思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同？

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$ 的和函数.

3. 求幂级数的和函数 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

4. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和 .

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数.

法1 易求出级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$

法2 先求出收敛区间$(-\infty,+\infty)$，设和函数为$S(x)$，则

求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

内容小结

定理**1**． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\cup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数 .

2. 常用函数的幂级数展开式

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$

  $x \in (-1, +1]$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

例4. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ \boxed{-1<x\le 1}$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛区间为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例6. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例6. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)} \qquad \boxed{(|x-1|<2)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

思考与练习

1. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm 1$ 时, 此级数收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$