华东师范大学 2020-2021 第一学期《线性代数 A》期末试卷 (B 卷)

姓　　名: ________________　　学　　号:________________

专　　业: ________________　　考　　场:________________

注意：答案写在答题纸上。本试卷总分 100 分，共有七题。

一、选择填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 是 2 阶方阵, $|A|=12$，且 A 的迹为 8，则 A 的特征值为 ____ 和 ____.

2. 在四维标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 向量 $\alpha=(1,1,0,1)^T$ 和 $\beta=(1,1,1,1)^T$ 的内积为 ________, α 和 β 的夹角为 ________.

3. 以下集合中，可以组成 $P_3[x]=\{ax^2+bx+c|a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 的一组基的是________.

   （A）$\{1,x^2,x^2-2\}$;　　（B）$\{2,x^2,x,2x+3\}$;
   （C）$\{x+2,x+1,x^2-1\}$;　　（D）$\{x^2+2,x^2-1\}$.

4. 下列集合不是二维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的子空间的是 ________ (以下选项中 $X=(x_1,x_2)^T$).
   (A) $W_1=\{X\in\mathbb{R}^2|x_1x_2=0\}$; (B) $W_2=\{X\in\mathbb{R}^2|2x_1=3x_2\}$;
   (C) $W_3=\{X\in\mathbb{R}^2|x_1+x_2=0\}$; (D) $W_4=\{X\in\mathbb{R}^2|x_1=x_2=0\}$.

5. 下列命题错误的是________.

   （A）若矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 有同样的特征值;
   （B）若方阵 A 是正交矩阵，则 A 的伴随矩阵也是正交矩阵;
   （C）若向量 α_1 不能由向量 α_2 和向量 α_3 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;
   （D）若矩阵 A 满足 $A^2=A$, 则 $3E-A$ 可逆.

二、(10 分) 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

为标准型，求出所作的非退化线性代换, 并给出二次型的正、负惯性指数.

三、(15 分) 用基础解系表示出下列方程组的全部解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=2, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=5. \end{cases}$$

四、(15 分) 已知实向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

2. 求从基 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵;

3. 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵;

4. 分别给出向量 $\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 在以上两组基下的坐标.

五、(15 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 已知方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一.

1. 试求 a 的值;

2. 求正交矩阵 Q 及对角阵 B 使得 $Q^T AQ = B$.

六、(15 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

1. 求 x 与 y.

2. 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$.

3. 对任意正整数 k, 求 A^k.

七、(10 分) 设 A 为 n 阶矩阵，证明 $r(A^n) = r(A^{n+1})$.

[试题结束]