



LIÈGE université
Sciences Appliquées

BACHELIER INGÉNIEUR CIVIL

MECA0155-2 | DYNAMIQUE DES SYSTÈMES
MÉCANIQUES

Projet 1

Etude vibratoire d'un modèle SDOF



Professeur
Loïc Salles

Auteurs
Tom BEAUVE (S224331)
Louis VRANKEN (S225050)

Année académique 2024-2025

Introduction

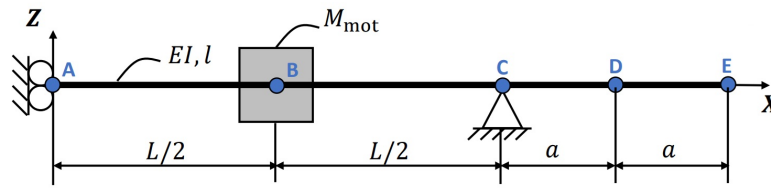


FIGURE 1 – Modèle étudié

$$L = 0,8m, a = 0,2m \text{ et } M_{mot} = 0,4 \times 188 = 75,2kg$$

Ci-dessus un schéma du modèle que nous étudions dans le cadre de ce projet. Nous calculerons sa déflexion sous une charge verticale $P = 1000N$ située à son extrémité libre E , ainsi que sa fréquence naturelle à partir de ses masse et raideur équivalentes. Notons que dans ce modèle, la barre est considérée comme ayant une masse nulle.

1) Calcul de déflexion

Pour calculer la déflexion de la barre, commençons par le calcul des efforts internes dans la barre.

Un appui à rouleaux est placé en A , ce qui bloque la rotation et les déplacements horizontaux, tandis qu'un appui simple est placé en C , bloquant les déplacements verticaux et horizontaux.

Puisqu'aucune sollicitation extérieure horizontale n'est appliquée, les réactions horizontales des 2 appuis sont nulles.

Nous obtenons alors les 2 réactions d'appuis non-nulles suivantes :

- $M_A = (2a + L)P$, le moment à l'appui en A ;
- $V_C = P$, la réaction verticale en C

Nous calculons ensuite les moments internes dans la barre, et obtenons

$$\begin{cases} M_{AC} &= -2aP \\ M_{CE} &= (x - (L + 2a))P \end{cases} \quad (1.1)$$

où M est compté positif s'il met la fibre inférieure en traction, avec x positif dans le sens indiqué sur la figure 1, prenant comme origine l'appui en A .

A partir des expressions (1.1) des moments dans la barre et avec l'équation (1.2), nous pouvons calculer la déflexion de la barre.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (1.2)$$

Où $E = 210[GPa]$ est le module de Young du métal, et I l'inertie flexionnelle de la section du modèle. Puisque la section est un carré creux de côté e et d'épaisseur t , l'inertie vaut

$$I = \frac{e^4 - (e-2t)^4}{12} \approx 1.84 \times 10^{-5} [m^4].$$

Notons que dans l'équation (1.2), z est compté comme positif vers le haut, comme montré dans la figure 2 ci-dessous.

Une double intégration pour chacune des 2 parties de la barre nous donne

$$\theta_{AC}(x) = -\frac{2aP}{EI}x + \theta_A ; \quad z_{AC}(x) = -\frac{aP}{EI}x^2 + \theta_A x + z_0$$

$$\theta_{CE}(x') = \frac{P}{EI}\left(\frac{x'^2}{2} - 2ax'\right) + \theta_C ; \quad z_{CE}(x') = \frac{P}{EI}\left(\frac{x'^3}{6} - ax'^2\right) + \theta_C x' + z_C \quad (x' = x - L)$$

Où les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions d'appui :

- En A, l'angle d'inclinaison de la barre $\theta_A = 0$;
- En C, le déplacement vertical de l'appui $z_C = 0$;
- Par continuité, $\theta_{AC}(L) = \theta_{CE}(L)$

Ce qui nous donne enfin

$$z_{AC} = \frac{aP}{EI}(L^2 - x^2) \quad (1.4a)$$

$$z_{CE} = \frac{P}{EI}\left(\frac{x'^3}{6} - ax'^2\right) - \frac{aP}{EI}L^2 x' \quad (x' = x - L) \quad (1.4b)$$

La figure 2 ci-dessous représente la déflexion du modèle.

Par ailleurs, on identifie $z_0 = \frac{aP}{EI}L^2 \approx 3,3 \times 10^{-5}[m]$.

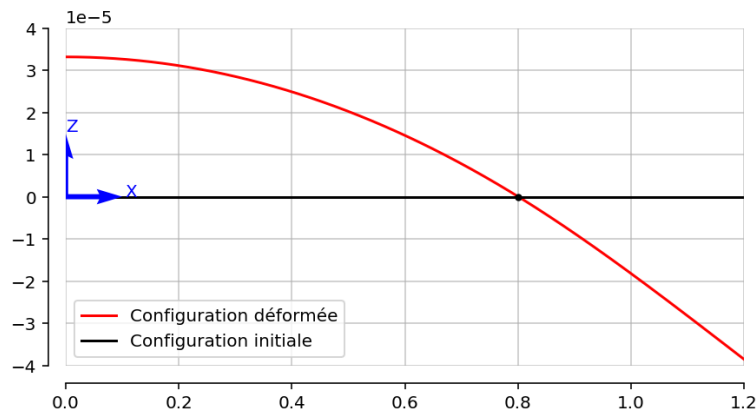


FIGURE 2 – Déflexion du modèle sous une charge de 1000N appliquée à son extrémité libre

2) Energie potentielle et raideur équivalente

L'équation générale de l'énergie potentielle, utilisant z_0 comme coordonnée généralisée, s'écrit

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}z_0^2 \quad (2.1)$$

dans laquelle nous devons identifier la raideur équivalente du modèle k_{eq} .

