

科技周数学论文

题目:探究二次函数的性质

作者:范一飞、王嘉铭

班级:八(3)班



2018.11

**目录**

摘要..................................II

关键词..................................II

引言..................................III

1 什么是二次函数..................................1

1.1 二次函数的定义.............................1

1.2 二次函数的顶点.............................1

1.3 二次函数的对称轴...........................3

1.4 二次函数的图像.............................3

2 二次函数的高级性质...............................6

2.1 二次函数的切线.............................6

2.2 二次函数的焦点准线..........................8

参考资料..................................9

**摘要：**函数是数学领域中非常重要的一部分，而二次函数又是函数中很重要的一个板块。为了更好的了解二次函数，使用二次函数解决题目和解决于二次函数相关的题目，本文将以二次函数作为研究对象进行研究，主要研究二次函数的定点、对称轴、图像、切线及焦点准线等内容。本文在通过严谨的证明后，成功得到了关于二次函数的性质如二次函数顶点坐标、对称轴的位置、图像的开口及凹凸性、切线解析式、焦点及准线的位置等，将对学习这一方面的内容有所裨益。

**关键词：**二次函数 图像 切线 焦点 准线

**引言**

我们的教材上面暂时还没有出现有关二次函数的知识，但是这一内容却十分重要。二次函数与一元二次方程有着千丝万缕的关系，而且在我们的解题过程中，如果可以流畅的使用二次函数，那么将会给解决问题带来极大的方便。

**1 什么是二次函数**

**1.1 二次函数的定义**

顾名思义，二次函数即次数为2的函数，其一般形式为

它还有以下几种常见形式

其中式称为交点式，式称为顶点式

交点式可以直接看出函数的零点

顶点式则可以直接看出二次函数的顶点

**1.2 二次函数的顶点**

在上一节中提到了顶点，联系二次函数的顶点式，我们不难发现顶点有以下性质:

