ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס - סתיו 2025א

כתב: נתנאל רגב

אוקטובר 2024 - סמסטר סתיו - תשפ״ה

תוכן העניינים

אל הסטודנטים	א
לוח זמנים ופעילויות	ב
התנאים לקבלת נקודות זכות	ג
פירוט המטלות בקורס	ג
ממ"ן 11	1
ממ"ן 12	3
ממ"ח 01	5
ממ"ן 13	9
ממ"ח 02	11
ממ"ן 14	15
ממ"ן 15	17
ממ"ח 03	19

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
.http://www.openu.ac.il/shoham
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה של הקורס הוא נתנאל רגב. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי א', בין השעות 11:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - netanr@openu.ac.il
- פקס: 09-7780631.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת **בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.**

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

בברכה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 / 2025א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	01.11.2024-29.10.2024	פרקים 1, 5.2-5.1			
2	08.11.2024-03.11.2024	פרקים 1, 2		מומלץ להתחיל לפתור את ממ"ן 11 וגם את ממ"ח 01	
3	15.11.2024-10.11.2024	פרק 2			
4	22.11.2024-17.11.2024	פרק 3			ממ"ן 11 21.11.2024
5	29.11.2024-24.11.2024	פרקים 3, 4			
6	06.12.2024-01.12.2024	פרקים 4, 6			
7	13.12.2024-08.12.2024	פרק 7			ממ"ן 12 12.12.2024
8	20.12.2024-15.12.2024	פרקים 7, 8		ממ"ח 01 19.12.2024	
9	27.12.2024-22.12.2024 (ה-ו חנוכה)	פרק 8			
10	03.01.2025-29.12.2024 (א-ה חנוכה)	פרק 9			ממ"ן 13 02.01.2025
11	10.01.2025-05.01.2025	פרקים 9, 10		ממ"ח 02 09.01.2025	
12	17.01.2025-12.01.2025	פרקים 10, 11			
13	24.01.2025-19.01.2025	פרק 11			ממ"ן 14 23.01.2025
14	31.01.2025-26.01.2025	פרקים 11, 12			
15	03.02.2025-02.02.2025	פרק 12		ממ"ח 03 08.02.2025	ממ"ן 15 06.02.2025

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **11 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, **3** ממ״חים ו-**5** ממ״נים.
תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

המטלה	הפרקים אליהם היא מתייחסת	משקל המטלה
ממ״ח 01	פרקים 1 - 4	1
ממ״ח 02	פרקים 6 - 8	1
ממ״ח 03	פרקים 9 - 12	1
ממ״ן 11	פרקים 1 – 2 ופרק 5 סעיפים 5.1 – 5.2	3
ממ״ן 12	פרקים 3 – 4	3
ממ״ן 13	פרקים 6 – 8.3 (כולל)	4
ממ״ן 14	פרקים 8.4 – 10	4
ממ״ן 15	פרקים 11 – 12	3
		סה״כ 20 נקודות

חשוב לדעת!

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1 של כרך א' וסעיפים 5.1 ו- 5.2 בכרך ב'.**

- **החוברת "פרקי ההכנה בקורס"** מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש . **אין צורך** לקרוא את כל החוברת בתחילת הסמסטר.
הנחיות בנושא זה יופיעו באתר הקורס בלשונית : פרקי הכנה.

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן :
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
ראו הסבר מפורט באתר הקורס בלשונית "מידע כללי על הקורס".

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20109 – אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 – 2 ופרק 5 סעיפים 5.1 – 5.2

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** **21.11.2024**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

א. האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ היא שדה ביחס לפעולת החיבור הרגיל ולפעולת הכפל $*$ המוגדרת על-ידי $a*b=a^3b^3$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

ב. האם הקבוצה $\mathbb{Z}_5$ היא שדה ביחס לפעולת הכפל מודולו 5 ולפעולת החיבור $+$ המוגדרת על-ידי $a+b=a^5+_5b^5$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

שאלה 2 (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x-2y-12z-10w=-6 \\ x+2y-3z-2w=3 \\ -4x+7y+27z+38w=18 \end{cases}$$

1) מעל $\mathbb{R}$ **2)** מעל $\mathbb{Z}_5$ **3)** מעל $\mathbb{Z}_3$

בכל אחד מהמקרים ציינו מהו מספר הפתרונות, ובמקרה שיש יותר מפתרון אחד רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונות מערכות המשוואות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$(M)\ \begin{cases} x+ay-2z=6 \\ 2x-ay-az=3 \end{cases}, \qquad (N)\ \begin{cases} ax+2y-3z=9 \\ 3x-4y+az=-3 \\ 5x-ay-4z=12 \end{cases}$$

מצאו את הערך של a עבורו המערכות (M) ו- (N) שקולות זו לזו.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a - 1 \\ (a-1)x_1 + 2(a-2)x_2 + a(a-1)x_3 = (a-1)^2 \\ 6x_1 + 2ax_2 + (a^2 + 3a - 4)x_3 = 5a - 2 \end{cases}$$

קבעו את ערכי a עבורם למערכת יש :

א. פתרון יחיד.

