2.4.1-2.4.2

函数的连续性与间断点

一、 函数连续性

二、 函数的间断点

一、 函数连续性的定义

定义: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 连续.

可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须具备下列条件:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

若 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续，则称它在该区间上连续，或称它为该区间上的**连续函数**.

在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的集合记作 $C[a, b]$.

例如, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ （多项式）

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

又如, 有理分式函数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

在其定义域内连续.

只要 $Q(x_0) \neq 0$, 都有 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = R(x_0)$

对自变量的增量$\Delta x = x - x_0$, 有函数的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

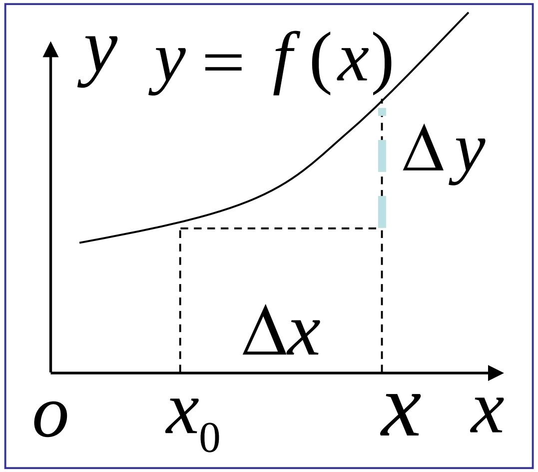
函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续有下列等价命题:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \rightleftharpoons \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\rightleftharpoons \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\rightleftharpoons \underbrace{f(x_0^-) = f(x_0)}_{\text{左连续}} = f(x_0^+)$$

左连续　　　右连续



$$\rightleftharpoons \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - x_0| = |\Delta x| < \delta \text{ 时, 有}$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$$

定义 2　设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, 如果当自变量的增量Δx趋向于零时, 对应的函数的增量Δy也趋向于零, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$　或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$, 那末就称函数 $f(x)$在点 x_0连续, x_0称为 $f(x)$的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$,　　$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$, $\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理 函数 $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$是函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

例. 证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

证: $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$|\Delta y|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|$$

$$\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1=|\Delta x|\xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

这说明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

同样可证: 函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

二、 函数的间断点

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，则下列情形之一函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义；

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

这样的点 x_0 称为**间断点**.

间断点分类:

第一类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在 ,

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，称 x_0 为可去间断点 .

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点 .

第二类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在 ,

若其中有一个为 ∞, 称 x_0 为**无穷间断点** .

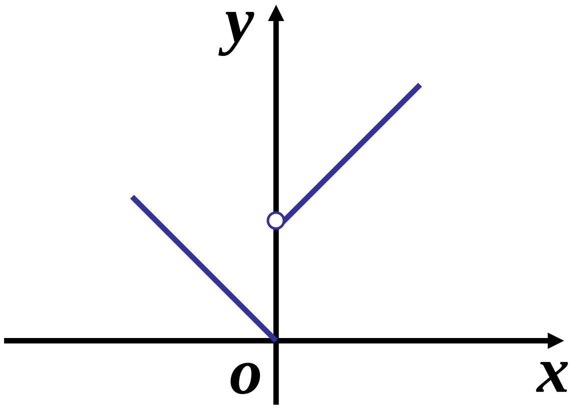
若其中有一个为振荡，称 x_0 为**振荡间断点** .

例3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\because\ f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore\ x=0$为函数的跳跃间断点.

