ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס   אביב 2024ב

רן לנצט

מרץ 2024 – סמסטר אביב – תשפ״ד

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il.
הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://www.openu.ac.il/shoham.
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן: https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library. פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il.

מרכז ההוראה בקורס הוא רן לנצט. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 052-5552734, בימי א' בשעות 19:00–20:00.
- בדוא"ל ranlan@openu.ac.il.
- דרך אתר הקורס.
- **שאילתא** – לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה,
צוות הקורס

שימו לב:

חובה להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.

ללא הגשת מטלות במשקל זה

אי-אפשר לעבור את הקורס.

ראו הסבר בעמוד ה'.

לוח זמנים ופעילויות (20476 /2024ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	22.03.2024-17.03.2024 (ה תענית אסתר)	מבוא מהיר ללוגיקה		ממ"ח 01 עד 29.3.24	
2	29.03.2024-24.03.2024 (א פורים)	תורת הקבוצות : פרקים 1, 2			ממ"ן 11 עד 5.4.24
3	05.04.2024-31.03.2024	תורת הקבוצות : פרקים 2, 3		ממ"ח 02 עד 12.4.24	
4	12.04.2024-07.04.2024	תורת הקבוצות : פרק 3			
5	19.04.2024-14.04.2024	תורת הקבוצות : פרקים 3, 4			ממ"ן 12 עד 26.4.24
6	26.04.2024-21.04.2024 (ב-ו פסח)	תורת הקבוצות : פרק 4			
7	03.05.2024-28.04.2024 (א-ב פסח)	תורת הקבוצות : פרק 4 ; קומבינטוריקה : פרק 1		ממ"ח 03 עד 10.5.24	ממ"ן 13 עד 15.5.24
8	10.05.2024-05.05.2024 (ב יום הזכרון לשואה)	קומבינטוריקה : פרק 2			
9	17.05.2024-12.05.2024 (ב יום הזיכרון, ג יום העצמאות)	קומבינטוריקה : פרקים 3, 4			

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
10	24.05.2024-19.05.2024	קומבינטוריקה: פרקים 4, 6			ממ"ן 14 עד 30.5.24
11	31.05.2024-26.05.2024 (א ל"ג בעומר)	קומבינטוריקה: פרקים 6, 7			
12	07.06.2024-02.06.2024	קומבינטוריקה: פרק 7 תורת הגרפים: פרקים 1, 2		ממ"ח 04 עד 13.6.24	ממ"ן 15 עד 18.6.24
13	14.06.2024-09.06.2024 (ד שבועות)	תורת הגרפים: פרקים 2, 3			
14	21.06.2024-16.06.2024	תורת הגרפים: פרקים 3, 5		ממ"ח 05 25.6.24	ממ"ן 16 עד 29.6.24

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* *התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות / לא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה, אלא אם כן צוין אחרת.
אנו מאשרים לכל תלמידי הקורס לשלוח את מטלות המנחה דרך האתר, בפורמט PDF.
אפשר לשלוח בפורמט זה גם סריקה של כתב יד בתנאי שהוא ברור ומסודר.
כל מטלה חייבת להיות בקובץ אחד. (לא אוסף של קבצים או תמונות).

ניקוד המטלות

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקלן של מטלות המחשב 01 ו-02 הוא נקודה אחת כל אחת. משקל כל אחת מיתר המטלות הוא 2 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן, אפוא, לצבור 20 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות:

חובה להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
אי-אפשר לעבור את הקורס.

תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 10 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות, הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ, לדון עם עמיתים, וכן עם סגל ההוראה של הקורס, על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

אם בכוונתכם לשלוח ממ"ן בדואר, השאירו לעצמכם העתק של המטלה.

האוניברסיטה הפתוחה אינה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות דואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

מספר השאלות: 13 | **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2024ב | **מועד הגשה: 29.3.24**

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה; ב – אם רק טענה 2 נכונה;
ג – אם שתי הטענות נכונות; ד – אם שתי הטענות נכונות.

שאלה 1

1. הביטוי "המספרים 6 ו- 7 הם מספרים זוגיים" הוא פסוק.
2. הביטוי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק "הספר מונח על המחברת" היא הפסוק "הספר מונח מתחת למחברת".
2. **שלילת** הפסוק "יוסף כתב מילה במחברת" היא הפסוק "יוסף מחק מילה מהמחברת".

שאלה 3

1. הפסוק "$1+1=2$ וגם $2+3>5$" הוא אמת.
2. הפסוק "$1+1=2$ או $3+3>2$" הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק "אם $3=2$ אז $1+1=2$" הוא אמת.
2. הפסוק "אם $3=2$ אז $10=2$" הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge (p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge (\neg q)$.
2. הפסוק $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית ל- $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$.