ב. אינסוף פתרונות. במקרה זה, רשמו את הפתרון הכללי של המערכת.

ג. אין פתרון.

שאלה 5 (15 נקודות)

יהיו $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3} \in \mathbb{R}^2$ ו- $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \in \mathbb{R}^3$ **סדרות** של וקטורים ויהיו $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ ו- $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^3$.

נתון שקיים פתרון למשוואה $x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + x_3\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_0}$, וכל פתרון של משוואה זו הוא גם פתרון של המשוואה $x_1\boldsymbol{v_1} + x_2\boldsymbol{v_2} + x_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_0}$.

(*לדוגמה אם מתקיים* $2\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} + 5\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_0}$ *אז מתקיים* $2\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} + 5\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_0}$).

הוכיחו שהקבוצה $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ אינה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהי $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצת וקטורים שונים זה מזה ושונים מ-0.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם קיימות זוג קבוצות זרות ולא ריקות $B, C \subset A$ כך שהקבוצות B ו- C בלתי תלויות לינארית ומקיימות $B \cup C = A$ אז הקבוצה A בלתי תלויה לינארית.

ב. אם לכל זוג קבוצות זרות ולא ריקות $B, C \subset A$ מתקיים שהקבוצות B ו- C בלתי תלויות לינארית אז הקבוצה A בלתי תלויה לינארית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3 – 4

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** **12.12.2024**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

תהיינה A,B,C מטריצות ריבועיות. נתון ש $C(I+AB)=I$ ו- $BA=B$.

הוכיחו כי $(I-BC)(I+B)=I$

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונה מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $A^2+A-2I=O$ (O היא מטריצת האפס).

א. הוכיחו שקיים פתרון לא טריוויאלי למשוואה $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ או למשוואה $A\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{x}$.

ב. נתון בנוסף שקיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $A^k=I$. הוכיחו ש- $A=I$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות ונתון שהמטריצות A, AB ו- BA סימטריות.

א. הוכיחו שהמטריצות A^2 ו- B הן מטריצות מתחלפות.

נגדיר $C=BA^2+AB^2$ וידוע שהמטריצה C הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות A ו- B מטריצות הפיכות.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה $A,B,C\in M_3(\mathbb{R})$ המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}2e & b & 2\\ 2d & a & 1\\ 2f & c & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2b & 2c & 2a\\ 3 & 4 & 2\\ 3e & 3f & 3d\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}a & 1 & d\\ b & 3 & e\\ c & 5 & f\end{pmatrix}$$

נתון $\det A=4$ ו- $\det B=6$. חשבו $\det C$.

שאלה 5 (20 נקודות)

חשבו את הדטרמיננטה הבאה (מעל $\mathbb{R}$):

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n & n & \cdots & n \\ n & n+1 & n & \cdots & n \\ n & n & n+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+2 \end{vmatrix}, \qquad d_{ij} = \begin{cases} n+1, & i=j\neq n \\ n+1, & i=n \text{ and } j\neq n \\ n+2, & i=j=n \\ n\ , & \text{אחרת} \end{cases}$$

שאלה 6 (20 נקודות)

א. הוכיחו שלכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

יש להוכיח סעיף זה ללא חישוב הדטרמיננטה אלא רק בשימוש בתכונות הדטרמיננטה.

ב. תהי $A\in M_3(\mathbb{R})$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a^2+x & ab & ac \\ ab & b^2+x & bc \\ ac & bc & c^2+x \end{pmatrix}, \qquad a,b,c,x\in\mathbb{R}, \qquad a,b,c\neq 0$$

מצאו את ערכי x עבורם למערכת $Ax=0$ מעל $\mathbb{R}$ יש אינסוף פתרונות. היעזרו בפרמטרים a,b,c במידת הצורך.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 – 4

מספר השאלות: 22 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** 19.12.2024

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה.

ב – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות.

ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x+4y=0 \\ 2x+2y+5z=0 \\ x+4y-6z=0 \end{cases}$$

.1 למערכת זו יש הפתרון הטריוויאלי בלבד גם מעל השדה $\mathbf{R}$ וגם מעל השדה $\mathbf{Z}_7$.

.2 אם מוחקים את המשוואה השנייה, אז יש 49 פתרונות למערכת מעל $\mathbf{Z}_7$ שהתקבלה.

בשאלות 2 ו- 3 נתייחס למערכת המשוואות הבאה, מעל $\mathbf{R}$:

$$(*)\quad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 2 \\ x_1-x_2+2x_3 = 3 \\ x_1-5x_2+6x_3 = -1 \end{cases}$$

שאלה 2

.1 למערכת (*) יש אינסוף פתרונות.

.2 תהי (O) המערכת ההומוגנית בעלת אותה מטריצה מצומצמת כמו (*).

אז לפתרון הכללי של (O) יש משתנה חופשי אחד בלבד.

שאלה 3

.1 וקטורי העמודות של המטריצה המצומצמת מהווים בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.

.2 ניתן לבחור את עמודת המקדמים החופשיים כך שיהיה פתרון יחיד למערכת שמתקבלת.

שאלה 4

נתונה מערכת המשוואות הבאה, מעל $\mathbf{R}$ (λ מספר קבוע) : $\begin{cases}(4-\lambda)x-2y-z=1\\ -2x+(1-\lambda)y-2z=2\\ x+2y+(\lambda-4)z=-1\end{cases}$

.1 אם $\lambda\neq -1,5$, אז למערכת יש פתרון יחיד.

.2 לכל ערך של λ יש פתרון למערכת.

בשאלות 8-5 נתונות מערכת הומוגנית (O) ומערכת אי-הומוגנית (M). שתיהן בעלות m משוואות, n נעלמים ואותה מטריצת מקדמים מצומצמת.

שאלה 5

.1 אם $m=n$ אז יש למערכת (O) פתרון טריוויאלי בלבד.

.2 אם קיים למערכת (O) פתרון לא טריוויאלי, אז $m\leq n$.

שאלה 6

.1 אם מטריצת המערכת (O) היא מדורגת ובלי שורות אפסים, אז $m\leq n$.

.2 אם למערכת (O) יש אינסוף פתרונות, אז גם למערכת (M) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 7

.1 אם $\underline{c},\underline{d}$ פתרונות של (M), אז $\underline{c}+\underline{d}$ פתרון של (M).

.2 אם $\underline{c},\underline{d}$ פתרונות של (M), אז $3\underline{c}-2\underline{d}$ פתרון של (M).

שאלה 8

.1 אם למערכת (O) יש פתרון יחיד, אז גם למערכת (M) יש פתרון יחיד.

.2 אם למערכת (M) יש פתרון יחיד, אז גם למערכת (O) יש פתרון יחיד.

שאלה 9

בשאלה זו המטריצות מעל $\mathbf{R}$.

.1 המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&-1&2\\6&3&4\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ שקולות שורות.

.2 למערכת ההומוגנית עם מטריצת המקדמים $C=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&4&6\\1&1&2\end{pmatrix}$ יש אותה קבוצת פתרונות כמו למערכת ההומוגנית עם מטריצת המקדמים B .

שאלה 10

.1 התת-קבוצה $\{(3,4,0),(2,1,4),(1,-1,0)\}$ של $\mathbf{R}^3$ בלתי תלויה לינארית.

.2 התת-קבוצה $\{(3,4,0),(2,1,4),(1,-1,0)\}$ של $(\mathbf{Z}_7)^3$ תלויה לינארית.

שאלה 11

.1 הקבוצה $\{(2,1,3,-1),(-1,1,-3,1),(4,5,3,-1),(1,5,-3,1),(1,3,3,2)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^4$.

.2 הקבוצה $\{(2,1,3,-1),(-1,1,-3,1),(1,5,-3,1),(1,3,3,2)\}$ היא בסיס של $\mathbf{R}^4$.

שאלה 12

יהי $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ בסיס של $\mathbf{R}^3$.

.1 הקבוצה $\{\underline{a}+\underline{b},\ \underline{b}-\underline{c},\ \underline{c}-\underline{a}\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3$.

.2 הקבוצה $\{\underline{a}-\underline{b},\ 2\underline{b}+\underline{c},\ \underline{a}+\underline{b}+\underline{c}\}$ בסיס של $\mathbf{R}^3$.