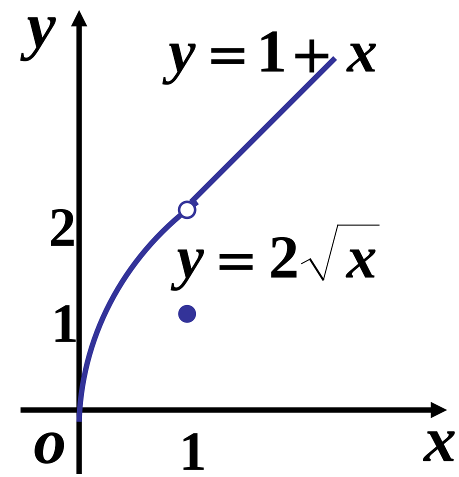


注意　可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

例4　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1 \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$$

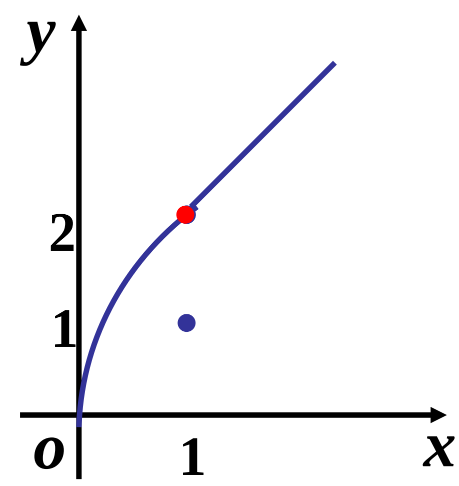
在$x=1$处的连续性 .



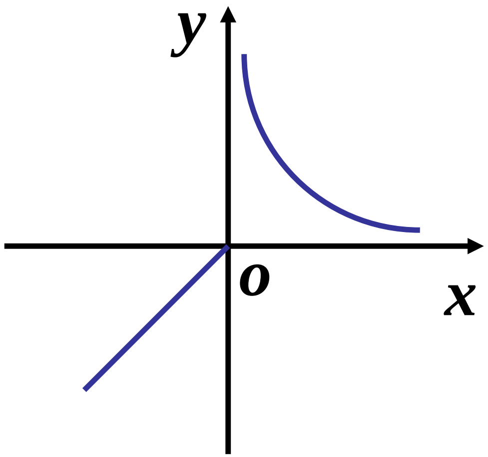
如上例中，　令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.



例5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.



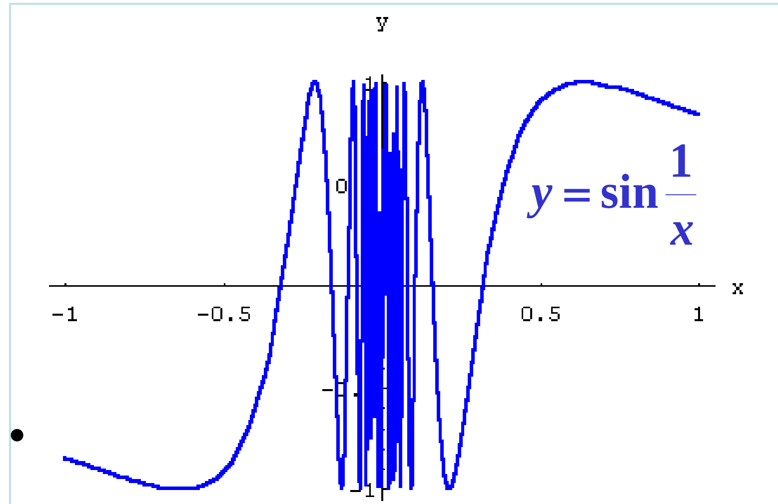
解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore\ x=1$ 为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间 断点.

例6 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,



且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore\ x=0$ 为第二类间断点.

