



第五章 定积分

- 第一节 定积分的概念
- 第二节 定积分的性质和中值定理
- 第三节 微积分基本公式
- 第四节 定积分的换元法
- 第五节 定积分的分部积分法
- 第六节 定积分的近似计算
- 第七节 广义积分

第一节(1) 定积分的概念

问题的提出

定积分的定义

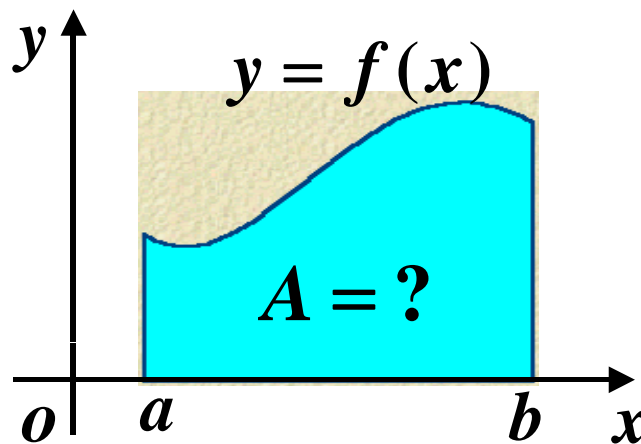
几何意义

定积分存在定理

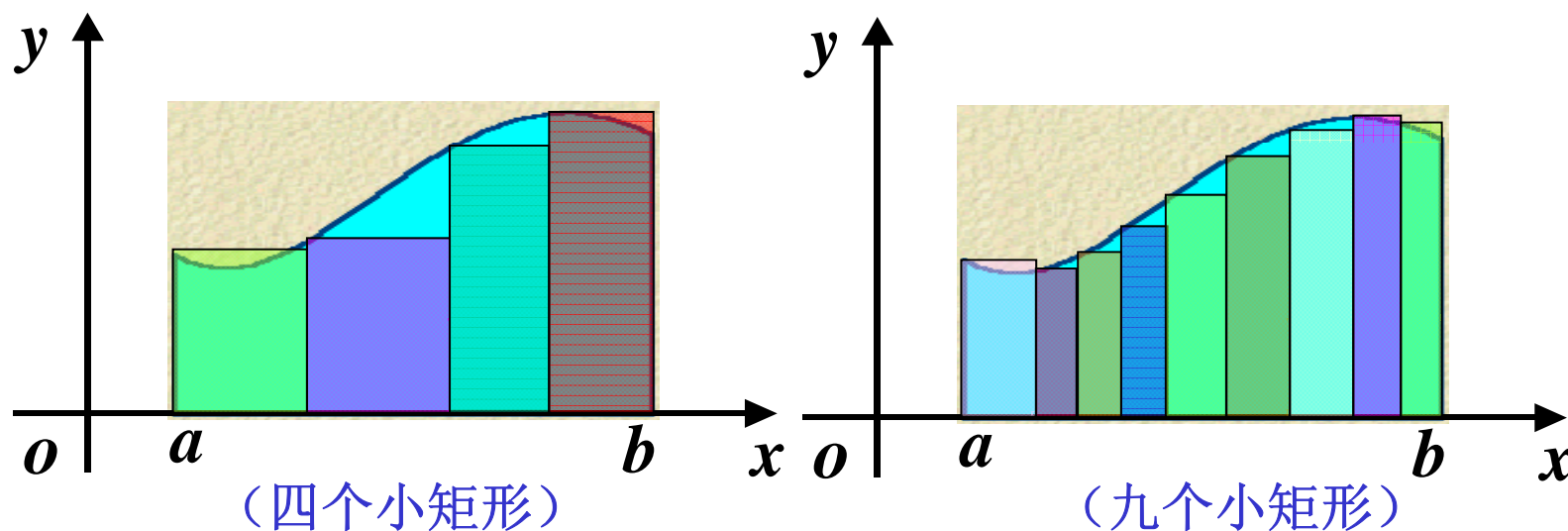
一、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线
 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$)、
 x 轴与两条直线 $x = a$ 、
 $x = b$ 所围成.

