数据结构与算法分治算法

陈宇琪

2020 年 4 月 13 日

摘要

主要内容：分治的基本例题。

提交要求：除了 EOJ 上的题目在 EOJ 上提交之外，其余 10 道题目到超星上提交。

注意：填空题第 4 题和编程题第 3 题有一定难度，**请至少完成其中一题**。

分数分配：3+3+3+10+10+10+5+10+10+10，其中两个较难的题取较高得分记入总分。

折合分数：$sc^{'} = (92 - (100 - sc))/92 * 100$，其中 sc 为超星上批改分数，$92 = \lceil 64/0.7 \rceil$。

请大家尽快用自已的语言回答问题，有一些瑕疵没有问题的！

作业 DDL：2020-04-19

目录

1　选择题

1、快速排序在下列（）情况下最易发挥其长处。

A．被排序的数据中含有多个相同排序码 B．被排序的数据已基本有序

C．被排序的数据完全无序 D．被排序的数据中的最大值和最小值相差悬殊

2、下述几种排序方法中，要求内存最大的是（）。

A．希尔排序 B．快速排序 C．归并排序 D．堆排序

3、下述几种排序方法中，（）是稳定的排序方法。

A．希尔排序 B．快速排序 C．归并排序 D．堆排序

2　简述题

1、根据 PPT 的描述写出对于待排序的数组 [45,23,12,67,31,39,41] 使用**快速排序**的递归归求解过程。（画出每一次根据哪一个元素进行求解，每一次**递归求解的子数组的元素情况**，请画一棵详细的**递归调用树**来记录这些信息）

2、分析快速排序的复杂度：指出最好复杂度和最坏复杂度。结合 PPT 说明在什么情况下取到最坏情况（可以用数据说明）。

3、假设现在对一个 int 数组排序，且假设数组中数的绝对值不超过 V，修改快速排序算法使得算法在最坏情况下的复杂度为 $O(n \times \log(V))$。

提示：如果一个子数组中所有数均相同，则可以提前结束。假设一个子数组中的元素取值在 $[a, b]$ 之间，是否可以在分治的时候，使得两个子数组的取值分别在 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 之间。

4、请**结合生活场景**，再举一个分治算法在现实生活中的简单例子（不允许举 PPT 上有过的例子），请先描述一下背景，再具体解释其中蕴含的分治思想。

3　基础编程题

1、（完整代码）对于一个给定数组 a，使用分治算法实现二分查找，具体而言要求在 $O(\log(N))$ 的复杂度内判断数组 a 中是否存在 x。

2、（完整代码）对于一个给定数组 a 和一个数 s，判断 a 中是否存在两个不同的数 p, q，使得 $p + q = s$，你可以认为数组中没有重复的数，复杂度要求 $O(N \log(N))$。

提示：使用第一题的二分查找，为了防止重复扣分，你可以使用 STL 的 lower_bound 来完成这道题目。

3、（递归函数）对于给定数组，使用分治的思想计算 $\max_{1 \le l \le r \le N} [\min\{a_l, ..., a_r\} \times (r - l + 1)]$，复杂度要求 $O(N \times \log(N))$。

提示：假设提供一个函数可以在 $O(1)$ 查询 $[L, R]$ 区间内的最小值以及最小值所在的位置。

提交函数申明：int minmax(const vector <int> &v);

提供函数申明：pair<int,int> query(int l,int r);

说明：pair<int,int> 为区间 $[l, r]$ 中最小值和最小值所在位置的元组，请确保调用时 $l \le r$。

备注 1：使用 RMQ 对数组 v 进行预处理就可以在 $O(1)$ 时间内查询区间最小值，有兴趣的同学可以提交完整代码。

备注 2：EOJ 上有对应的题目。

4、完成 EOJ 上相关习题，**请至少完成其中 2 题**，最后一题为加分题。

图 1: EOJ 相关习题

4 附录：RMQ 算法

4.1 预处理

假设二维数组 $dp[i][j]$ 表示从第 i 位开始连续 2^j 个数中的最小值，则 $dp[i][j] = min(dp[i][j-1], dp[i+2^{j-1}][j-1])$，这里使用了倍增的思想。

4.2 查询

对于区间查询 $[l, r]$，假设 $k = \lfloor \log_2(r-l+1) \rfloor$，则 $RMQ[l,r] = min(dp[l][k], dp[r-2^k+1][k])$。

4.3 算法复杂度

RMQ 的时间复杂度和空间复杂度都是 $O(N \times \log(N))$。

4.4 RMQ 推广

假设定义一个运算符 $\cdot$ 满足 $a \cdot a = a$，且满足交换律和结合律，则可以使用 RMQ 求 $a_l \cdot ... \cdot a_r$。

例如可以用 RMQ 求解区间最大，区间最小，区间或，区间与。但是 RMQ 不能求解区间异或，所以需要线段树完成。