这种情况称为的振荡间 断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

例 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because\ f(0)=a,$

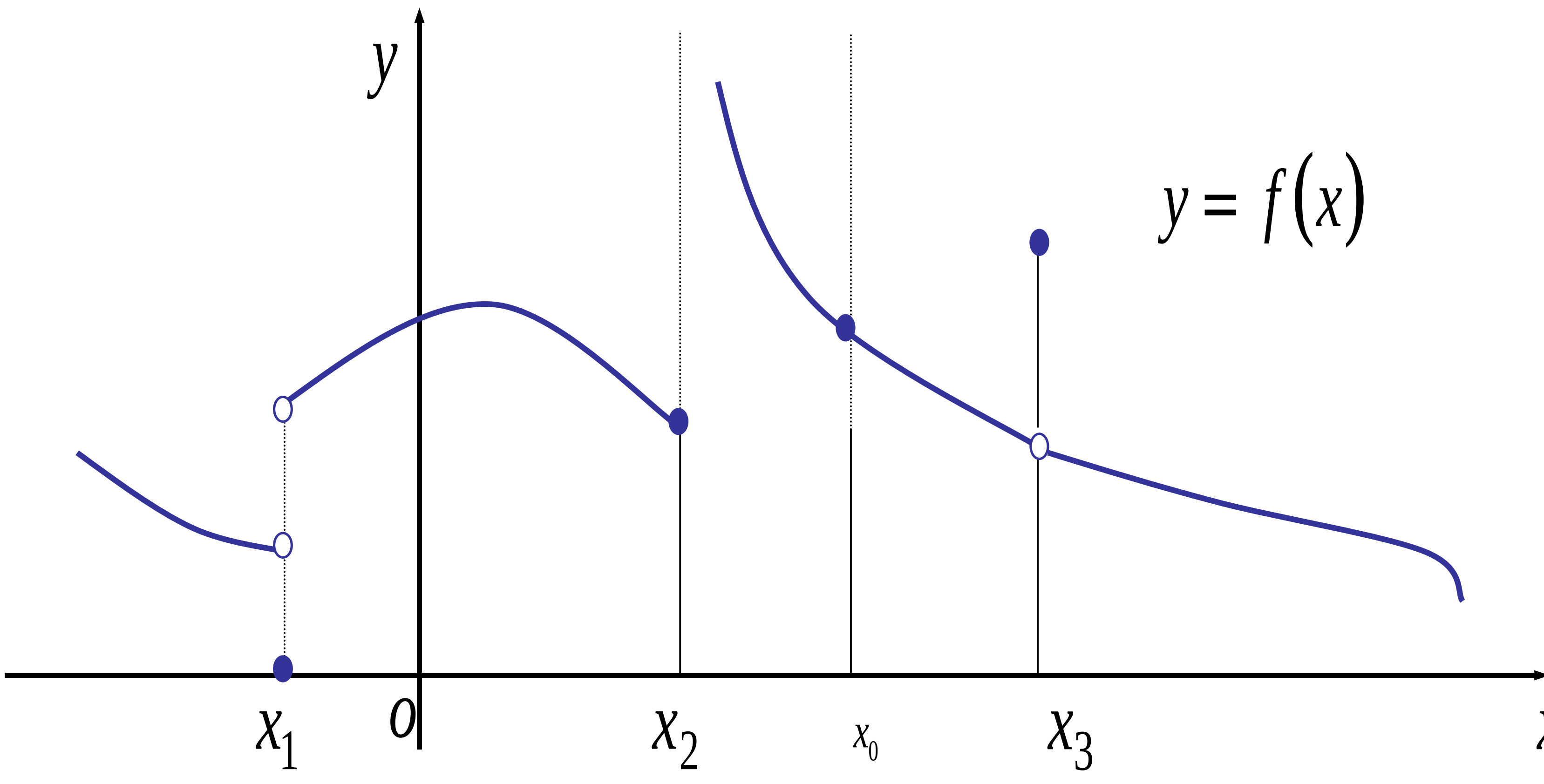
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

判断下列间断点类型:



内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{f(x_0^-)=f(x_0)}_{\text{左连续}}\underbrace{=f(x_0^+)}_{\text{右连续}}$$

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

思考与练习

1. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

答案: $x=1$ 是第一类可去间断点 ,

$x=2$ 是第二类无穷间断点 .

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$, $a=$ __0__ 时 $f(x)$ 为连续函数.

提示: $f(0^-)=0$, $f(0^+)=a$, $f(0)=a$.