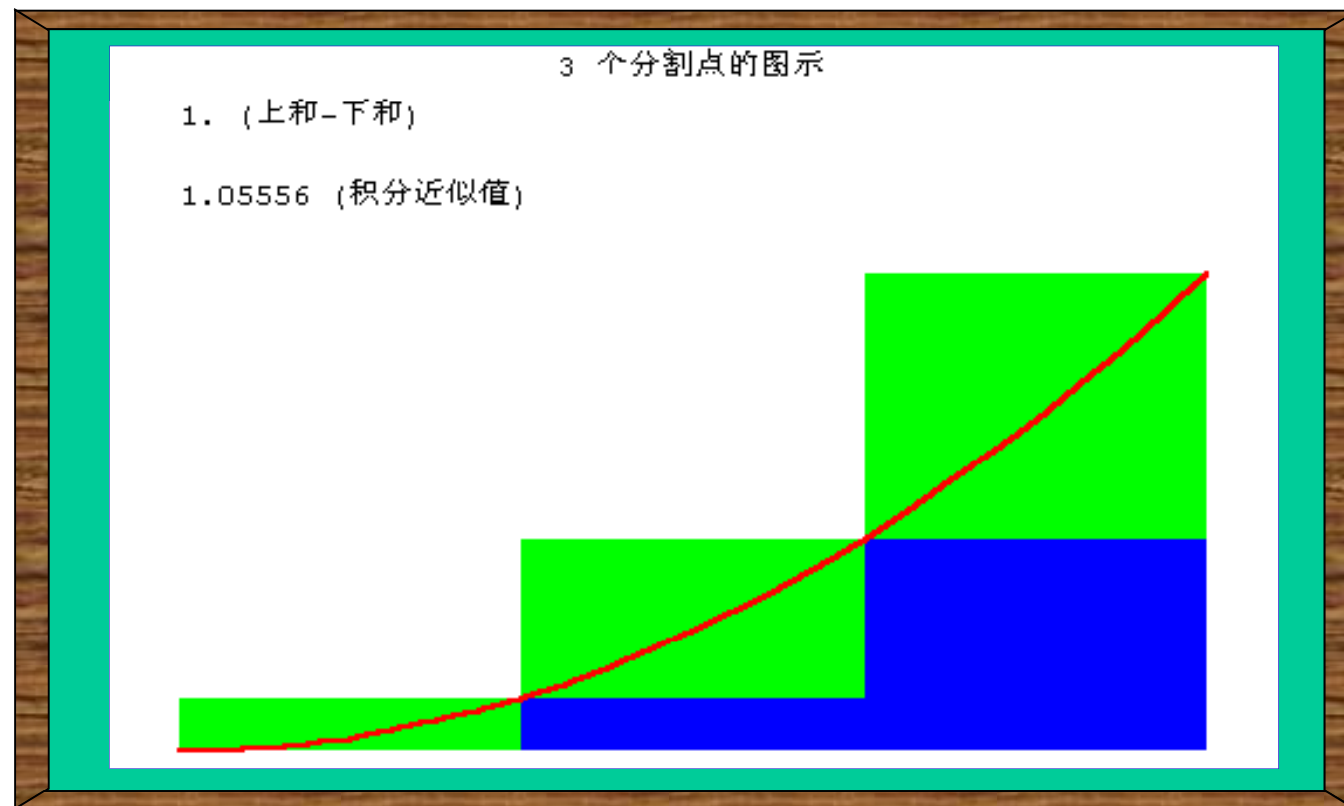


用矩形面积近似取代曲边梯形面积

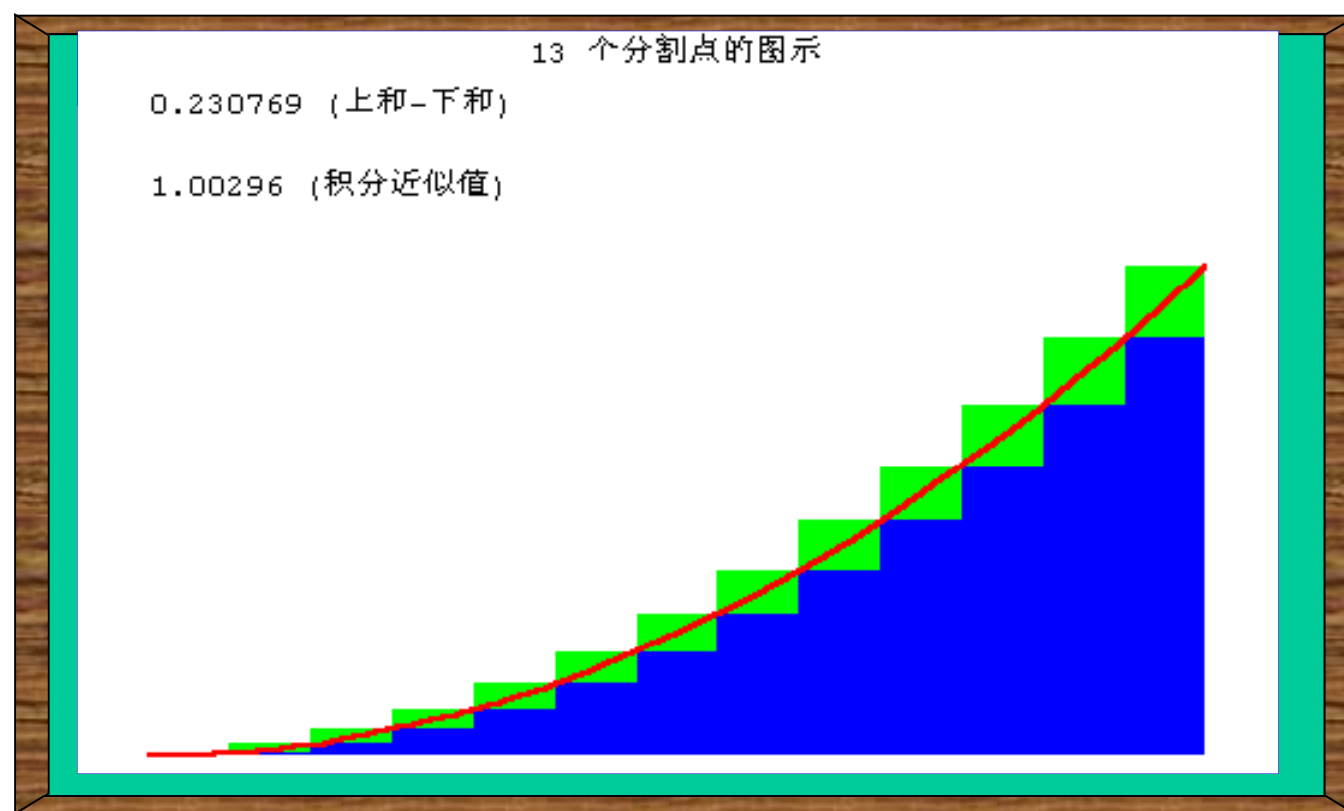


显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积。

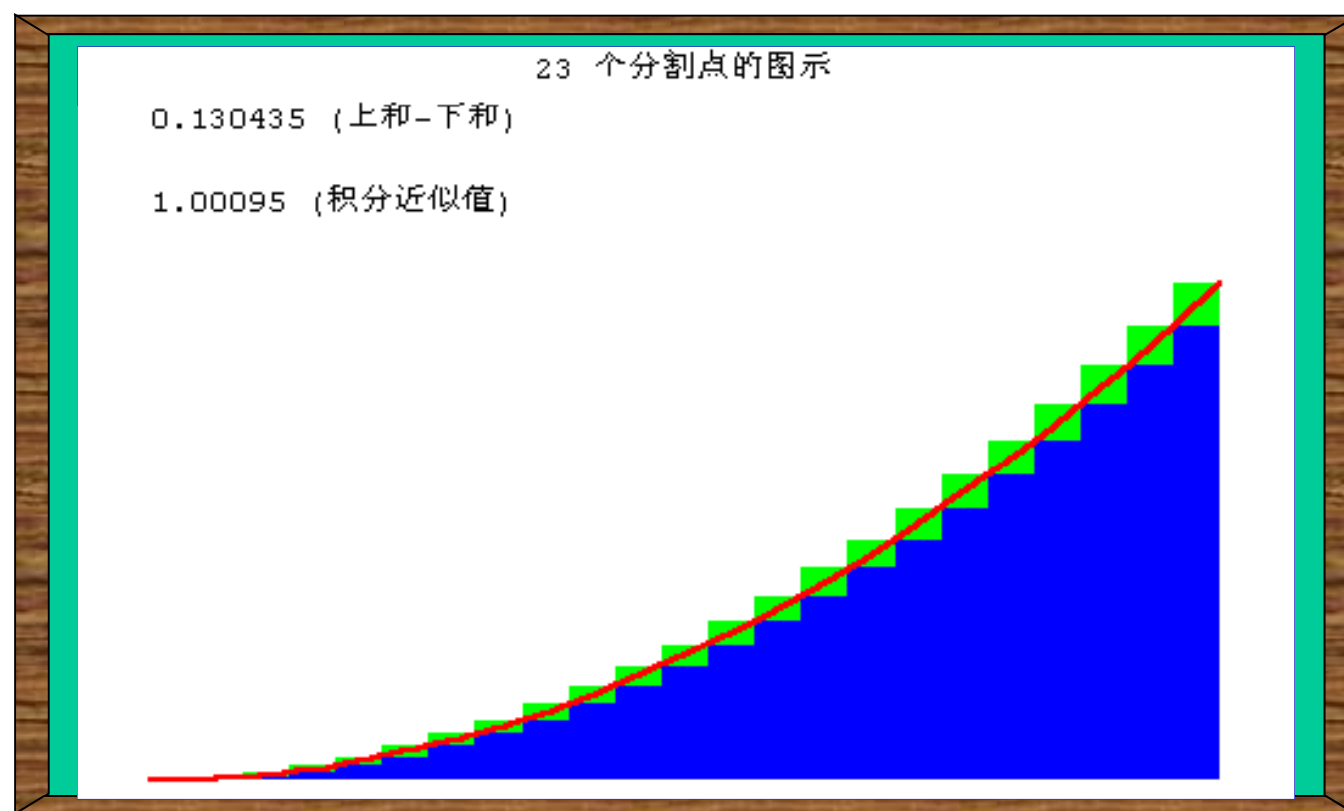
观察下列演示过程，注意当分割加细时，
矩形面积和与曲边梯形面积的关系。



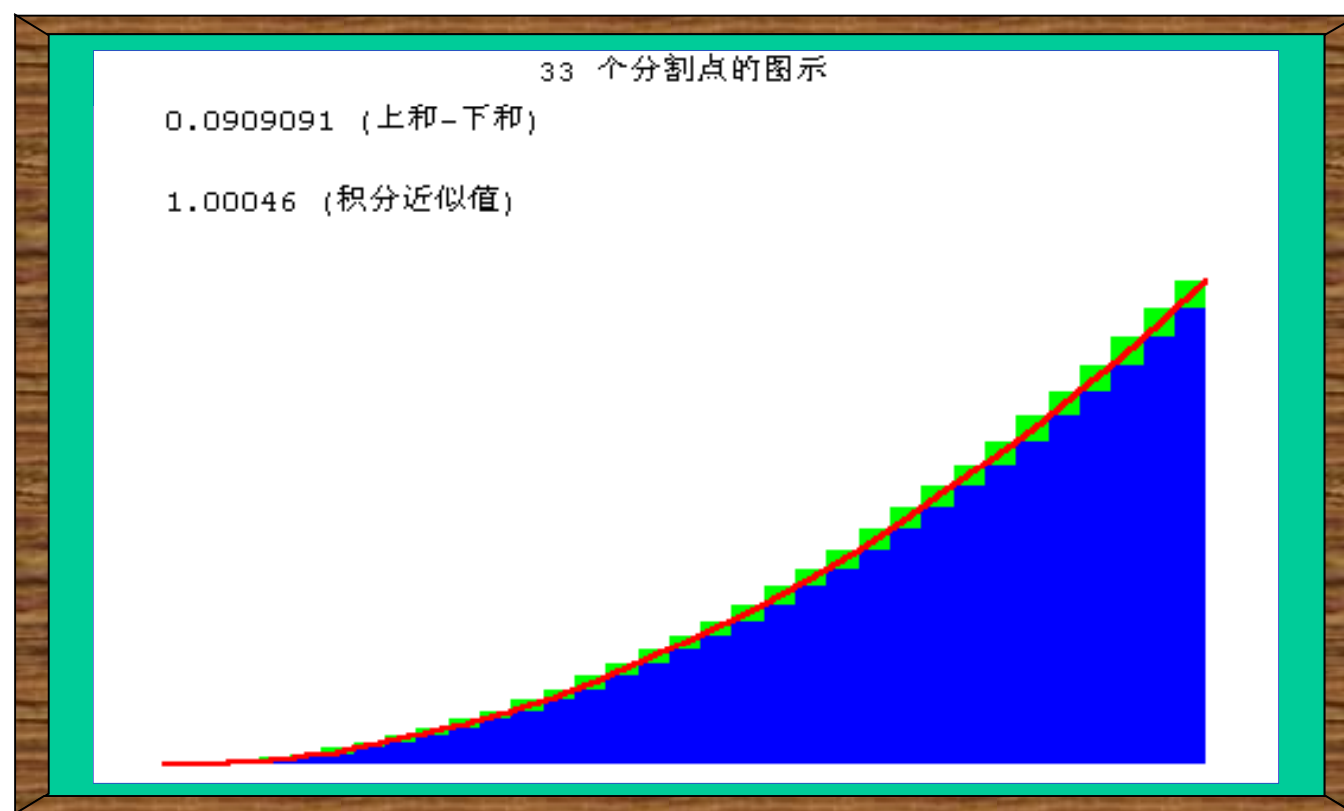
观察下列演示过程，注意当分割加细时，
矩形面积和与曲边梯形面积的关系。



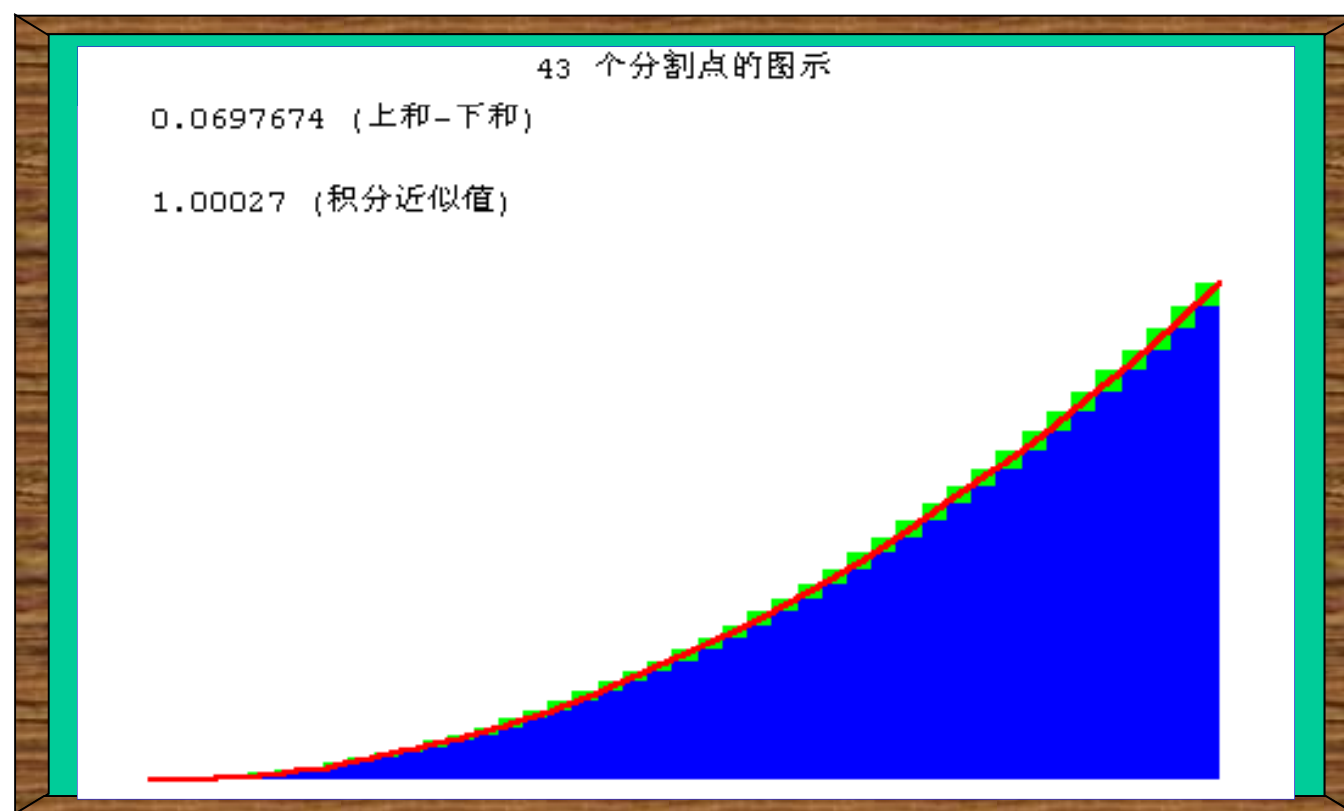
观察下列演示过程，注意当分割加细时，
矩形面积和与曲边梯形面积的关系。



观察下列演示过程，注意当分割加细时，
矩形面积和与曲边梯形面积的关系。

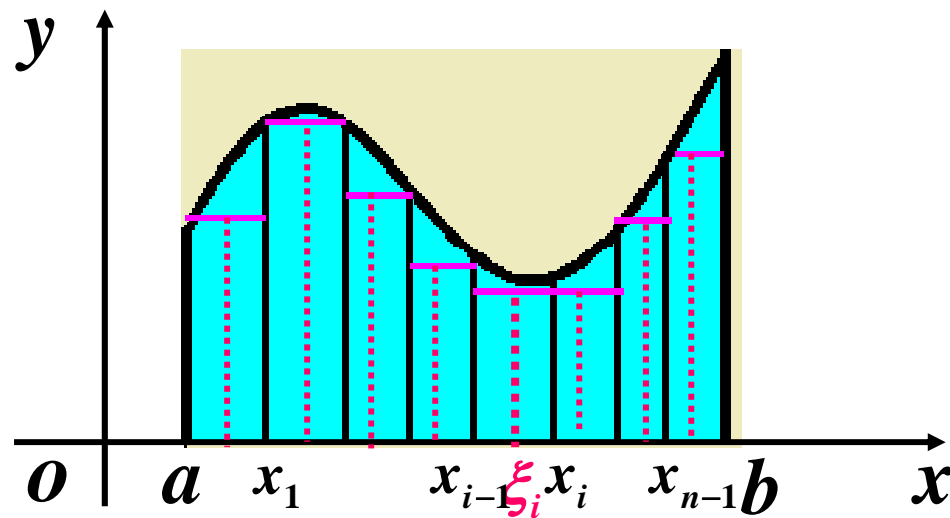


观察下列演示过程，注意当分割加细时，
矩形面积和与曲边梯形面积的关系。



(1) 分割

曲边梯形如图所示，在区间 $[a, b]$ 内插入若干个分点， $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ ，把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ，长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ；



