仅供参考

东南大学考试卷 A 卷

课程名称 线性代数　考试学期 19-20-2　得　分

适用专业 全　校　考试形式 闭　卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______　学号______

密　封　线

一． (30%)填空题（E 表示单位矩阵）

1. 设 2 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\beta)$，$B=(\alpha_2,\beta)$，若 $|A|=-2,|B|=2$，则 $|2A-B|=$ <u>-6</u>；

2. 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_1+\alpha_2,k\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关，则 $k=$ <u>1</u>；

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$，若 $Ax=0$ 的基础解系中只含两个向量，则 $a=$ <u>1</u>；

4. 设向量空间 V 的从基 α_1,α_2 到 β_1,β_2 的 过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$，向量 η 在基 α_1,α_2 下的坐标是 $(1,-1)^T$，则 η 在基 β_1,β_2 下的坐标是 $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$；

5. 将 2 阶矩阵 A 的第二行的 2 倍加到第一行，再将第一行和第二行互换得矩阵 B，则满足 $B=PA$ 的矩阵 $P=$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$；

6. 若 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=A+B$，则 $(A-E)^{-1}=$ <u>B-E</u>；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&3\\y&4\end{pmatrix}$ 合同，则参数 x,y 的取值范围是 <u>$x<4,\ y=3$</u>；

8. 已知 A,P 为 2 阶矩阵，且 $P=(\alpha,\beta)$ 可逆，若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $Q=(2\beta,3\alpha)$，则 $Q^{-1}AQ=$ $\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}$；

9. 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_2=2\\-x_1+2x_2=1\end{cases}$ 的最小二乘解是 $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

10. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的若当标准形是 $\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$.

二. （10%）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 3 & 1 \\ & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解：根据第1行展开得 $D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}$

则 $D_n-D_{n-1}=2(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=2^{n-2}(D_2-D_1)=2^n$

$D_n-2D_{n-1}=D_{n-1}-2D_{n-2}=\cdots=D_2-2D_1=1$

由上式得 $D_n=2^{n+1}-1$

三. （12%）已知向量 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\3\\0\end{pmatrix}$ 可以由 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}$ 线性表示，且表达式不唯一，求参数 a,b 的值及表达式.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)\xrightarrow[\text{行}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3-2a\\ 0 & 0 & b+2 & 0 & 6-5a\end{pmatrix}$

由表达式不唯一得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

$\therefore b+2=0$ 即 $b=-2$

又 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta_2$ 有解 得 $6-5a=0$ 即 $a=\frac{6}{5}$

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta_1$ 得 $X=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意数

$\therefore \beta_1=(-1+k_1)\alpha_1+(2-k_1)\alpha_2+k_1\alpha_3$，$k_1$ 为任意数

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta_2$ 得 $X=\begin{pmatrix}3/5\\3/5\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意数

$\therefore \beta_2=(\frac{3}{5}+k_2)\alpha_1+(\frac{3}{5}-k_2)\alpha_2+k_2\alpha_3$，$k_2$ 为任意数

四. （13%）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $XA-AXA=E-A^2$ 的解.

解：由条件 $(E-A)XA=(E-A)(E+A)$

$\because |E-A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{vmatrix}\neq 0 \quad \therefore E-A$ 可逆

$\therefore XA=E+A$，又 $\because A$ 可逆

$\therefore X=(E+A)A^{-1}$

$=A^{-1}+E=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3/2&0&-1/2\\0&3/2&0\\1/2&0&3/2\end{pmatrix}$

五. （12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-a&-1&a\\4&2&-3\end{pmatrix}$ 相似于对角阵，求 a，并求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2 \quad \because A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 特征值 -1 的几何重数 $3-r(A-(-1)E)=2$

即 $r(A+E)=1$ 得 $a=0$

解 $(A-E)X=0$ 得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(A+E)X=0$ 得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

则令 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

六．（13%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2，求参数 a，并求一正交变换 $x=Qy$，把 f 化为标准形，并给出相应的标准形.

解：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

由 $r(A)=2$ 得 $a=2$

$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$

对特征值 $\lambda_1=0$ 解 $(A-0E)X=0$ 得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ 单位化 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$

对特征值 $\lambda_2=3$ 解 $(A-3E)X=0$ 得基础解系 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

正交单位化得 $\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 作正交变换 $x=Qy$

七．（10%）证明题： 得 $f(x_1,x_2,x_3)=3y_2^2+3y_3^2$

1．设 A 为 $s\times n$ 矩阵．证明：$r(A)=n$ 的充分必要条件是存在 $n\times s$ 矩阵 B，使得 $BA=E$．

证："$\Leftarrow$" $\because$ $BA=E_n$ $\therefore$ $r(A)\geq r(E_n)=n$.

又 $\because$ $r(A_{s\times n})\leq n$ $\therefore$ $r(A)=n$

"$\Rightarrow$"

$\because$ $r(A_{s\times n})=n$ $\therefore$ 存可逆阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}Q$.

令 $B=Q^{-1}(E_n\ 0)P^{-1}$，则 $BA=E$

2．设矩阵 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，$b_i\neq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数．记 $B=(b_ib_ja_{ij})$．证明：B 也是正定矩阵.

证：令 $D=\begin{pmatrix}b_1&&\\&\ddots&\\&&b_n\end{pmatrix}$ 则 $B=DAD$

又 $\because$ $A=A^T$ $\therefore$ $B^T=D^TA^TD^T=DAD=B$.

$\forall\,\theta\neq X\in R^n$, $X^TBX=X^TDADX=(DX)^TA(DX)$

$\because$ $X\neq\theta$, $b_i\neq0$ 得 $Y=DX\neq\theta$，又 $\because$ A 正定

$\therefore$ $X^TBX=Y^TAY>0$

$\therefore$ B 为正定阵