2018-2019第一学期《线性代数》期末试卷A

姓　　名: ____________________　　学　　号: ____________________

专　　业: ____________________　　考　　场: ____________________

一	二	三	四	五	六	总分	阅卷人签名

....

一、选择填空题（每空3分，共18分）

1. 设向量α和β的长度分别为2 和5，则$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$ 的内积$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=$________.

2. 设n阶方阵A有特征值$0,1,\ldots,n-1$，矩阵B与矩阵A相似，则$|2E+B|=$________.

3. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2+4x_1x_2+4{x_2}^2+2x_1x_3+{x_3}^2+4x_2x_3$ 的秩是________.

4. 设λ是方阵A的特征方程的3重根，A 的属于λ的线性无关的特征向量的个数为k，则必有________.

   (A)$k\le 3$;　　(B)$k\ge 3$;　　(C)$k=3$;　　(D)不能确定.

5. 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，下列集合中是实线性空间$\boldsymbol{R}^3$的子空间的是________.
   (A) $W_1=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3|x_2\ge 0\}$;　　(B) $W_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3|x_1=1\}$;
   (C) $W_3=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3|x_1+2x_2-x_3=0\}$;　　(D) $W_4=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3|x_1+2x_2-x_3=1\}$.

6. 下列命题正确的是____.

   (A) $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$ 线性无关, 则$\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\alpha_3}+\boldsymbol{\beta_3}$ 线性无关；

   (B) $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3},\boldsymbol{\beta_4}$ 线性相关, 则$\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\alpha_3}+\boldsymbol{\beta_3},\boldsymbol{\alpha_4}+\boldsymbol{\beta_4}$ 线性相关；

   (C) $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$ 线性无关$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_3}+\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_4}+\boldsymbol{\alpha_1}$ 线性无关;

   (D) $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_3}+\boldsymbol{\alpha_1}$ 线性无关.

二、(12分) 设$P[x]_3$表示次数小于3的多项式空间:

1. 证明$f_1(x) = 1 + x + x^2$, $f_2(x) = 1 + x + 2x^2$, $f_3(x) = 1 + 2x + 3x^2$是$P[x]_3$的一组基；

2. 求从基$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$到基$g_1(x) = 1, g_2(x) = x, g_3(x) = x^2$的过渡矩阵；

3. 分别求多项式$f(x) = 1 + 2x + 5x^2$在这两组基下的坐标.

三、(20分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=b. \end{cases}$$

1. a,b取何值时，该方程组无解，有唯一解，有无穷多解？

2. 当该方程组有无穷多解时，求其通解.

四、(15分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

1. 求A的特征值与特征向量;
2. 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵，并写出此对角阵.

五、(20分) 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵$B = \begin{pmatrix} y & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 相似.

1. 求x, y;

2. 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$;

3. 求正交矩阵Q，使得$Q^TAQ = B$.

六、(15分) 化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准型，并写出所用的线性代换;该二次型的正惯性指数是多少？