שאלה 13

.1 אם (α_1,α_2) ו- (β_1,β_2) הם וקטורים בלתי תלויים ב- $\mathbf{R}^2$, אז לכל $\alpha_3,\beta_3 \in \mathbf{R}$, גם הווקטורים $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ בלתי תלויים ב- $\mathbf{R}^3$.

.2 אם $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ הם וקטורים בלתי תלויים ב- $\mathbf{R}^3$, אז הווקטורים (α_1,α_2) ו- (β_1,β_2) בלתי תלויים ב- $\mathbf{R}^2$.

שאלה 14

.1 אם A,B מטריצות כך שהמטריצה $AB+BA$ מוגדרת אז A ו- B ריבועיות מאותו סדר.

.2 אם A,B מטריצות כך שהמטריצה AB מוגדרת ו-A מכילה עמודת אפסים, אז גם AB מכילה עמודת אפסים.

בהמשך מטלה זו A ו- B הן מטריצות ריבועיות מעל $\mathbf{R}$ מסדר $n \times n$, אלא אם צוין אחרת.

שאלה 15

.1 אם $A^2 = B^2$ אז $A = B$ או $A = -B$.

.2 אם $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ אז $AB = BA$.

שאלה 16

.1 אם A סינגולרית, אז יש בה שורת אפסים.

.2 אם A סינגולרית, אז יש בה שתי שורות פרופורציונליות.

שאלה 17

1. אם $A^2 + BA$ הפיכה, אז A הפיכה.

2. אם $A^2 + BA$ סינגולרית, אז A סינגולרית.

שאלה 18

1. נניח ש- A ו- B מטריצות שקולות שורות. אם $|A| \neq 0$ אז גם $|B| \neq 0$.

2. אם A ו- B מטריצות שקולות שורות אז $|A| = |B|$.

שאלה 19

1. אם $\lambda \in \mathbf{R}$ אז $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

2. $|A + B| = |A| + |B|$.

שאלה 20

1. אם $A^2 - A + I = 0$ אז למערכת $A\underline{x} = \underline{x}$ יש פתרון יחיד.

2. אם למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ יש אינסוף פתרונות אז גם למערכת $A^2\underline{x} = \underline{b}$ יש אינסוף פתרונות.

שאלה 21

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = (x^2-1)(x^2-4)$.

2. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = 0$.

שאלה 22

נניח ש- A, B מטריצות ריבועיות מסדר 4 כך ש- $\det A = 2$ ו- $\det B = -2$.

1. $\det(-\frac{1}{2}A^3B) = -1$.

2. למערכת $(A+B)\underline{x} = \underline{0}$ יש אינסוף פתרונות.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: **20109 – אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 – 8.3 (כולל)

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** **02.01.2025**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

שאלה 1 (10 נקודות)

נתון מספר $z \in \mathbb{C}$ המקיים $|z| = 1$ ונגדיר $w = \dfrac{2z}{1-z}$. הוכיחו $\mathrm{Re}(w) = -1$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A \in M_3(\mathbb{C})$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a & i & -i \\ \bar{a} & \bar{a} & i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

א. הוכיחו שלכל ערך של a הדטרמיננטה של A היא מספר ממשי.

נתון ש- $|A| = 0$.

ב. מצאו את ערכי a המקיימים $\mathrm{Re}(a) = 0$.

ג. עבור ערכי a שמצאתם בסעיף ב׳ קבעו האם יש פתרון למערכת $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2\bar{a} \\ 0 \end{pmatrix}$. במידה וקיים פתרון יש לרשום את הפתרון הכללי.

שאלה 3 (10 נקודות)

בדקו האם הקבוצה $V = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ מהווה מרחב לינארי מעל השדה $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר המוגדרות באופן הבא: לכל $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ו- $\lambda \in \mathbb{R}$.

חיבור – $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

כפל בסקלר – $\lambda \odot (a,b) = 2\lambda(a,b)$

שאלה 4 (20 נקודות)

בדקו, האם כל אחת מהקבוצות הבאות היא מרחב לינארי, ביחס לפעולות הרגילות:

א. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ מעל $\mathbb{C}$.

ב. $V = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_3[x] \mid (a - 2c)^2 + (b - a)^2 = 0\}$ מעל $\mathbb{R}$.

ג. עבור המטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נגדיר $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = B^t A\}$ מעל $\mathbb{R}$.

כאשר הקבוצה היא מרחב לינארי, מצאו קבוצה פורשת סופית.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $V_k \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ המוגדרת באופן הבא: לכל $k \in \mathbb{N}$

$$V_k = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(k) = p(-k) = 0\}$$

א. הוכיחו ש-V_k תת־מרחב של $\mathbb{R}_4[x]$ בעזרת המבחן לתת-מרחב של משפט 7.3.2.