שאלה 7

1. הפסוק $\neg((p \vee q) \wedge r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r$.
2. הפסוק $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8

בשאלה זו מדובר על שקילות בין פסוקים במובן הבא: פסוקים הם **שקולים** זה לזה אם הצרנתם (באופן שמשקף היטב את המבנה שלהם) נותנת פסוקים פורמליים ששקולים-טאוטולוגית זה לזה.

1. שלילת הפסוק "האוכל היה חם וטעים" שקולה לפסוק "האוכל לא היה חם ולא היה טעים".
2. שלילת הפסוק "רצחת וגם ירשת" שקולה לפסוק "לא רצחת או שלא ירשת".

שאלה 9

1. הפסוק $p \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)$ גורר טאוטולוגית את r.
2. הפסוק r גורר טאוטולוגית את $p \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)$.

שאלה 10

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0" נכון להצרין כך: $\forall x\,[\neg(x^2<0)]$.
2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שריבועו הוא 9" נכון להצרין כך: $\left(\exists x(x>0)\right)\wedge\left(\exists x(x^2=9)\right)$.

שאלה 11

הטענות שלהלן מתייחסות לפסוק הבא:

(*) כל מספר שגדול או שווה ל- 0 הוא ריבוע של מספר כלשהו.

1. את הפסוק (*) נכון להצרין כך: $\left(\forall x(x\geq 0)\right)\rightarrow\left(\exists y(y^2=x)\right)$.
2. את הפסוק (*) נכון להצרין כך: $\forall x\left[\left(x\geq 0\right)\rightarrow\left(\exists y(y^2=x)\right)\right]$.

שאלה 12

בשאלה זו, ההקשר (התחום שבו מדובר) הוא קבוצת כל המספרים הטבעיים החיוביים. כמו כן, האות p משמשת כשם עבור מספר טבעי מסויים כלשהו (לא ידוע איזה).

הטענות שלהלן מתייחסות להצרנת הפסוק

(*) p הוא מספר ראשוני.

1. את הפסוק (*) נכון להצרין כך: $(p\neq 1)\ \wedge\ \forall a\forall b\left[(a=1)\vee(b=1)\vee(p\neq ab)\right]$.
2. את הפסוק (*) נכון להצרין כך: $(p\neq 1)\ \wedge\ \forall a\forall b\left[\left((a=1)\vee(b=1)\right)\rightarrow(p\neq ab)\right]$.

שאלה 13

בשאלה זו נתייחס להצרנת הפסוק

(*) בקטע הפתוח $(0,1)$ לא קיים מספר גדול ביותר.

נניח כי ההקשר (התחום שבו מדובר) הוא קבוצת כל המספרים הממשיים.

הערה: מספר נתון נקרא מספר **גדול ביותר** בקבוצה נתונה של מספרים ממשיים אם הוא שייך לקבוצה זו וגדול מכל מספר אחר ששייך לה.

1. את הפסוק (*) נכון להצרין כך: $\forall x\left[(0<x)\wedge(x<1)\wedge\exists y\left((x<y)\wedge(y<1)\right)\right]$.
2. את הפסוק (*) נכון להצרין כך:

$$\forall x\left[\left((0<x)\wedge(x<1)\right)\rightarrow\exists y\left((0<y)\wedge(y<1)\wedge(y\neq x)\wedge[\neg(y<x)]\right)\right].$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: כרך "תורת הקבוצות", פרק 1
מספר השאלות: 4
משקל המטלה: 2 נקודות
סמסטר: 2024ב
מועד הגשה: 5.4.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה. בשאלה זו בלבד, אין לכתוב נימוקים. ענו "נכון" / "לא נכון" בלבד.

א. $\{1,2\}\subseteq\{\{1\},\{2\}\}$
ב. $\{2\}\subseteq\{\{1\},2\}$
ג. $\{\{1\},\{2\}\}\in\{\{\{1\},\{2\}\}\}$
ד. $\emptyset\subseteq\{\emptyset\}\setminus\{\emptyset\}$

ה. $\emptyset\in\{\emptyset\}\setminus\{\{\emptyset\}\}$
ו. $\{2\}\in\{\mathbb{N}\}$
ז. $\left|\{1,\mathbb{N}\}\right|=\left|\{\mathbb{N}\}\right|$
ח. $\{1,2\}\cap P(\{1,2\})\neq\emptyset$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A\cup B)\setminus(C\setminus B)=B\cup(A\setminus C)$.

