http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzA3ODIzMDI1OA==&mid=502481458&idx=1&sn=efb866781cf786cf722f6e260cef5a6b&chksm=074205af30358cb9d089da2df656a7572af14b9f78596e10e817f39bb5788603b3dd28ef5878&mpshare=1&scene=23&srcid=0127ICMYKqdl6zCFYGBYRqsT#rd

线性代数期末备考指南

2017-06-18沈铎

线性代数期末备考指南

本文是数院学长根据学习经验参考各类资料归纳总结写作，仅供参考使用。考试复习还应以教材和老师上课内容为准。

本文图片原图，往年考题在文末“阅读原文”通过链接可以得到。

一、行列式

线性代数考试，一般第一个大题都会是行列式的计算。一般题目都会需要使用一定的技巧达到巧算的目的。

我们先来看看几道考试题目

这个明显看到第一行可以乘以-1 加到其他行，从而消去后面行的 1 元素，从而变成对角阵。

这个方阵元素是循环变化的，可以看到每列元素之和是一样的。那么可以先把所有行加到第一行，因为和是一样的就可以提出公因子，之后就可以用第一行消去其他行的 a 元素变成对角阵

例如这道考题，每个元素都含有 1，先用第一列乘以-1 加到其他所有列，然后再从第一行打开，耐心仔细一点算就会发现规律。如下：

这个考题你当然可以用第一列乘上-1 加到其他列，但我们其实可以直接拆分第一列：

这是在行列式阶数大于等于 3 的情况下的结果，对于 n=1 与 n=2，是可以马上得到的。注意分情况讨论！

这个题方法跟上一题是一样的，把行列式从第一列按 x 与 y 拆开。也要记得讨论 n=1 与 n=2 的情形。

而像这个，第一行元素很少，从第一行展开以后，如果我们令原式为 Dn，发现出现了递推的规律。

要注意这是在 a 不等于 b 的情况下得到的结果，当 a=b 时，应当从<1>式两边同除以 a^n 化成等差数列直接递推得到。(若 a=b=0 则从原式 Dn=0)

有很多同学可能不是太清楚递推数列应该怎样求通项。这里给大家总结一下几种常见数列递推的求法。

那么总而言之，行列式求值题，对于不同类型的行列式，要见招拆招。
我们最后希望达到的目的是变成对角阵等便于求值方阵形式。我们可以通过观察考虑选择如下一些方法，总结如下：

1. 有某行或某列元素个数很少，可以从这一行（列）直接打开。
2. 有某一行（列）可以用来消去其他行（列）：常用于行（列）之间元素构成基本相同，或者某一行（列）元素恒为常数的情况。
3. 每行之和或者每列之和是常数：从而可以累加到某一行（列）从而提出公因子，形成某行（列）只有 1 可以用来消去其他行（列）：常对于元素是循环变化的方阵，元素类别很少的方阵，可以考虑。
4. 对于每行（列）元素个数不多的情况，依照第一行打开以后，剩下的方阵会呈现出于原方阵类似的元素组成。考虑使用数列递推的方法或者数学归纳法求解。
5. 每个元素都是两项之和 a+b 的形式，且元素相似：可以考虑拆分开来分别化简。
6. 对于行（列）之间元素出现幂次的递增的情况，考虑利用范德蒙行列式，把方阵化为可以归结为范德蒙行列式的情况。

有时可能要通过一两步计算真正才能找到规律，大家需要细心验证。
对于 n 阶行列式，一定要注意考虑对 n=1，n=2 是不是有特殊情况，以免出错！

二、矩阵与线性变换
关于矩阵的考题会比较灵活一点，计算题和证明题都有可能出现。关键在于清楚矩阵与线性空间相关的定义和性质：

1. 矩阵的概念，注意上（下）三角阵等特殊矩阵
2. 矩阵的运算：矩阵加法、乘法，数乘。
3. 矩阵的转置、伴随、行列式，逆矩阵。注意一些性质，这里很喜欢出一些小题目。尤其很多同学对于矩阵的伴随的求法不太理解，要着重注意。

