2022 年数学科学学院转专业考试（非师范笔试）试题

1. （1）证明： 当$x\in[0,1)$时，$x-\frac{1}{2}x^2\leqslant\ln(x+1)\leqslant x$；

（2）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$.

2. 设非负函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，在点$x_0\in[a,b]$处连续并且$f(x_0)>0$，

证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0(a<b)$.

3. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to0}\frac{(g(-x+t)-g(-x))\sin(2xt)}{t^2}$，$\ln(1+x^2)$是$g(x)$的一个原函数，

求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，

证明：存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=2\xi+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}-a-b$

5. 已知点$A(1,0,1)$，$B(1,2,5)$，求过点A,B的直线绕z轴旋转所得的旋转曲面方程.

6. 设$f(x)$在$(0,1)$上有定义，且函数$\mathrm{e}^x f(x)$与$\mathrm{e}^{-f(x)}$在$(0,1)$上单调不减，证明：$f(x)$在$(0,1)$上连续.

7. 设$f(x)$在区间$[0,2]$上连续，在$(0,2)$上可导，且$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leqslant1$.

证明：$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant3$.

8. 如果一个数列由有限个连续的正整数组成（数列的项数大于 2），且所有项之和为N，那么就称该数列为N型标准数列，例如数列 2,3,4,5,6 是 20 型标准数列，求 2668 型标准数列的个数.

9. 已知数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为$2m$的等差数列，前n项和S_n.设$b_n=\frac{S_n}{2^n n}$（n为正整数），若数列$\{b_n\}$是严格递减数列，求实数m的取值范围.

10. 若函数$f(x),g(x)$满足：对任意的$x\in[u,v]$，$|f(x)-g(x)|\leqslant1$恒成立，其中实数$u<v$，则称$f(x)$与$g(x)$在区间$[u,v]$上“近似”.

（1）若$f(x)=x+\frac{8}{x}$，$g(x)=-x+m$在区间$[1,3]$上近似，求实数m的所有可能值；

（2）对任意两个定义在$[0,1]$上的函数$f(x),g(x)$，是否一定存在一个正整数N和$N+1$个函数$f_i(x)\,(i=0,1,2,\cdots,n)$，其中$f_0(x)=f(x)$，$f_N(x)=g(x)$．使得对$i=0,1,\cdots,N-1$均有$f_i(x)$与$f_{i+1}(x)$在区间$[0,1]$上近似? 证明你的结论.