

BACHELIER INGÉNIEUR CIVIL

MECA0155-2 | DYNAMIQUE DES SYSTÈMES
MÉCANIQUES

Projet 2

Etude expérimentale d'un modèle SDOF



Professeur
Loïc Salles

Auteurs
Tom BEAUVE (S224331)
Louis VRANKEN (S225050)

Année académique 2024-2025

1) Analyse de la fonction de réponse impulsionnelle (IRF)

Dans cette section, nous étudions la réponse libre temporelle du système à une impulsion, afin de déterminer sa fréquence de résonance ω_d et son facteur d'amortissement ε .

Dans un premier temps, nous créons le graphique de la figure 1 utilisant les données fournies. On remarque que le système subit 2 impulsions en $t = 0$ et $t = 0.02$, qui donnent lieu à des réponses forcées et des aberrations sur de courtes durées après ces impulsions. Nous ignorons donc cette période contenant des effets indésirables, représentée par la zone grisée. Notre analyse de la réponse libre commence au temps de filtrage $t \approx 0,215[s]$, représenté par une verticale rouge sur le graphique.

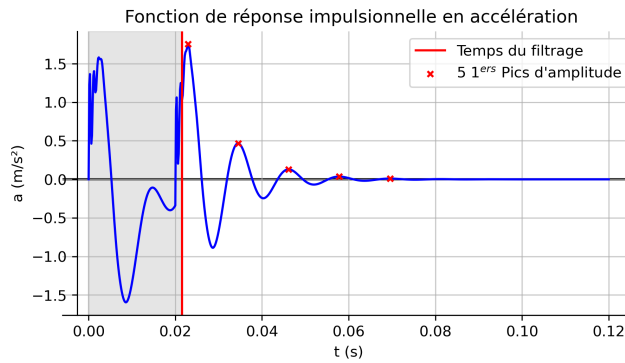


FIGURE 1

La réponse libre décrit un mouvement oscillatoire amorti, ce qui nous informe que le système est en régime d'amortissement sous-critique. Le facteur d'amortissement doit donc être inférieur à l'unité.

Utilisant la fonction `find_peaks` de la librairie `numpy`, nous obtenons les pics d'amplitude de la réponse temporelle, desquels nous ne gardons que les 5 premiers, choix fait arbitrairement car nous jugeons que les amplitudes des pics suivants sont trop insignifiantes et qu'ils ne nous sont pas nécessaires pour notre étude.

Ces pics sont représentés par des croix rouges sur la figure 1.

A partir de ces pics, nous pouvons calculer la fréquence naturelle du système amorti ainsi que son facteur d'amortissement.

1.1 Fréquence naturelle du système amorti

Puisque nous sommes en régime oscillatoire amorti, la réponse temporelle en position peut s'écrire en terme d'amplitude et phase.

$$x = X e^{-\varepsilon \omega_0 t} \cos \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \omega_0 t - \varphi \right) \quad (1.1)$$

De laquelle nous tirons que la fréquence naturelle du système amorti est $\omega_d = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \omega_0$. Puisque la position et l'accélération d'un système oscillatoire ont la même fréquence, nous pouvons

directement utiliser la réponse impulsionnelle en accélération fournie pour déterminer la fréquence naturelle du système.

L'écart de temps moyen entre les 5 premiers pics de la figure 1 est de $\overline{\Delta t} = 0,0116[s]$, et la fréquence naturelle du système amorti est alors

$$\omega_{d,irf} = \frac{1}{\overline{\Delta t}} = 85,91Hz \quad (1.2)$$

1.2 Facteur d'amortissement

Puisque nous sommes en régime oscillatoire amorti, nous pouvons utiliser le drécrément logarithmique afin de déterminer le facteur d'amortissement du système. Cette méthode, normalement utilisée pour la réponse libre en fonction de la position, reste valable pour la réponse libre en fonction de l'accélération car, en repartant de l'équation (1.1), on construit la réponse en accélération

$$\ddot{x} = X e^{-\varepsilon \omega_0 t} [(\varepsilon^2 \omega_0^2 - \omega_d^2) \cos(\omega_d t + \phi) + 2\omega_d \omega_0 \sin(\omega_d t + \phi)] \quad (1.3)$$

dont le facteur entre crochets est périodique de pulsation ω_d , comme la réponse temporelle en position. Le drécrément logarithmique s'écrit alors

$$\Delta = \ln \frac{\ddot{x}}{\ddot{x}(t + k\Delta t)} = k \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_d}, k \in \mathbb{Z}) \quad (1.4)$$

On peut réécrire cette équation pour isoler ε .