(2) 近似

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ，曲边梯形面积用小矩形面积 (以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底， $f(\xi_i)$ 为高) 近似：

$$A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$$

(3) 求和

曲边梯形面积的近似值为 $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

(4) 取极限

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

趋近于零 ($\lambda \rightarrow 0$) 时,

曲边梯形面积为 $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数，且 $v(t) \geq 0$ ，求物体在这段时间内所经过的路程。

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值。

★ (1) 分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ ★

(2) 近似 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i$

部分路程值 \nearrow \nwarrow 某时刻的速度

(3) 求和 $s \approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$

(4) 取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入

若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 各小区间的长度依次为

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2, \cdots$), 在各小区间上任取

一点 ξ_i ($\xi_i \in \Delta x_i$), 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i = 1, 2, \cdots$)

并作和 $S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$,

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a, b]$

怎样的分法，也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样的取法，只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I ，我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**，记为

The diagram illustrates the components of the definite integral formula $\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$. The formula is written in red. Various parts are highlighted with colored boxes and labeled with callouts:

- 积分上限** (Upper limit of integration): A callout pointing to the upper limit b of the integral symbol.
- 积分下限** (Lower limit of integration): A callout pointing to the lower limit a of the integral symbol.
- 被积函数** (Integrand): A green box around $f(x)$ with a callout pointing to it.
- 被积表达式** (Integrand expression): An orange box around $f(x) dx$ with a callout pointing to it.