ב. $P(A\setminus B)\subseteq(P(A)\setminus P(B))\cup\{\emptyset\}$.

ג. אם A קבוצע סופית, אז $\left|P(A)\right|=\left|P(A\cap B)\right|\cdot\left|P(A\setminus B)\right|$.

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו:

א. אם $A\cup B^c\neq U$ ו- $B\cup A^c\neq U$, אז ל- $A\Delta B$ יש שני איברים לפחות.

ב. אם $A\Delta B\subseteq A\Delta C$, אז $A\cap C\subseteq B\subseteq A\cup C$.

ג. אם $A\Delta\{1,2\}=B\Delta\{2,3\}$, אז $A\Delta B=\{1,3\}$.

שאלה 4 (28 נק׳)

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbb{N}$, נסמן $A_k = \{2^0, 2^k, 2^{2k}, 2^{3k}, \ldots\} = \{2^{nk} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו מספר טבעי k כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- A_k. נמקו את טענותיכם.

תוכלו להסתמך על הטענות הבאות מבלי להוכיחן:

(I) לכל $n \in \mathbb{N}$, [המספר n מתחלק ללא שארית ב- 3, ב- 4 וב- 5] אס"ם [n מתחלק ללא שארית ב- 60].

(ובניסוח פורמלי יותר: $\forall n \in \mathbb{N}\left[3,4,5 \mid n \ \rightarrow\ 60 \mid n\right]$.)

(II) המספר הטבעי היחיד שמתחלק ללא שארית בכל מספר טבעי חיובי הוא 0.

א. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ ב. $\bigcap_{k=2}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $\left\{\frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\right\}$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 20
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "תורת הקבוצות", פרקים 1, 2
משקל המטלה: נקודה אחת
מועד הגשה: 12.4.24

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:
א – אם הטענה נכונה; ב – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1

$\{2,3\}\cap\{\{2\},\{3\}\}=\{\{2\},3\}\cap\{2,\{3\}\}$

שאלה 2

לכל שלוש קבוצות A,B,C , אם $A\cup B=A\cup C$ אז $B=C$.

שאלה 3

לכל שלוש קבוצות A,B,C , אם $A\subseteq B\cup C$ אז [$A\subseteq B$ או $A\subseteq C$].

שאלה 4

אם A,B קבוצות סופיות זרות, אז $|P(A)\cup P(B)|=2^{|A|}+2^{|B|}$.

שאלה 5

לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq P(A)$.

שאלה 6

לכל זוג קבוצות A,B , אם $A\Delta B=A\setminus B$, אז $B\subseteq A$.

שאלה 7

לכל שלשת קבוצות A,B,C ולכל x, אם $x\in A\Delta B\Delta C$ אז $x\notin A\cap B$.

שאלה 8

יהיו A,B קבוצות, ותהי U קבוצה אוניברסלית. אז לכל x, אם $x\notin A^c\cap B^c$ אז $x\in A\cap B$.

שאלה 9

יהיו A,B,C קבוצות. אם $A\subset B\times C$, אז $B\neq\emptyset$ וגם $C\neq\emptyset$.

שאלה 10

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},\ 2-\frac{1}{n}\right)\ \subseteq\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n}\right)$. (**הערה**: סימון מהצורה (a,b) כאן מציין **קטע פתוח**.)

שאלה 11

תהי A קבוצה. אם כל איבר של A הוא זוג סדור, אז קיימות קבוצות B,C כך ש- $A=B\times C$.

שאלה 12

יהי R יחס על קבוצה A. אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי, אז $R^2=R$.

שאלה 13

יהי R יחס על קבוצה A. אם $R^2=R$, אז R טרנזיטיבי.

שאלה 14

יהיו R,S יחסים על קבוצה A. אם $R\cup S$ אנטי-סימטרי, אז גם R,S הם אנטי-סימטריים.

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

יהי R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה A. אם $R^2=R$, אז R הוא יחס שקילות.

שאלה 17

יהי R יחס שקילות על הקבוצה $\{1,2,3,\ldots,n\}$, ונניח כי ל- R יש פחות מ- n מחלקות שקילות. אזי: $|R| \geq n+2$.

שאלה 18

יהיו $m,n \in \mathbb{Z}$. אם $1<n<m$, אז החלוקה של $\mathbb{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

הערות: (1) הגדרת היחס $\equiv_k$, עבור k שלם וחיובי, מופיעה בראש עמ' 90 (כרך "תורת הקבוצות"). (2) הגדרת מושג העידון של חלוקה מופיעה בעמ' 96. (3) חלוקה של $\mathbb{Z}$ מוגדרת על ידי יחס שקילות R על $\mathbb{Z}$ אס"ם R מושרה על-ידי חלוקה זו.

