华东师范大学2019-2020第一学期《线性代数》期末试卷B

姓　　名: ____________________　　学　　号:____________________

专　　业: ____________________　　年　　级:____________________

....

一、选择填空题（每空2分，共12分）.

1. 设矩阵A与矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$相似，则$A$的特征多项式= ______, A的迹$\mathrm{tr}(A) =$______.

2. 已知$A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. 将$A$的第3行乘以5加到第1行相当于用初等矩阵$P$左乘$A$. 这个初等矩阵$P =$ ______.

3. 在四维标准欧式空间$\mathbb{R}^4$中, 向量$\alpha = (0, 1, -1, 5)^T$和$\beta = (1, 3, 1, 2)^T$, 则α与β的距离$|\alpha - \beta| =$________.

4. 设$V = C[1, -1]$表示闭区间$[-1, 1]$上的所有连续实函数构成的线性空间，则下列集合不是V的子空间的是________.
   (A) $W_1 = \{f \in V | f(x) - f(x^2) = 0\}$;　　(B) $W_2 = \{f \in V | f(0)f(1) = 0\}$;
   (C) $W_3 = \{f \in V | f(x) = f(-x)\}$;　　(D) $W_4 = \{f \in V | f(1) - f(-1) = 0\}$.

5. 以下关于向量组的结论正确的是________.
   (A) 一个向量组的极大无关组是唯一的;
   (B) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$中$\alpha_1$不能由$\alpha_2, ..., \alpha_m$线性表示,则$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$必线性无关;
   (C) 等价的向量组有相同的秩;
   (D) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m (m > 2)$ 中任意两个向量都线性无关，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$也线性无关.

二、(20分) 设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1, \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

1. 当k为何值时方程有唯一解？

2. 当k为何值时方程无解？

3. 当k为何值时方程有无穷多解，并求出通解.

三、(10分) 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3$.

1. 写出二次型f的矩阵A，并求出二次型的秩;

2. 将f化为标准形，并写出所用的非退化线性代换.

四、(20分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&x\\2&-4&-1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似.

1. 求x,y;

2. 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$;

3. 对任意正整数 n, 求 A^n.

五、(15分) 已知实线性空间V 由全体次数小于4的实系数多项式构成. V 有两个基

$$f_1=1,\ f_2=x,\ f_3=x(x-1),\ f_4=x(x-1)(x-2),$$

和

$$g_1=1,\ g_2=x,\ \ g_3=x^2,\ g_4=x^3.$$

1. 求从 f_1,f_2,f_3,f_4 到 g_1,g_2,g_3,g_4 的过渡矩阵;

2. 求 $1+2x+5x^2+14x^3$ 在两组基下的坐标.

六、
(15分) 已知三阶实对称矩阵 A的特征值为$1,-1,-1$. 特征值1对应的一个特征向量为$(-1,1,0)^T$.

1. 求特征值-1对应的特征向量;

2. 求矩阵A;

3. 求正交矩阵Q, 使得Q^TAQ为对角矩阵.

七、(8分) 证明：任意$n\times n$阶可逆实矩阵可以写成上三角矩阵与正交矩阵的乘积.