第三章　导数与微分

§ 3.1 导数的概念

★问题的提出
★导数的定义
★由定义求导数
★导数的几何意义与物理意义
★可导与连续的关系
★小结

二、导数的定义

定义1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，该极限称为 f 在 x_0 的导数，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，或

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

即 $\left.y'\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

其它形式 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

关于导数的说明：

★ 点导数是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

★ 如果函数 $y=f(x)$ 在集合 D 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在 D 内可导或称 $f(x)$ 是 D 内的可导函数.

★ 若$f(x)$是D内的可导函数，则对于任一 $x \in I$, 都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数.

记作 $y', f'(x), \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

即 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

或 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

注意: $$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

★ 如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

三、由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$ (C为常数) 的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 $$(C)' = 0.$$

例2 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3 求函数 $y=x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

更一般地 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$ $(\mu\in R)$

例如, $$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例4 求函数 $f(x)=a^x\,(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a.$ $\quad (e^x)'=e^x.$

例5 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

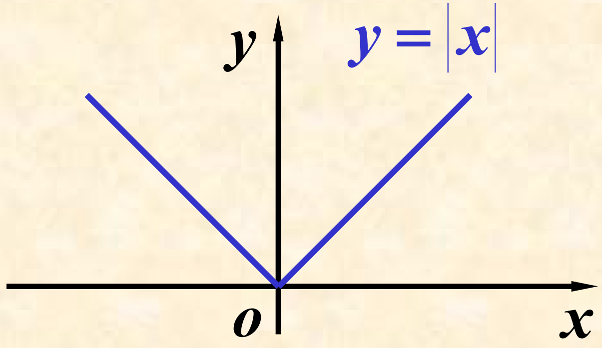
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e.$ $\qquad(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

例6 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

四、导数的几何意义

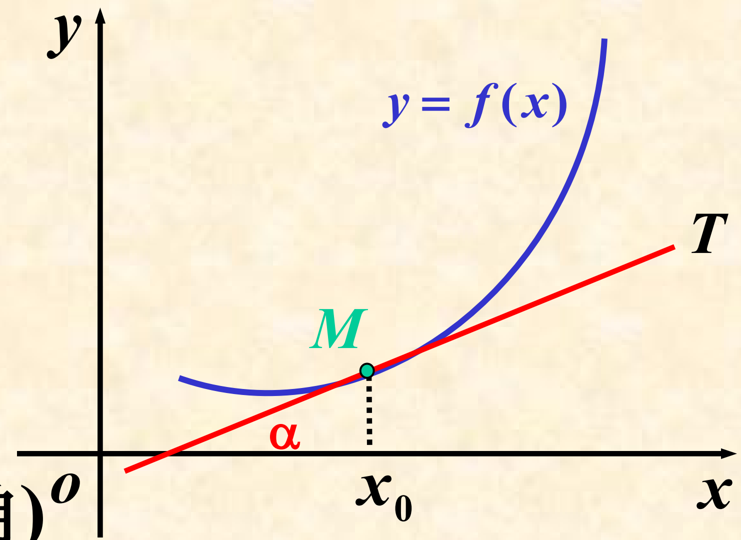
1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$

在点$M(x_0,f(x_0))$处的

切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

导数几何意义

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例7 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点$(\dfrac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义, 得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为$y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $2x-8y+15=0.$

五、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证　设函数 $f(x)$在点 x_0可导,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

$$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0) \qquad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x] = 0$$

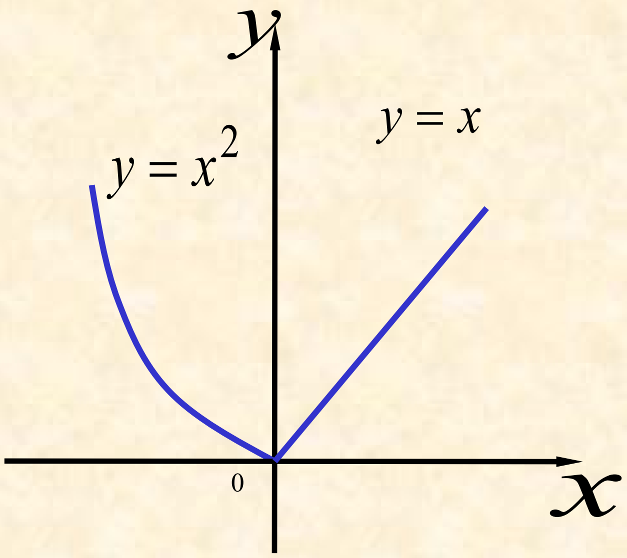
$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续 .

注意：该定理的逆定理不成立.(例6)

★ 连续函数不存在导数举例

例如,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases},$$



在 $x=0$ 处不可导.

例8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数， $\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\therefore f(x)$在$x=0$处连续.