Par ailleurs, l'énergie potentielle d'une barre soumise à un moment M s'écrit

$$V = \int_0^{L+2a} \frac{M^2}{EI} dx \quad (2.2)$$

Puisque le moment M est défini par parties entre AC et CE , nous séparons l'intégrale et obtenons

$$V = \int_0^L \frac{M_{AC}^2}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{M_{CE}^2}{EI} dx' \quad (x' = x - L) \quad (2.3)$$

En effectuant les intégrales de (2.3) utilisant les valeurs des moments internes de l'équation (1.1), nous obtenons

$$V = \frac{P^2}{EI} (2aL^2 + \frac{4}{3}a^3) \quad (2.4)$$

Ce qui permet d'identifier k_{eq} grâce à l'équation (2.1) et la valeur de z_0 obtenue à la section 1.

$$k_{eq} = \frac{2V}{z_0^2} = \frac{EI}{L^3} (2 + \frac{4a}{3L}) \approx 3,52 \times 10^7 \quad [N/m] \quad (2.5)$$

3) Energie cinétique et masse équivalente

Similairement au point précédent, l'équation générale de l'énergie cinétique, toujours avec z_0 comme coordonnée généralisée, s'écrit

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{z}_0^2 \quad (3.1)$$

dans laquelle la masse équivalente du modèle à identifier est m_{eq} .

Par ailleurs, l'équation générale de l'énergie cinétique d'une poutre possédant une masse ponctuelle M_{mot} en $x = \frac{L}{2}$, une masse volumique ρ et une section transversale A s'écrit

$$T = \frac{1}{2} M_{mot} \dot{z}^2(\frac{L}{2}) + \int_0^{L+2a} (\rho A) \dot{z}^2(x) dx \quad (3.2)$$

Dans notre cas, la poutre n'a pas de masse, autrement dit $\rho = 0$, ce qui implique que l'intégrale dans le membre de droite est nulle.

Afin d'obtenir une équation de la forme de (3.1), nous devons exprimer $z(\frac{L}{2})$ en fonction de z_0 . En reprenant les expressions (1.4a) de la déflexion du modèle et la valeur de z_0 obtenue dans la section 1, nous obtenons

$$z(\frac{L}{2}) = \frac{3}{4} (\frac{aP}{EI} L^2) = \frac{3}{4} z_0 \quad (3.3)$$

Introduisant le résultat de (3.3) dans l'équation (3.2), nous obtenons

$$T = \frac{1}{2} M_{mot} (\frac{3}{4} \dot{z}_0)^2 \quad (3.4)$$

dans laquelle nous identifions m_{eq} :

$$m_{eq} = \frac{9}{16} M_{mot} = 42,3 \quad [kg] \quad (3.5)$$

4) Fréquence naturelle du modèle

Nous obtenons la pulsation naturelle du modèle à partir de l'équation

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad [rad/s] \quad (4.1)$$

En remplaçant les expressions littérales k_{eq} et m_{eq} par leurs valeurs numériques trouvées en (2.5) et (3.5), nous obtenons finalement la fréquence naturelle du modèle

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3,52 \times 10^7}{42,3}} = 145,17 \quad [Hz] \quad (4.2)$$

5) Impact des vibrations sur le corps humain

La fréquence naturelle du modèle trouvée dans la section 4 n'est pas contenue dans l'intervalle $[0,1 ; 100]$ Hz. A priori, les vibrations de la moto étudiée ne devraient donc pas avoir d'effets néfastes sur le corps humain.

Cependant, la fréquence naturelle n'est pas si éloignée de cet intervalle et notre modèle fait quelques hypothèses fortes qui doivent dès lors être discutées pour juger de la validité de cette conclusion :

- Inertie flexionnelle du modèle :

Une première hypothèse faite est que le modèle a une section carrée creuse, constante sur toute sa longueur. Considérer une section circulaire creuse, plus réaliste, aurait pour effet d'augmenter légèrement - d'un facteur multiplicatif $1,17^1$ - l'inertie flexionnelle du modèle et par conséquent sa fréquence naturelle. Par ailleurs, la moto n'a évidemment pas une section et une inertie constante, ce qui aurait un impact sur la raideur équivalente - mais complexe à estimer.

- Poutre de masse nulle :

Le modèle repose également sur l'hypothèse que la masse de la poutre est nulle. Seule la masse du moteur est donc considérée, alors qu'elle ne représente qu'environ 40% de la masse totale du véhicule. Lever cette hypothèse aurait pour effet d'augmenter significativement la masse équivalente du modèle et, par (4.1), baisser la fréquence naturelle.

On peut dès lors raisonnablement supposer qu'en levant cette hypothèse, la fréquence calculée serait inférieure à 100Hz - multiplier la masse équivalente par un facteur 2,25 serait suffisant à obtenir ce résultat.

1. résultat obtenu en considérant une section circulaire creuse de diamètre e et d'épaisseur t