# 东南大学考试卷(A 卷)

课程名称 线性代数A 考试学期 12-13-3 得分

适用专业 05,19,21,26系 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

一. (30%)填空题

1. 设$\alpha=(1,2),\beta=(k,-1)$,矩阵$A=\alpha^T\beta$。若$A^2=O$,则$k=$________;

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&-1&0\\8&9&2\end{pmatrix}$,则行列式$|AB^{-1}|=$________;

3. 已知方阵$A$满足$A^2-3A+2E=O$,则$A^{-1}=$________;

4. 若矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&\lambda\\4&9&\lambda^2\end{pmatrix}$的秩等于2,则$\lambda$可能的值为________;

5. 已知向量组$\alpha,\beta$线性无关,若$\alpha+\beta,2\alpha+k\beta$线性相关,则$k=$________;

6. $R^3$的子空间$V=\{(x,y,z)\mid x-2y+3z=0\}$的一组基为________;

7. 若$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$分别是$2\times2$矩阵$A$的属于特征值1和$-1$的特征向量,向量$\eta=\alpha+\beta$,则$A^2\eta=$________;

8. 若3是矩阵$A=\begin{pmatrix}1&x&y\\a&2&z\\b&c&4\end{pmatrix}$的二重特征值,则行列式$|A|=$________;

9. 若实对称矩阵$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&1\\1&k\end{pmatrix}$合同,则$k$的取值范围是________;

10. 若$n$阶方阵$A$的特征多项式是$\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$,则$2n$阶方阵$\begin{pmatrix}O&E\\A&O\end{pmatrix}$的特征多项式是________。

二. （10%）求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

三. （14%）已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$。

**1.** 问：当 $a,b$ 取何值时，$\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且相应的组合系数是唯一的？

**2.** 问当 $a,b$ 取何值时，$\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且线性表示的表示方式不是唯一的（即组合系数不是唯一的）？并给出这时所有可能的表示方式。

**四.（12%）** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。求矩阵 $X$ 使得 $XA=X+B$。

五.（**14%**）已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似。

**1.** 求参数 $a,b$ 的值；

**2.** 求一正交阵 $Q$，使得 $Q^T AQ=B$。

六. （10%）已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 之中有且仅有一个矩阵是正定的，

求参数 $a$ 的取值范围。

七. （10%）证明题：

1. 设 $A,B$ 都是3阶方阵。若 $A$ 有 3 个互异的特征值，并且 $AB=BA$，证明：$B$ 与对角阵相似。

2. 证明：对任意方阵 $A$，均存在可逆矩阵 $P$，使得 $PA$ 是幂等阵（矩阵 $M$ 是幂等阵意指 $M$ 满足 $M^2=M$ ）。