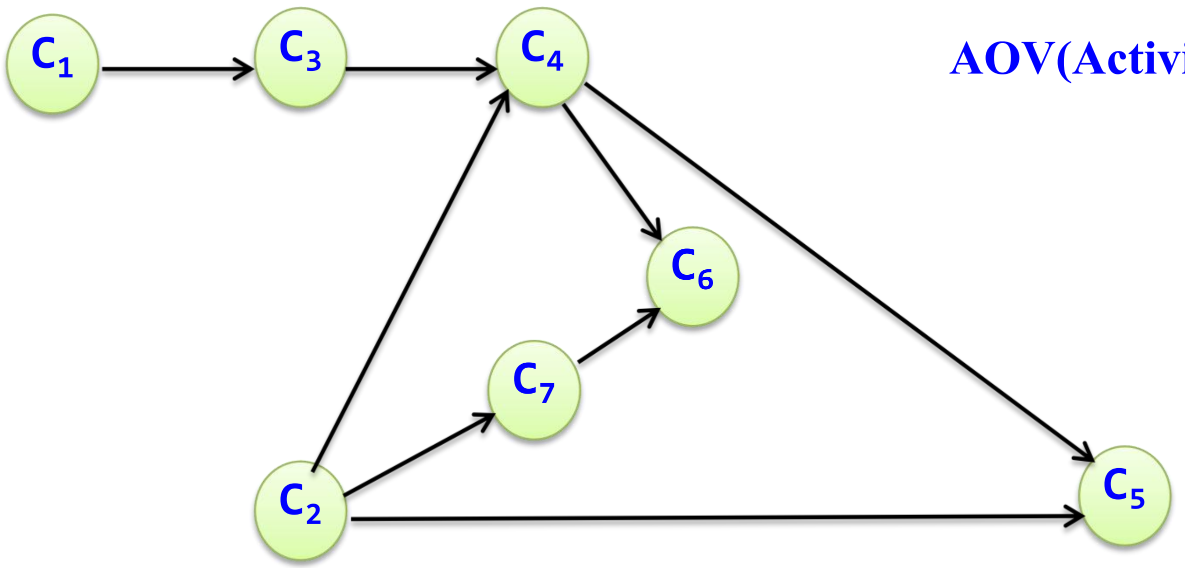
7.7 拓扑排序

计算机专业的学生必须要完成几十门规定的基础课和专业课才能毕业，下面是其中的七门课程名称与相应代号：

课程代号	课程名称	先修课程
C_1	高等数学	无
C_2	程序设计	无
C_3	离散数学	C_1
C_4	数据结构	C_2，C_3
C_5	编译原理	C_2，C_4
C_6	操作系统	C_4，C_7
C_7	计算机组成原理	C_2

课程之间的先后关系可用有向图表示：



AOV(Activity on Vertex)

可以这样排课：

- **C_1，C_2　　第1学期**
- **C_3，C_7　　第2学期**
- **C_4　　第3学期**
- **C_5，C_6　　第4学期**

7.7.1 什么是拓扑排序

有向图

- 拓扑序：如果图中从v到w有一条有向路径，则v一定排在w前面。满足此条件的顶点序列称为一个拓扑序；
- 获得一个拓扑序的过程就是拓扑排序；
- AOV 如果有合理的拓扑序，则图一定是有向无环图（Directed Acyclic Graph，DAG)

