课前练习题

0. 设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

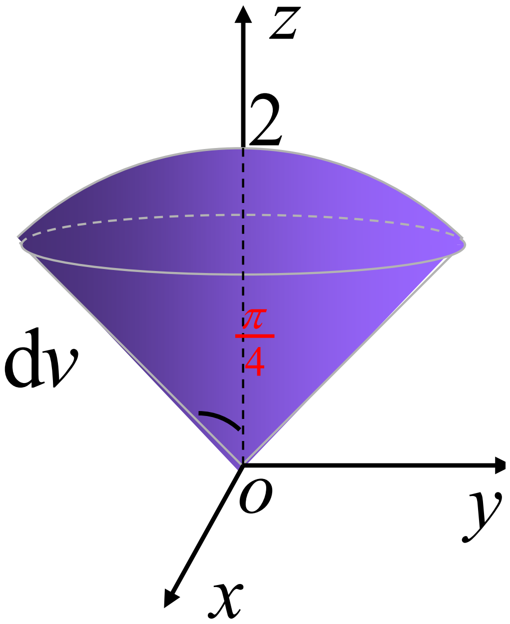
1. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{y}{x+y}e^{(x+y)^2}d\sigma$，其中 D： $x+y=1$， $x=0$ 和 $y=0$ 所围成.

2. 交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)dr \quad (a\geq 0).$$

思考与练习

2. 设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$.



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+\underline{2xy+2yz+2xz})\,\mathrm{d}v$$

利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

用球坐标

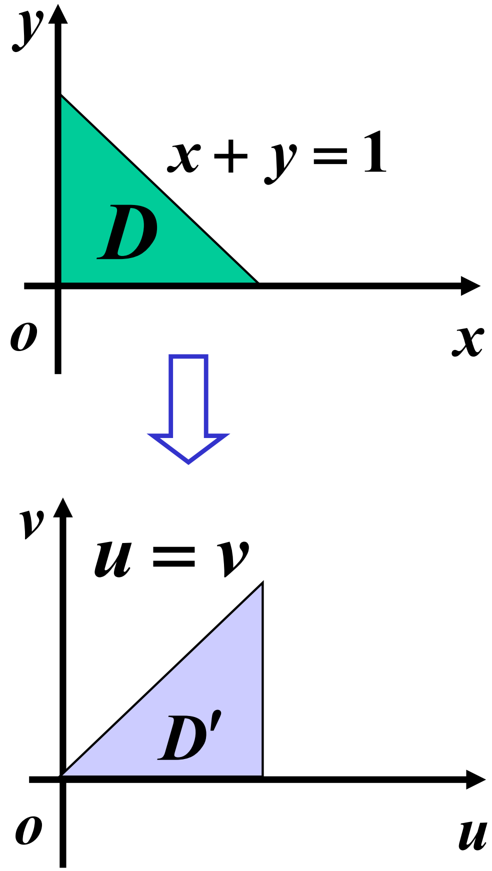
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}\,r=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

课前练习题

1. 计算$\iint\limits_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma$，其中 D：$x+y=1$，$x=0$和$y=0$所围成.

思考题解答

令$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases}$，



雅可比行列式$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$,

变换后区域为

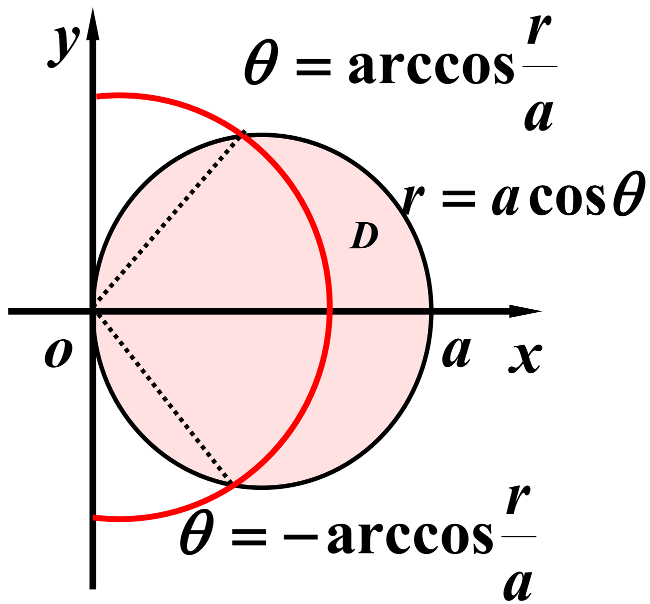
$$\iint_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma = \iint_{D'} f(u,v)\,|J|\,du dv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{u} \cdot e^{u^2} dv = \int_0^1 \frac{u}{2} \cdot e^{u^2} du = \frac{1}{4}(e-1).$$