3 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解: 间断点 $x=0, x=1$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\therefore$ $x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^-$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty$, $\therefore$ $f(x)\to 0$

当 $x\to 1^+$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty$, $\therefore$ $f(x)\to 1$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.

2.4.3 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

二、初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

定理1. 在某点连续的有限个函数经有限次和 , 差 , 积 , 商(分母不为 0) 运算, 结果仍是一个在该点连续的函数 .

(利用极限的四则运算法则证明)

例如, $\sin x, \cos x$ 连续

$\Longrightarrow \tan x, \cot x$ 在其定义域内连续

定理2. 连续严格单调递增 (递减) 函数的反函数也连续严格单调递增 (递减).

例如, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续严格单调递增,

其反函数 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也连续严格单调递增.

又如，$y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续严格单调递增,其反函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上也连续也严格单调递增.

定理3. 连续函数的复合函数是连续的.

g在x_0连续，f在$g(x_0)$连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))$.

证: $\forall\varepsilon>0$,由$y=f(u)$在u_0的连续性，$\exists\eta>0$, 当 $|u-u_0|<\eta$时，有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$

对上述$\eta>0$,由$u=g(x)$在x_0的连续性，$\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|g(x)-g(x_0)|=|u-u_0|<\eta$$

终上所述，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

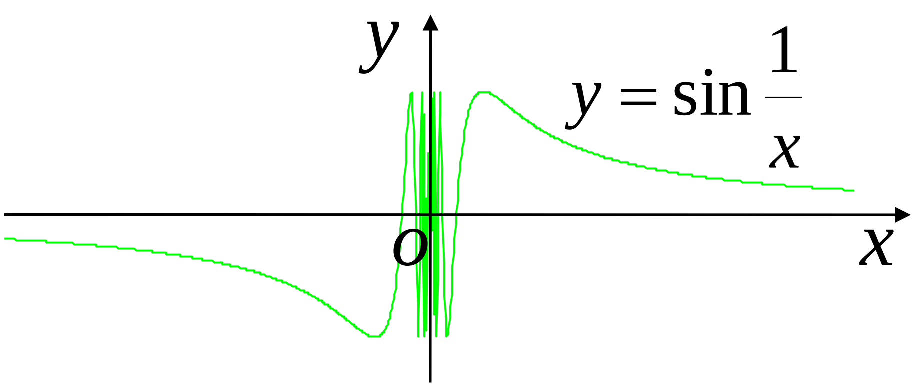
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(\lim_{x \to x_0} x)) = f(g(x_0))$$

例如, $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 是由连续函数链

$$y = \sin u, \quad u \in (-\infty, +\infty)$$

$$u = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$$

复合而成，因此 $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$上连续 .



例1． 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

证: $\because\ \varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\,|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)\right]$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\,\right]$$

根据连续函数运算法则，可知 $\varphi(x),\psi(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续.

二、初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

$\Bigg\}$ 一切初等函数在定义区间内连续

例如,

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$, $n\in Z$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi$, $n\in Z$

因此它无连续点

例2. 求 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\arctan\sqrt{\ln x}}{\sin\dfrac{\pi x}{2e}}$.

解: 原式 $=\dfrac{\arctan\sqrt{\ln e}}{\sin\dfrac{\pi e}{2e}}=\dfrac{\pi}{4}$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-\ln(2-\sin x)}{\sin x}$.

解: 原式 $=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}-\ln(2-\sin\dfrac{\pi}{2})}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{4}}$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解: 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$$

说明: 当 $a=e$, $x\to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x)\sim x \qquad e^x-1\sim x$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^6$$

说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln[1+u(x)]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

例7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的连续性 .

解:

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x\ne 1$时 $f[\varphi(x)]$为初等函数, 故此时连续; 而

$$\lim_{x\to 1^-} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^+}(-2-x)=-3$$

故 $f[\varphi(x)]$在点 $x=1$ 不连续， $x=1$为第一类间断点 .