拓扑排序的过程：

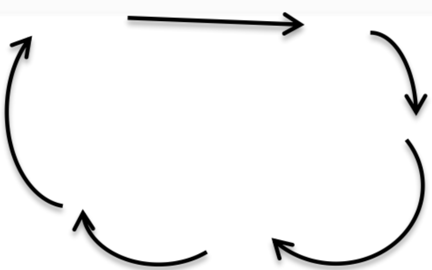
（1）从有向图中选择一个没有前驱（即入度为0）的顶点并且输出它。

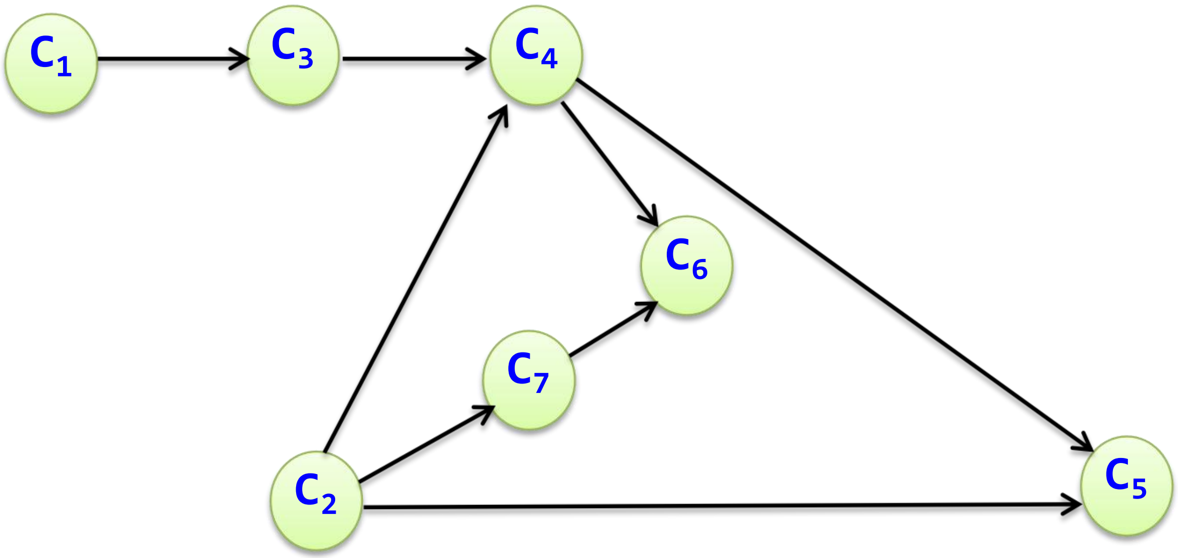
（2）从图中删去该顶点，并且删去从该顶点发出的全部有向边。

（3）重复上述两步，直到剩余的图中不再存在无前驱的顶点为止。

拓扑排序的结果：

- 一种是图中全部顶点都被输出，即获得合理的拓扑序；
- 另一种有向图中有回路，则只能得到部分顶点的拓扑序列，即拓扑排序失败。





产生一个拓扑序列：

C_1 C_2 C_3 C_7 C_4 C_6 C_5

排序完成

7.7.2 拓扑排序算法设计

- 在设计拓扑排序算法时，假设给定的有向图采用逆邻接表G作为存储结构。
- 需要考虑顶点的入度，为此设计一个ind数组，ind[i]存放顶点i的入度，先通过G求出ind。
- 拓扑排序是设计要点如下：

  - 在某个时刻，可以有多个入度为0的顶点，为此设置一个容器，例如栈st（也可以是队列、链表等），以存放多个入度为0的顶点，栈中的顶点的都是入度为0的顶点。
  - 出栈顶点i时，将顶点i输出，同时删去该顶点的所有出边，实际上没有必要真的删去这些出边，只需要将顶点i的所有出边邻接点的入度减1就可以了。

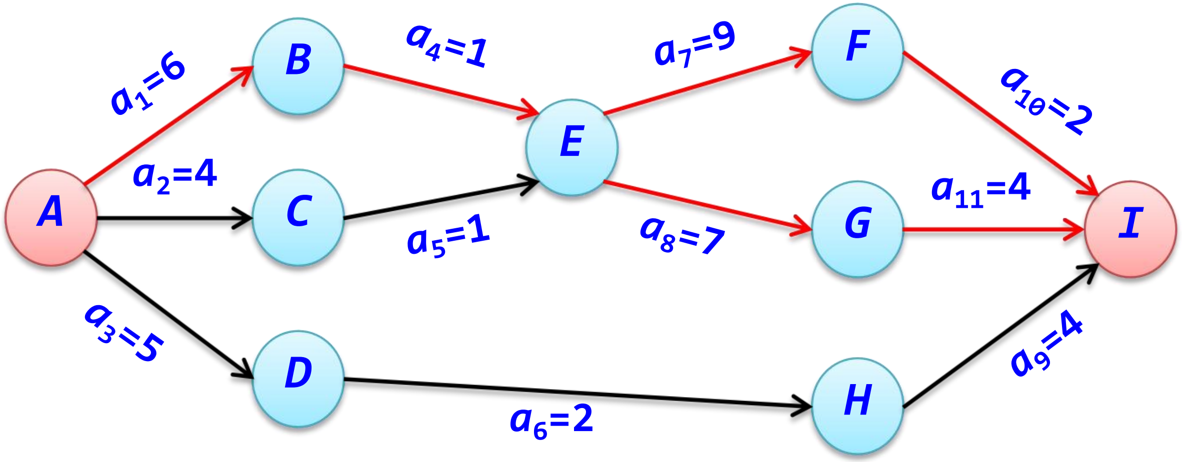
```python
def TopSort(G):                           #拓扑排序
    ind=[0]*MAXV                          #记录每个顶点的入度
    for i in range(G.n):                  #求顶点i的入度
      for j in range(len(G.adjlist[i])):  #处理顶点i的所有出边
          w=G.adjlist[i][j].adjvex        #取顶点i的第j个出边邻接点w
          ind[w]+=1                       #有边<i,w>，顶点w的入度增1
    st=deque()                            #用双端队列实现栈
    for i in range(G.n):                  #所有入度为0的顶点进栈
      if ind[i]==0:st.append(i)

    while len(st)>0:                      #栈不为空时循环
      i=st.pop()                          #出栈一个顶点i
      print("%d" %(i),end=' ')            #输出顶点i
      for j in range(len(G.adjlist[i])):          #处理顶点i的所有出边
          w=G.adjlist[i][j].adjvex        #取顶点i的第j个出边邻接点w
          ind[w]-=1                       #顶点w的入度减1
          if ind[w]==0:st.append(w)       #入度为0的邻接点进栈
```