2. 交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{a\cos\theta}f(r,\theta)dr \quad (a\ge 0).$$

$$D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le r\le a\cos\theta\end{cases}$$

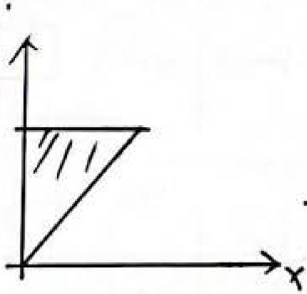


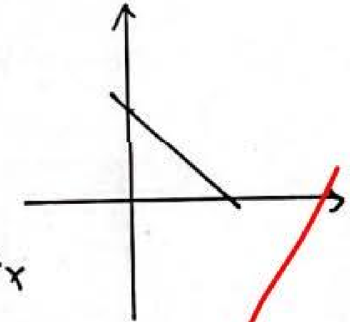
$$I=\int_{0}^{a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)d\theta.$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又设 D 是由直线 $x=0, y=0, x+y=1$ 在第一象限所围成的平面区域.

(1)求证: $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. (2) 求 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x+y)\,dy$





$= \int_0^1 dx \int_x^1 f(t)\,dt$.

$= \int_0^1 dt \int_0^t f(t)\,dx$

$= \int_0^1 t\cdot f(t)\,dt = \int_0^1 x f(x)\,dx$ Q.E.D

(2) 由(1)

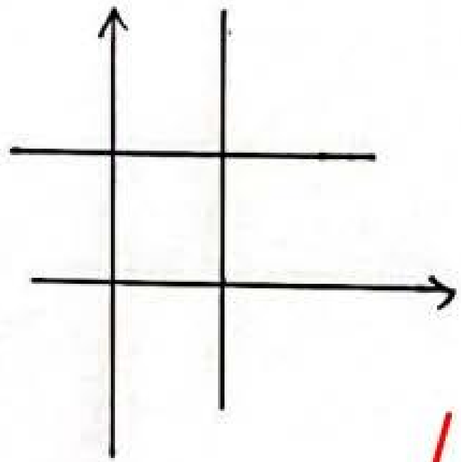
$\iint\limits_D e^{(x+y)^2} dx dy = \int_0^1 x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y \geq 1$.

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 e^{f(x)-f(y)}dy$$

D关于 $y=x$ 对称

$$\int_0^1 dx\int_0^1 e^{f(y)-f(x)}dy$$



$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 e^{f(y)-f(x)}+e^{f(x)-f(y)}dy$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 2\sqrt{e^{f(y)-f(x)}\cdot e^{f(x)-f(y)}}dy=1$$

第四节 重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的重心

四、物体的转动惯量

一、立体体积

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D,$

则其体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 占有**空间有界域 Ω** 的立体的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例1. 求曲面 $S_1 : z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2 : z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积 V.

解: 曲面 S_1 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程为

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0^2 - y_0^2$$

它与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xoy 面上的投影为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad \text{(记所围域为} D\text{)}$$

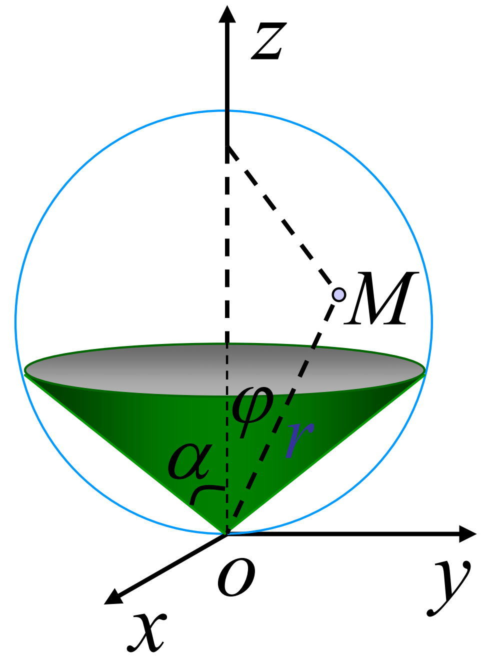
$$\therefore \quad V = \iint_D [2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - x^2 - y^2] \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_D [1 - \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)] \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

