山东大学 2013-2014 学年 上 学期 高等数学（一） 试卷

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）。

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x), x\le 0\\ 3+ae^{x}, x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _______ .

2、过点（1, 2），且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程为 _______ .

3、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{e^{x^2}-1}=$ ________ .

4、设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}-x+y^3=0$ 确定，则 $y'=$ ________ .

5、$\int_{-1}^{3}|2-x|\mathrm{d}x=$ _______ .

二、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分）

6、（10分）求不定积分 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

7、（10分）设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

8、（10 分）

设 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间，极值，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性、拐点.

9、（10 分）求解微分方程 $y''-2y'+y=4xe^{x}$.

10、（10 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $f(0), f'(0)$ 及 $f''(0)$.

11、（10 分）

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=0, f''(x)>0$.并且在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))(x\neq 0)$ 作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$.

三、证明题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

12、（10 分）

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$.证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

13、（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$,试证：存在 ξ,η
$\in(a,b)$，使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

高数期末考试A卷答案

一、 填空题（共5小题，每题4分）：

1. $\underline{-2}$

2. $\underline{y=x^2+1}$

3. $\underline{-\dfrac{1}{4}}$

4. $\underline{\dfrac{1-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}}$

5. $\underline{5}$

二、计算（共6小题，每题10分）：

6、解：$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\dfrac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$=\dfrac{1}{2}x^2\arctan x-\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2\arctan x-\dfrac{1}{2}(x-\arctan x)+C$

$=\dfrac{1}{2}(1+x^2)\arctan x-\dfrac{1}{2}x+C.$

7.解：

此极限为“$\dfrac{0}{0}$”型，又是变限积分，应采用洛必达法则，为了对x求导，应先将积分号里的x变换到上、下限中或提出积分号外.

$$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)'_x}{\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'_x}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}.$$

至此不能再用洛必达法则了，因为未设$f(x)$在$x=0$的邻域内可导，改为考虑：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).,$$

所以原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}}{\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}+\dfrac{xf(x)}{x^2}}=\dfrac{\frac{1}{2}f'(0)}{\frac{1}{2}f'(0)+f'(0)}=\dfrac{1}{3}.$。

8. 解：

为求单调区间和极值，应求出 y' 及驻点（以及导数不存在的点）. 为求凹凸性和拐点，应求出 y'' 及 $y''=0$ 的点.最后用列表的办法可以较简洁地说明问题.

$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2}{x^2}\left(x^3-1\right)$，令 $f'(x)=0$,求得 $x=1$.又 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

$f''(x)=2+\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}\left(x^3+2\right)$,令 $f''(x)=0$,求得 $x=-\sqrt[3]{2}$.按 x 从小到大的次序列表，无穷间断点也引入.

x	$\left(-\infty,-\sqrt[3]{2}\right)$	$-\sqrt[3]{2}$	$\left(-\sqrt[3]{2},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	−	−		−	0	+
$f''(x)$	+	0	−		+	+	+
$y=f(x)$	单调凹	拐点	单调凸		单调凹	极小值点	单调凹

拐点坐标 $\left(-\sqrt[3]{2},0\right)$，极小值是 3.

9、对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$ 或 $(r-1)^2=0$,

其特征根 $r_1=r_2=1$（重根）.

对应齐次方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^x.$$

下面求特解 y^*： $f(x)=4x\mathrm{e}^x$, 设

$y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x=\left(Ax^3+Bx^2\right)\mathrm{e}^x$,

$y^{*\prime}=\left(Ax^3+Bx^2\right)\mathrm{e}^x+\left(3Ax^2+2Bx\right)\mathrm{e}^x$,

$y^{*\prime\prime}=\left(Ax^3+Bx^2\right)\mathrm{e}^x+\left(3Ax^2+2Bx\right)\mathrm{e}^x+(6Ax+2B)\mathrm{e}^x+\left(3Ax^2+2Bx\right)\mathrm{e}^x$

代入原方程整理得 $(6Ax+2B)\mathrm{e}^x=4x\mathrm{e}^x$.

