山东大学 2019-2020 学年第一学期高等数学(1)课程试卷

评分标准

一、填空题(本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 请将答案填在如下指定位置)

1._2^{x^2}__ 2.__$\frac{1}{e}$___ 3.__0___ 4.__0___ 5.___$-2xe^{-x^4}dx$___

1. 设$f(x)=x^2, g(x)=2^x$, 则$g(f(x))=$________________.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=$______________.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$_______________.
4. 函数$\sqrt{1+x^2}$在$x=0$处的 3 阶导数是_______________.
5. $d\left(\int_{x^2}^{0}e^{-t^2}dt\right)=$______________________________.

二、选择题(本大题包含 5 小题，每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在如下指定位置)

1.__D____ 2.__B____ 3.___C___ 4.__C___ 5.___B___

1. 设数列x_n, y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=0$，则下列断言正确的是

   A. 若x_n发散，则y_n必发散. B. 若x_n无界，则y_n必有界.

   C. 若x_n有界，则y_n必为无穷小. D. 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小.

2. 假设$f(x)=o(x)\ (x\to 0)$, 则下述结论不一定成立的是

   A. $f(x)$在$x\to 0$时是无穷小量.

   B. $f(0)=0$.

   C. 若$x=0$是$f(x)$的间断点, 则一定是可去间断点.

   D. 若$f(x)$在$x=0$连续, 则在$x=0$可导.

3. 方程 $x^3+5x-c=0$ (c是大于零的常数) ___ .

   A.有两个正根 B.无正根 C.只有一个正根 D.不能确定有几个正根

4. 下列点不可能是函数的极值点的是

   A. 驻点. B. 不可导的点.

   C. 可导但导数不为零的点. D. 一阶二阶导数都为零的点.

5. 具有特解$y_1=-1, y_2=3e^x-1$, $y_3=2e^{-x}+e^x-1$的二阶常系数线性微分方程的通解为

   A. $-C_1+C_2e^x+e^{-x}$. B. $C_1e^{-x}+C_2e^x-1$.

   C. $-C_1+C_2e^{-x}+e^x$ D. $3C_1e^{-x}+2C_2e^x$.

三、计算题(本大题包含 7 小题，每小题 6 分，共 42 分. 请将答案写在后面试卷纸上，要写出解答步骤)

1. 求微分方程$y'-2xy=e^{x^2}\cos x$, $y|_{x=0}=1$的特解.

解 利用公式或变异系数法都可以，下面是凑微分法.

原微分方程可写为$e^{-x^2}dy-2xye^{-x^2}dx=\cos x dx$，

即 $e^{-x^2}dy+yde^{-x^2}=\cos x dx$，所以$d\left(ye^{-x^2}\right)=d(\sin x)$，

通解为$ye^{-x^2}=\sin x+C$，即$y=e^{x^2}(\sin x+C)$ ……………………………….…(5分)

特解为 $y=e^{x^2}(\sin x+1)$ ………………………………………..……………….…(6分)

2. 已知$\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-t$,…………………………………………………………..……(3分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=-\sqrt{1-t^2}$…………………………………………………...……….(6分)

3. 设函数$f(x)$在$x\neq 0$时有定义，经过点$(-1,1)$和$(1,2)$，且可导，其导函数$f'(x)=\frac{1}{x}$，求$f(x)$.

解 $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1, & x>0\\ \ln(-x)+C_2, & x<0\end{cases}$,………………………………………...……(4分)

由两个函数值确定出$C_1=2$，$C_2=1$，

因此 $f(x)=\begin{cases}\ln x+2, & x>0\\ \ln(-x)+1, & x<0\end{cases}$ ……………………………………………...…..(6分)

4. 计算不定积分$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

解 令$t=\sqrt{2x+1}$，则$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$dx=tdt$，

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx=\int te^t dt\text{……………………… ……………………….(3分)}$$

$$=\int tde^t=te^t-\int e^t dt$$

$$=te^t-e^t+C=e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C\text{…………(6分)}$$

5. 求圆盘$(x-2)^2+y^2\leq 1$绕y轴旋转而成的旋转体的体积.

