内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$$

$(\xi$ 在 x_0 与 x 之间$)$

当 $x_0=0$ 时为**麦克劳林公式**.

2. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x,\ \ln(1+x),\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^\alpha$$

3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数，例如 $\sin x$

(3) 其他应用 —— 求极限，证明不等式 等.

(4) 高阶导数

例5，设函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C, \lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$,

证明:$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0$.

证明：用泰勒公式

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},$$

两式分别相加减，得

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+1)-f(x-1)\big)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$\lim_{x\to\infty} f''(x)=C+C-2C+0=0, \lim_{x\to\infty} f'(x)=\frac{1}{2}(C-C)=0.$$

例题． 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，证明 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $|f'''(\xi)|\ge 24$．

证: $$1=f(0)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1\in(0,\tfrac{1}{2}))$$

$$2=f(1)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_2\in(\tfrac{1}{2},1))$$

下式减上式，得

$$1=\frac{1}{48}[\,f'''(\zeta_2)-f'''(\zeta_1)\,]\le\frac{1}{48}[\,|f'''(\zeta_2)|+|f'''(\zeta_1)|\,]$$

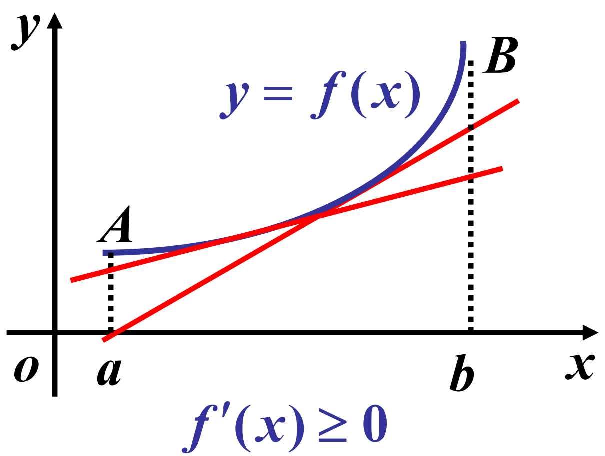
令 $|f'''(\xi)|=\max(|f'''(\zeta_2)|,|f'''(\zeta_1)|)$

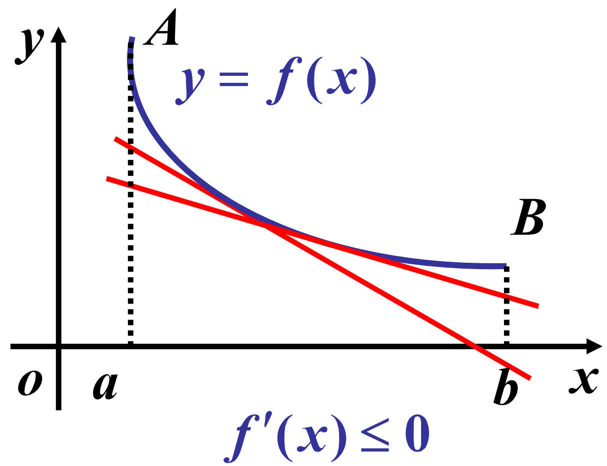
$$\le\frac{1}{24}|f'''(\xi)| \quad (0<\xi<1)$$

第四节 函数的单调性与曲线的凸性

一、函数单调性的判定法

一、单调性的判别法





定理 设函数 $y = f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.(1) 如果在(a,b)内$f'(x) > 0$，那末函数 $y = f(x)$在$[a,b]$上单调增加；(2) 如果在(a,b)内 $f'(x) < 0$，那末函数 $y = f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

一、 函数单调性的判定法

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$在 I 内严格单调递增 (递减) .

证: 无妨设 $f'(x)>0,\ x\in I$, 任取 $x_1, x_2\in I\ (x_1<x_2)$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

$$\xi\in(x_1, x_2)\subset I$$

故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 I 内严格单调递增.