שאלה 19

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה (בפרט: $\prec$ יחס סדר **מלא** על A), כאשר A קבוצה אינסופית. אזי: אין ב- $\langle A,\prec\rangle$ איבר אחרון.

שאלה 20

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית, כאשר $A=\{1,2,3,4\}$. נניח כי יש ב- $\langle A,\prec\rangle$ שני איברים מינימליים וכן שיש ב- $\langle A,\prec\rangle$ שני איברים מקסימליים. אזי: כל איבר של A הוא איבר מינימלי או מקסימלי ב- $\langle A,\prec\rangle$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 4
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "תורת הקבוצות", פרקים 2, 3
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 26.4.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (25 נק')

על הקבוצה $P(\{1,2,3,4\})$ מגדירים יחסים R,S באופן הבא:

לכל $A,B \in P(\{1,2,3,4\})$:

ARB אם"ם $A\cup\{1,2\} = B\cup\{1,2\}$; ASB אם"ם $A\cup\{1,2\} \subset B\cup\{1,2\}$.

א. הראו שאחד מהיחסים הנתונים הוא יחס שקילות, ומצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. הראו שאחד מהיחסים הנתונים הוא יחס סדר חלקי. קבעו האם הוא גם יחס סדר מלא ומצאו את האיברים המינימליים (אם יש כאלה) ואת האיברים המקסימליים (אם יש כאלה) בקבוצה הסדורה-חלקית הרלוונטית.

שאלה 2 (25 נק')

א. על הקבוצה $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מגדירים יחס R באופן הבא:

לכל $\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle \in A$,

$\langle x_1,y_1\rangle R \langle x_2,y_2\rangle$ אם"ם [$x_1+y_1 = x_2+y_2 = 1$ או $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1) > 0$].

1) הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

2) מצאו את מספר מחלקות השקילות של R.

3) נסחו תיאור גיאומטרי של כל אחת ממחלקות השקילות כקבוצת נקודות במישור $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

ב. על הקבוצה $B = (0,\infty)\times(0,\infty)$ מגדירים יחס S באופן הבא:

לכל $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in B$, $\langle a,b\rangle S \langle c,d\rangle$ אם"ם $\dfrac{ab}{a^2+b^2} < \dfrac{cd}{c^2+d^2}$.

1) הוכיחו כי לכל $a,b \in (0,\infty)$ **שונים** מתקיים $\langle a,b\rangle S \langle a,a\rangle$.

2) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $a,b \in (0,\infty)$, אם $\frac{1}{n} < \frac{ab}{a^2+b^2}$ אז $\langle 1,\frac{1}{n}\rangle S\langle a,b\rangle$.

3) הוכיחו כי S הוא יחס סדר חלקי על B , וקבעו האם S יחס סדר מלא על B .

4) מצאו את האיברים המקסימליים (אם יש כאלה) ואת האיברים המינימליים (אם יש) ב- $\langle B,S\rangle$.

שאלה 3 (25 נק׳)

נתונה פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי f היא חח״ע (חד-חד-ערכית) אס״ם לכל $A,B\subseteq\mathbb{N}$ אינסופיות ושונות זו מזו מתקיים $f[A]\neq f[B]$.

ב. הוכיחו כי f היא על אס״ם לכל $A,B\subseteq\mathbb{N}$ אינסופיות ושונות זו מזו מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$.

שאלה 4 (25 נק׳)

א. נסמן $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

נגדיר $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*\to\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$ באופן הבא: לכל $q\in\mathbb{Q}$ ו- $n\in\mathbb{Z}^*$, $f\langle q,n\rangle=\langle \frac{q}{n},n\rangle$.

1) הוכיחו כי f היא חח״ע ועל.

2) מיצאו את f^{-1} .

ב. נגדיר $g,h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ באופן הבא:

לכל $z,y\in\mathbb{Z}$, $g\langle x,y\rangle=\langle 2x+3y,3x+5y\rangle$ ו- $h\langle x,y\rangle=\langle x+3y,x+5y\rangle$.

הוכיחו כי אחת בלבד מבין שתי הפונקציות האלה היא הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 17
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "תורת הקבוצות", פרקים 3, 4
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 10.5.24

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:
א – אם הטענה נכונה;   ב – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1

לכל $n \in \mathbb{N}$, השלשות הבאות הן פונקציות שוות זו לזו:

$\langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, \{\langle x, 1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{2n}\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}\rangle$; $\langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, \{\langle x, \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}\rangle$.