比较两端系数$\begin{cases}6A=4\\2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2}{3}\\B=0\end{cases}$

于是非齐次方程的特解为$y^*=\dfrac{2}{3}x^3e^x$,

所求通解为$y=(C_1+C_2x)e^x+\dfrac{2}{3}x^3e^x$..

10、解：（法一）将$f(x)$在$x=0$处用佩亚诺余项泰勒公式展开至$o_1(x^2)$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o_1(x^2)$$

并将$\sin x$也展开至$o_2(x^3)$： $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o_2(x^3)$

同时代入所给的极限式，整理得

$$\lim_{x\to0}\frac{(f(0)+1)x+f'(0)x^2+\left(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

$f(0)=-1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=\dfrac{1}{3}$

（法二）将所给极限改写为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x^2}$(1)

当$x\to0$时分子$\to f(0)+1$，分母$\to0$.如果$f(0)\neq1$，则上式右边$\to\infty$，与题设左边$\to0$矛盾，故$f(0)=-1$.

对（1）用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+f'(x)}{2x}$(2)

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\sin x+\cos x-\cos x}{2x}=0$

$x\to0$,上式右边分子$\to f'(0)$,分母$\to0$如果$f'(0)\neq0$，则上式右边$\to\infty$，与题设左边$\to0$矛盾，故$f'(0)=0$.

再将（2）式右边改写为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$(3)

对右边第二式用洛必达法则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=-\dfrac{1}{6}$

式（3）左边为$\dfrac{1}{2}f''(0)$，按题意应有$\dfrac{1}{2}f''(0)-\dfrac{1}{6}=0$ 所以$f''(0)=\dfrac{1}{3}$.

11、解：过点 $(x, f(x))$ 的曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为 $Y - f(x) = f'(x)(X - x), u = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

(由 $f'(0) = 0, f''(x) > 0$, 知 $x \neq 0$ 时，$f'(x) \neq 0$). 将 $f(x)$ 按泰勒公式展开：

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2} f''(\xi_1)x^2 = \dfrac{1}{2} f''(\xi_1)x^2$, 其中 $0 < \xi_1 < x$

于是 $$f(u) = \frac{1}{2} f''(\xi_2)u^2, \text{其中} 0 < \xi_2 < u.$$

代入欲求极限，并由 $f''(x)$ 的连续性有

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf(u)}{uf(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}xf''(\xi_2)u^2}{\frac{1}{2}uf''(\xi_1)x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{u}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{xf'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{xf''(x)}{f'(x) + xf''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{f''(x) + \frac{f'(x)}{x}} = \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{2}$$

三、证明题（共 2 小题，每题 10 分）：

12、证明：$g(x) > 0, x \in [a,b]$, 这时有 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), x \in [a,b]$

其中 M, m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大，最小值.由定积分的不等式性质，得到

$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，从而对任何 $\xi \in [a,b]$, 结论成立.

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, 则得 $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq M$

由连续函数的介值性，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$, 结论成立.

13、证明：令 $F(x) = \mathrm{e}^x f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，故存在 $\eta \in (a,b)$, 使得

$$\frac{\mathrm{e}^b f(b) - \mathrm{e}^a f(a)}{b - a} = \mathrm{e}^\eta \left(f(\eta) + f'(\eta) \right)$$

由条件 $f(a) = f(b) = 1$ 得 $\dfrac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a}{b - a} = \mathrm{e}^\eta \left(f(\eta) + f'(\eta) \right)$(1)

再令 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，故存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$\dfrac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a}{b - a} = \mathrm{e}^\xi$（2） 结合（1）和（2），有 $\mathrm{e}^{\eta - \xi} \left(f(\eta) + f'(\eta) \right) = 1$