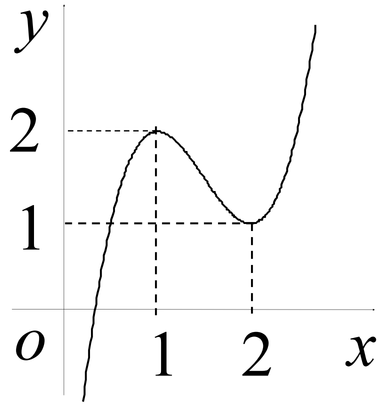
证毕

例1. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



$f(x)$ 的严格**单调增**区间为 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$;

$f(x)$ 的严格**单调减**区间为 $(1,2)$.

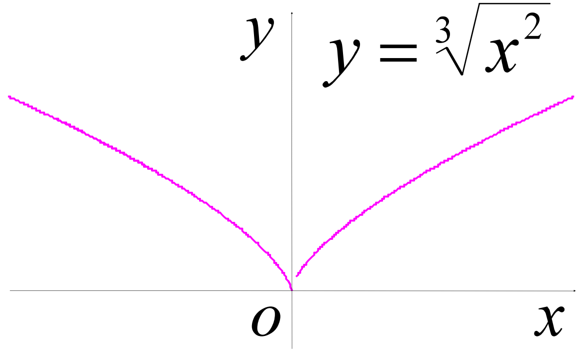
说明:

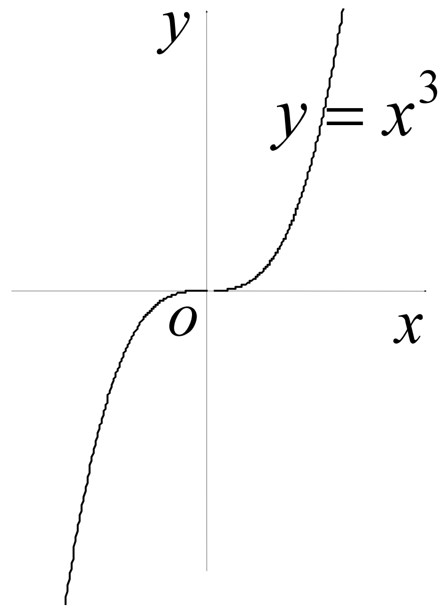
1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}\,,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$





2) 如果函数在某驻点两边导数同号,

则不改变函数的单调性 .

例如, $y=x^3\,,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2$$

$$y'\big|_{x=0}=0$$

2）说明 定理1的反过来不成立。若f(x)的导数只在有限多个点处为0，其余各处都大于0，也可得到f(x)严格单调递增。

类似定理1的证明，可得如下定理1’

3）**定理1’** 设 $f(x)$ 在区间 I 内可导, 则

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)\text{单调增}$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)\text{单调减}$$

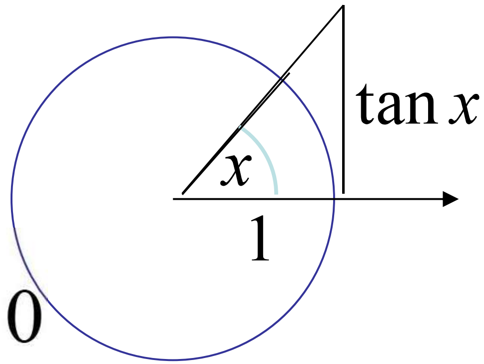
例2. 证明 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

证



因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处右连续, 因此 $f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

* 证明 $x - \tan x < 0$

令 $\varphi(x) = x - \tan x$,则

$$\varphi'(x) = 1 - \sec^2 x$$

$$= -\tan^2 x < 0, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递减,从而

$$\varphi(x) < \varphi(0) = 0$$

即 $x - \tan x < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0,\ x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上严格单调递增

$f'(x) < 0,\ x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上严格单调递减

思考与练习

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (***B***)

$(A)\quad f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

$(B)\quad f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

$(C)\quad f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

$(D)\quad f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示: 利用 $f'(x)$ 严格单调增加，及

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\ \ (0<\xi<1)$$

例7. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x\,[\,\ln(1+x)-\ln x\,]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x[\,\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}\,]$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[\,x\,,\,x+1\,]$上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\qquad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例10. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$.