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{\sqrt{4\pi^2 + \Delta^2}} \approx \frac{\Delta}{2\pi} \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (1.5)$$

Utilisant l'équation (1.4) avec $k = 4$ pour moyenner sur nos 5 premiers pics d'amplitude, on trouve comme valeurs $\Delta = 1,293$, et, utilisant la formule approximée pour ε , on obtient en première approximation $\tilde{\varepsilon}_{irf} = 0.2058 \ll 1$, on calcule alors la valeur exacte du facteur d'amortissement $\varepsilon_{irf} = 0,2016$.

Ce résultat confirme bien que nous sommes dans le cas d'un amortissement sous-critique comme observé sur le graphique.

2) Analyse de la fonction de réponse fréquentielle (FRF)

Dans cette section, nous étudions la FRF du système en fonction de l'accélération. Cependant, en utilisant la relation liant l'accélération à la position dans le domaine fréquentiel, nous transformons la FRF fournie, H_{acc} , exprimée en fonction de l'accélération, en la FRF de position H_{pos} via la relation :

$$H_{pos} = \frac{H_{acc}}{-\omega^2} = \frac{Re + jIm}{-\omega^2} \quad (2.1)$$

Nous appliquerons ceci aux vecteurs Re et Im qui nous sont fournis, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats étudiés au cours théorique.

2.1 Diagramme de Bode

A partir des vecteurs de données Re et Im qui nous sont fournis, nous construisons successivement l'amplitude et l'angle de phase de la réponse fréquentielle via

$$H = \frac{Re + jIm}{-\omega^2} \quad (2.2a)$$

$$|H| = \sqrt{\frac{Re^2 + Im^2}{\omega^2}} \quad (2.2b)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad (2.2c)$$

Où le $-$ devant l'arctan a été placé pour que la phase soit toujours positive. Les 2 diagrammes de Bode en amplitude et en phase sont affichés ci-dessous.

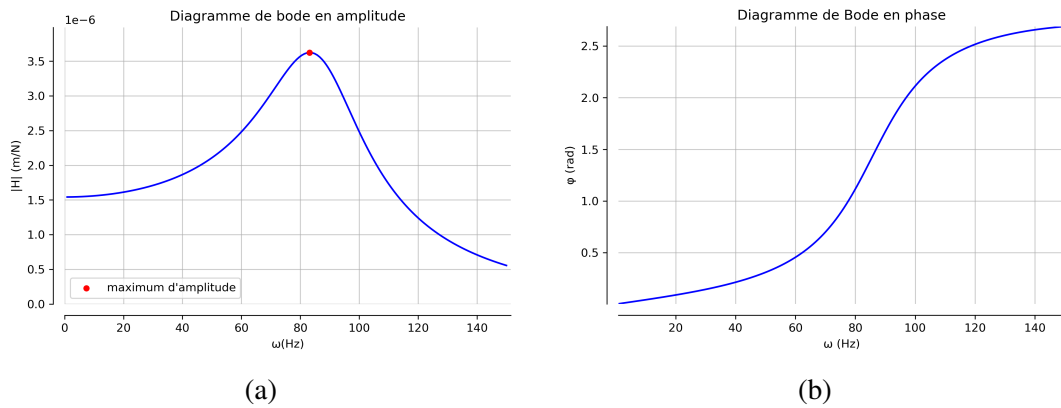


FIGURE 2 – Diagrammes de Bode

De manière similaire à l'analyse de l'IRF, nous utilisons la fonction `find_peaks` pour trouver le pic de résonance en amplitude, symbolisé par un point rouge sur le diagramme, se situant à la fréquence naturelle du système amorti dont la valeur est $\omega_d = 83,16 \text{ Hz}$.

Ensuite, nous utilisons la méthode de la demi puissance pour déterminer le facteur d'amortissement. Pour effectuer cette méthode, nous utilisons la fonction `numpy.where` pour localiser les 2 fréquences, parmi le vecteur de données fourni, auxquelles l'amplitude dépasse $\frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}}$, suivi d'une interpolation linéaire afin d'avoir une valeur presque exacte de ces fréquences. Nous utilisons ensuite la formule

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{1}{2\varepsilon} \quad (2.3)$$

Dans laquelle $\Delta\omega$ est la différence de fréquence entre les 2 fréquences de demi-puissance, et ω_0 est bien la fréquence naturelle du système non-amorti. Puisque nous ne connaissons pas la valeur de cette dernière, nous devons itérer en utilisant le système d'équations (2.4). Nous utilisons comme première approximation $\omega_0^{(0)} = \omega_d$.

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \\ \omega_0 = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous obtenons, après 10 itérations, $\varepsilon_{bode} = 0,2207$ et $\omega_{0,bode} = 85,26 \text{ Hz}$.

Ces résultats sont similaires et cohérents avec ceux obtenus dans la section 1 de l'analyse de l'IRF.

