2020 年转专业试题

数学与应用数学类专业（非师范）

一共 10 题，每题 10 分，满分 100 分。请将答案写在空白纸上，注明学号、姓名和专业。

1. 已知函数$f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$.

   (1) 当$a=1$时，求不等式$f(x)>1$的解集；

   (2) 若$f(x)$的图像与x轴围成的三角形面积大于b，求a的取值范围.

2. (1) 设 $f(x)$ 为二次函数，m 为一个实数，是否一定存在实数s,t，满足$s<m<t$，且 $f(s)=f(t)$？证明你的结论；

   (2) 求所有二次函数 $f(x)$，使得存在一个实数m满足：$f(s)f(t)\geq m$对任意实数s,t恒成立，并且存在两个不相等的实数s_0,t_0，使得 $f(s_0)f(t_0)=m$.

3. 设x，y，$z>0$，$xyz=1$. 证明：

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

4. 设$f(x)$是（$-\infty$，$+\infty$）上的连续函数，$f(x)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}.$$

5. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{[g(2x+t)-g(2x)]\sin xt}{t^2}$，$ln(1+x)$是$g(x)$的一个原函数，求

   $\int_0^1 f(x)dx$.

6. 设函数$f(x)=\int_0^1|t-x^2|dt,(x>0)$，求$f'(x)$，并求$f(x)$的最小值.

7. 设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数，且$F(0)=1$。当$\mathrm{x}\geq 0$时有$f(x)\,F(x)=sin^2 2x$，$F(x)\geq 0$. 求$f(x)$.

8. 设函数$f(x)=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列：

$$f_1(x)=f(x)，f_2(x)=f(f(x))，\cdots，f_n(x)=f\big(f_{n-1}(x)\big).$$

   记S_n为曲线$y=f_n(x)$，直线$x=1$和x轴所围成的平面图形，A_n为S_n绕着x轴转一圈所得立体的体积，求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}n^2A_n$.

9. 设$f(x)$在$[0,b]$上连续且单调递增，证明，若$0<a\leq b$，

   $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{b}{2}\int_0^b f(x)dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx.$

10. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减，$f(x)>0$。证明 $\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\leq\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$.