ב. הוכיחו ש-V_1 תת־מרחב של $\mathbb{R}_4[x]$ בעזרת מציאת קבוצה סופית S כך ש- $V_1 = \mathrm{Sp}(S)$.

ג. האם $\mathbb{R}_4[x] = V_1 + V_2$? אם כן, האם $\mathbb{R}_4[x] = V_1 \oplus V_2$? אם הסכום אינו סכום ישר מצאו קבוצה פורשת סופית עבור $V_1 \cap V_2$.

הערה: יש לפתור את סעיף ג' ללא שימוש בחומר של פרק 8.

שאלה 6 (10 נקודות)

יהי $U \subseteq M_n(\mathbb{R})$ תת מרחב לינארי. נתון שלכל $A \in U$ גם $A^2 \in U$. הוכיחו שגם $A^3 \in U$.

שאלה 7 (10 נקודות)

יהי V מרחב לינארי נוצר סופית, ויהיו $V_1, V_2 \subset V$ מרחבים לינאריים (מוכלים ממש ב- V). נתון ש- $\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim V - 2$. הוכיחו ש- $V_1 + V_2 = V$ או $V_1 = V_2$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 – 8

מספר השאלות: 19   **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2025א   **מועד אחרון להגשה:** 09.01.2025

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה.   **ג** – אם שתי הטענות נכונות.

ב – אם רק טענה 2 נכונה.   **ד** – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

.1 הקבוצה $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

.2 קבוצת כל המטריצות המשולשיות העליוניות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbf{R}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.

שאלה 2

.1 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Re}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{1+i}$.

.2 $\frac{11}{10} = \mathrm{Im}\frac{2i+3}{3i-1}$.

שאלה 3

.1 $(1-i)^5 = 2-2i$.

.2 לכל $a, b \in \mathbf{R}$, $|2ab + i(a^2-b^2)| = a^2+b^2$.

שאלה 4

.1 $z \in \mathbf{C}$ הוא מספר ממשי אם ורק אם $z = \bar{z}$.

.2 לכל n טבעי, המספר $(2+i)^n + (2-i)^n$ הוא ממשי.

שאלה 5

1. למערכת ההומוגנית $\begin{pmatrix} 2+i & 3+i & 2 \\ 1 & 4i & 5 \\ i+3 & 5 & 2-3i \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$ יש הפתרון הטריוויאלי בלבד.

2. לכל $z\in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ המספר $\frac{\overline{z}}{z^2}-\frac{z}{\overline{z}^2}$ הוא מספר מדומה.

שאלה 6

1. אם z_0 פתרון של המשוואה $z^{13}-13z^7+7z^3-3z+1=0$, אז גם $\bar{z}_0$ פתרון שלה.

2. אם z_0 פתרון של המשוואה $z^2+iz+2=0$, אז גם $\bar{z}_0$ פתרון שלה.

שאלה 7

1. $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ היא הצגה טריגונומטרית של $-1-i$.

2. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ היא הצגה טריגונומטרית של $\sqrt{3}-i$.

שאלה 8

1. כל הפתרונות של המשוואה $z^3=i$ הם :

$$z_1=-i\ ,\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\ ,\ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\ .$$

2. כל הפתרונות של המשוואה $z^2=i-\sqrt{3}$ הם :

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\ .$$

שאלה 9

1. הקבוצה $\{(\alpha,\beta)\in \mathbf{R}^2 \mid \alpha\ge 0,\ \beta\ge 0\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{R}^2$.

2. קבוצת המטריצות $A\in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ כך שהווקטור $(1,2,3)$ הוא פתרון של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$ היא תת-מרחב של $M_{3\times 3}(\mathbf{R})$.

שאלה 10

1. הקבוצה $\{(z_1,z_2)\in \mathbf{C}^2 \mid z_2\in \mathbf{R}\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{C}^2$ כמרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$.

2. הקבוצה $\{(z_1,z_2)\in \mathbf{C}^2 \mid z_2\in \mathbf{R}\}$ היא תת-מרחב של $\mathbf{C}^2$ כמרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 11

יהיו K ו- T קבוצות וקטורים לא ריקות במרחב לינארי V.

.1 אם $K \subset T$ (חלקית ממש) ואם $\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{Sp}(K)$, אז T תלויה לינארית.

