东南大学考试卷(A卷)答案

课程名称	线性代数A	考试学期	17-18-3	得分	
适用专业	非电类专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.（30%）填空题

1. 设方阵 A 满足 $A^2+2A+2E=O$，则 $A+3E$ 的逆矩阵 $(A+3E)^{-1}=\underline{\frac{1}{5}(E-A)}$.

2. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2,\ 1,\ -1$, A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^*-A^{-1} 的行列式 $\left|A^*-A^{-1}\right|=\underline{\frac{27}{2}}$.

3. 设向量空间 R^2 中两组基 $\alpha_1=(3,\ 4)^T,\alpha_2=(2,\ 3)^T;\beta_1=(1,\ 1)^T,\beta_2=(0,\ 1)^T$，已知 R^2 中向量 α 在基 α_1,α_2 下坐标是 $(1,\ 1)^T$，则 α 在基 β_1,β_2 下坐标是 $\underline{(5,\ \ 2)^T}$.

4. 设 n 阶方阵 A 的元素都是 $k(\neq 0)$，则 A 的特征多项式是 $\underline{\lambda^{n-1}(\lambda-nk)}$.

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ x & 1 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似，则 $(x,\ \ y)=\underline{(\pm 2,\ 4)}$.

6. 设 3 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\gamma\\ -\alpha+\beta+2\gamma\\ \alpha-\beta-3\gamma\end{pmatrix}$，则行列式 $\left|AB^{-1}\right|=\underline{-\frac{1}{3}}$.

7. 如果向量 $(k,\ 1,\ 4)$ 可由向量组 $(1,\ 2,\ -1)$, $(3,\ -1,\ 1)$ 线性表示，则参数 k 满足条件 $\underline{k=32}$.

8. 如果实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^{\ 2}+(\lambda+1)x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2\lambda x_1x_3$ 是正定二次型，则参数 λ 满足条件 $\underline{\lambda\in(0,\ \ 1)}$.

9. 设 $a(\neq 0)$ 是 3 阶实对称矩阵 A 的二重特征值，$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 0,\ -1)^T$ 是 A 的对应特征值 a 的特征向量。如果 A 不可逆，则 A 的另一个特征值是 $\underline{\ 0\ }$，相应的特征向量为 $\underline{(1,\ \ -2,\ \ 1)^T}$.

10. 设 α 是 3 维列向量，$\alpha^T\alpha=k,\ k\in(\ 1,\ +\infty)$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T(E-\alpha\alpha^T)X$ 的规范形为 $\underline{y_1^2+y_2^2-y_3^2}$.

姓名______ 学号______ 线 封 密

二.（12%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\q\end{pmatrix}$ 的秩为 2，

1．求参数 p, q 的值;

2. 求该向量组的一个极大线性无关组，并且将向量组中的其余向量用极大线性无关组表示出来。

解：1. 设$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$

则 $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&1&0&1\\1&p&2&q\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-1&2\\0&0&-p+3&q+2p-3\end{pmatrix}$$

已知$r(A)=2$, 于是 $p=3$, $q=-3$

2. α_1,α_2是该向量组的一个极大线性无关组，

$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_4=3\alpha_1-2\alpha_2$

三（12%）线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+5x_2+px_3=5\\3x_1+px_2+3x_3=2\end{cases}$ ，讨论参数p取何值时，线性方程组

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，在有无穷多解时，求其通解。

解：线性方程组系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&5&p\\3&p&3\end{pmatrix}$, 增广矩阵$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&5&p&5\\3&p&3&2\end{pmatrix}$

（1）$|A|=-(p-2)(p-3)$, 所以，当$p\neq2$, 且$p\neq3$时，线性方程组有唯一解。

（2）当$p=3$时， $$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&5&3&5\\3&3&3&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

此时 $r(A)=2\neq r(A,b)=3$, 所以，当$p=3$时，线性方程组无解。

（3）当$p=2$时，$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&5&2&5\\3&2&3&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时$r(A)=r(A,b)=2<3$， 所以，当$p=2$时，线性方程组有无穷多解。

线性方程组一个特解$\gamma=(-1,\ 1\ 1)^T$，

线性方程组导出组一个基础解系$\eta=(-1,\ 0,\ 1)^T$，因此，线性方程组的通解为：$\gamma+k\eta$, $\forall k\in R$.

