华东师范大学 2020-2021 第一学期《线性代数 A》期末试卷 (A 卷)

姓　　名: ____________________　　学　　号:____________________

专　　业: ____________________　　考　　场:____________________

注意：答案写在答题纸上。本试卷总分 100 分，共有七题。

一、选择填空题 (每题 4 分, 共 20 分).

1. 由三维实向量空间 $V=\mathbb{R}^3$ 中向量 $\alpha_1=(1,0,3)^T, \alpha_2=(0,3,2)^T, \alpha_3=(-2,3,-4)^T$ 生成的 V 的子空间的维数为 ________.

2. 以下集合构成三维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的子空间的一个是 ________ (以下选项中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$).
(A) $W_1=\{X\in\mathbb{R}^3 | x_1+x_2=1\}$; (B) $W_2=\{X\in\mathbb{R}^3 | 2x_1+3x_2-x_3=0\}$;
(C) $W_3=\{X\in\mathbb{R}^3 | x_1+2x_3-x_3=1\}$; (D) $W_4=\{X\in\mathbb{R}^3 | x_1-x_2^2=0\}$.

3. 设二阶实对称矩阵 A 的特征值为 1 和 2, 且特征值 1 对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. 则矩阵 $A=$________.

4. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. A 的特征值 1 的代数重数为 _______，几何重数为 ________.

5. 定义 $[0,1]$ 上连续实函数全体 $C[0,1]$ 上的内积为 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，则函数 $f(x)=1$ 与 $g(x)=x$ 的夹角 $=$________，f 的长度 $=$________.

二、(10 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3.$$

将以上二次型化为标准形, 求出所作的非退化线性代换, 并给出二次型的正、负惯性指数.

三、(15 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=9, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=12, \\ x_1-4x_2+3x_3+5x_4=6. \end{cases}$

1. 求出以上线性方程组的一个特解，并给出此方程组所对应的齐次线性方程组的基础解系.

2. 给出方程组的通解.

四、(15 分) 已知实向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}, , \alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\5\\4\\0\end{bmatrix}$.

1. 证明：向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 构成四维实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;

2. 求从基 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 到基 α_1, α_2, α_3, α_4 的过渡矩阵;

3. 求从基 α_1, α_2, α_3, α_4 到基 ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 的过渡矩阵;

4. 分别给出向量 $\gamma=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$ 在以上两组基下的坐标.

五、(15 分) 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&-1\\-1&2&-1&-1\\-1&-1&2&-1\\-1&-1&-1&2\end{bmatrix}$.

1. 求矩阵 A 的特征值与相应的特征向量.

2. 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$. 请给出计算过程.

六、(15 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 与对角阵 Λ 相似.

1. 求矩阵 A 的特征值, 并证明 $a=0$;

2. 求可逆矩阵 P 和 Λ 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

3. 对任意正整数 k, 求 A^k.

七、(10 分) 已知 A 为 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^3+A=2E_n$. 证明: $A=E_n$.

[试题结束]