华东师范大学2019-2020第一学期《线性代数》期末试卷A

姓　　名: __________________　　学　　号:__________________

专　　业: __________________　　年　　级:__________________

....

一、选择填空题（每空2分，共14分）.

1. 设矩阵A与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则A的特征多项式= ______, $|E+A|=$______.

2. 在四维标准欧式空间$\mathbb{R}^4$中, 向量 $\alpha=(1,1,-1,1)^T$ 和 $\beta=(1,-1,1,-1)^T$, 则 α 与 β 的夹角$<\alpha,\beta>=$________, α 与 β的距离$|\alpha-\beta|=$________.

3. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2-2x_1x_2+2{x_2}^2-2x_1x_3+5{x_3}^2+2x_2x_3$ 的秩是________.

4. 设$V=C[1,-1]$表示闭区间$[-1,1]$上的所有连续实函数构成的线性空间，则下列集合是V的子空间的是________.

   (A) $W_1=\{f\in V|f(x)\geq 0\}$;　　　　(B) $W_2=\{f\in V|f(0)f(1)=0\}$;

   (C) $W_3=\{f\in V|f(x)=f(-x)\}$;　　　(D) $W_4=\{f\in V|f(1)-f^2(1)=0\}$.

5. 设η_1,η_2是非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的任意两个解，则下列结论错误的是________.

   (A) $\eta_1+\eta_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解;　　　(B) $\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解;

   (C) $\eta_1-\eta_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解;　　　(D) $2\eta_1-\eta_2$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解.

二、(10分) 求下面线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10, \\ x_1+2x_2+4x_3+8x_4=15. \end{cases}$$

三、(10分) 设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩和极大无关组.

2. 若向量 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_1+\alpha_3$, $\beta_3=2\alpha_2+\alpha_3$. 讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是线性相关还是线性无关，并说明理由.

四、(18分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&x\\0&2&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似.

1. 求x,y;

2. 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$;

3. 对任意正整数 n, 求 A^n.

五、(15分) 已知

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵.

六、(10分) 用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 为标准型，并写出所用的线性代换.

七、(15分) 已知实线性空间V 由全体 2×2 阶下三角实矩阵构成. V 的两组基为

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\ \ M_3=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix},$$

和

$$N_1=\begin{bmatrix}-1&0\\-1&-1\end{bmatrix},\ N_2=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix},\ \ N_3=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix},\ .$$

1. 求从 M_1,M_2,M_3 到 N_1,N_2,N_3 的过渡矩阵;

2. 求 $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ 在两组基下的坐标.

八、(8分)设n阶矩阵A满足$A^2=A+2E$, 证明：

1. A的特征值只能为-1或2;

2. $r(A+E)+r(A-2E)=n$;

3. A可以相似于对角阵.