שאלה 2

אם $f: A \to B$, $C_1, C_2 \subseteq A$, ומתקיים $f[C_1] \cap f[C_2] = \emptyset$, אז $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

שאלה 3

אם $f: A \to B$, $D_1, D_2 \subseteq A$, ומתקיים $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \emptyset$, אז $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

שאלה 4

לכל $f: A \to B$, הפונקציה f היא חח"ע (כלומר: חד-חד-ערכית) אם"ם לכל $C \subseteq A$ סופית מתקיים $|f[C]| = |C|$.

שאלה 5

לכל $f: A \to B$, הפונקציה f היא על אם"ם לכל $D \subseteq B$ סופית מתקיים $|f^{-1}[D]| = |D|$.

שאלה 6

יהיו A,B קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. אזי: $A\setminus B = {\chi_B}^{-1}[\{0\}] \cap {\chi_A}^{-1}[\{1\}]$. (הפונקציות האופייניות המצויינות כאן מוגדרות ביחס ל- U.)

שאלה 7

אם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא חח"ע, אז היא על.

שאלה 8

אם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא על, אז היא חח"ע.

שאלה 9

אם $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ו- $f\circ g = I_{\mathbb{N}}$ אז f הפיכה.

שאלה 10

אם $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא הפונקציה המקיימת $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אז קיימת $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **קבועה** כך ש- $f\circ g = g\circ f$.

בשאלות 11–17 נתייחס לקבוצות $A_n = [0,\frac{1}{n}]$ (לכל $n\in\mathbb{N}$) ו- $B=\{\frac{1}{k} \mid k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$.

שאלה 11

קיימים $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ כך ש- $|A_n\cap\mathbb{Q}| < |A_m\cap\mathbb{Q}|$.

שאלה 12

לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ מתקיים: $|A_n\cap\mathbb{Q}| < |A_n\setminus\mathbb{Q}|$.

שאלה 13

לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ מתקיים: $|A_n\cap\mathbb{Q}| = |A_n\cap B|$.

שאלה 14

קיים $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש- $\left|B \setminus A_n\right| = \aleph_0$.

שאלה 15

$$\left|\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} P(B \setminus A_n)\right| = \aleph_0$$

שאלה 16

לכל $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתקיים: $\left|A_n \setminus A_{n+1}\right| = \left|P(B)\right|$.

שאלה 17

לכל $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתקיים: $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\right| = \left|A_{n+1}\right|$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: כרך "תורת הקבוצות", פרק 4 ופרק ההכנה (אינדוקציה ורקורסיה)

מספר השאלות: 3

משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: 2024ב

מועד הגשה: 15.5.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (35 נק')

מיצאו את העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות. נמקו את תשובותיכם.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ שבפיתוח העשרוני האינסופי שלהם מופיעות רק ספרות מהקבוצה $\{0,1\}$, ומימין לכל ספרה שהיא 0 מופיעה תמיד הספרה 1.

ב. $\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R} \mid x+y=1\}$

ג. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y+z=1\}$

ד. $P(\mathbb{Q}\cap(11^{-10},10^{-10}))$

שאלה 2 (35 נק')

פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת **ריבועית** אם קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $a\neq 0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=ax^2+bx+c$.

נגדיר:

A = קבוצת כל הפונקציות הריבועיות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$.

$B=\{f\in A \mid f(0)\in\mathbb{Q}\}$

$C=\{f\in A \mid f[\mathbb{Q}]\subseteq\mathbb{Q}\}$.

מיצאו העוצמות הבאות:

$|A|,|B|,|C|,|P(B)|,|P(C)|$.

נמקו את תשובותיכם.

הערה: מותר להסתמך כאן, ללא הוכחה, על הטענות הבאות:

- הסכום של כל זוג מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, וכך גם באשר להפרש ולמכפלה של כל זוג מספרים רציונליים.
- לכל $\langle a_1, b_1, c_1\rangle, \langle a_2, b_2, c_2\rangle \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, הפונקציות הריבועיות המוגדרות על-ידי $f_1(x) = a_1x^2 + bx + c$ ו- $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ הן שתי פונקציות שונות.

שאלה 3 (30 נקי)

א. יהי a מספר ממשי המקיים $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

הדרכה: כדאי לחשב את המכפלה $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$, ולבודד מהשוויון המתקבל את $\frac{1}{a^n} + a^n$.

ב. נגדיר $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ באופן הבא: $f(x) = \frac{x}{1+x}$ לכל $x \in [0,\infty)$.

לכל $n \geq 1$ טבעי, נסמן $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ times}}$ (ההרכבה של f על עצמה n פעמים).