解 所求体积为

$\int_{-1}^{1}\pi[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2]dy$ ………………………………………(3分)

$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=4\pi^2$…………………………………………………………(6分)

6. n是某正整数，已知当$x\to 0$时，$x\sin x^n$是比$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$低阶而比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小量，求n.

解 由$x\sin x^n=x^{n+1}+o(x^{n+1})$，

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)=\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$

$e^{x^2}-1=x^2+o(x^2)$ …………………………………………… ………..(4 分)

和已知条件得

$2<n+1<4$，即 $1<n<3$，所以$n=2$ ………………………………………..(6 分)

7. 求微分方程$y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$的通解.

解 对应的齐次线性方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$, 解得特征根为$-1,-1$, 所以对应的齐次线性方程的通解为$(C_1+C_2x)e^{-x}$ ……………………………………………(3 分)

设原方程的特解为$Ax^3\mathrm{e}^{-x}$, 代入原方程可得$A=\frac{1}{6}$,

所以原方程的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$ (C_1,C_2为任意常数)……………..(6 分)

四、综合题(第一小题 13 分,第二小题 10 分, 共 23 分. 请将答案写在后面试卷纸上, 要写出解答步骤)

1. 讨论$y=|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$的渐近线、单调区间、极值、凹凸区间、拐点，并作图.

解 定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由$x\to+\infty$时, $|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=x+1+o(1)$, 知$y=x+1$是$x\to+\infty$时的渐近线,

由$x\to-\infty$时，$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=-(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=-x-1+o(1)$，知$y=-x-1$是$x\to-\infty$时的渐近线,

由$x\to0+$时, $|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to0$, $x\to0-$时, $|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to+\infty$, 所以$x=0$是$x\to0-$时的渐近线 ………………………………………………………………………… ….(5 分)

由$f'(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$, 知在$(-\infty,-2)$严格单调减, 在$(-2,0)$和$(0,+\infty)$严格单调增, 点$(-2,0)$是极小值点……………………………………...………..(8 分)

由 $f''(x)=\begin{cases}\frac{3x-2}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{2-3x}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$, 知 $x=\frac{2}{3}$ 时 $f''(x)=0$, 而且在 $(-\infty,-2)$ 和 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$上是凸的, 在区间$(-2,0)$和$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上是凹的, $x=\frac{2}{3}$处是拐点……………....(11 分)

图像………………………………………………………………………………(13 分)

2. 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续, $(0,1)$可导, $f(x)$在$[0,1]$上的最大值是2020, $f(0)=0$, $f(1)=2018$, 证明存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=2019$.

证 设$f(x)$在点α取最大值2020, 即$f(\alpha)=2020$, $\alpha\in(0,1)$.

构造函数$F(x)=f(x)-2019x$, $x\in[0,1]$. $F(x)$在$[0,1]$连续, $(0,1)$可导. $F(0)=0$.

……………… …………(4 分)

由 $F(1)=f(1)-2019=-1<0$，$F(\alpha)=f(\alpha)-2019\alpha=2020-2019\alpha>0$，由

于$F(x)$在$[\alpha,1]$连续及零点存在定理知存在$\beta\in(\alpha,1)$，使得$F(\beta)=0$………………(8 分)

由$F(x)$在$[0,\beta]$连续，$(0,\beta)$可导，$F(0)=F(\beta)=0$及 Rolle 定理知存在$\xi\in(0,\beta)\subseteq(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=2019$. …………………………… …..(10 分)

另证 如能正确地利用达布定理证明也给满分. 由 Lagrange 中值定理可得存在$\xi_1\in(0,\alpha)$，使得$f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{2020}{\alpha}>2019$，存在$\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2018<2019$，即有$f'(\xi_1)>2019>f'(\xi_2)$，而$f(x)$在以$\xi_1,\xi_2$为端点的闭区间上可微，由达布定理知存在$\xi$介于$\xi_1,\xi_2$之间，使得$f'(\xi)=2019$.