不考虑求初始入度，时间复杂度为O(n+e)。

7.8 AOE网与关键路径

- AOE(Activity on Edges)
- 若用一个带权有向无环图（DAG）描述工程的预计进度，以顶点表示事件，有向边表示活动，边e的权$c(e)$表示活动e持续的时间（比如天数） ⇨ AOE网。
- 通常AOE网中只有一个入度为0的顶点，称为源点，和一个出度为0的顶点，称为汇点。
- 在AOE网中，从源点到汇点的所有路径中，具有最大路径长度的路径称为关键路径。完成整个工程的最短时间就是网中关键路径的长度。
- 关键路径上的活动称为关键活动，或者说关键路径是由关键活动构成的。
- 只要找出AOE网中的全部关键活动，也就找到了全部关键路径了。



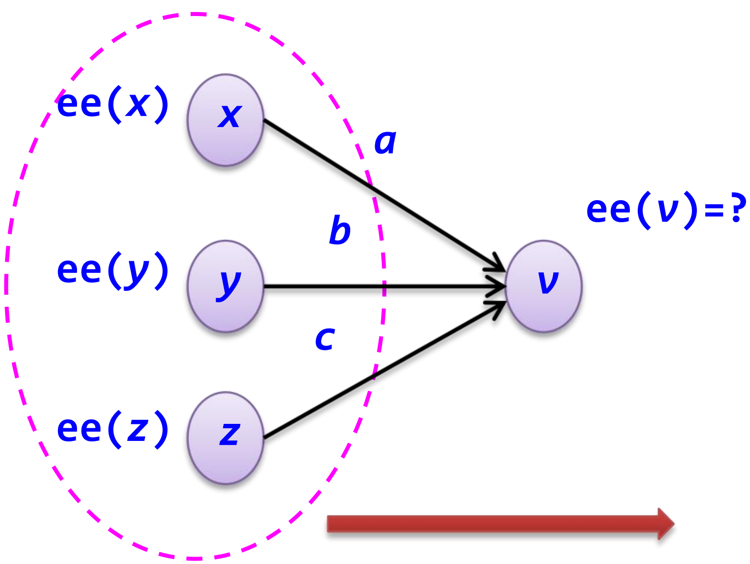
- 源点：A
- 汇点：I
- 关键路径：A → B → E → F → I， A → B → E → G → I
- 关键活动：A B E F G I