.2 אם $\mathrm{Sp}(T)\cap\mathrm{Sp}(K)=\{\underline{0}\}$ אז $\mathrm{Sp}(T\cup K)=\mathrm{Sp}(T)\oplus\mathrm{Sp}(K)$.

שאלה 12

נניח כי K קבוצת השורות ו- T קבוצת העמודות של מטריצה A.

.1 $\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{Sp}(K)$.

.2 $\dim\mathrm{Sp}(T)=\dim\mathrm{Sp}(K)$.

שאלה 13

.1 מרחב השורות של מטריצה סימטרית שווה למרחב העמודות שלה.

.2 אם מרחב השורות של מטריצה שווה למרחב העמודות שלה אז המטריצה סימטרית.

שאלה 14

.1 $\dim\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x-2y+z=0\}=2$.

.2 המימד של תת-מרחב המטריצות הסימטריות ב- $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ הוא $\frac{n(n+1)}{2}$.

שאלה 15

.1 יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב לינארי V ממימד 7 כך ש- $\dim U=4$ ו- $\dim W=5$.
אז $2\le\dim(U\cap W)\le 4$.

.2 $\mathbf{R}_3[x]=\mathrm{Sp}\{1,1+x^2,1-x^2\}\oplus\mathrm{Sp}\{1-x,x-x^2\}$.

שאלה 16

תהי A מטריצה מסדר $m\times n$ בעלת שורות בלתי תלויות לינארית. אז:

.1 אם $m<n$ אז עמודותיה של A תלויות לינארית.

.2 אם $m=n$ אז עמודותיה של A בלתי תלויות לינארית.

שאלה 17

יהיו A ו- B מטריצות מסדר 5×5. נסמן ב- $P(A)$ את מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. נניח ש- $\rho(B)=3$. אז:

.1 $\rho(AB)=3$ אם ורק אם A הפיכה.

.2 אם $AB=0$ אז $\dim P(A)\le 2$.

שאלה 18

1. קיים בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ מורכב ממטריצות הפיכות בלבד.

2. מטריצת המעבר מהבסיס $(1,x,x^2)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ לבסיס $B=(1+x, 1+2x^2, 2x+x^2)$ היא:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 19

יהיו B_1, B_2 בסיסים של מרחב לינארי ותהי M מטריצת המעבר מ- B_1 ל- B_2.

1. אם M אלכסונית, כל וקטור ב- B_2 הוא כפולה של וקטור ב- B_1.

2. אם כל וקטור ב- B_2 הוא כפולה של וקטור ב- B_1 אז M אלכסונית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8.4 – 10

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** **23.01.2025**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

יהיו $U, W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ תת-מרחבים הבאים

$$a \in \mathbb{R}, \qquad U = \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ 1 & 2a+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$a \in \mathbb{R}, \qquad W = \mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

א. קבעו את הממד של U לפי הערכים של a.

ב. האם קיים ערך של a עבורו מתקיים $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$?

שאלה 2 (15 נקודות)

תהיינה $A_{m\times n}$ ו- $B_{n\times m}$ מטריצות מהסדרים הנקובים $n > m$. נתון ש $\rho(A) = n$.

א. הוכיחו $\rho(AB) = \rho(B)$.

ב. נתון $BAB = O$ הוכיחו ש- $\rho(B) \le \min\left\{n, \frac{m}{2}\right\}$.

שאלה 3 (15 נקודות)

עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו האם היא לינארית. אם היא לינארית, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע.

א. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $T(x,y) = 2x(1,1,1) - y(2,-1,0)$.

ב. $T: M_{2\times 2}^{\mathbb{R}} \to M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ המוגדרת על ידי $T(X) = XAX$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ג. $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי $T\big(p(x)\big) = p''(x) \cdot p(x)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $U \subseteq M_3(\mathbb{R})$ הקבוצה הבאה: $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$.

א. הוכיחו ש- U תת-מרחב ומצאו בסיס וממד של U.