内容小结

基本初等函数**在定义区间内**连续

连续函数的**四则运算**的结果连续

连续函数的**反函数**连续

连续函数的**复合函数**连续

说明： 分段函数在界点处是否连续需讨论其左、右连续性.

思考与练习

若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,问 $f^2(x), |f(x)|$ 在 x_0 是否连续? 反之是否成立?

提示: "反之" 不成立.反例

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$f(x)$ 处处间断, $f^2(x), |f(x)|$ 处处连续 .

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}.$

解 原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

四、小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性.　两个定理;

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法.

一、最大值和最小值定理

定义： 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值.

例如, $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理1（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

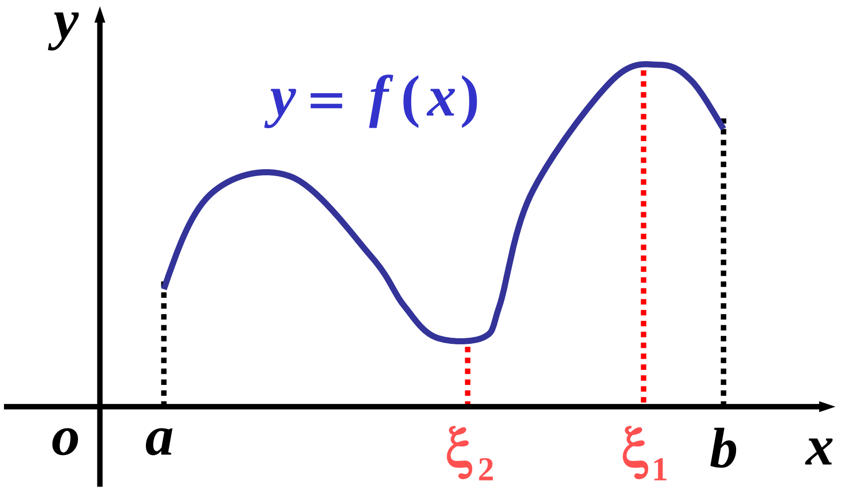
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

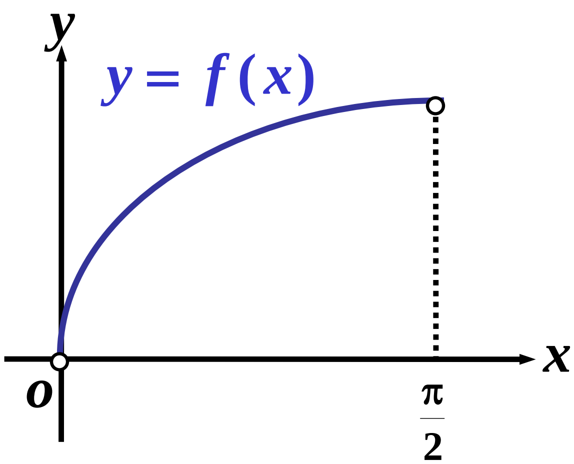
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

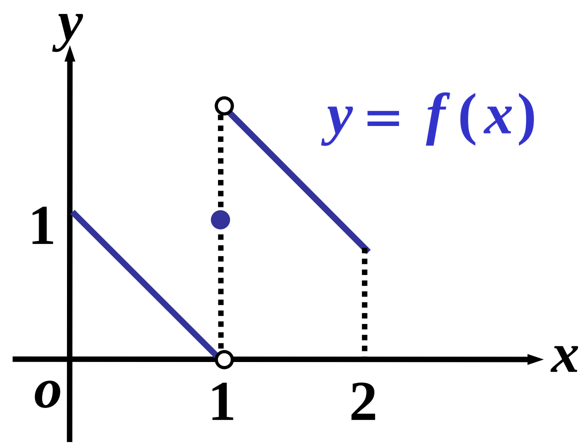
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$, 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