4. 分块矩阵，初等矩阵，初等变换
5. 向量运算，线性相关性，正交性
6. 极大无关组，基，矩阵的秩 注意关于矩阵的秩的等式、不等式。

7. 线性变换，线性变换的矩阵表示，转移矩阵

我们来看几个考试题

第一个题可以看做第二个题的一种特例。我们解第二个。对于这类逆矩阵的证明，就是利用“凑法”。从给出的矩阵得到的恒等式入手来凑。

这类与具体元素有关的题目，最直接的有效方法就是带入硬算。根据条件发现规律：

注意一些容易错的小题目 一个数乘上矩阵，求行列式时会提出来这个数的 n 次方注意

因为 A 的伴随等于|A|乘 A 的逆，所以 A 的伴随的逆就是 A·|A|^(-1)

对于线性相关性，极大无关组的考察的题目，注意可以划归为矩阵的化简

第二个题目就是求矩阵的秩，做行初等变换

这个题目不难，关键就在于理解线性空间基的概念。那么对于多项式空间，基就是 x 的逐个幂次。这个题转化成向量的极大无关组问题。

总的来说，注意下面这些题型与方法：
1. 矩阵的运算。
注意对于方阵幂 A^n 的运算，常见的有：
(1)利用矩阵对角化 (2)利用分块矩阵 (3)利用数学归纳法 (4)递推 (5)拆分再利用二项式定理，适用于矩阵组成较简单可以拆分成单位阵和幂零阵的情况。

2. 逆矩阵的计算，逆矩阵的证明

注意运算时要小心。对于逆矩阵的证明，掌握单位阵技巧

3. 求解矩阵方程
注意先做适当变形，有些可以直接求逆运算

4.求转移矩阵，求线性变换的基，矩阵表示。

一下矩阵的迹，虽然可能考察不多，但是可以妙解许多问题。尤其注意 tr(A·A')为 A 的所有元素的平方和。相似矩阵的迹是相同的。

矩阵是十分重要的基础，主要还是结合后面的内容来考查，一定要巩固好。

三、线性方程组
基本要点：

1. 线性方程组解的判定，分为齐次方程与非齐次方程两种情况。对非齐次的情况，注意对增广矩阵进行讨论如下图。
2. 线性方程组解法。
3. 线性方程组解的性质与解的结构。

常见的题型有：

考前要找几个题目练习几次这样的计算。

含参数的线性方程组解的讨论的问题，本质上是系数矩阵和增广矩阵秩的讨论

这个考题翻译成矩阵的语言：

总结：关于线性方程组解的问题，都应该主动化归为对矩阵的讨论
1.直接求解问题，注意仔细计算，算完以后带一个方程进去验证一下，以免失误。

2. 含参数的方程组解的讨论问题，将增广矩阵做初等行变换，对矩阵的秩进行讨论

3. 线性方程组求解问题，为我们判断矩阵的秩提供了一个很好的方法：要证明两个矩阵 A 和 B 的秩是一样的，只要证明 Ax=0 与 Bx=0 同解即可，即 Ax=0 的解都是 Bx=0 的解，Bx=0 的解都是 Ax=0 的解。

4. 方程组的求解，本质上是对线性相关性的描述：Ax=β有解，可以理解为：β可以被 A 矩阵的列向量线性表示。对矩阵方程可以类似理解。

5. 线性方程组求解问题有几何背景：
(1)n 条直线相交于一点，充要条件是 n 条直线方程联立的线性方程组有唯一解。
(2)n 个点在同一条曲线或者直线或者平面上：把点坐标带入曲线或平面方程，联立得到一个关于以方程系数为未知数的线性方程组。求解可得曲线或平面方程。
(3)平面上三点不共线意味着

如果共线那么如上行列式等于 0

四、特征值与对角化
基本要点：
1. 特征值与特征向量的定义、性质 尤其是特征值的性质常常作为小题出现。

还应该注意关于某一个特征值的特征向量是可以组成一个线性空间的（特征向量乘上一个数还是特征向量，关于同一个特征值的两个特征向量相加还是特征向量），我们一般把它叫做特征子空间。
希望大家了解一下特征值的几何重数与代数重数，后面讲解试题也会提到。对 A 的特征多项式 det(λ*I*-*A*)=0 的根λ是为 A 的特征值
代数重数：λ在特征多项式中的重数（即λ为几重根）
几何重数：A 关于特征值λ，有几个线性无关的特征向量。即(λI-A)x=0 解空间的维数
对任一特征值，其几何重数小于等于其代数重数
矩阵可对角化的充要条件：矩阵每个特征值的几何重数等于其代数重数。