2.2 Diagramme de Nyquist

Similairement au diagramme de Bode, nous utilisons les vecteurs Re et Im qui nous sont fournis pour construire M et N , les parties respectivement réelles et imaginaires de l'amplitude de la fonction de réponse.

$$M = \frac{k \times Re}{\omega^2} = \frac{Re}{\omega^2 |H_0|} \quad (2.5a)$$

$$N = \frac{k \times Im}{\omega^2} = \frac{Im}{\omega^2 |H_0|} \quad (2.5b)$$

Dans lesquels on identifie que $\frac{1}{k} = |H_0|$, l'amplitude de la réponse statique, amplitude définie dans l'équation (2.2b) dans la section 2.1.

Le diagramme de Nyquist ainsi construit est affiché ci-dessous.

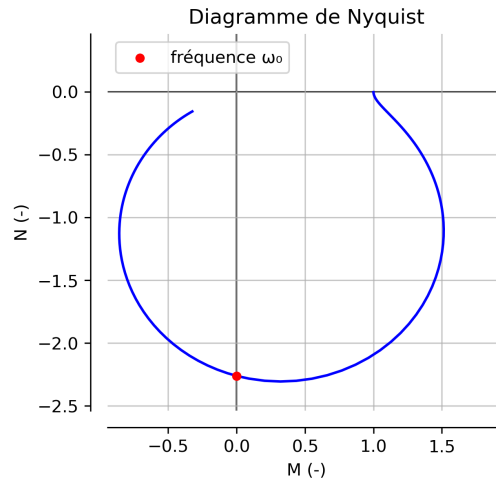


FIGURE 3

Comme vu au cours théorique, le facteur d'amortissement ε peut être déterminé grâce à l'équation (2.6), en évaluant la valeur de la partie imaginaire N à son intersection avec l'axe imaginaire, qui correspond à la fréquence de résonance en phase ω_0 .

Le point correspondant à cette fréquence est indiqué par un point rouge sur le diagramme.

$$N(\omega_0) = \frac{-1}{2\varepsilon} \quad (2.6)$$

Pour trouver l'intersection avec l'axe vertical, nous procédons de manière similaire à ce qui a été fait dans la section sur l'étude du diagramme de Bode : nous utilisons la fonction `numpy.where` pour déterminer, dans le vecteur de données M , la fréquence à laquelle son amplitude devient négative, puis nous appliquons une interpolation linéaire pour affiner cette valeur.

Nous obtenons ainsi les valeurs de la fréquence de résonance en phase $\omega_{0,nyq} = 88,19 \text{ Hz}$ et, appliquant l'équation (2.6), le facteur d'amortissement $\varepsilon_{nyq} = 0,2212$

3) Commentaires

Nous pouvons comparer les résultats obtenus au travers de chacune des méthodes quant à leur précision et leur facilité d'utilisation.

Tout d'abord, nous pouvons commenter la facilité de création des vecteurs de données qui nous étaient fournis : la réponse impulsionnelle (IRF) est, nous croyons, bien plus facile à obtenir que la réponse fréquentielle demandant de produire des données de réponse pour chacune des fréquences présentes dans le vecteur de données.

Ensuite, concernant l'analyse des données en elle-même, nous pouvons faire plusieurs commentaires :

- IRF :

Bien que cette méthode ne permette pas de déduire directement des valeurs sur le diagramme, elle nous a semblé la plus intuitive pour analyser les données et appliquer les formules. Aucune approximation n'a été faite dans le calcul des paramètres que nous recherchions. Ceci, sachant qu'il est probablement plus facile d'obtenir ces données, en fait une bonne méthode de calcul du facteur d'amortissement et de la fréquence naturelle du système.

- Diagramme de Bode :

Cette méthode est visuelle et efficace pour localiser la fréquence naturelle, mais moins adaptée pour le calcul du facteur d'amortissement. Elle nous a paru être le meilleur moyen d'évaluer ω_d . À l'inverse, la méthode de la demi-puissance utilise une approximation dans (2.3), et a requis une interpolation linéaire et une itération sur (2.4) pour obtenir une valeur correcte du facteur d'amortissement, ce qui en fait la méthode la plus fastidieuse et la moins précise pour déterminer ε .

- Diagramme de Nyquist :

Contrairement au diagramme de Bode, cette méthode est plus visuelle pour le calcul du facteur d'amortissement, mais moins adaptée à la fréquence naturelle. L'équation (2.6) ne fait aucune approximation. En revanche, la méthode a nécessité une interpolation linéaire afin de trouver l'intersection exacte avec l'axe imaginaire.

Cependant, rien de visuel ne permet de déterminer la fréquence naturelle, et son estimation requiert également une interpolation linéaire.