- 积分变量** (Integration variable): A pink box around x in $f(x)$ with a callout pointing to it.
- 积分和** (Sum of integrals): A callout pointing to the summation term $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.
- $[a, b]$ 积分区间** (Integration interval): A label for the interval $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

几点说明:

- (1) 定积分是一个数值, 它仅与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) 规定: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$

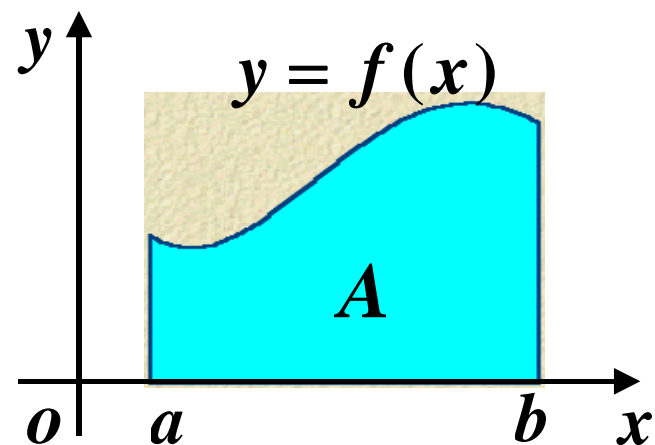
- (3) 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 所表示的和式的极限与 $[a, b]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关.