מצאו נוסחה עבור $f^{(n)}$ והוכיחו אותה באינדוקציה על n.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 4
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "קומבינטוריקה", פרקים 1–4
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 30.5.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (25 נק׳)

טענה: לכל $m,n\in\mathbb{N}$ המקיימים $m\le n$ מתקיים: $\binom{n+1}{m+1}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$.

הוכיחו את הטענה שלעיל בשתי הדרכים הבאות:

א. אינדוקציה על n.

ב. שיקול קומבינטורי: ספירת הקבוצות בנות $m+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{0,1,\ldots,n\}$ שבהן המספר הגדול ביותר הוא k.

שאלה 2 (25 נק׳)

א. מצאו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות את התנאי הבא:

(*) $\left|f^{-1}[\{1\}]\right|=\left|f^{-1}[\{2\}]\right|=\left|f^{-1}[\{3\}]\right|=\left|f^{-1}[\{4\}]\right|$.

ב. בשמונה מקומות הממוספרים ב- $1,2,3,4,5,6,7,8$ מסדרים את התווים $1,1,2,2,3,3,4,4$ (כלומר: מסדרים שני עותקים מכל אחד מ- $1,2,3,4$).

מצאו את מספר הסידורים שבהם אף אחת מהתווים $1,2,3,4$ לא יושב במקום שמסומן במספר המתאים לו (כלומר: התו 1 לא יושב במקום מס׳ 1; התו 2 לא יושב במקום מס׳ 2; וכן הלאה).

שאלה 3 (25 נק׳)

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. מצאו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. מצאו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

שאלה 4 (25 נק׳)

א. יהיו $p_1, p_2, \dots, p_n$ מספרים ראשוניים, ויהיו $k_1, k_2, \dots, k_n$ מספרים טבעיים.

נגדיר $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$. מצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים את m (ללא שארית).

ב. מצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים לפחות אחד מהמספרים הבאים: $10^{40}, 20^{30}, 40^{20}$.

תוכלו להסתמך על הטענות הבאות מבלי להוכיח אותן:

(1) למספר טבעי יש לכל היותר הצגה אחת מהצורה $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$.

וליתר דיוק:

לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$, אם $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$,

אז $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$.

(2) מספר טבעי מחלק את m אם״ם ניתן להציגו בצורה $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, כאשר, לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

α_i הוא מספר טבעי המקיים $0 \le \alpha_i \le k_i$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 18
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "קומבינטוריקה", פרקים 1–7
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 13.6.24

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:
א – אם הטענה נכונה;   ב – אם הטענה אינה נכונה.

בשאלות 1–3, A היא קבוצה שמספר איבריה הוא 3.

שאלה 1

מספר היחסים שניתן להגדיר על A הוא 9.

שאלה 2

מספר היחסים האנטי-רפלקסיביים על A הוא 2^6.

שאלה 3

מספר היחסים על A שווה למספר הפונקציות מ-A ל-$P(A)$.

בשאלות 4–11, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

שאלה 4

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה למספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1\}]=\{1,2\}$.

שאלה 5

מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חח״ע שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חח״ע.

שאלה 6

מספר הפונקציות $f:A\to A$, המקבלות את הערך 1 בדיוק פעם אחת, את הערך 2 – בדיוק פעמיים, ואת הערך 3 – בדיוק שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מהערכים $1,2,3$.

שאלה 7

מספר הפונקציות החח״ע $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החח״ע $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$.

שאלה 8

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המלים באורך 6 שבהן כל אחד מהתווים $0,1,2$ מופיע פעמיים.

שאלה 9

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=|C|=3$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המלים באורך 6 שבהן כל אחד מהתווים $0,1$ מופיע שלוש פעמים.

שאלה 10

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=2$, $|C|=3$ ו- $B\cap C=\emptyset$ שווה למספר המלים באורך 6 שבהן התו 0 מופיע פעם אחת, התו 1 מופיע פעמיים, והתו 2 מופיע שלוש פעמים.

שאלה 11

מספר יחסי השקילות על A שהם בעלי שלוש מחלקות שקילות בדיוק הוא גדול מ- 100.

שאלה 12

יש בדיוק 84 פונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3\}]$.

שאלה 13

מספר הפונקציות החח״ע $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$ שווה למספר הפונקציות החח״ע $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\}\not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$.

שאלה 14

מספר הפיזורים האפשריים של 12 כדורים זהים ב-8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד ימצאו לפחות 10 כדורים הוא 396.

שאלה 15

מספר הפיזורים המוזכר בשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $x^{10}\cdot(1+x+x^2+\ldots)^8$.

