情報数学演習問題解説

toma09to

1

定義と記号を書けば良い.

(1) $\forall a \in A; a \in B$、$A \subseteq B$

(2) $\{x \mid x \in A \lor x \in B\}$、$A \cup B$

(3) $\{x \mid x \in A \land x \notin B\}$、$A - B$

(4) $\{x \mid x \in A \land x \in B\}$、$A \cap B$

2

$$
\begin{aligned}
(A \times B) - (B \times A) &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} \\
&\quad - \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \\
&= \{(3,1),(3,2)\}
\end{aligned}
$$

3

(1) 与えられた命題は $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = 3$ であるから、その否定は $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 3$ である.

(2) 与えられた命題は $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ であるから、その否定は $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$ である. ($\ngeq \Leftrightarrow <$)

(3) 与えられた命題は $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; x < y$ であるから、その否定は $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}; x \geq y$ である. ($\nless \Leftrightarrow \geq$)

4

順番に真理値表を作成すればよい.

P	Q	$\sim P$	$Q \Rightarrow \sim P$	$P \wedge (Q \Rightarrow \sim P)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

5

(a) (a) の否定は、$\exists r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{Q}$ である．各選択肢を記号で表すと、

(1) $\forall r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{Q}$

(2) $\forall r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

(3) $\forall r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

(4) $\exists r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{Q}$

(5) $\exists r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

(6) $\exists r \in \mathbb{Q}; \frac{1}{r} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

このうち、一致するものは (4) のみである (無理数全体の集合を $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ と表した).

(b) (b) の否定は、$\forall A; \bar{A} \not\subseteq A$ である．各選択肢を記号で表すと、

(7) $\exists A; \bar{A} \supseteq A$

(8) $\exists A; \bar{A} \not\subseteq A$

(9) $\forall A; \bar{A} \subseteq A$

(10) $\forall A; \bar{A} \subseteq A$

(11) $\forall A; \bar{A} \not\subseteq A$

(12) $\forall A; \bar{A} \not\subseteq A$

(13) $\forall A; \bar{A} \supseteq A$

(14) $\forall A; \bar{A} \not\supseteq A$

このうち、一致するものは (11) と (12) である.

6

(1) 温泉地であって (A)、紅葉が見られるか湖があり ($B \lor C$)、海辺でなければよいから ($\sim D$)、$A \land (B \lor C) \land (\sim D)$

(2) A が真であるのは、候補地 1,2,3,4. そのうち、D が偽であるのは、候補地 1,3. どちらも B か C のいずれかが真であるから、候補地 1,3.

7

真理値表を書いて、真理値が一致するか調べる.

(1) A : 補講を受ける, B : 単位がもらえる とすると、「補講を受けなければ単位は出ない」は $(\sim A) \Rightarrow (\sim B)$、「補講を受けたので、単位がもらえる」は $A \Rightarrow B$

A	B	$(\sim A) \Rightarrow (\sim B)$	$A \Rightarrow B$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T

よって、真理値が一致しないので主張は正しくない.

(2) A : 朝5時を過ぎる, B : 日が昇っている とすると、「朝 5 時を過ぎれば日が昇っている」は $A \Rightarrow B$、「今はまだ、5 時を過ぎていないので、日は昇っていない」は $(\sim A) \Rightarrow (\sim B)$
上の真理値表より主張は正しくない.

(3) A : 外が晴れる, B : あの人がここに来る とすると、「晴れれば、必ずここに来てくれる」は $A \Rightarrow B$、「あの人がここに来ないということは、外は晴れていない」は $(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$
よって、真理値が一致するので主張は正しい.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

8

(1) $\{2, -2\}$　$n^2 = 4$ の解は $n = \pm 2$

(2) $\{-20, -18, -16, -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
n^2は偶数 $\Leftrightarrow$ nは偶数

(3) 上と同じ．　n^4は偶数 $\Leftrightarrow$ nは偶数

(4) 要素はない．　(2) に同じ．

(5) $\{2, 3\}$　$n^2 - 5n + 6 = 0$ の解は $n = 2, 3$

(6) 要素はない．　偶数かつ奇数な整数は存在しない．

9

(1) 直接証明．$5n = 3k$ とおくと、

$$\begin{aligned} n &= 6n - 5n \\ &= 6n - 3k \\ &= 3(2n - k) \end{aligned}$$

□

対偶法．対偶は、「n が 3 の倍数でないならば、$5n$ は 3 の倍数でない」

(i) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき
$n = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$5n = 15k + 5 = 3(5k + 1) + 2$$

(ii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき
$n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$5n = 15k + 10 = 3(5k + 3) + 1$$

□

背理法. $5n$ が 3 の倍数かつ、n は 3 の倍数でないと仮定する.

(i) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$n = 3k+1 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$5n = 15k + 5 = 3(5k+1) + 2$$

(ii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$5n = 15k + 10 = 3(5k+3) + 1$$

これは、$5n$ が 3 の倍数であることと矛盾. □

(2) 直接証明. $ab = 3l$ とおく.

(i) $a = 3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} b &= (1-a)b + ab \\ &= -3kb + 3l \\ &= 3(l - kb) \end{aligned}$$

(ii) $a = 3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} b &= (a+1)b - ab \\ &= 3(k+1)b - 3l \\ &= 3(k - l + 1) \end{aligned}$$

□

対偶法. 対偶は、「b が 3 の倍数でないならば、ab が 3 の倍数でないまたは a が 3 の倍数」

(i) $b \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$b = 3k+1 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$ab = a(3k+1) = 3ak + a$$

ab が 3 の倍数なのは、a が 3 の倍数であるとき. a が 3 の倍数でないとき、ab は 3 の倍数でない.