求关键路径的过程

（1）事件的最早开始和最迟开始时间

事件v的最早开始时间：规定源点事件的最早开始时间为0。定义图中任一事件v的最早开始时间ee(v)等于x、y、z到v所有路径长度的最大值：

ee(v)=0	当v为源点时
ee(v)=MAX{ee(x)+a，ee(y)+b，ee(z)+c}	否则

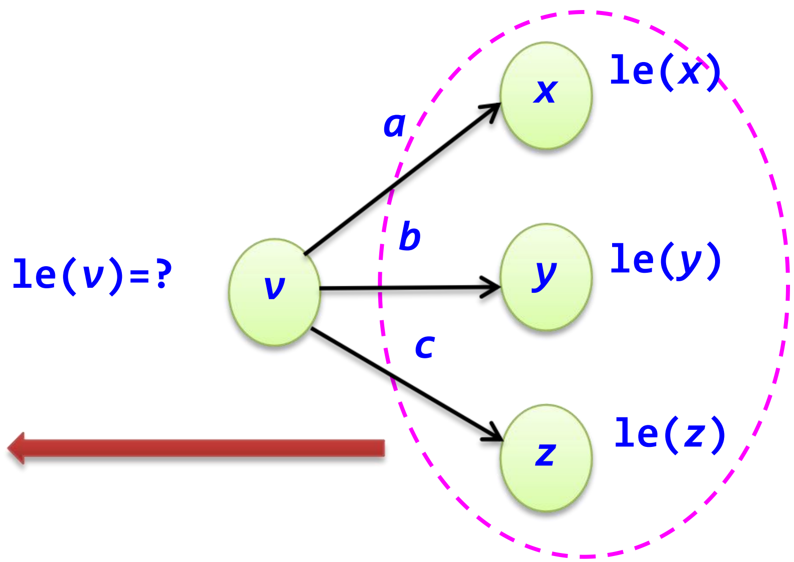


从左向右推进计算

这是为什么源点要唯一！

事件v的最迟开始时间：在不影响整个工程进度的前提下，事件v的最迟开始时间$le(v)$定义如下：

$le(v)=ee(v)$	当v为汇点时
$le(v)=MIN\{le(x)-a, le(y)-b, le(z)-c\}$	否则



从右向左推进计算

这是为什么汇点要唯一！

（2）活动的最早开始时间和最迟开始时间

活动*a*的最早开始时间*e*(*a*)指该活动起点*x*事件的最早开始时间，即：

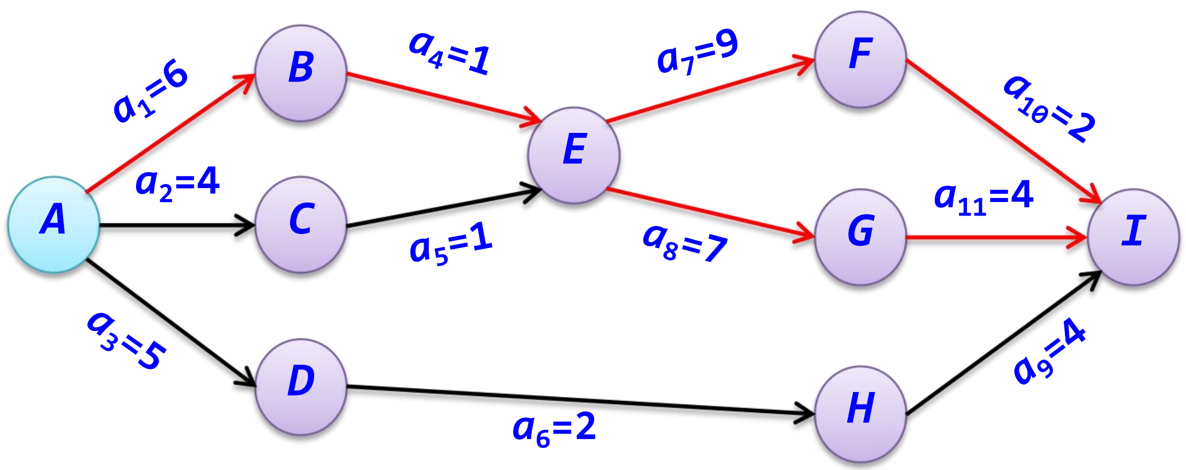
