§3 隐函数导数、参函数导数和高阶导数

1. 隐函数的导数

$y = f(x)$ 称为**显函数.**

由方程 $F(x,y)=0$ 确定 $x \in D \xrightarrow{F(x,y)=0} y$ 的数集

D 上的函数称为**隐函数.**

问题是怎么求它的导数 $y'(x)$?

若能从 $F(x,y)=0$ 中解出 $y = f(x)$, 则OK.

若解不出, 按复合函数求导:

设隐函数为 $y = y(x)$, 在 $F(x, y(x)) = 0$ 对 x 求导,

再解出 $y'(x)$.

隐函数求导例子

例1 求由 $e^y + xy - e = 0$ 所定的隐函数 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

解 在 $e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$ 的两边对 x 求导,

$$e^{y(x)} y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0.$$

故

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$

另当 $x = 0$ 时 $y = 1$, 代入得

$$y'|_{x=0} = -\frac{1}{e}.$$

隐函数求导例子

例2 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线方程.

解 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y(x)^2}{b^2}=1$ 的两边对 x 求导,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0.$$

故 $y'(x)=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$, 即 $y'(x_0)=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}.$

切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0).$

整理得 $\dfrac{x_0x-x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0y-y_0^2}{b^2}=0,$ 即 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1.$

隐函数求导例子

例3 设 $x^y = y^x \ (x>0, y>0)$ 确定 $y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是幂指函数, 取对数 $y\ln x = x\ln y$,

两边对 x 求导, $y'\ln x + \dfrac{y}{x} = \ln y + \dfrac{x}{y}y'$,

即 $$y'\frac{y\ln x - x}{y} = \frac{x\ln y - y}{x},$$

所以 $$y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}.$$

2. 参变量函数的导数

由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的函数 $f: x \to t \to y$ 称为参变量函数.

设 $x=\varphi(t)$ 有连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 都可导,

且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

参变量函数求导例子

例4 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi]$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

所求切线方程为 $$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

参变量函数求导例子

例5 设曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$, 求其切线斜率.

解 C 的参数方程 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$

则其切线斜率为 $$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}.$$

对 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$ 有时要求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, 则 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

3. 高阶导数

定义1　若函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y' = f'(x)$ 在 x_0 处可导,

则称 $f'(x)$ 在 x_0 处的导数为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数,

记作 $f''(x_0)$, 即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0),$$

同时称 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每点处都二阶可导, 则得到一个定义在区间 I 上的 $f(x)$ 的二阶导函数, 记作

$$f''(x), \quad x \in I.$$

高阶导数

同样，我们可以定义二阶导函数 $f''(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的三阶导数.

归纳定义 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数的导数为 $f(x)$ 的 n 阶导数.

统一称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶导数，而 $f(x)$ 为 $f(x)$ 的零阶导数.

$f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数记为

$$y^{(n)}\big|_{x=x_0}, \quad f^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^n y}{dx^n}\Big|_{x=x_0}, \quad 或 \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=x_0}.$$

相应地，把 n 阶导函数记为

$$y^{(n)}(x), \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad 或 \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

高阶求导例子

例6 求 $y = x^n$ (n 为正整数) 的各阶导数.

解 $y' = nx^{n-1}$,

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$,

$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$\cdots\cdots\cdots$

由此可看出

$$y^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, & k \le n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

高阶求导例子

例7 求 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的各阶导数.

解 $y'=a^x\ln a,$

$$y''=a^x\ln^2 a,$$

$$y'''=a^x\ln^3 a,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

由此可看出

$$y^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

特别的 $$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

高阶求导例子

例8 证明 $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2}).$

证 $(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$

所以当 $n=1$ 时结论成立.

假设 $(\sin x)^{(n-1)}=\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2}),$

则 $(\sin x)^{(n)}=((\sin x)^{(n-1)})'=(\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2}))'$

$$=\cos(x+\frac{(n-1)\pi}{2})=\sin(x+\frac{n\pi}{2}).$$

由数学归纳法知结论成立.

同理可证 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2}).$

高阶求导例子

例9 求由方程 $y=1+xe^y$ 所定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数

解 $y'=e^y+xe^y y'$,

简化为 $y'=e^y+(y-1)y'$,

解出 $y'=\dfrac{e^y}{2-y}$,

再求导 $y''=\dfrac{e^y\cdot y'\cdot(2-y)-e^y\cdot(-y')}{(2-y)^2}=\dfrac{e^y\cdot y'\cdot(3-y)}{(2-y)^2}$,

所以 $y''=\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$.

高阶求导例子

例10 求参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所定的参变量函数 $y(x)$ 的二阶导数

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$