高等数学B期中测验试题答案

一、（1）求函数 $f(x)=\sqrt{25-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域；

解： 要使函数有意义，必须 $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0, \\ x-1>0. \end{cases}$

所以所求的定义域为 $[-5,5]\cap(1,+\infty)=(1,5]$.

（2）设 $f(x)=x^2+2x+3$, 求 $f(x+2)$;

解：$f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11.$

（3）证明函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明： $$|f(x)|=\left|\frac{\sin x}{1+x^4}\right|\le|\sin x|\le 1.$$

因此函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}$ 有界.

二、计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{x^2+5}$;

解： $$\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{x^2+5}=\frac{2-1}{1+5}=\frac{1}{6}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+x^2})=-2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$;

解： $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

解：$\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(x+e^{x}\right)}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{x}}{x+e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{x^2\sin x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arctan x}(e^{x-\arctan x}-1)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\arctan x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\arctan x}(1-\frac{1}{1+x^2})}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{x^2\sin x}=\dfrac{1}{3}$.

三、求下列函数的导数或微分：

（1）设 $y=3x^2-x+6$, 求 y';

解： $y'=6x-1.$

（2）设 $y=e^x\cos 3x$, 求 dy;

解：$y'=e^x\cos 3x+e^x(-3\sin 3x)$

$$=e^x(\cos 3x-3\sin 3x),$$

$$dy=e^x(\cos 3x-3\sin 3x)dx.$$

（3）设 $y=\arctan\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，求 y';

解：$y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{x^4+1}$.

（4）设 $y=x^{\cos\frac{1}{x}}$，求 y'.

解：取对数 $\ln y=\cos\dfrac{1}{x}\cdot\ln x$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x+\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'=x^{\cos\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right).$$

四、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点并说明其类型，

若是可去间断点，则补充定义函数值后使它连续.

解： 由函数表达式知，$f(x)$ 间断点是 $x_1=0, x_2=2, x_3=-2.$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|\left(x^2-4\right)}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-2x}{|x|\left(x^2-4\right)}=-\dfrac{1}{2}$ 知

$x_1=0$ 是 第一类跳跃间断点.

由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$ 知 $x_2=2$ 是可去间断点.

补充定义 $f(2)=\dfrac{1}{4}$, 则函数在 $x=2$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\infty$ 知 $x_3=-2$ 是第二类间断点.

五、（1）求曲线$e^y + xy = e$在点$(0,1)$处的切线方程和法线方程.

解：在方程两边求导

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{y}{e^y + x}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{e}.$$

所求的切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{e}(x - 0).$$

法线方程为

$$y - 1 = e(x - 0).$$

（2）设 $\begin{cases} x = 2e^{t}, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^{t}} = -\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\dfrac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{e^{-2t}}{2e^{t}} = \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

六、（1）证明：当 $x>0$ 时，有 $\ln(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

证明： 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$,

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=-\frac{x^3}{1+x}<0,\quad (x>0)$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减，因此当 $x>0$ 时，

$f(x)<f(0)$, 即

$$\ln(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

（2）求函数 $f(x)=x^4-8x^2+2$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

解： $f'(x)=4x(x^2-4)$,

$f(x)$ 在 $(-1,3)$ 内的驻点：$x_1=0, x_2=2.$

$f(-1)=-5,\quad f(0)=2,\quad f(2)=-14,\quad f(3)=11.$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$

上的最大值为 $f(3)=11$,

最小值为 $f(2)=-14.$

七、设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$$

证明：令 $F(x)=f(x)\sin x$，

$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $F(0)=F(\pi)=0$，

由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$$

八、设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处具有二阶导数，且 $f''(0)=4$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,\qquad 求 \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

解：$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)},$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0)=2.$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2.$$