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$单调增加 , 从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \ (0<x<1)$ 时, 如何设辅助函数更好 ?

提示: $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

10、设$a>e$，求证$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$（$x>0$）。

证法 1： 考察函数$f(x)=a\ln(a+x)-(a+x)\ln a$，$f'(x)=\dfrac{a}{a+x}-\ln a$，

$$f''(x)=-\frac{a}{(a+x)^2}<0\Rightarrow f'(x)\downarrow,$$

$$f'(x)<f'(0)=1-\ln a<0\Rightarrow f(x)\downarrow\Rightarrow f(x)<f(0)=0$$

$$\Rightarrow a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$$

证法 2： 考察函数$f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$（$t>a$），$f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}<0\Rightarrow f(t)\downarrow$，

$\Rightarrow x>0$时$f(a+x)<f(a)$，即$\dfrac{\ln(a+x)}{a+x}<\dfrac{\ln a}{a}$，此即所证不等式。

设$b>a>0$，求证$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{b+a}$。

证： 构造函数$f(x)=(a+x)(\ln x-\ln a)-2(x-a)$（$x>a$），则

$$f'(x)=\ln x-\ln a+\frac{a+x}{x}-2，\quad f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0\Rightarrow f'(x)\uparrow$$

$\Rightarrow x>a$时，$f'(x)>f'(a)=0\Rightarrow f(x)\uparrow$

$\Rightarrow b>a$时，$f(b)>f(a)=0$

$\Rightarrow(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$，此即所证不等式。

12、证明当 $x>1$ 时，$0<\ln x+\dfrac{4}{x+1}-2<\dfrac{1}{12}(x-1)^3$。

证：考察函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{4}{x+1}-2$，$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$

$\therefore f(x)\uparrow$，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$。故得第一个不等式。

又构造函数 $g(x)=\ln x+\dfrac{4}{x+1}-2-\dfrac{1}{12}(x-1)^3$，则

$\because g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}-\dfrac{1}{4}(x-1)^2=(x-1)^2\left[\dfrac{1}{x(x+1)^2}-\dfrac{1}{4}\right]<0$

$\therefore g(x)\downarrow$，当 $x>1$ 时，$g(x)<g(1)=0$。故得第二个不等式。

17、证明：当$0<x<\pi$时，有$\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$。

证法 1：设$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\pi}$，则$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\pi}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}<0$，故知$f'(x)$在$(0,\pi)$上$\downarrow$。因$f(0)=f(\pi)=0$，由 Rolle 定理，存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$f'(\xi)=0$。故在$(0,\xi)$上$f'(x)>f'(\xi)=0$，从而得$f(x)\uparrow$；在$(\xi,\pi)$上$f'(x)<f'(\xi)=0$，从而得$f(x)\downarrow$。因此，当$x\in(0,\xi]$时，$f(x)>f(0)=0$；当$x\in(\xi,\pi)$时，$f(x)>f(\pi)=0$。故$x\in(0,\pi)$时，总有$f(x)>0$，即$\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$。

17、证明：当 $0 < x < \pi$ 时，有 $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$。

证法 2：设 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{\cos\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)}{x^2}$。再令

$g(x)=\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}<0$，故知 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上 $\downarrow$。

于是，在 $(0,\pi)$ 上 $g(x)<g(0)=0$。因此，$f'(x)=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x^2}\cdot g(x)<0$，从而得 $f(x)\downarrow$。

故当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)>f(\pi)$，即 $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}>\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}=\dfrac{1}{\pi}$，此即所证不等式。

6 施笃兹(stolz)定理.

设 1) $y_{n+1} > y_n$ **,(n=1，2，⋯)， 2)** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, **则** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$

注2：($\dfrac{0}{0}$ 型stolz定理)

设对一切充分大的n, $\{b_n\}$ **严格递减，且**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$ **若** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ **存在，则** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$

14) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，**证明** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$

证明：因 $x_n = n^2 \to \infty$，**故利用Stolz公式，**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$$ **得**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a}{2}$$