思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧，Ω为Σ所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，判断下列演算是否正确?

$$(1)\quad \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v\neq\frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

$$(2)\quad \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\neq\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

一、高斯 (Gauss) 公式


高斯，C.F.

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \textbf{(Gauss 公式)}$$

2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在空间二维单连通域$G$内具有连续一阶偏导数,$\Sigma$为$G$内任一闭曲面,则

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\,,\quad (x,y,z)\in G \qquad ②$$

证: "充分性". 根据高斯公式可知②是①的充分条件.

"必要性". 用反证法已知①成立,假设存在$M_0\in G$,使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}\neq 0$$

因P, Q, R 在G内具有连续一阶偏导数，则存在邻域$\bigcup(M_0)\subset G$,使在$\bigcup(M_0)$上,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$$

设$\bigcup(M_0)$的边界为Σ' 取外侧,则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma'} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\bigcup(M_0)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\neq 0$$

与①矛盾，故假设不真. 因此条件②是必要的.

思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧，Ω 为Σ所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，判断下列演算是否正确?

$$(1)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \cancel{=} \frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

$$(2)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\cancel{=}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

当函数 P, Q, R 在闭曲面Σ内存在点不满足高斯定理条件时，可考虑添加辅助曲面后再用高斯公式.

例. 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中Σ为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 取外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 作辅助曲面 $\Sigma_\varepsilon : x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取内侧. ε 足够小, 使得 Σ_ε 围成的小球体 Ω_ε 在Σ所围区域内部， 则在Σ与 Σ_ε 围成的区域Ω内函数满足高斯公式的条件.

由

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

得
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$
于是

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\quad-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_\varepsilon}\quad\right)$$

$$=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}V-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_\varepsilon}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

取内侧

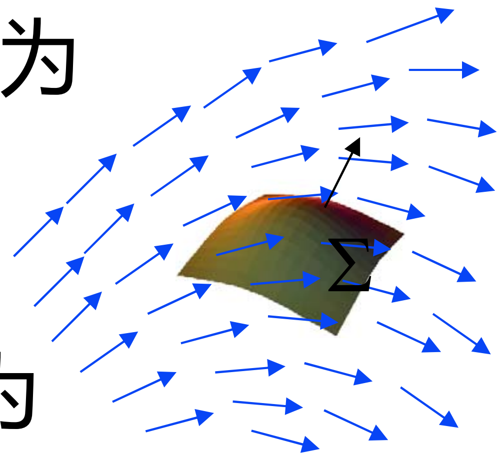
$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_\varepsilon}(1+1+1)\,\mathrm{d}V=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi$$

二、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ 为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面Σ 的流量为



$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

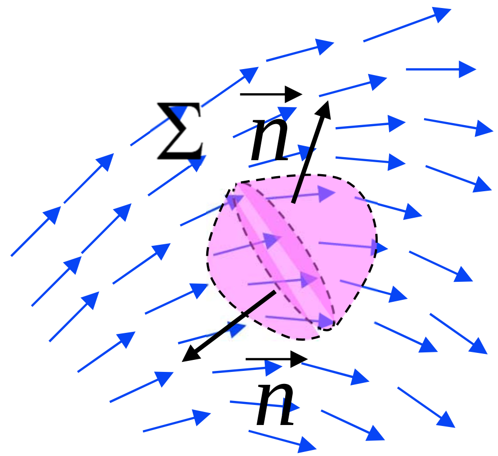
由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ 的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi > 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量少于流出的, 表明Σ 内有源;

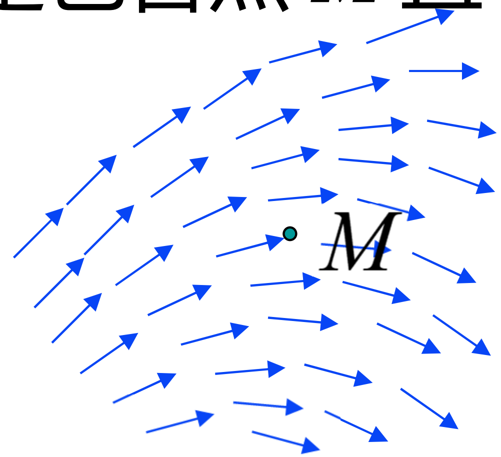
当$\Phi < 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量多于流出的, 表明Σ 内有洞 ;

当$\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出Σ 的流体质量相等 .

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad ③$$

为了揭示场内任意点M处的特性, 设Σ是包含点M且方向向外的任一闭曲面 , 记Σ所围域为Ω, 在③式两边同除以Ω的体积V,并令Ω以任意方式缩小至点M (记作$\Omega \to M$),则有



$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} = \lim_{\Omega \to M} \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\Omega \to M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \qquad ((\xi,\eta,\zeta) \in \Omega)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M$$

此式反应了流速场在点M的特点: 其值为正,负或 0, 分别反映在该点有流体涌出, 吸入, 或没有任何变化.

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的通量(流量) .

在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \operatorname{div}\vec{A}$$

divergence

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$ 表明该点处有源,

$\operatorname{div}\vec{A} < 0$ 表明该点处有洞,

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 $\vec{A}$ 处处有 $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, 则称 $\vec{A}$ 为无源场.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

故它是无源场.