**性质I**

**顶点在函数曲线上**

证明

将顶点的坐标代入函数的解析式

中，得到以下式子

显然等式成立，证毕

**性质II**

**顶点的纵坐标为函数的最值，且当时为最小值，当时为最大值**

证明

当时，

当且仅当时等号成立

故顶点纵坐标为函数的最小值

当时，

当且仅当时等号成立

故顶点纵坐标为函数的最大值

证毕

**1.3 对称轴**

观察二次函数的顶点式，我们很容易发现

于是这个二次函数必然关于对称

所以为二次函数的对称轴

又发现过顶点，所以

**二次函数的对称轴为过顶点且垂直于轴的直线**

**1.4 二次函数的图像**

先对二次函数的增减性进行分析

不妨设，如果，那么增减性与其相反

取，那么

显然，

所以，因而

可以得到二次函数在时单调递减

同样地可以得到二次函数在时单调递增

再研究二次函数的凹凸性

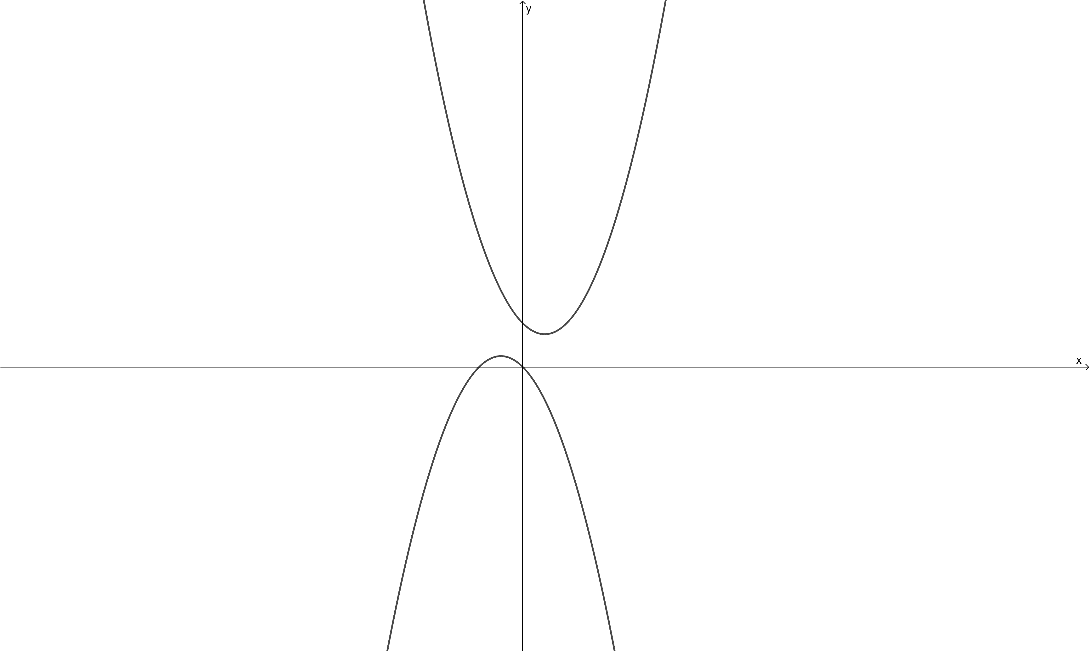
不妨设，如果，那么凹凸性与其相反

取，那么

因为

所以可以得到

所以函数是凹的

根据函数的增减性与凹凸性，我们可以画出函数的图像

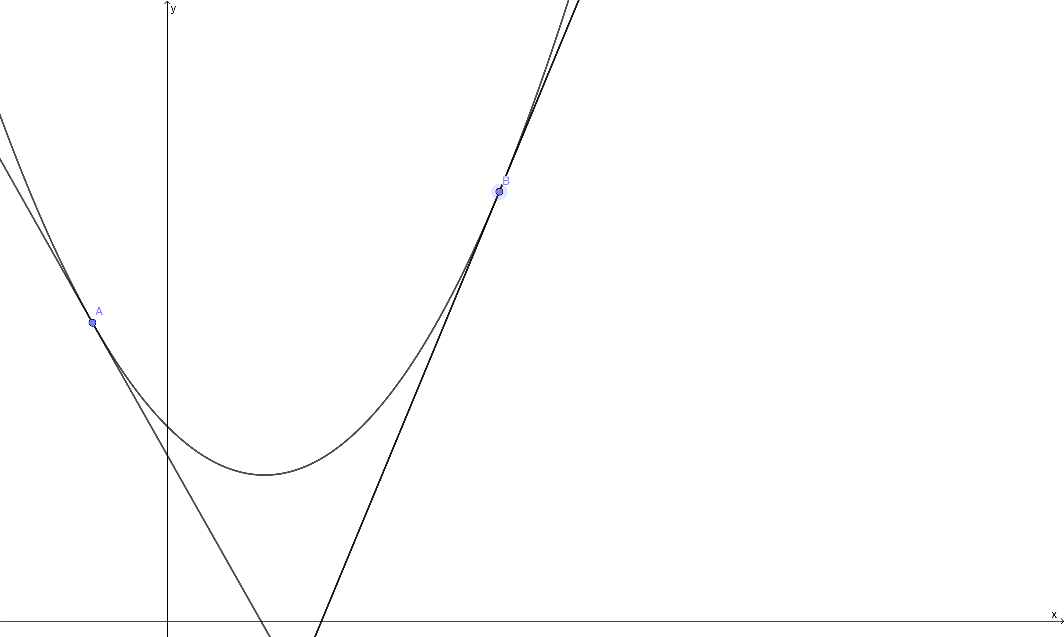
当时，函数的图像为一条开口向上的抛物线

当时，函数的图像为一条开口向下的抛物线

**2 二次函数的高级性质**

**2.1 二次函数的切线**

**在一条光滑曲线上，有一定点和一动点，如果让沿曲线无限逼近，那么所得直线称作曲线在点的切线**

**显然，二次函数上的每个点也有切线，且切线与二次函数仅有一个交点(切点)**，如图

为二次函数上两点，它们的切线如图所示

为了求出切线的解析式，我们使用二次函数切线的特有性质

设

过的直线与二次函数相切

那么方程有两个相等实根

方程有两个相等实根

于是切线的斜率为

所以切线解析式为

把二次函数的一般式转换为顶点式

在1.4中我们发现

当时，二次函数单调递减

当时，二次函数单调递增

这里

等价于

等价于

而正是二次函数的切线

所以当切线斜率小于0，即切线向下倾斜，函数单调递减

当切线斜率大于0，即切线向上倾斜，函数单调递增

当切向斜率等于0，即切线水平，函数上对应点为顶点

**2.2 二次函数的焦点准线**

**已知二次函数上每个点距离点和直线的距离之比为定值，求出的值**

取实数，那么

函数上的点到点的距离为

点到直线的距离为

则

因为为定值，所以这个等式恒成立

则等式左右次数相等的单项式系数相等，则

由(1)得，，代入(3),(4),(5)

由(6),(7)得

由(6)得

将(9),(10)代入(8)得

(10)+(11)得

(11)-(10)得

综上所述，

由此我们可以得出结论

**二次函数上的点到点和直线的距离相等**

**其中点叫做焦点，直线叫做准线**

如果把二次函数写成顶点式

其中，

**则焦点可以写作，准线可以写作**

**参考文献**

[1] 刘初喜、施洪亮、蔡东山著《华东师范大学第二附属中学 实验班用 数学 高中下册》

[2] 张垚、沈文选、吴仁芳著《奥赛经典 专题研究系列 初中数学竞赛中的代数问题》