第十章

曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	**曲线积分**	**曲面积分**
积分域	区间域	平面域	空间域	**曲线域**	**曲面域**

曲线积分
- 对弧长的曲线积分 – 第一型曲线积分
- 对坐标的曲线积分 – 第二型曲线积分

曲面积分
- 对面积的曲面积分 – 第一型曲面积分
- 对坐标的曲面积分 – 第二型曲面积分

第一节

第一型曲线积分

一、第一型曲线积分的概念与性质

二、第一型曲线积分的计算法

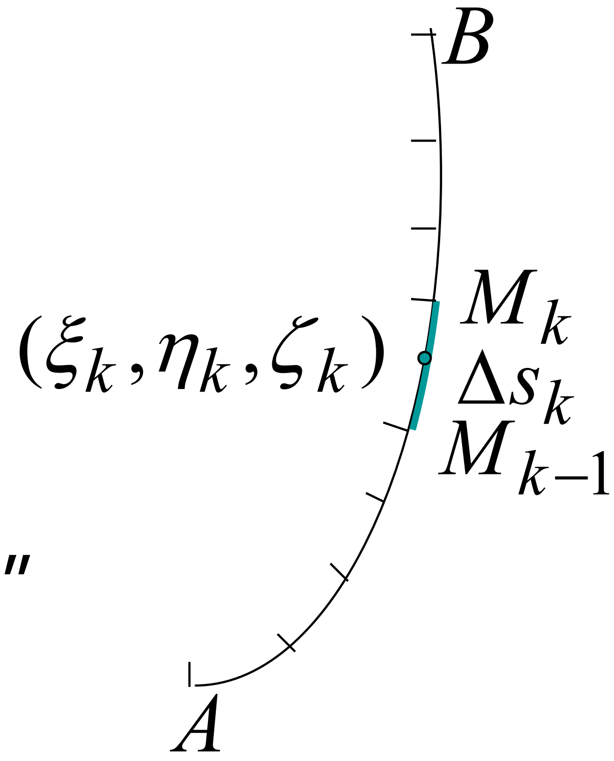
一、第一型曲线积分的概念与性质

1.引例1: 曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为$\rho(x,y,z)$，为计算此构件的质量，采用

"大化小，常代变，近似和，求极限"

