换/根式代换/倒代换
分部积分法
分部计算/循环积分/递推公式
恒等变形
基本性质
第一类换元法
（凑微分）

不定积分计算流程图 2