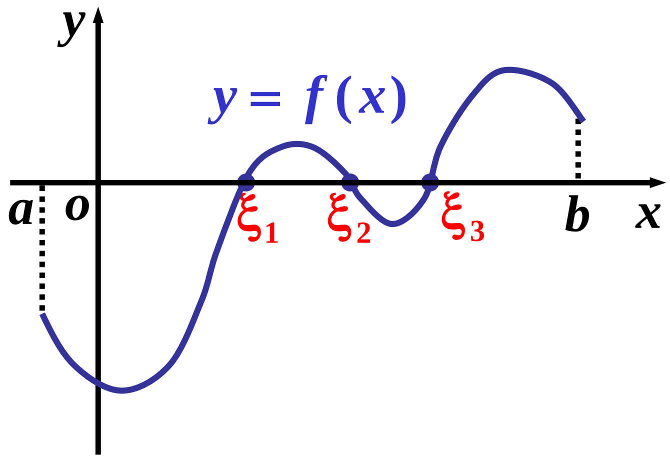
二、介值定理

定义：如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理3（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根 .

几何解释:



连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧,则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

定理 4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \quad 及 \quad f(b) = B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C \quad (a < \xi < b)$.

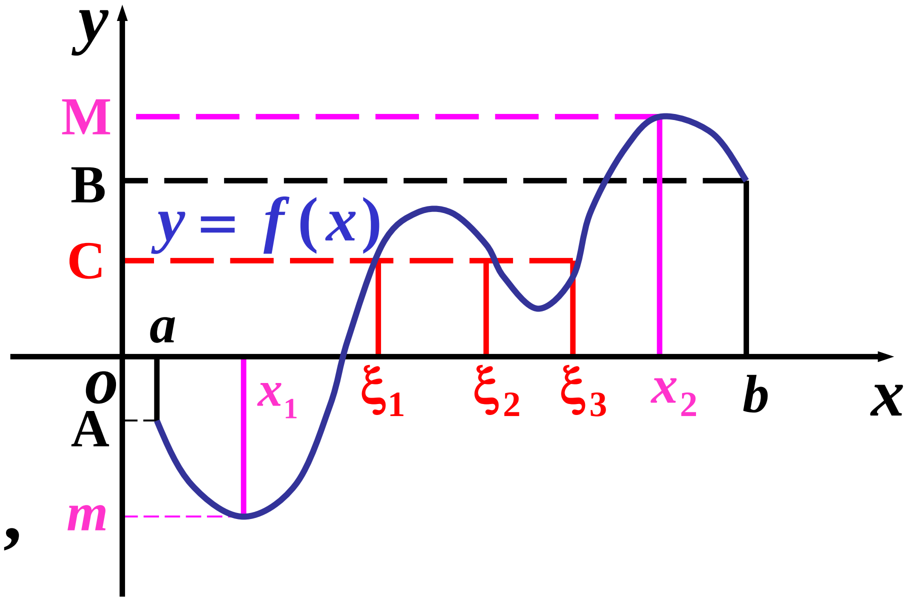
证 设$\varphi(x)=f(x)-C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a)=f(a)-C$

$\quad\quad =A-C,$

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C,$



$\therefore\ \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0,$ 由零点定理, $\exists\,\xi\in(a,b),$使

$\varphi(\xi)=0,$ 即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0,$ $\therefore\ f(\xi)=C.$

几何解释: 连续曲线弧 $y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例1 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理,

$\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$,

$\therefore$ 方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$,　　由零点定理,

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

例3 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$,

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, $\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论: 若$F(0)=0$, 则 $\xi=0$, $\quad f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$, $\quad f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$,则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2}) - f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists \xi \in (0,\frac{1}{2})$,使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$成立.

综上，必有一点$\xi \in [0,\frac{1}{2}] \subset [0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.

三、小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理;根的存在性定理.

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. **直接法**:先利用最值定理,再利用介值定理;

2. **辅助函数法**:先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $\quad f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但$f(x)$在$(0,1)$内无零点.