可得
$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$



引例2: 曲顶柱面的侧面积

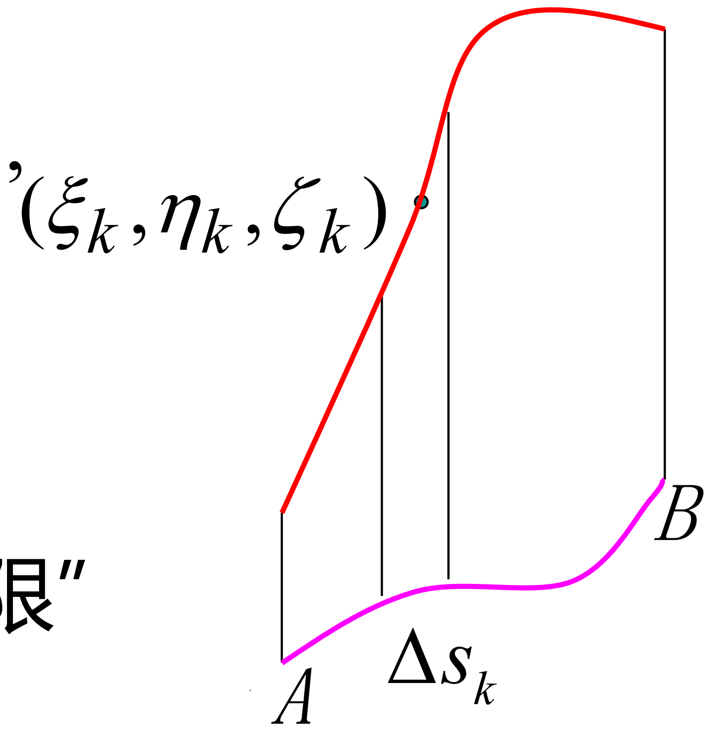
假设曲顶柱面的准线为弧段为$\widehat{AB}$，

顶为$u = f(x, y, z)$，

为计算此柱面的面积, 采用

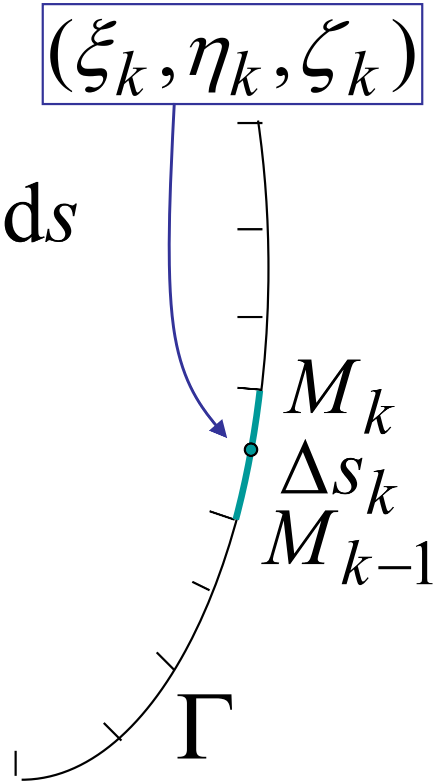
“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得 $$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$



2.定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线, $f(x,y,z)$是定义在 Γ上的一个有界函数, 若通过对 Γ 的任意分割 和对局部的任意取点, 下列 “乘积和式极限”



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在曲线 Γ上对弧长的曲线积分, 或第一型曲线积分.

$f(x,y,z)$称为被积函数, Γ 称为积分弧段 .

曲线形构件的质量 $M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

如果 L 是 xoy 面上的曲线弧，则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$， 问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s \ge 0$，但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

3. 性质

(1) $\int_\Gamma [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\mathrm{d}s$

$$= \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \pm \int_\Gamma g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

(2) $\int_\Gamma k f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = k\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ (k 为常数)

(3) $\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1 , Γ_2 组成)

(4) $\int_\Gamma \mathrm{d}s = l$ (l 为曲线弧 Γ 的长度)

(5)对称性类似重积分，例如 $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s$,若$\Gamma$关于$y$轴对称，$f$关于$x$为奇函数，则偶倍奇零。

二、第一型曲线积分的计算法

基本思路： 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理： 设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧

$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

上的连续函数，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

证： 根据定义

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设各分点对应参数为 $t_k\,(k=0,1,\cdots,n)$,

点 (ξ_k,η_k)对应参数为 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau'_k)+\psi'^2(\tau'_k)}\,\Delta t_k\,,\quad \tau'_k\in[t_{k-1},t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau'_k)+\psi'^2(\tau'_k)}\,\Delta t_k$$

$\downarrow$ 注意 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

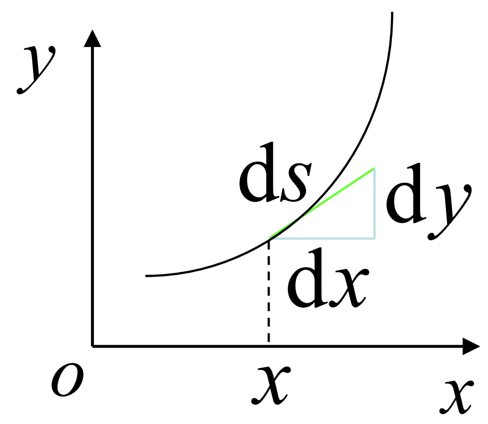
说明:

(1) $\because \Delta s_k > 0,\ \therefore \Delta t_k > 0,$ 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$!

(2) 注意到

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



因此上述计算公式相当于“换元法”.

如果曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)\ (a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

如果方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例1. 计算 $\int_L x\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 之间的一段弧 .