$$e(a)=\mathrm{ee}(x)$$

活动*a*的最迟开始时间*l*(*a*)指终点*y*事件的最迟开始时间与该活动所需时间之差，即：

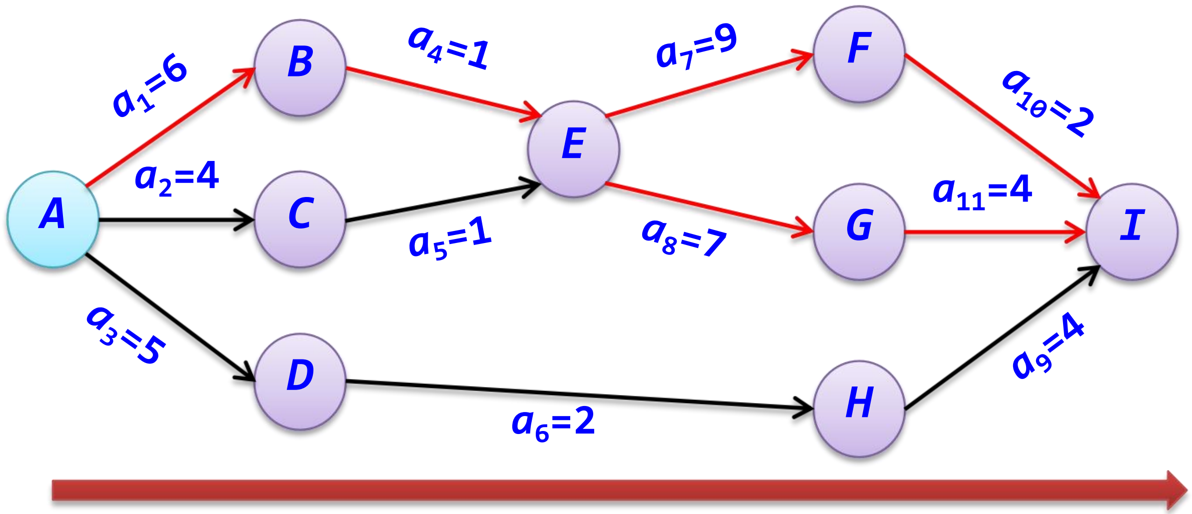
$$l(a)=\mathrm{le}(y)-c$$

（3）求关键活动

对于每个活动a，求出$d(a)=l(a)-e(a)$，若$d(a)$为0，则称活动a为关键活动。 对关键活动来说，不存在富余时间。



【例7.13】



先进行拓扑排序，假设拓扑序列为：*ABCDEFGHI*

计算各事件的ee(*v*)如下：

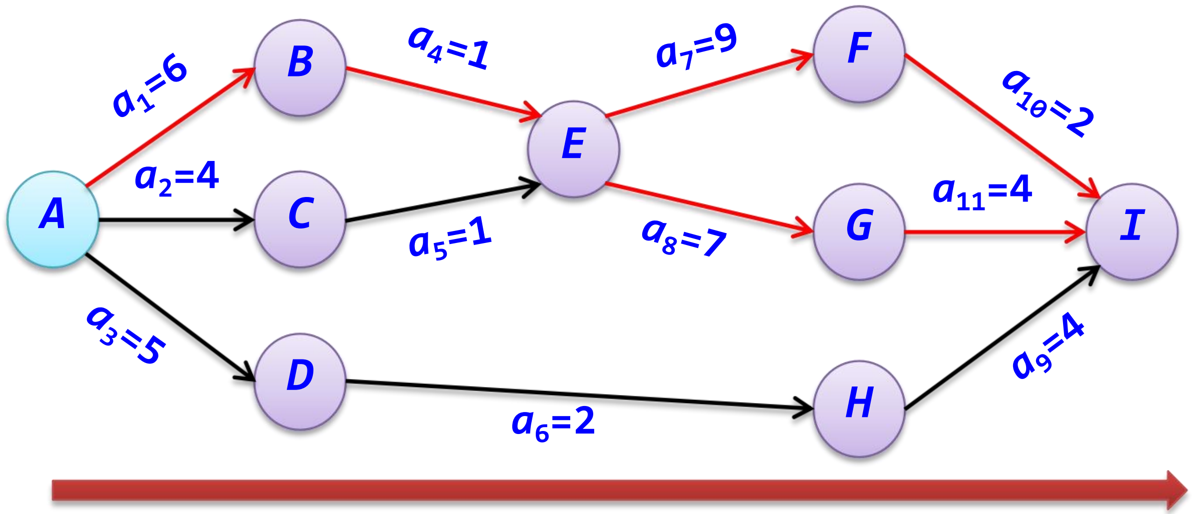
$ee(A)=0$

$ee(B)=ee(A)+c(a_1)=6$

$ee(C)=ee(A)+c(a_2)=4$

$ee(D)=ee(A)+c(a_3)=5$

$ee(E)=MAX(ee(B)+c(a_4)，ee(C)+c(a_5)\}=MAX\{7，5\}=7$