三、定积分的几何意义

$$f(x) \geq 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

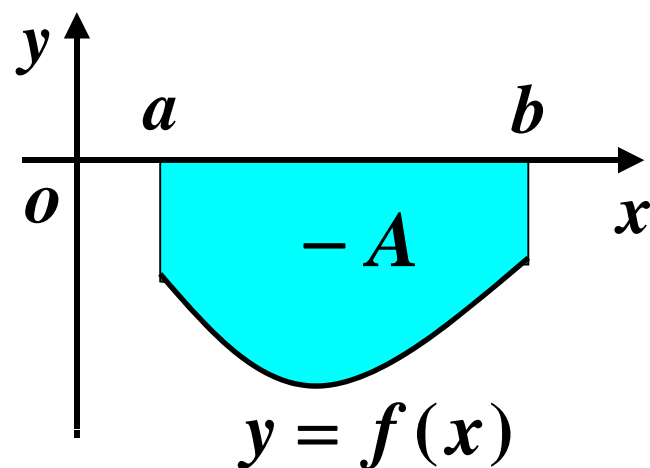
曲边梯形的面积



$$f(x) \leq 0,$$

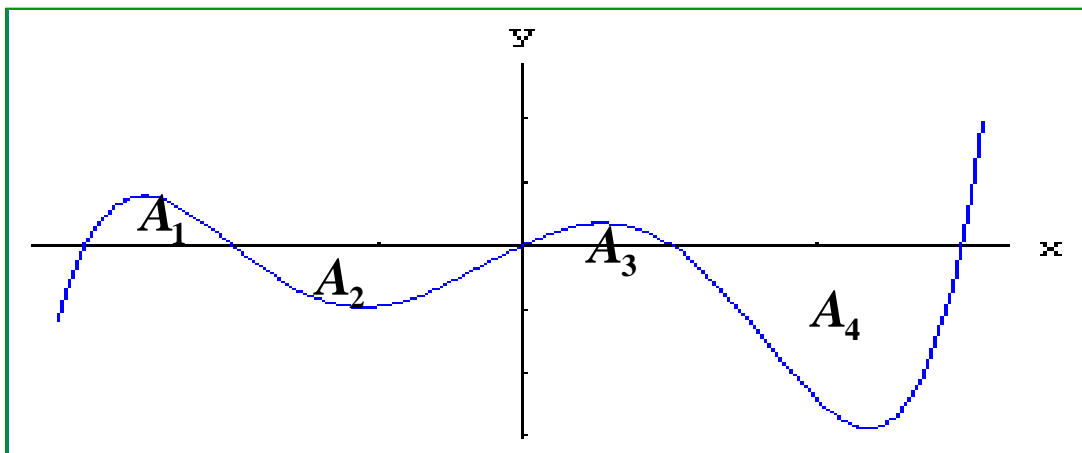
$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

曲边梯形的面积
的负值



三、定积分的几何意义

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 变号时,

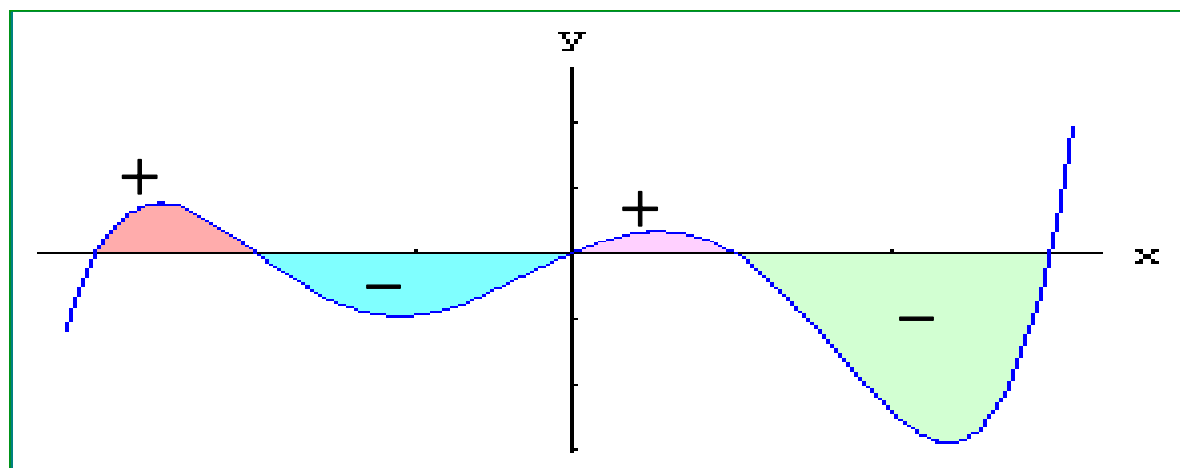


$\int_a^b f(x)dx$ 是面积的代数和.

