例1 考察正方形面积

$$S = x^2,$$

它的微小增量

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$$

$$= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

=是 Δx 的线性(一阶or一次) + Δx 的高阶无穷小.

$2x_0\Delta x$ 称为 ΔS 的线性主部.

1. 微分概念

定义1 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可微,

并称 $A\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y\,|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x_0).$$

即 $\mathrm{d}y\,|_{x=x_0}=A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)=A\Delta x.$

当 $A\neq 0$ 时，称 $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 是 Δy 的线性主部.

可微即可导

定理1 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可微的充要条件是

$y=f(x)$ 在点 x_0 处的可导.

证 "$\Rightarrow$" 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可微，则 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A,$$ 即 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可导.

"$\Leftarrow$" 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可导，则

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x, \qquad \alpha\Delta x = o(\Delta x),$$

所以 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的可微.

这时 $$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

几何意义

当 $y = x$ 时，有 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y = 1 \cdot \Delta x$ 比较得 $\mathrm{d}x = \Delta x.$

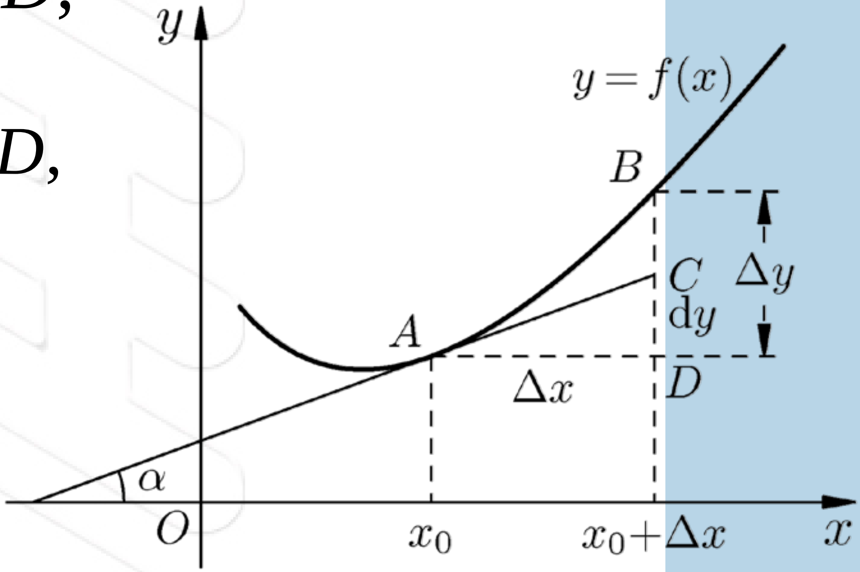
所以一般微分写成 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,$ 也是用这个公式计算的.

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = AD \cdot \tan\alpha = CD,$$

全增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = BD,$

当 Δx 很小时，$BD \approx CD.$

点A附近的曲线段近似于切线段.



基本初等函数的微分公式

(1) $dC=0.$ (2) $dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}dx.$

(3) $da^{x}=a^{x}\ln a dx,$ $de^{x}=e^{x}dx.$

(4) $d\log_{a}x=\dfrac{1}{x\ln a}dx,$ $d\ln x=\dfrac{1}{x}dx.$

(5) $d\sin x=\cos x dx,$ $d\cos x=-\sin x dx,$

$d\tan x=\sec^{2}x dx,$ $d\cot x=-\csc^{2}x dx,$

$d\sec x=\sec x\tan x dx,$ $d\csc x=-\csc x\cot x dx.$

(6) $d\arcsin x=-d\arccos x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx.$

$d\arctan x=-d\,\mathrm{arc}\cot x=\dfrac{1}{1+x^{2}}dx.$

微分法则

(1) $d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x),$

(2) $d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x),$

$$d[ku(x)] = kdu(x),$$

(3) $d[\frac{u(x)}{v(x)}] = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)},$

$$d[\frac{1}{v(x)}] = -\frac{dv(x)}{v^2(x)}.$$

(4) 复合函数微分 $d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)dx.$

一阶微分形式的不变性

当 $y=f(u)$, 有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$,

当 $y=f(u), u=g(x)$, 有 $\mathrm{d}y=f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$,

$\xrightarrow[\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x]{u=g(x)}$ 也有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$

所以，不论 u 是自变量，还是中间变量,

$y=f(u)$ 的微分 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 在形式上完全相同.

这个性质称为**一阶微分的形式不变性**.

微分举例

例2 设 $y = e^{1+2x}\cos x$, 求 dy.

解 $dy = d(e^{1+2x}\cos x) = d(e^{1+2x})\cos x + e^{1+2x}\,d\cos x$

$$= 2e^{1+2x}\cos x dx - e^{1+2x}\sin x dx$$

$$= e^{1+2x}(2\cos x - \sin x)dx.$$

例3 设 $y = x^2\ln\sin x$, 求 dy.

解 $dy = d(x^2\ln\sin x) = \ln\sin x dx^2 + x^2 d\ln\sin x$

$$= 2x\ln\sin x dx + x^2\frac{1}{\sin x}d\sin x$$

$$= (2x\ln\sin x + x^2\frac{\cos x}{\sin x})dx.$$

微分在近似计算中的应用

当 Δx 很小时,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

即 $$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

我们用公式

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

计算 x_0 附近的函数的近似值.

近似计算举例

例3 求 $\sqrt{0.97}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$, 取 $x_0=1, \Delta x=-0.03$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'(1)=\frac{1}{2}.$$

$$\sqrt{0.97}\approx\sqrt{1}+(\sqrt{x})'|_{x=1}(-0.03)$$

$$=1+\frac{1}{2}(-0.03)=0.985.$$

误差估计

设某物量(如长度)的客观值 A, 仪器测得 a (近似值).

则 称 $|A-a|$ 为 A 的**绝对误差**, $\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 为 A 的**相对误差.**

一般可依仪器精度, 得到:

$|A-a| \le \delta_A$ 中的 δ_A: **绝对误差限,**

$\dfrac{|A-a|}{|a|} \le \dfrac{\delta_A}{|a|}$ 中的 $\dfrac{\delta_A}{|a|}$: **相对误差限.**

设 x 的近似值是 x_0, 绝对误差限为 δ_x, 即 $|\Delta x| \le \delta_x$.

则 $y = f(x)$ 的绝对误差限为 $\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$,

$y = f(x)$ 的相对误差限为 $\dfrac{|f'(x_0)|\delta_x}{|f(x_0)|}$.

例5 设测得圆板直径 $d_0 = 50.5,$ 绝对误差限为 $\delta_d = 0.04,$

试估计圆面积的误差(限).

解 由 $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ 得

S 的绝对误差限

$$\delta_S = S'\delta_d = S'(50.5)\times 0.04 = \frac{\pi}{2}\times 50.5\times 0.04$$

$$= 1.01\pi \approx 3.173.$$

S 的相对误差限 $\dfrac{\delta_S}{S} = \dfrac{S'\delta_d}{S} = \dfrac{\frac{\pi}{2}\times 50.5\times 0.04}{\frac{\pi\times 50.5^2}{4}} = \dfrac{0.04\times 2}{50.5} \approx 0.158\%.$