令 $x - x_0 = r\cos\theta$, $y - y_0 = r\sin\theta$

$$= \pi - \iint_D r^2 \cdot r \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\,\theta = \pi - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}\, r = \frac{\pi}{2}$$

例2. 求半径为a的球面与半顶角为α的内接锥面上部所围成的立体的体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases} 0 \le r \le 2a\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \alpha \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

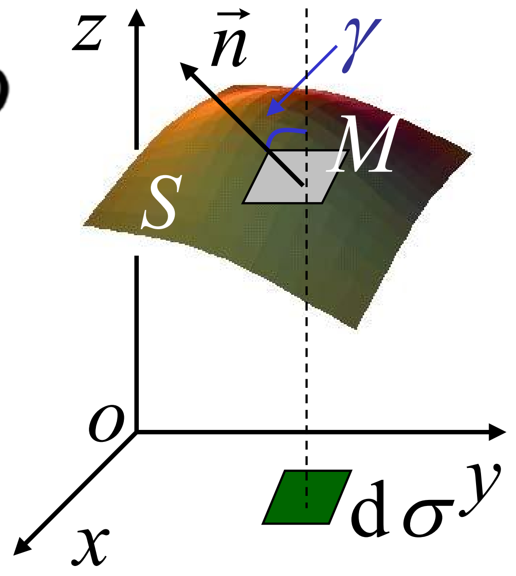
则立体体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$

二、曲面的面积

设光滑曲面 $S : z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$

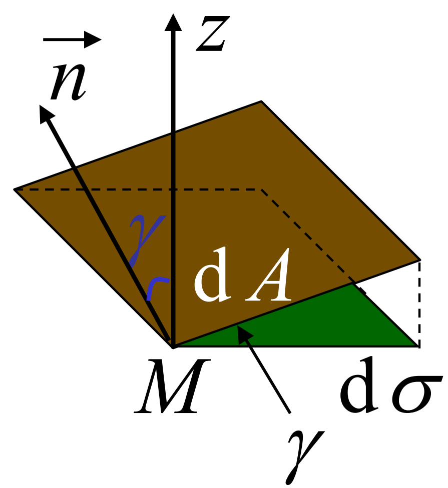


则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}\,A$ 无限积累而成.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}\,A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}\,A = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x{}^2(x,y)+f_y{}^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即

$$A=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2} \, \mathrm{d} z \, \mathrm{d} x$$

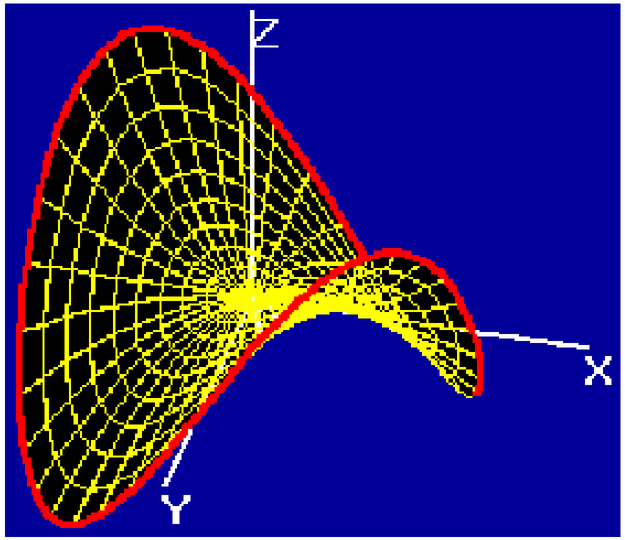
若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \qquad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\therefore \quad A = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d} y$$

例3. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A .

解: 曲面在 xoy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则



$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x^{\ 2} + z_y^{\ 2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi [(1 + R^2)^{3/2} - 1)]$$

例4. 计算半径为 a 的球的表面积.

解: 方法1 利用直角坐标方程.

上半球面的方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

投影区域D $:x^2+y^2\le a^2$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$$

$$A=2\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma=2a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$$

$$=2\pi a^2$$

解：方法2 利用球坐标方程.

设球面方程为 $r=a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$