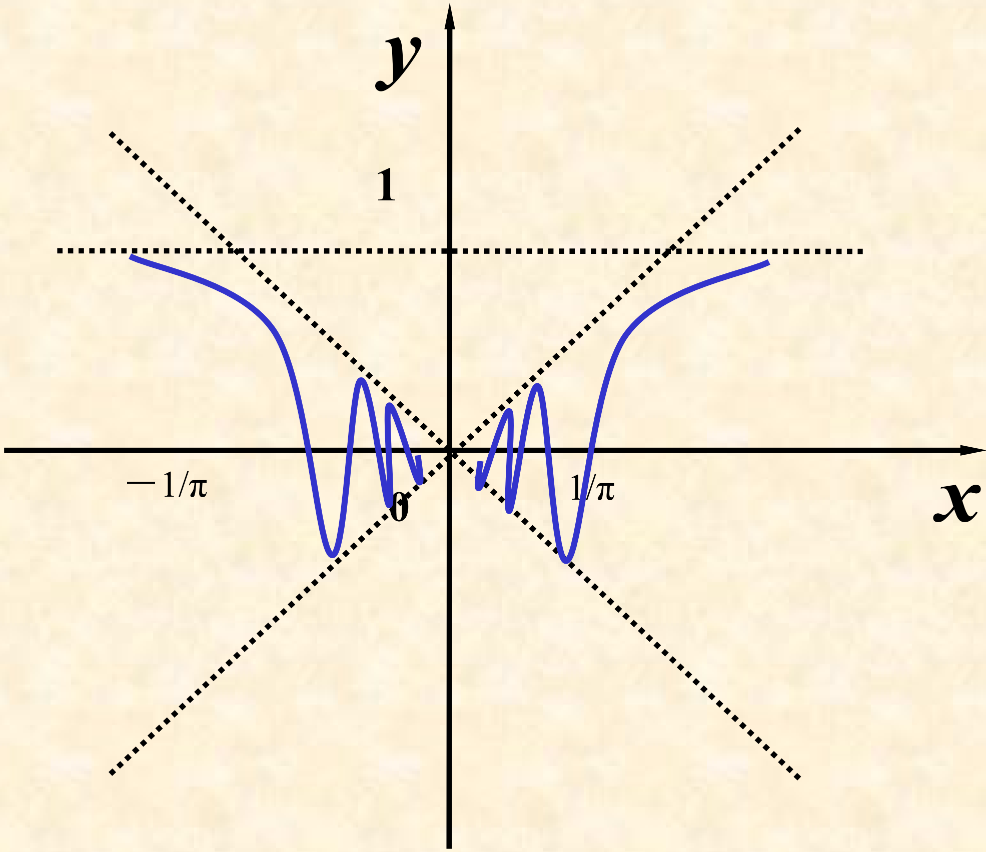
但在$x=0$处有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

当$\Delta x\to 0$时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在$-1$和$1$之间振荡而极限不存在 .

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

在$x=0$处不可导.



六、小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续,一定不可导.} \\ \text{连续} \begin{cases} \text{直接用定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases} \end{cases}$

思考题

函数$f(x)$在某点x_0处的导数$f'(x_0)$与导函数$f'(x)$有什么区别与联系？

一、和、差、积、商的求导法则

定理 如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0)$.

证(1)、(2)略.

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore f(x)$在x处可导.

推论

(1) $[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$

(2) $[Cf(x)]' = Cf'(x);$

(3) $$[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$$

$$+\cdots+ f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x)f_k(x);$$

二、例题分析

例1　求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数 .

解　$y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例2　求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数 .

解　$\because y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3　求 $y=\tan x$ 的导数 .

解　$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即　$(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得　$(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例4　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得　$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例5　求 $y=\sinh x$ 的导数.

解　$y'=(\sinh x)'=\left[\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]'=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$

同理可得　$(\cosh x)'=\sinh x$　　$(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

例6 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解 当$x<0$时， $f'(x)=1,$

当$x>0$时,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{1+x})$$

$$=\frac{1}{1+x},$$

当$x=0$时,

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$\therefore\ f'(0)=1.$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}.$$

三、小结

注意: $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)+v'(x)$;

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

分段函数求导时，分界点导数用左右导数求.

一、反函数的导数

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$, 那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导, 且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证 任取$x \in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x+\Delta x \in I_x)$

由$y = f(x)$的单调性可知 $\Delta y \neq 0,$

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$ $\because f(x)$连续,

$\therefore \Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0),$ 又知 $\varphi'(y) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}.$

例1 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

例2 求函数 $y = \log_a x$ 的导数.

解 $\because x = a^y$ 在 $I_y \in (-\infty, +\infty)$ 内单调、可导，

且 $(a^y)' = a^y \ln a \neq 0$, $\therefore$ 在 $I_x \in (0, +\infty)$ 内有,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

二、复合函数的求导法则

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

证 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

注 ①复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 例如, 设 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, 则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

②对复合函数的分解比较熟练以后，就不必写出中间变量，而采用下面例题的方法来计算.

例4 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数.

解 $$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例5 求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数. $(a>0)$

解 $$y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例6 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

例7 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例10 求函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

例11 求函数 $y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$的导数.

解 $y'=nf^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]$

$$\cdot n\varphi^{n-1}(\sin x^n)\cdot\varphi'(\sin x^n)\cdot\cos x^n\cdot nx^{n-1}$$

$$=n^3\cdot x^{n-1}\cos x^n\cdot f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot$$

$$\varphi^{n-1}(\sin x^n)\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot\varphi'(\sin x^n).$$

三、隐函数的导数

定义:由方程所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \implies y = f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数

y的导数 $\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0,$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例2 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

四、对数求导法

观察函数 $y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$， $y=x^{\sin x}$.

方法:

先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

--------对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.