BACHELIER INGÉNIEUR CIVIL

SYST0022-1-2 | LINEAR SYSTEM DESIGN

Lab 1
Cart-pole system : Intuitive PID

Tom BEAUVE (S224331)

Année académique 2024-2025

1) Bloc diagramme

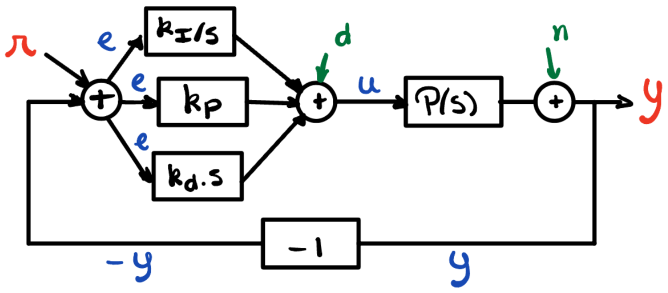

FIGURE 1 – Bloc diagramme d'un système en boucle fermée contrôlé par un contrôleur PID
où y est la sortie du système, r la référence, d la load disturbance, n le bruit de mesure et u la sortie du contrôleur.

2) Fonction de transfert $G_{yr}(s)$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{P(s)(k_p + \frac{k_I}{s} + k_d s)}{1 + P(s)(k_p + \frac{k_I}{s} + k_d s)} \tag{2.1}$$

3) Effets de modification des paramètres d'un contrôleur PID

— k_p (**Proportional Gain**) : Augmenter k_p va faire réagir le contrôleur plus fortement à une erreur, faisant diminuer la valeur de l'erreur plus rapidement. Cependant, une valeur trop élevée de k_p peut mener à un overshoot et des instabilités (des oscillations)

— k_I (**Integral Gain**) : Augmenter k_I réduit les erreurs en "steady-state" en accumulant les erreurs passées et appliquant une correction en conséquence. Cependant, tout comme pour le gain proportionnel, une valeur trop élevée de k_I peut mener à des instabilités (des oscillations) dûes à des overshoot de la correction

— k_d (**Derivative Gain**) : Augmenter k_d améliore la stabilité du système en "prédisant" les erreurs futures et amortissant les oscillations. Un gain différentiel réduit les overshoot et lisse la réponse.

4) Contrôleur PI

Un contrôleur PI sans action différentielle n'arrive pas à faire converger le système vers la référence.
En utilisant tout d'abord un contrôleur à action proportionnelle, on obtient un système instable, avec des oscillations soit, pour de faibles valeurs de k_p, apériodiques autour de la référence, soit, pour des valeurs de k_p plus élevées mais toujours relativement faibles, périodiques mais autour de la position

d'équilibre stable du système ($\theta = 0$), ou enfin, pour des valeurs élevées de kp, des oscillations autour de la référence, l'équilibre instable.

Un contrôleur PI sans action différentielle n'arrive pas à faire converger le système vers la référence. En utilisant tout d'abord un contrôleur à action proportionnelle, on obtient un système instable, avec des oscillations de différentes natures selon la valeur de k_P :

— Pour des **valeurs de k_P trop faibles**, la force de réaction appliquée est insuffisante pour stabiliser le pendule, mais il oscille tout de même autour de l'équilibre instable. Cela est dû à une dissipation d'énergie (dûe à la force de réaction) insuffisante pendant la redescente, ce qui permet au système de continuer à osciller autour de la position cible.

— Pour des **valeurs de k_P intermédiaires**, la force appliquée reste insuffisante pour stabiliser le pendule, mais cette fois-ci, la dissipation d'énergie lors de la redescente est trop importante. En conséquence, le système n'a plus assez d'énergie pour repasser par l'équilibre instable et oscille autour de la position d'équilibre stable ($\theta = 0$).

— Pour des **valeurs de k_P élevées**, la force appliquée devient suffisante et réagit rapidement aux écarts par rapport à la position cible. Cependant, étant autour de la position instable, l'inertie entraîne un overshoot, générant des oscillations autour de la position de référence.