四（12%）设矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$A^*$是$A$的伴随矩阵，

如果$AXA^* = 6E + AX$，求矩阵X.

解：

矩阵A的行列式$|A|=2$，如果 $AXA^* = 6E + AX$，那么 $A(XA^* - X) = 6E$

于是 $X(2E-A)=6E$， 因此 $X=6(2E-A)^{-1}$

其中，矩阵$2E-A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$， $(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，

所以 $X=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

五（10%）设向量$\eta=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & x & 0\\ 4 & y & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

1. 求参数x，y 的值；
2. 问：矩阵A是否相似于对角矩阵？说明理由。

解：

1. 设$A\eta=\lambda\eta$，即 $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & x & 0\\ 4 & y & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 20\end{pmatrix}$，得 $\lambda=1$，$x=-1$，$y=-8$.

2. 当$x=-1$，$y=-8$时，$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，因此$A$的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

$$E-A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -4 & 8 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 3\end{pmatrix}$$

由于$r(E-A)=2$，对应二重特征值 1 有一个线性无关特征向量，因此矩阵A没有三个线性无关特征向量，所以A不相似于对角矩阵。

六（14%）设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

1．写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵;

2．求正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

解：1. $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

2. $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$

$(3E-A)X=0$ 的基础解系为 $\eta_1=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$

$AX=0$ 的基础解系为 $\eta_3=(-1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，

取 $\beta_1=\eta_1$，$\beta_2=\eta_2-\dfrac{\langle\eta_2,\ \beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\ \beta_1\rangle}\beta_1=\dfrac{1}{2}(1,\ -1\ \ 2)^T$，$\beta_3=\eta_3$

再取 $\gamma_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,\ 1,\ 0)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,\ -1,\ 2)^T$

$\gamma_3=\dfrac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1,\ 1,\ 1)^T$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

则正交变换 $X=QY$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形：$3y_1^2+3y_2^2$

七（10%）证明题：

1．设 η_1,η_2 是 n 维列向量，A 是 $s\times n$ 矩阵，A的秩为 $n-2$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 的每个解向量都可由 η_1,η_2 线性表示，证明 η_1,η_2 是 $AX=0$ 的一个基础解系。

证明：已知 $s\times n$ 矩阵 A 的秩是 $n-2$，则 $AX=0$ 的基础解系有两个向量，设 α_1,α_2 是 $AX=0$ 的基础解系，据已知条件得 α_1,α_2 可由向量 η_1,η_2 线性表示，于是 $2=r(\alpha_1,\alpha_2)\le r(\eta_1,\eta_2)$，得 $r(\eta_1,\eta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$，因此 η_1,η_2 线性无关，并且 η_1,η_2 与 α_1,α_2 等价，所以 η_1,η_2 是 $AX=0$ 的一个基础解系。

2. 设n阶实矩阵A满足$A^2=A$，证明存在n阶对称矩阵P,Q，使得$A=PQ$.

证明：若n阶实矩阵A满足$A^2=A$,则A的特征值为0或1，且$r(A)+r(E-A)=n$,
因此A有n个线性无关的特征向量，所以A相似于对角矩阵。

设$r(A)=k$，则A相似于$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$，因此存在$n$阶可逆矩阵$B$，使得

$A=B\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}B^{-1}$，注意到$A=B\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}B^T(B^{-1})^T\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}B^{-1}$，

取$P=B\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}B^T$，$Q=(B^{-1})^T\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}B^{-1}$，那么$P$，$Q$是$n$阶对称矩阵，

使得 $A=PQ$