שאלה 16

מספר הפיזורים האפשריים של 12 כדורים זהים ב-8 תאים שונים, כך ששניים מהתאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008.

שאלה 17

מספר הפיזורים המוזכר בשאלה הקודמת הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\ldots)^2\cdot(1+x+x^2+\ldots)^8$.

בשאלה שלהלן, $f(mn,m)$ הוא מספר הפיזורים האפשריים של mn כדורים שונים ב-m תאים **זהים**, כך שבכל תא ימצאו בדיוק n כדורים.

שאלה 18

$$f(8,4)=\frac{8!}{2^4}$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 4
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: כרך "קומבינטוריקה", פרקים 6, 7
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 18.6.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (25 נק')

תהי A קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהצגה העשרונית שלהם מופיעות רק הספרות $1,2,3$.

לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, נסמן:

a_n = מספר האיברים ה-n-ספרתיים של A, שהספרה 2 מופיעה בהצגה העשרונית שלהם מספר **זוגי** של פעמים.

b_n = מספר האיברים ה-n ספרתיים של A, שהספרה 2 מופיעה בהצגה העשרונית שלהם מספר **אי-זוגי** של פעמים.

א. מצאו את a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3. (זכרו כי 0 הוא מספר זוגי.)

ב. לכל $n\geq 2$ טבעי, הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו-b_{n-1}, וכן הביעו את b_n בעזרת a_{n-1} ו-b_{n-1}.

ג. היעזרו בתוצרות של סעיף ב' כדי למצוא יחס נסיגה (רקורסיה) עבור a_n וכדי למצוא יחס נסיגה עבור b_n.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה שמצאתם בסעיף הקודם, וקבלו נוסחאות מפורשות עבור a_n ועבור b_n.

ה. ודאו כי a_n+b_n, לפי הנוסחאות שקיבלתם, שווה למספר האיברים ה-n-ספרתיים של A, לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

שאלה 2 (25 נק')

נתונה $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ המקיימת $1+x(7+8x)f(x)=f(x)$.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n.

ב. מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n לכל $n\geq 0$.

שאלה 3 (25 נק׳)

א. מצאו את המקדם של x^{13} בפיתוח של $\frac{1}{(1-x^2-x^3+x^5)^n}$. מותר לתשובה להכיל מקדמים בינומיים.
(כדאי להתחיל בפירוק המכנה לגורמים.)

ב. חשבו את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_n=13$ שבהם $x_1,x_2,\ldots,x_n$ הם מספרים זוגיים ו-$y_1,y_2,\ldots,y_n$ מתחלקים ב-3. מותר לתשובה להכיל מקדמים בינומיים.

שאלה 4 (25 נק׳)

בשאלה זו נתייחס לפתרונות בטבעיים של המשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+3x_8+3x_9+3x_{10}=n \qquad (*)$$

המקיימים את התנאי

$$x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\le 2 \qquad (**)$$

א. מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של (*) המקיימים את (**).
הציגו את הפונקציה **ללא** הסימן "$\ldots$" **וללא** סימן הסכימה (Σ), ופשטו ככל שניתן.
תוכלו להיעזר בזהות $1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$.

ב. מצאו נוסחה עבור מספר הפתרונות של (*) המקיימים את (**). מותר לתשובה להכיל מקדמים בינומיים.
(התשובה אמורה להיות תלויה ב-n.)

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 16
סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד הגשה: 25.6.24

את התשובות יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/ .
הממ"ח נבדק באופן ממוחשב. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:
א – אם הטענה נכונה; ב – אם הטענה אינה נכונה.

שאלה 1

קיים גרף פשוט שבו דרגות הצמתים הן $6,6,6,4,4,4,2$.

שאלה 2

אם G,H הם גרפים על אותה קבוצת צמתים V ולכל $v\in V$ מתקיים $\deg_G(v)=\deg_H(v)$, אז G,H איזומורפיים.

שאלה 3

לכל $n\geq 2$, הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ מכיל מעגל באורך $2n$.

שאלה 4

לכל $n\geq 2$, הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ מכיל מעגל באורך n .

שאלה 5

קיים גרף מלא שבו מספר הקשתות שווה למספר הקשתות של $K_{35,35}$.

שאלה 6

לכל n שלם וחיובי, $K_{n,n}$ הוא תת-גרף של $K_{m,m}$ אס״ם $2n \le m$.

בשאלות 7–9, נתייחס לגרפים G המקיימים את התנאי הבא:

(*) G הוא גרף פשוט על 9 צמתים, שבו הדרגה של כל צומת היא לפחות 4.