例5. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r} = \frac{q}{r^3}(x, y, z) \qquad (\vec{r} \neq \vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E} = q\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)\right]$

$$= q\left[\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}\right]$$

$$= 0 \qquad (r \neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, P, Q, R, 在域G内有一阶 连续偏导数, 则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度

一、斯托克斯公式

二、空间曲线积分与路径无关的条件

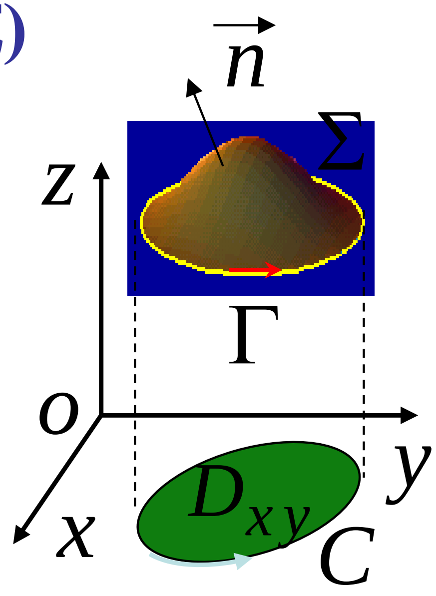
三、环流量与旋度

一、 斯托克斯(Stokes) 公式

定理1. 设标准曲面 Σ 的边界 Γ是分段光滑曲线, Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则, P,Q,R 在包含Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数,则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$ **(斯托克斯公式)**



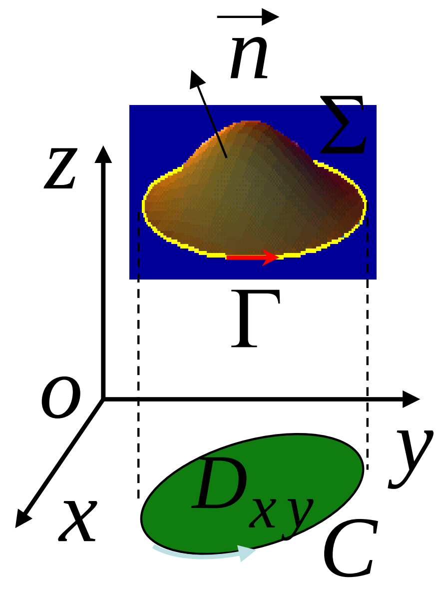
证: 设曲面方程为

$$\Sigma: z = f(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy}$$

为确定起见, 不妨设Σ 取上侧 (如图).

$$\because \vec{n} \parallel (f_x, f_y, -1), \text{又} \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} \Rightarrow dzdx = -f_y dxdy.$$

(利用格林公式)



$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} f_y + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dxdy$$

$$= \oint_{C} P(x, y, f(x, y)) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx$$

同理可证 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}Q\,\mathrm{d}y$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\oint_{\Gamma}R\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得斯托克斯公式 .

Stokes公式对有限多块标准曲面拼接成的曲面仍成立.
因为此时每两块面的公共边界上的曲线积分值恰好抵消.

注意: 如果 Σ 是 xoy 面上的一块平面区域,则斯托克斯公式就是格林公式,故格林公式是斯托克斯公式的特例.

为便于记忆, 斯托克斯公式还可写作:

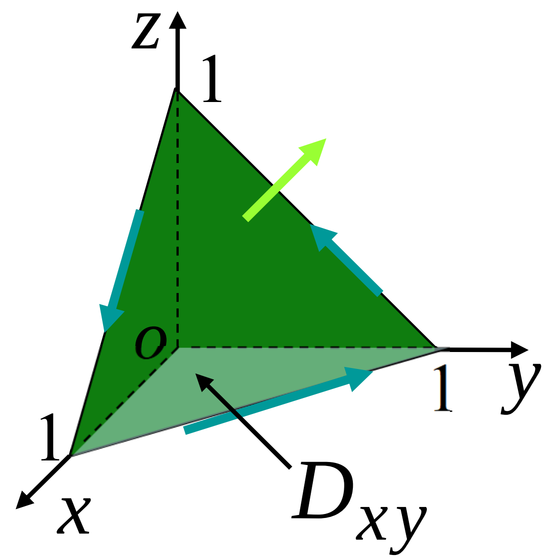
$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

例1. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$

其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解: 记三角形域为Σ, 取上侧, 则

$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

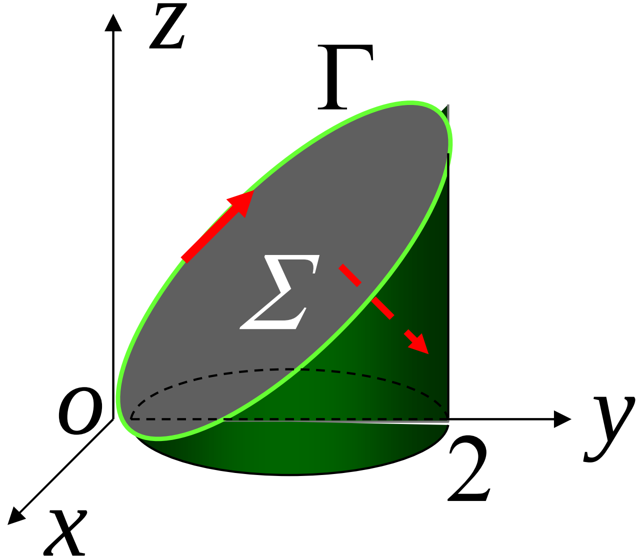
利用对称性

例2. Γ 为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线,从 z 轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解: 设Σ为平面 $z=y$ 上被 Γ 所围椭圆域，且取下侧,

则其法线方向余弦

$$\cos\alpha=0\,,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix} \mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma (y-z)\,\mathrm{d}S=0$$