第4章　微分中值定理与导数的应用

讨论函数和导数的关系, 从导数的角度看函数性质.

§1 微分中值定理

1. 费马定理

定义1 设函数 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若对 $\forall x \in U(x_0)$,

有 $f(x) \le f(x_0)$, (或 $f(x) \ge f(x_0)$),

则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**(或**极小值**), 统称为**极值.**

称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**(或**极小值点**), 统称为**极值点.**

例 $f(x) = \sin x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 是它的一个极大值,

$\frac{\pi}{2}$ 是它的一个极大值点.

注 极值点 x_0 是定义域的内部点, 极值：局部最大、最小值.

费马定理

定理1(费马定理) 设 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$.

证 不妨设 $f(x)\le f(x_0)$, 则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases}\ge 0, & x<x_0,\\ \le 0, & x>x_0.\end{cases}$$

从而

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

$$f_-'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

由于 $f'(x_0)=f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$,

所以 $f'(x_0)=0$.

驻点

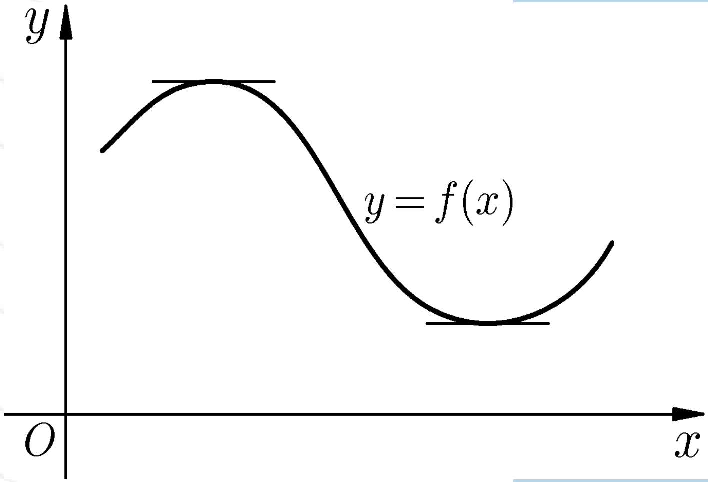
满足 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的**驻点**.

例 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)=\sin x$ 的一个驻点.

费马定理说明: 可导的极值点是驻点,

反之不然.

例 $y=x^3$, $x=0$ 是其驻点, 但非其极值点.



费马定理的几何意义:

可导极值点处的切线与 x 轴平行.

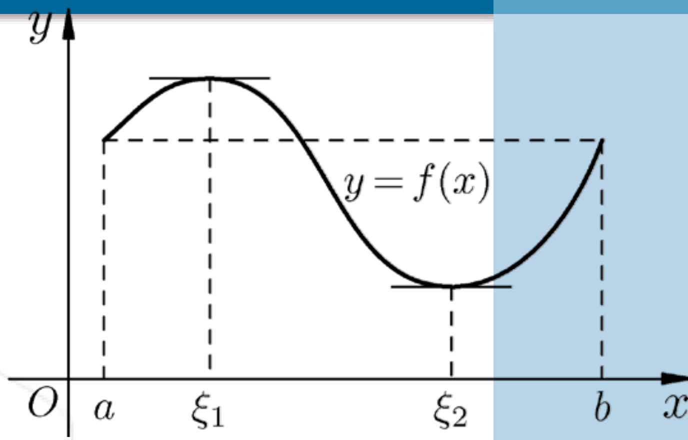
2. 罗尔定理

定理2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=0.$$



证 由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续得

$f(x)$ 有最大值 $f(x_1)$, 最小值 $f(x_2)$.

若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $f(x)=f(x_2)$, 任取 $\xi\in(a,b)$, 有 $f'(\xi)=0$.

若 $f(x_1)>f(x_2)$, 则 x_1,x_2 至少有一在 (a,b) 内取得.

不妨设 $\xi=x_1\in(a,b)$, 则由费马定理知 $f'(\xi)=0$.

3. 拉格朗日中值定理

定理3 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

此公式称为**拉格朗日中值公式.**

证 令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$

则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=f(a),$$

则由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0.$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值定理的应用

拉格朗日中值公式也可以写为:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

或 $f(b)=f(a)+f'[a+\theta(b-a)](b-a),\quad 0<\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}<1.$

推论1 若在(a,b) 内有 $f'(x)=0$, 则 $f(x)=C,\ x\in(a,b).$

证 设 $\forall x_1<x_2\in(a,b)$, 在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理,

$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,$$

即 $f(x_2)=f(x_1)$, 所以 $f(x)=C,\ x\in(a,b).$

拉格朗日中值定理的应用

推论2 若在 (a,b) 内有 $f'(x)=g'(x)$,

则 $f(x)=g(x)+C,\ x\in(a,b).$

证 设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$,

则 $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$

由推论1知 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=C$,

所以 $f(x)=g(x)+C,\ x\in(a,b).$

拉格朗日中值定理的应用举例

例1 证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x,$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

由推论1知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内为常数，由连续性知 $f(x)$ 为常数.

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

所以 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

例2 设 $b>a>0,\ n>1,$ 则有

$$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a).$$

证 设 $f(x)=x^n$, 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,

$\exists\xi\in(a,b),$ 使得

$$b^n-a^n=n\xi^{n-1}(b-a).$$

由 $n-1>0$ 知 $a^{n-1}<\xi^{n-1}<b^{n-1}.$

所以 $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a).$

4. 柯西中值定理

定理3 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

证 由拉格朗日中值定理 $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a) \neq 0.$

令 $$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(a),$$

则由罗尔中值定理知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\varphi'(\xi) = 0.$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x),$$ 所以 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$