ב. תהי $T: U \to M_2(\mathbb{R})$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי: $T\left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. האם ההעתקה T איזומורפיזם?
2. מצאו בסיס וממד ל- $\mathrm{Ker}T$ ול- $\mathrm{Im}T$.
3. תהי $A \in U$. הוכיחו שאם $|T(A)| = 0$ אז $|A| = 0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

יהיו $U \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ ו- $W \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ התת-מרחבים הבאים:

$$U = \mathrm{Sp}\{\boldsymbol{u_1} = 1 + x, \;\; \boldsymbol{u_2} = 1 + x^2, \;\; \boldsymbol{u_3} = x + x^2, \;\; \boldsymbol{u_4} = 1 - x + 2tx^2\},$$

$$W = \mathrm{Sp}\{\boldsymbol{w_1} = 2x^2, \;\; \boldsymbol{w_2} = 2 + 2x, \;\; \boldsymbol{w_3} = 2x^2 + 2x^3, \;\; \boldsymbol{w_4} = k + lx + mx^2 + 2x^3\}$$

כאשר $t,k,l,m \in \mathbb{R}$. נגדיר העתקה $T: U \to W$ על ידי:

$$T(u_1) = w_1, \qquad T(u_2) = w_2, \qquad T(u_3) = w_3, \qquad T(u_4) = w_4.$$

א. נתון שההעתקה T לינארית. מצאו את הפרמטרים t,k,l,m.

ב. האם ההעתקה T איזומורפיזם?

ג. נסמן $B = (u_1, u_2, u_3)$ ו- $C = (w_1, w_3, w_4)$. הוכיחו ש- B ו- C הם בסיסים סדורים של U ו- W, בהתאמה, ומצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה לפי הבסיסים B ו- C, $[T]_C^B$.

ד. מצאו את הנוסחה המפורשת להעתקה, כלומר לכל $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_3[x]$ חשבו $T(a + bx + cx^2)$.

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונות מטריצות ריבועיות מאותו הסדר A, B ו- C. נתון ש- B ו- C מתחלפות ו-A מטריצה הפיכה. הוכיחו שהמטריצות ABC ו-CBA דומות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11 – 12

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** 06.02.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונות מטריצות ריבועיות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימות $(A+2I)(A-I) = AB$.

נתון שהמטריצה B הפיכה.

א. הוכיחו ש- $\lambda = 1$ ו- $\lambda = -2$ אינם ערכים עצמיים של המטריצה A.

ב. הוכיחו שהמטריצות A ו- B מתחלפות.

ג. נתון שלמטריצות A ו-B יש אותו ערך עצמי עבור אותו וקטור עצמי, מצאו ערך עצמי זה.

ד. הוכיחו שאם המטריצה A לכסינה אז גם המטריצה B לכסינה.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 36 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ -9 & a & 3 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

וידוע שהמטריצות דומות. חשבו את הפרמטרים a, b ו-c והוכיחו שהמטריצות לכסינות.

מצאו את שתי האפשרויות, הניחו $a \neq b$.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי V מרחב לינארי נוצר סופית ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{R}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

קיימת העתקה T המקיימת $T^3 - 3T^2 + 2T = O$ וגם $T^4 - 2T^3 + T^2 = I$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AA^t = I$.

א. הוכיחו שקבוצת וקטורי העמודות של המטריצה A היא קבוצה אורתונורמלית.

ב. הוכיחו שהערכים העצמיים של A במידה וקיימים הם $\lambda = 1$ או $\lambda = -1$.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי $U \in \mathbb{R}^4$ התת-מרחב הבא:

$$U = \{(2a + 2b, -2a, a + 5b, 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

א. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U^\perp$.

ג. נתון שההיטל האורתוגונלי של הווקטור $w = (1,1,m,n)$ על $U^\perp$ הוא $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{3}, k, l\right)$, כאשר $m, n, k, l \in \mathbb{R}$. מצאו את הווקטור w ואת ההיטל האורתוגונלי של הווקטור w על $U^\perp$ ועל U.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: **20109- אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9 – 12

מספר השאלות: 17 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2025א **מועד אחרון להגשה:** 08.02.2025

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ג** – אם שתי הטענות נכונות.

ב – אם רק טענה 2 נכונה. **ד** – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

.1 ההעתקה $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ המוגדרת על-ידי $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_3,x_2,x_3)$ היא העתקה לינארית.

.2 ההעתקה $T:M_2(\mathbf{R})\to\mathbf{R}^2$ המוגדרת על-ידי $T\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=(x_1-x_2,\ x_4-x_3)$ היא העתקה לינארית.

שאלה 2

.1 $T:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_3[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x))=(x-2)f(x)$ היא טרנספורמציה לינארית

.2 $T:\mathrm{M}^{\mathbf{C}}_{n\times n}\to\mathrm{M}^{\mathbf{C}}_{n\times n}$ המוגדרת ע"י $T(X)=X-\overline{X}$ לכל $X\in\mathrm{M}^{\mathbf{C}}_{n\times n}$ היא העתקה לינארית.