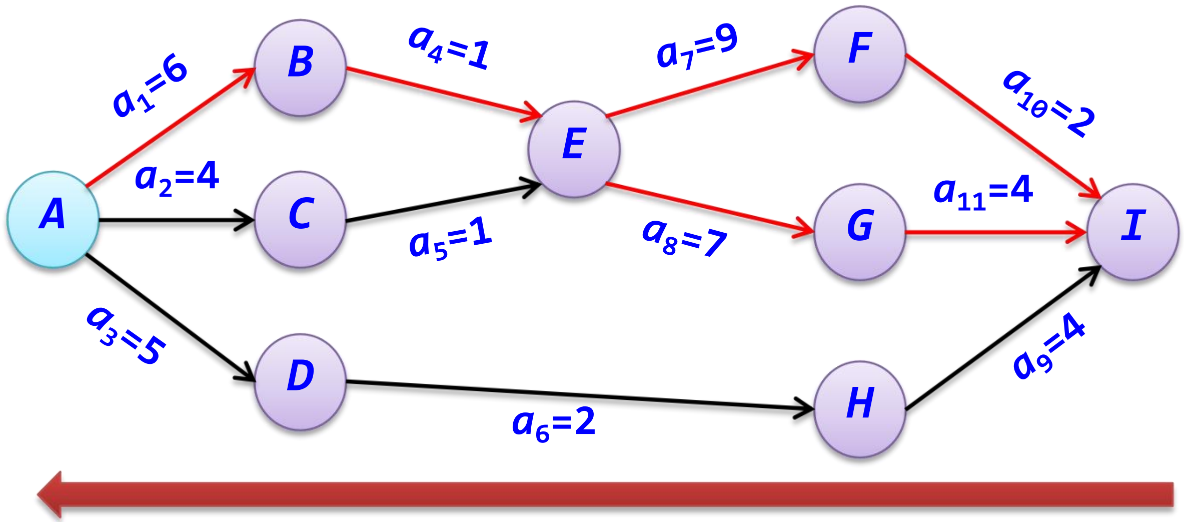
$ee(F)=ee(E)+c(a_7)=16$

$ee(G)=ee(E)+c(a_8)=14$

$ee(H)=ee(D)+c(a_6)=7$

$ee(I)=MAX\{ee(F)+c(a_{10}),\ ee(G)+c(a_{11}),\ ee(H)+c(a_9)\}$

$=MAX(18,\ 18,\ 11\}=18$



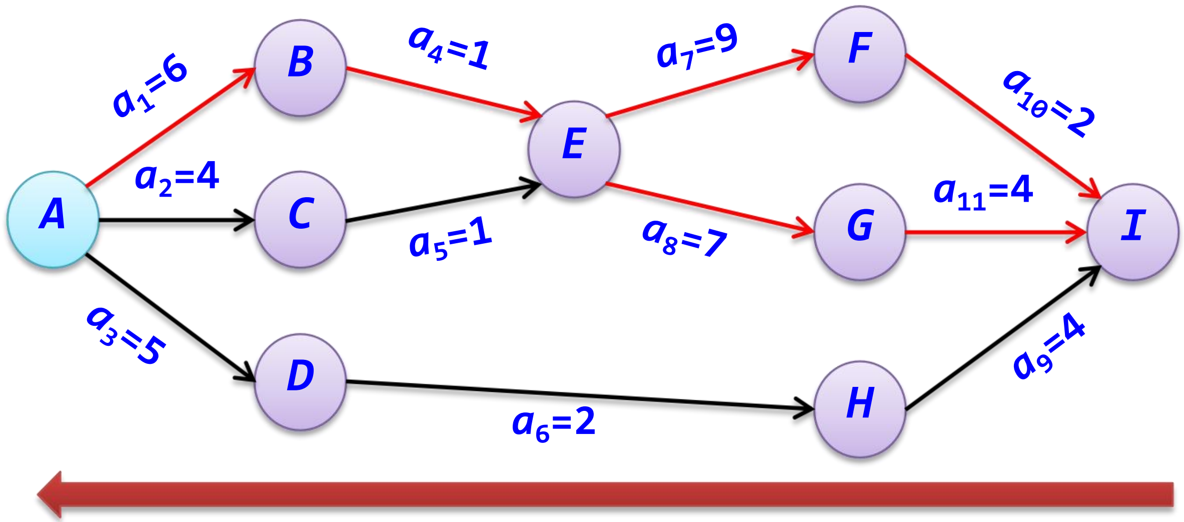
拓扑序列为*ABCDEFGHI*，按拓扑逆序*IHGFEDCBA*计算各事件的le(v)如下：

le(I)=ee(I)=18

le(H)=le(I)-c(a_9)=14

le(G)=le(I)-c(a_{11})=14

le(F)=le(I)-c(a_{10})=16



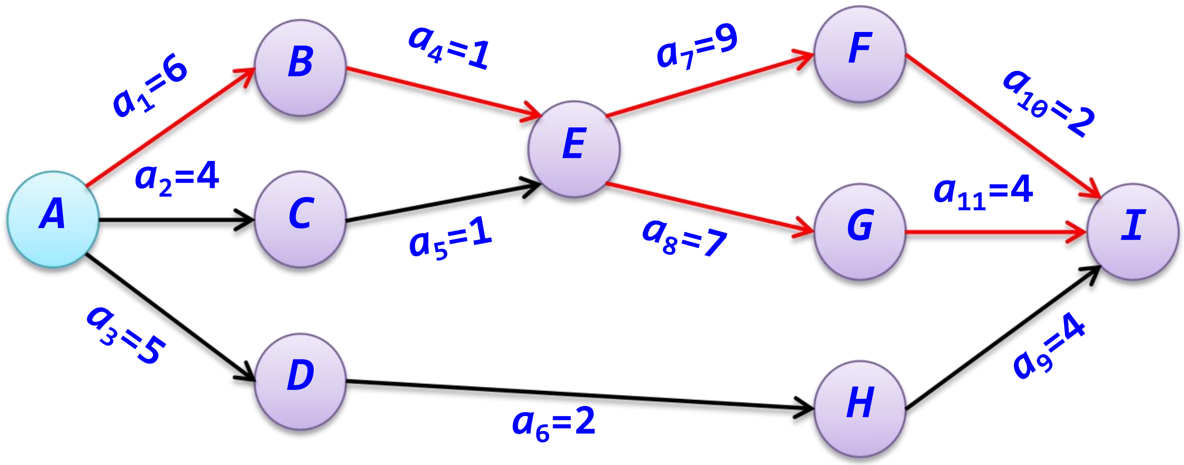
le(E)=MIN(le(F)-c(a_7), le(G)-c(a_8)}={7, 7}=7