שאלה 7

כל גרף המקיים את (*) הוא גרף קשיר.

שאלה 8

כל גרף המקיים את (*) הוא גרף מישורי.

שאלה 9

אף גרף המקיים את (*) אינו מישורי.

בשאלות 10–11, G הוא הגרף שקבוצת הצמתים שלו היא $V = \{A \in P(\{1,2,3,4,5\}) \mid |A| = 3\}$, קבוצת הקשתות שלו היא $E = \{\{A,B\} \mid A,B \in V \ \wedge \ |A \cap B| = 1\}$, והצמתים שכל קשת $\{A,B\}$ מחברת ב- G הם A ו- B.

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי.

שאלה 11

G הוא גרף דו-צדדי.

בשאלות 12 ו-13, נתייחס לעצים המתוייגים T המקיימים את התנאי הבא:

(**) מספר הצמתים של T הוא 10, וצמתים אלה מתוייגים ב- T במספרים $1,2,\ldots,10$.

שאלה 12

קיים עץ מתוייג המקיים את (**) שבו הדרגה של כל צומת שאינו עלה היא 4.

שאלה 13

אם מחשיבים עצים מתוייגים איזומורפיים (במובן של הגדרה 2.8) כזהים זה לזה, אז מספר העצים המתוייגים, המקיימים את (**) ושיש בהם בדיוק שני צמתים בעלי דרגה 5, הוא 3150.

שאלה 14

כל העצים ה**לא**-המתוייגים, שמספר צמתיהם הוא 10 ויש בהם בדיוק שני צמתים בעלי דרגה 5 הם איזומורפיים במובן של הגדרה 2.7.

שאלה 15

כל גרף פשוט על 6 צמתים, שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 4, הוא לא מישורי.

שאלה 16

כל גרף פשוט על 6 צמתים, שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה 3, הוא לא מישורי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס: 24076 מתמטיקה בדידה

מספר השאלות: 3

סמסטר: 2024ב

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים

משקל המטלה: 2 נקודות

מועד הגשה: 29.6.24

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט בחוברת ההשלמות):

- במערכת המטלות המקוונות (קובץ **יחיד**, מוקלד או סרוק בפורמט PDF). כניסה למערכת – מאתר הקורס או משאילת"א.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה.
- על דפי נייר, עם טופס מלווה, משלוח אל כתובת המנחה באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (20 נק')

בשאלה זו נתייחס לעצים מתוייגים T המקיימים את הדרישות הבאות:

(*) T הוא עץ על n צמתים, המתוייגים במספרים $1,2,3,\ldots,n$, כאשר $n\geq 2$.

(**) בדיוק 5 מהצמתים של T שאינם עלים ב- T, וצמתים אלה הם בעלי דרגות $2,3,4,5,6$.

א. נתון כי T עץ מתוייג המקיים את הדרישות (*) ו-(**). מצאו את n.

ב. מצאו את מספר העצים המקיימים את הדרישות (*) ו-(**), כאשר עצים מתוייגים איזומורפיים (במובן של הגדרה 2.8) נחשבים זהים.

שאלה 2 (20 נק')

נתון גרף פשוט G המקיים $|V(G)|=n\geq 3$.

א. יהיו $u,v\in V(G)$ צמתים שאינם שכנים ב- G, ויהי H הגרף המתקבל מ- G על-ידי השמטת u, v, וכל הקשתות הסמוכות אליהם. הוכיחו כי $|E(H)|=|E(G)|-(\deg_G(u)+\deg_G(v))$.

ב. נניח כי $|E(G)|>\binom{n-1}{3}+1$. הוכיחו כי G הוא גרף המילטוני. (רמז: משפט Ore.)

שאלה 3 (20 נקי)

יהי G גרף קשיר, מישורי ופשוט על n צמתים.

נתון שיכון מישורי של G שלו שתי פאות לפחות.

תהי F קבוצת הפאות של השיכון המישורי הנתון של G.

נתון שהאורך המינימלי של מעגל ב- G הוא c.

נסמן ב- A את קבוצת כל הזוגות $\langle e, f\rangle \in E(G)\times F$ שבהם e שייכת להיקף של f (כלומר: היא אחת הקשתות התוחמות את f).

א. הוכיחו כי $c|F| \le |A| \le 2|E(G)|$.

ב. הוכיחו כי $|E(G)| \le \frac{c\cdot(n-2)}{c-2}$. (היעזרו בנוסחת אוילר.)

ג. הסיקו בעזרת סעיף ב׳ ש- $K_{3,3}$ אינו מישורי.

נמקו את כל תשובותיכם.