($\mathrm{M}^{\mathbf{C}}_{n\times n}$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$)

<u>הערה</u>: $\overline{X}$ היא המטריצה המתקבלת מהמטריצה X על- ידי הצמדה, כלומר אם $X=(x_{ij})$ אז $\overline{X}=(\overline{x}_{ij})$

שאלה 3

.1 קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ כך ש-
$T(1,-1,2)=(0,1,-2)$, $T(2,0,3)=(1,-1,0)$, $T(1,-3,3)=(1,2,-6)$.

.2 קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ כך ש- $T(1,0,0)=T(0,1,0)=(1,3)$.

שאלה 4

תהי $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}$ הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת על-ידי $T(f(x))=f(-5)$.

1. $\operatorname{Ker}T=\{(x+5)(ax+b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$.

2. T על.

שאלה 5

תהי $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ קבוצת וקטורים במרחב לינארי V ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית.

1. אם $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_k\}$ פורשת את V אז T איזומורפיזם.

2. אם $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ תלויה לינארית, אז $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_k\}$ תלויה לינארית.

שאלה 6

1. אם $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ טרנספורמציה לינארית, אז T אינה חד-חד-ערכית.

2. אם $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $T\neq 0$, טרנספורמציה לינארית, אז T על.

שאלה 7

יהי V מרחב לינארי נוצר סופית ויהיו $S,T:V\to V$ טרנספורמציות לינאריות.

1. אם $\operatorname{Ker}S=\{\underline{0}\}$ אז $\operatorname{Im}TS=\operatorname{Im}T$.

2. אם $\operatorname{Ker}T=\{\underline{0}\}$ אז $\operatorname{Im}TS=\operatorname{Im}T$.

בשאלות 8 ו- 9 נתונות $T,S:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציות לינאריות המוגדרות כך:

$T(1,0,0)=(0,1,0)$, $T(0,1,0)=(1,1,-1)$, $T(0,0,1)=(1,0,1)$

$S(1,0,0)=(0,-1,0)$, $S(0,1,0)=(0,0,1)$, $S(0,0,1)=(1,1,1)$

נסמן ב- E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$ וב- B את הבסיס $((1,-1,0),(1,1,1),(0,1,1))$.

שאלה 8

1. $[T(1,1,1)]_B=\begin{bmatrix}-2\\4\\-4\end{bmatrix}$.

2. $[S(1,1,1)]_B=[S]_B\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

שאלה 9

1. $[T\circ S]_E=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&0&2\\1&1&0\end{bmatrix}$.

2. $[T]_B=\begin{bmatrix}-1&2&2\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$.

שאלה 10

נתונה $T:\mathrm{M}^{\mathbf{R}}_{2\times2}\to\mathbf{R}^2$ המוגדרת על-ידי $T(X)=X\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

1. $\mathit{K}\,\mathrm{er}\,T=\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

2. המטריצה המייצגת את T בבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbf{M}^R_{2\times2}$ ושל $\mathbf{R}^2$ היא $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

.

שאלה 11

1. אם A מטריצה לכסינה אז גם המטריצה המשוחלפת A^t לכסינה.

2. אם A^2 לכסינה אז גם A לכסינה.

שאלה 12

1. המטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}2&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-2\end{pmatrix}$ דומות.

2. המטריצות $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ דומות.

שאלה 13

1. אם A ו- B לכסינות אז $A+B$ לכסינה.

2. אם A ו- B לכסינות אז AB לכסינה.

שאלה 14

תהי A מטריצה ריבועית . נסמן ב- $p(t)$ את הפולינום האופייני שלה.

1. אם $\rho(A)=1$ ו- $tr(A)\neq0$ אז A לכסינה.

2. הפולינום $q(t)=p(t+3)$ הוא הפולינום האופייני של $A-3I$.

שאלה 15

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 3. נסמן ב- $p(t)$ את הפולינום האופייני שלה.

.1 אם $p(t)=(t^2-1)(t-2)$ אז המטריצה $B=A^{141}-3A^{17}-2I$ הפיכה.

.2 אם $\rho(A-2I)=1$ ו- $\det A=-12$ אז A לכסינה.

שאלה 16

יהיו U,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^n$.

.1 אם $U\subseteq W$, אז $W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$.

.2 $U^{\perp}\cap W^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$.

שאלה 17

.1 ההיטל האורתוגונלי של $(3,4,5)$ על $Sp\{(1,-1,0),(1,5,0)\}$ הוא $(4,3,0)$.

.2 המשלים האורתוגונלי של $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 2x+y-z=0\}$ ב- $\mathbf{R}^3$ הוא תת-מרחב ממימד 2.