Lorsque l'on ajoute une action intégrale, le système ne se stabilise toujours pas : étant instable autour de la position de référence, il n'y a à proprement parler pas de *steady-state*, et par conséquent pas de *steady-state error*. L'action intégrale ne saurait donc pas supprimer une telle erreur, et son intérêt est nul dans ce système.

Pour des valeurs de k_P faibles et intermédiaires, l'ajout d'un terme intégral entraîne une force de réaction plus importante, donc une dissipation plus importante de l'énergie. On observe alors des oscillations semblables à celles obtenues avec un contrôleur à action proportionnelle seule, lorsque k_P est intermédiaire.

Lorsque k_P est élevé, l'ajout d'une action intégrale ne modifie pas la nature des oscillations.

La figure ci-dessous reprend les 3 types d'oscillations décrites ci-dessus.

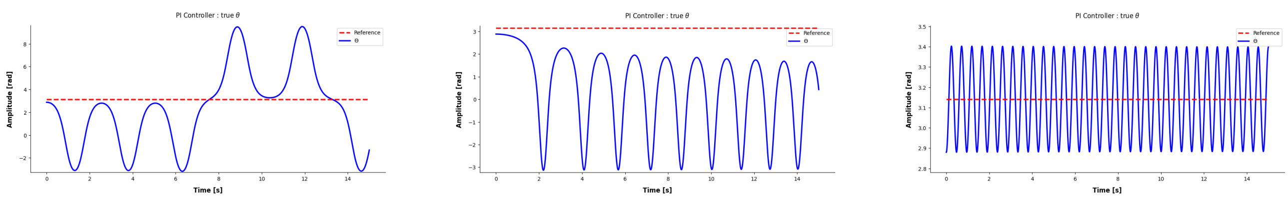

FIGURE 2 – Types de réponse du système à un contrôleur à action proportionnelle.
De gauche à droite : des valeurs de k_p faible, intermédiaire et élevée

5) contrôleur PID

Paramètres du contrôleur PID :

— k_P : 80-100

— k_I : 0-100 (indifférent)

— k_D : 30-100

Une valeur élevée de k_P est nécessaire pour garantir une réaction forte et rapide du système.

Le terme intégral k_I n'a aucun effet dans ce système car, comme mentioné plus haut, il n'y a pas d'erreur en régime permanent (*steady-state error*) à corriger.

Le terme dérivé k_D doit être suffisamment élevé pour anticiper et amortir les oscillations. Cependant, au-delà d'un certain seuil, une augmentation de k_D n'apporte plus d'amélioration significative. Ci-dessous une figure comprenant la réponse temporelle du système en utilisant ces paramètres.

Effet de l'action dérivative sur le comportement du système

Le principal problème du système sans action dérivative est que, lorsqu'on règle une valeur de k_p suffisante pour obtenir une réponse assez forte pour contrer la chute, on observe des oscillations autour de la référence.

L'action dérivative agit sur les variations de l'erreur, ce qui lui permet d'anticiper les erreurs futures et d'amortir ces oscillations, améliorant ainsi la stabilité et la convergence du système.

Dans le système du pendule inversé, la contribution du terme dérivé va contrer l'inertie du système : là où le terme proportionnel va continuer à pousser dans une direction tant que l'erreur est non-nulle, l'action dérivative va elle prendre en compte la vitesse d'évolution de l'erreur et générer une force opposée à cette vitesse, de manière à ce que le système se stabilise à la position de référence. Ainsi, à certains moments, la force combinée résultant de l'action proportionnelle et de l'action dérivative est dans le sens opposé à la force de l'action proportionnelle seule, afin de contrer l'inertie du système et anticiper un *overshoot* et des oscillations du système.