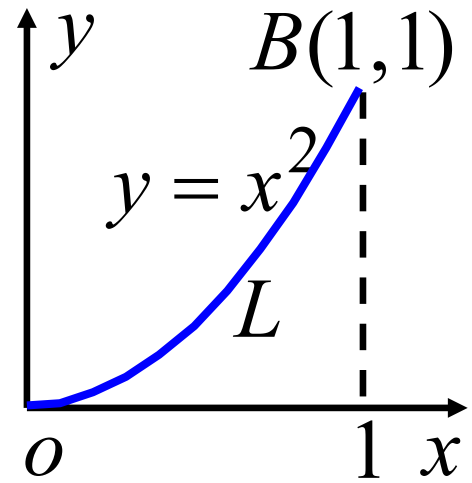
解: $\because L: y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$

$$\therefore \int_L x\mathrm{d}s = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

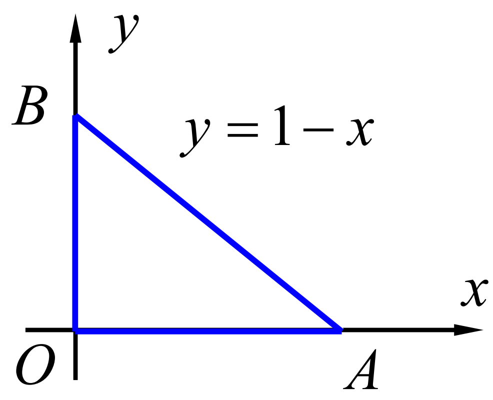
$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



例2. 计算 $\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.

解: 因 L 由 OA, AB, BO 三条线段连接而成，故

$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}s$$



$$\int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (x+0)\sqrt{1+0^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 [x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}$$

$$\int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (0+y)\sqrt{1+0^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

从而

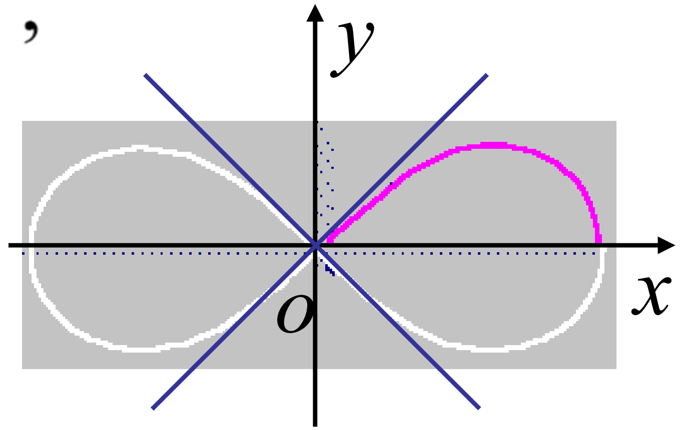
$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + 1$$

例3. 计算 $I=\int_L |x|\,\mathrm{d}s$，其中$L$为双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$$

解: 在极坐标系下 $L: r^2=a^2\cos 2\theta$，

它在第一象限部分为



$$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta}\quad(0\le\theta\le \pi/4)$$

利用对称性，得

$$I=4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4} a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\,a^2$$

例4. 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中$\Gamma$为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$的一段弧.

解: $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例5. 计算$\oint_\Gamma x^2 \, \mathrm{d}\, s$, 其中Γ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解: 由对称性可知 $\oint_\Gamma x^2 \,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2 \,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2 \,\mathrm{d}s$

$$\therefore \quad \oint_\Gamma x^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3$$

思考: 例5中Γ 改为$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$, 如何计算 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$?

解: 令 $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1\\ Z=z\end{cases}$, 则 $\Gamma:\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma (X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_\Gamma X^2\,\mathrm{d}s+2\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s+\oint_\Gamma \mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3+0+2\pi a$$

$$=2\pi a(\frac{1}{3}a^2+1)$$

例6. 计算$I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$与平面$x+z=1$的交线.

解: $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$, 化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\quad(0\le\theta\le 2\pi)$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\theta=18\pi$$

例7. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xOy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面的侧面积 S .

解: 这是曲顶柱面的侧面积问题.

$$L: x=\sqrt{5}\cos t\,,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le \pi)$$

$$\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5$$