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x = a, x = b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



四、定积分的存在定理

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时,
 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界,
且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在
区间 $[a, b]$ 上可积.

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

因为 $\int_0^1 x^2 dx$ 可积, 故和式极限与区间的分法及 ξ_i 的选取无关.

解 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

取 $\xi_i = x_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i,$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right), \quad \lambda \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}.$$

几何上是曲线 $y=x^2$,直线 $x=1$ 及 x 轴围成的曲边三角形面积.

例2 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

解 在 $[1,2]$ 中插入分点 q, q^2, \dots, q^{n-1} ,

典型小区间为 $[q^{i-1}, q^i]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

小区间的长度 $\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q - 1)$,

取 $\xi_i = q^{i-1}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1} (q - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^n (q - 1) = n(q - 1) \quad \text{取 } q^n = 2 \text{ 即 } q = 2^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = n(2^{\frac{1}{n}} - 1),$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \ln 2,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln 2.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

把 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ 表示成定积分

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \xi_i} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或者} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

例3：将下列和式极限表示成定积分。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sin \frac{i\pi}{n} \right) \cdot \frac{\pi}{n}$$

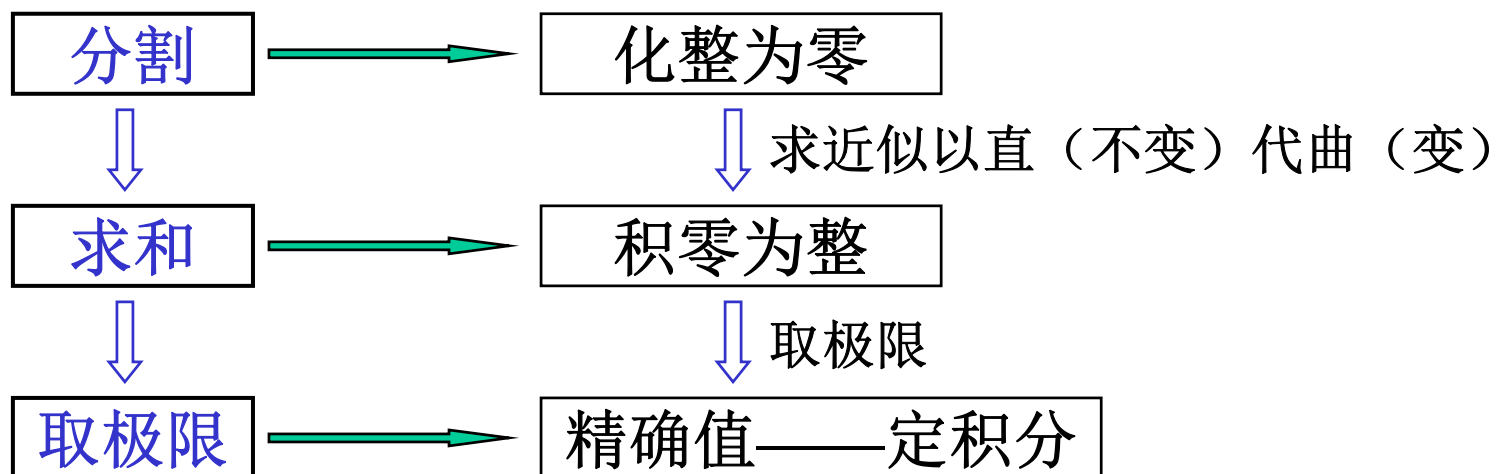
ξ_i Δx_i

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

五、小结

1. 定积分的实质：特殊和式的极限。

2. 定积分的思想和方法：





1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且取正值.

试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}$.

2: 将和式极限, 表示成定积分.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right]$$

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且取正值.

试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}$.

证明 利用对数的性质得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} \\ &= e^{\ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} \right)} \end{aligned}$$

极限运算与对数运算换序得

$$\begin{aligned} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} \right)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

指数上可理解为： $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和． 分割是将 $[0,1]$ n 等分

分点为 $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$
所以 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有意义且可积,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln f(x) dx$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$
$$= e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

2: 将和式极限, 表示成定积分.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right]$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$



利用定积分的几何意义，说明下列等式：

$$1、\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} ;$$

$$2、\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx ;$$