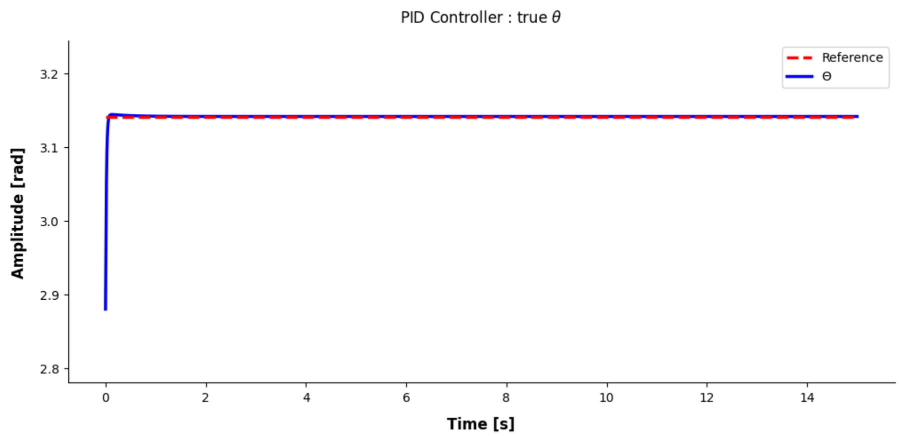

FIGURE 3 – Réponse temporelle du système avec un contrôleur PID
$k_p = 80$, $k_I = 0$, $k_d = 30$

6) Contrôleur PID : Ajout de perturbations et de bruit de mesure

En ajoutant des perturbations et du bruit, en conservant les paramètres 80-0-30, on obtient la réponse à la figure 4.

Le design du contrôleur reste valide ; on n'observe aucun décrochage ni de chute du système, les perturbations sont plutôt bien gérées mais le bruit est amplifié.

— **Action proportionnelle** k_p : le terme agit, de manière proportionnelle, pour contrer l'erreur d'angle. Ainsi, si le bruit n'est pas trop important la réaction qu'il induit ne sera pas trop élevée et ne déstabilisera pas trop le système. Les perturbations, si elles ne sont pas trop importantes, seront également contrées efficacement par le terme proportionnel pour ramener le système à sa position de référence.

— **Action intégrale** k_I : Sa valeur est nulle dans ce réglage, et elle est inutile pour ce système. Son ajout n'aurait pas influencé le résultat obtenu.

— **Action dérivative** k_d : ce terme réagit proportionnellement à la vitesse de variation de l'erreur, ce qui signifie qu'il réagira plus fort aux hautes fréquences.
Or, le bruit de mesure étant principalement à haute fréquence, le terme dérivé agissant pour corriger ces variations d'erreur perçues sera démesurément grand par rapport au bruit, amplifiant ainsi le bruit.Ce phénomène se remarque d'autant plus que le gain k_d est grand.

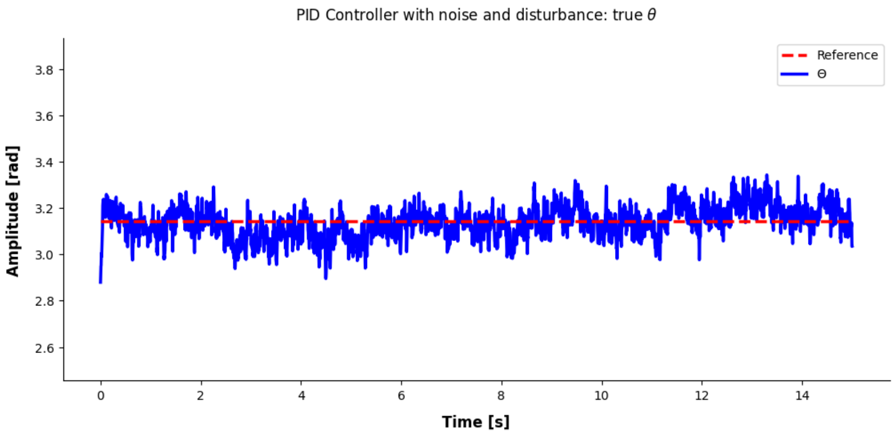

FIGURE 4 – Réponse temporelle du système avec un contrôleur PID, avec bruit et perturbations $k_p = 80$, $k_I = 0$, $k_d = 30$