(ii) $b \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$b = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ として、

$$ab = a(3k+2) = 3ak + 2a$$

同様に、ab が 3 の倍数でないまたは、a が 3 の倍数.

□

背理法. ab が 3 の倍数かつ、a も b も 3 の倍数でないと仮定する.

(a) $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$ab = (3k+1)(3l+1) = 9kl + 3k + 3l + 1 = 3(3kl + k + l) + 1$$

(b) $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$ab = (3k+1)(3l+2) = 9kl + 6k + 3l + 2 = 3(3kl + 2k + l) + 2$$

(c) $a \equiv 2 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$ab = (3k+2)(3l+1) = 9kl + 3k + 6l + 2 = 3(3kl + k + 2l) + 2$$

(d) $a \equiv 2 \pmod 3$, $b \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$ab = (3k+2)(3l+2) = 9kl + 6k + 6l + 4 = 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1$$

これは、ab が 3 の倍数であることと矛盾. □

10

以下、$k, l \in \mathbb{Z}$ とする.

(1) $2 \nmid n \Rightarrow 2 \mid (n+1)$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k+1 \\ n+1 &= 2k+2 \\ &= 2(k+1) \end{aligned}$$

□

(2) $2 \nmid n \Rightarrow 2 \mid (9n+5)$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k+1 \\ 9n+5 &= 18k+14 \\ &= 2(9k+7) \end{aligned}$$

□

(3) $2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k+1 \\ n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

□

(4) $2 \mid (7n+4) \Rightarrow 2 \nmid (3n-11)$

Proof.

$$\begin{aligned} 7n+4 &= 2k \\ 3n-11 &= 2k-4n-15 \\ &= 2(k-2n-8)+1 \end{aligned}$$

□

(5) $2 \mid 5n^2 \Rightarrow 2 \mid 3n^3$

Proof.

$$\begin{aligned} 5n^2 &= 2k \\ 3n^3 &= 2kn-2n^3 \\ &= 2(kn-n^3) \end{aligned}$$

□

(6-1) $2 \mid n \Rightarrow 2 \mid (3n^2+n)$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ 3n^2 + n &= 3(2k)^2 + (2k) \\ &= 12k^2 + 2k \\ &= 2(6k^2 + k) \end{aligned}$$

□

(6-2) $2 \nmid n \Rightarrow 2 \mid (3n^2 + n)$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ 3n^2 + n &= 3(2k+1)^2 + (2k+1) \\ &= 12k^2 + 14k + 4 \\ &= 2(6k^2 + 7k + 2) \end{aligned}$$

□

(6-3) $2 \nmid n \Rightarrow 8 \mid (n^2 - 1)$

Proof.

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ n^2 - 1 &= 4k^2 + 4k \\ &= 4(k^2 + k) \end{aligned}$$

$2 \mid (k^2 + k)$ を証明すればよい.

(i) $k = 2l$ のとき

$$k^2 + k = 4l^2 + 2l = 2(2l^2 + l)$$

(ii) $k = 2l + 1$ のとき

$$k^2 + k = 4l^2 + 6l + 2 = 2(2l^2 + 3l + 1)$$

□

(6-4) $(2 \nmid n \land n \equiv 1 \pmod 3) \Rightarrow 24 \mid (n^2 - 1)$

Proof. $n = 3k + 1$ とおくと、

$$n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$$

より $3 \mid (n^2 - 1)$

$2 \nmid n$ であるから、(6-3) より $8 \mid (n^2 - 1)$

よって、$24 \mid (n^2 - 1)$ □

(6-5) $2 \nmid n \Rightarrow 120 \mid (n^5 - n)$

Proof. $n = 2k + 1$ とすると、

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1) \\ &= 2k(2k+1)(2k+2)(4k^2 + 4k + 2) \\ &= 8k(2k+1)(k+1)(2k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

よって、$8 \mid (n^5 - n)$

また、$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積だから、$3 \mid (n^5 - n)$

以上より、$24 \mid (n^5 - n)$ だから、$5 \mid (n^5 - n)$ を示せばよい.

(i) $n = 5l$ のとき

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = 5l(n^4 - 1)$$

(ii) $n = 5l + 1$ のとき

$$n^5 - n = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n) = 5l(n^4 + n^3 + n^2 + n)$$

(iii) $n = 5l + 2$ のとき

$$n^5 - n = (n^2+1)(n^3-n) = (25l^2+20l+5)(n^3-n) = 5(5l^2+4l+1)(n^3-n)$$

(iv) $n = 5l + 3$ のとき

$$n^5 - n = (n^2+1)(n^3-n) = (25l^2+30l+10)(n^3-n) = 5(5l^2+6l+2)(n^3-n)$$

(v) $n = 5l + 4$ のとき

$$n^5 - n = (n+1)(n^4 - n^3 + n^2 - n) = 5(l+1)(n^4 - n^3 + n^2 - n)$$

よって、$5 \mid (n^5 - n)$ であるから $2 \nmid n \Rightarrow 120 \mid (n^5 - n)$ □

もちろん、これ以外にも証明の方法はある.