le(D)=le(H)-c(a_6)=12

le(C)=le(E)-c(a_5)=6

le(B)=le(E)-c(a_4)=6

le(A)=MIN(le(B)-c(a_1), le(C)-c(a_2), le(D)-c(a_3)}={0, 2, 7}=0



计算各活动的e(a)、l(a)和d(a)如下:

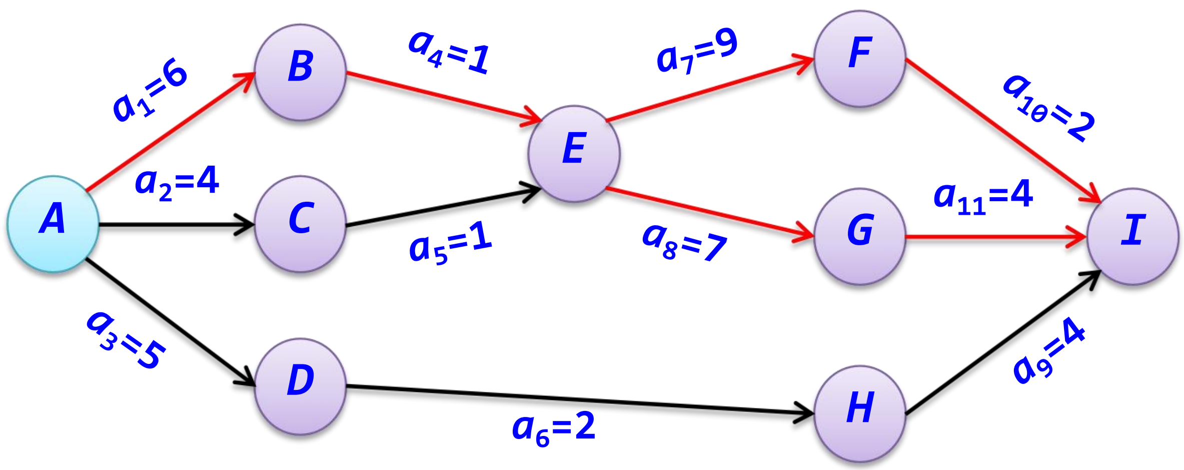
活动a_1: e(a_1)=ee(A)=0, l(a_1)=le(B)-6=0, d(a_1)=0