2. 矩阵相似，矩阵相似的性质

3. 实对称矩阵，实对称矩阵的对角化
4. 二次型的基本概念，合同变换，正交相似性

这部分内容基本上都会出现有证明题。对于特征值，特征向量，尤其是矩阵对角化、正交相似是常考的证明题。

这个直接计算即可，不过注意实际上求的是 A 转置的特征向量。

我们常用的证明方法，就是证明矩阵每个特征值的几何重数等于其代数重数。这是矩阵可对角化的充要条件。解答如下：

这个用线性变换的概念更好理解，用矩阵来写，可能有些含糊。如下：

这个考题，秩的等式是显然的，否则 S 不可能是一个满秩阵。这个题关键就是分块矩阵的运算，这也是很多同学头晕的地方：记住，分块矩阵计算就跟平常矩阵一样，把分块看做是平常一样的矩阵的元素去计算，行列标齐即可！解答如下：

涉及到实对称阵，大家要马上想到它可对角化，那么不失一般性，有时我们就可以直接把它看做对角阵来进行计算和证明。解答如下：

证明相似于对角阵，关键还是利用有完全的特征向量系来理解。

证明全空间 V 是两个子空间的和，那么就是 V 的任一个向量都可以写成这两个子空间中向量的和。常用方法就是利用等式凑。第二问已经提示你了。而证明两个空间相交为 0，就证明如果有一个向量同时属于这两个空间，那么它一定是 0 向量。

总的而言，我们注意如下一些方法：

1. 矩阵可对角化的判定

2. 实对称阵正交相似于对角矩阵。在证明了不失一般性的情况下，我们常可以把题目中某个实对称阵认为是对角阵。

3. 常常与线性方程组解空间的维数联系在一起，理解几何重数与代数重数，常常很方便用于判定矩阵是否可以对角化。

下面的方法总结来自数院谢启鸿教授修订的高等代数白皮书，值得大家参考。第五第六种对大家不作要求。

备考建议

1. 对许多同学来说：高数的关键在于会不会算，而线代关键就在于算不算得对了。备考一方面基本概念、方法思路是最重要的，但也务必注重对计算的训练。考前要拿一些题目上手练练，但也不要把书上每个题目都算一遍这样太浪费时间，提倡进行有针对性地练习：
   矩阵的求逆、求伴随，线性方程组的求解，求矩阵的秩，行列式计算，求基变换过渡矩阵，求特征值特征向量，求相似矩阵，求合同标准型，将二次型化为标准形式。

2. 考场上时间很关键，考前最好能够有一次模拟考试。因为平时练习一般不太注意掌控时间，但是在考场上时间很紧，没有哪道题可以花费半个小时以上的时间。因此模拟一次有助于让你体验在时间紧迫地情况下做题的感觉。

3. 线性代数有些题目需要一点巧妙的方法，可能你一下想不到，尤其在很紧张的考场上往往你很难"灵机一动"。所以，前面的题目没思路了，直接看下面不要太多浪费时间精力。把最后一个题目都做出来了但前面的有个小题却不会这也是常有的事。但是注意小题一般也就只有最后两个可能难一点，还是要着重保证正确。

4. 大家可以发现，线性代数的题目不像高数、数分题有时那么天马行空：总归会看到过类似的形式，总有一些可以写的推断。因此，有时间务必把你会的写上去，多写点会有助于得分。这个主要是针对证明题。

5. 一些常用的代数的语言，大家注重积累，V 表示空间，字母α、β常表示向量，λ、μ表示特征值， 一般 P、Q 表示相似关系的转移矩阵，T，ψ，φ表示线性变换等等，虽然不一定非要这么写，但多积累点防止你临阵想不起要用什么字母表示。

6. 考前不要熬夜，注重复习效率。好的精神状态能有不少加分！

致谢
感谢谢启鸿教授的指点。感谢数院学工组老师们的支持。
感谢陈建兵同学、龚译凡同学对本文的校对、订正。
感谢学校老师和同学们本学期对数院大神答疑活动的支持。
祝大家考试顺利！考前数院大神答疑小组依然照常进行答疑活动，有问题欢迎大家来问。

参考文献

《高等代数学习方法指导》(第三版) 姚慕生 谢启鸿 编 著 复旦大学出版社
《线性代数》 张巍 阚海斌 倪卫明 编 著 科学出版社
《线性代数同步辅导与复习提高》 金路编 复旦大学出版社