活动a_2: e(a_2)=ee(A)=0, l(a_2)=le(C)-4=2, d(a_2)=2

活动a_3: e(a_3)=ee(A)=0, l(a_3)=le(D)-5=7, d(a_3)=7

活动a_4: e(a_4)=ee(B)=6, l(a_4)=le(E)-1=6, d(a_4)=0

活动a_5: e(a_5)=ee(C)=4, l(a_5)=le(E)-1=6, d(a_5)=2



活动a_6： $e(a_6)=ee(D)=5$， $l(a_6)=le(H)-2=12$， $d(a_6)=7$

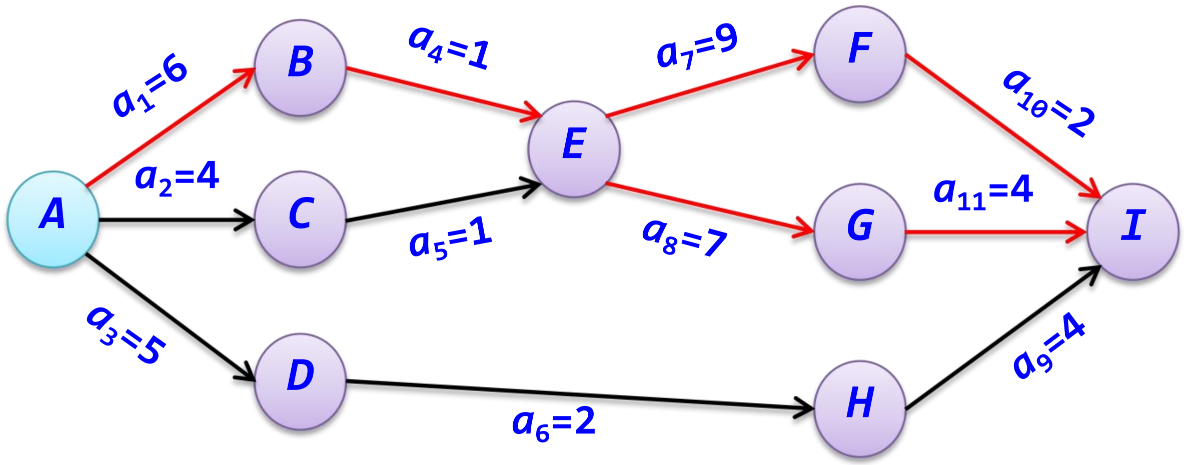
活动a_7： $e(a_7)=ee(E)=7$， $l(a_7)=le(F)-9=7$， $d(a_7)=0$

活动a_8： $e(a_8)=ee(E)=7$， $l(a_8)=le(G)-7=7$， $d(a_8)=0$

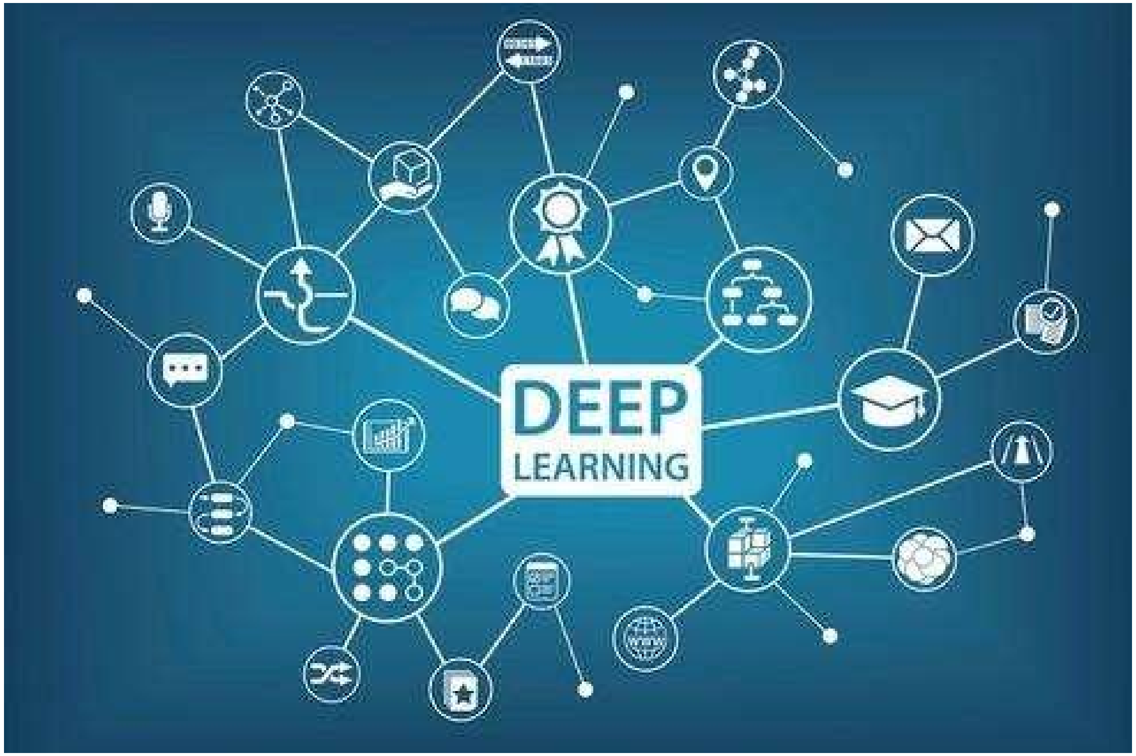
活动a_9： $e(a_9)=ee(H)=7$， $l(a_9)=le(I)-4=14$， $d(a_9)=7$

活动a_{10}： $e(a_{10})=ee(F)=16$， $l(a_{10})=le(I)-2=16$， $d(a_{10})=0$

活动a_{11}： $e(a_{11})=ee(G)=14$， $l(a_{11})=le(I)-4=14$， $d(a_{11})=0$



由此可知，关键活动有a_{11}、a_{10}、a_8、a_7、a_4、a_1，因此关键路径有两条：*A*—*B*—*E*—*F*—*I*和*A*—*B*—*E*—*G*—*I*。


DEEP
LEARNING