Matematická analýza III

Tomáš Krejčí <tomas789@gmail.com>

20. prosince 2012

10 Konvergence posloupností a řad funkcí

10.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:*

1. konverguje bodově *k f na J, pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli*

$$\forall x \in J \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \to f$ na J.

2. konverguje stejnoměrně *k f na J, pokud*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

3. konverguje lokálně stejnoměrně*, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$*

Věta L 1 (kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ pak*

$$f_n \rightrightarrows f na J \Leftrightarrow \lim_{n\to\inf} \sup\{|f_n(x) = f(x)|; x \in J\} = 0$$

Věta T 2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f na J \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Věta T 3 (Moore-Osgood)**.** *Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$ splňují*

1. *$f_n \rightrightarrows f$ na J,*
2. *existuje $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$*

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny, neboli:*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Důsledek. *Nechť* $f_n \rightrightarrows f$ *na* I *a nechť* f_n *jsou na* I *spojité. Pak* f *je spojitá na* I*.*

Věta L 4 (o záměně limity a integrálu)**.** *Nechť funkce* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *a nechť* $f_n \in \mathbb{R}([a,b])$*. Pak* $f \in \mathbb{R}([a,b])$ *a*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx$$

Věta T 5 (o záměně limity a derivace)**.** *Nechť funkce* f_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, mají vlastní derivaci na intervalu* (a,b) *a nechť:*

1. *existuje* $x_0 \in (a,b)$ *tak, že* $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje,*
2. *pro derivace* f_n' *platí* $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)

Potom existuje funkce f *tak, že* $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na* (a,b)*,* f *má vlastní derivaci a platí* $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} f'$ *na* (a,b)*.*

10.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice. *Řekneme, že řada funkcí* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *konverguje* stejnoměrně *(popřípadě* lokálně stejnoměrne*) na intervalu* J*, pokud posloupnost částečných součtů* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ *konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na* J*.*

Věta L 6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* J*. Pokud* $\sum_{k=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ *na* J*, pak posloupnost funkcí* $u_n(x) \rightrightarrows 0$ *na* J*.*

Věta L 7 (Weirstrassovo kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* J*. Pokud pro* $a_n := \sup\{|u_n(x)|; x \in J\}$ *platí, že číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ *na* J*.*

Věta L 8 (o spojitosti a derivování řad funkcí)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* (a,b)*.*

1. *Nechť* u_n *jsou spojité na* (a,b) *a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)*. Pak* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je spojitá na* (a,b)*.*
2. *Nechť funkce* u_n*,* $n \in \mathbb{N}$ *mají vlastní derivace na intervalu* (a,b) *a nechť*
   (a) *existuje* $x_0 \in (a,b)$ *tak, že* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *konverguje,*
   (b) *pro derivace* u_n' *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)

Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná diferencovatelná a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ *na* (a,b)*.*

Vraťme se ke konvergenci obyčejných řad. Následující kritérium bude užitečné v kapitole Fourierovy řady. Existuje i varianta tohoto tvrzení pro stejnoměrnou konvergenci, tu však nebudeme potřebovat.

Věta T 9 (Abel-Dirichletovo kriterium, bez důkazu)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost reálných čísel a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní,*

2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené součty, tedy*

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad : |s_m| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| < K$$

11 Mocninné řady

Definice. *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $a_n \in \mathbb{R}$ *pro* $n \in \mathbb{N}_0$. *Řadu funkcí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nazýváme* mocninnou řadou *s koeficienty* a_n *o středu* x_0.

Definice. Poloměrem konvergence *mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nazveme*

$$R = \sup \left\{ r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r; x_0 + r] \right\}$$

Věta L 1 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,\infty]$ *její poloměr konvergence. Pak řada konverguje obsolutně pro všechna* x *taková, že* $|x-x_0| < R$ *a diverguje pro všechna* x *taková, že* $|x-x_0| > R$.

Věta L 2 (výpočet poloměru konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,\infty]$ *její poloměr konvergence. Pak platí*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *pak* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Věta L 3. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *(je-li* $R = \infty$, *pak na celém* $\mathbb{R}$*).*

Věta L 4 (o derivaci mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *(*$\mathbb{R}$ *pro* $R = \infty$*) platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=+}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

Věta L 5 (o integrování mocninné řady)**.** *Nehcť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *je také mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \quad \text{na } (x_0 - R, x_0 + R)$$

Věta T 6 (Abelova)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Nechť navíc* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje. Potom řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konverguje stejnoměrně na* $[x_0, x_0 + R]$ *a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $x_0 = 0$. Označme $t_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n R^n$. Víme, že $\sum a_n R^n$ konverguje, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |t_N| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \\ &= -t_N \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + t_{n-1}\left(\frac{x}{R}\right)^n - t_n \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Sečteme od N do $N+k$

$$\sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n = \left[\sum_{n=N}^{N+k} -t_n \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right)\right] + t_{N-1}\left(\frac{x}{R}\right)^n - t_{N+k}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+k+1}$$

Protože $x \in [0, R]$, tak $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0,1]$. Dále platí $\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n\right| &\leq \sum_{n=N}^{N+k} |t_n| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + |t_{N-1}| + |t_{N+k}| \\ &\leq \epsilon \sum_{n=N}^{N+k} |t_n| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + 2\varepsilon \\ &= \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^N - \left(\frac{x}{R}\right)^{N+k+1}\right) + 2\varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Z BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řady dostaneme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, R]$ Z MO věty dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$\lim_{r\to R_-} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

□

Příklad. *Sečtěte* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$

Řešení. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} x^{3n-2}$. To je mocninná řada poloměrem konvergence $R = 1$. Podle Laibnitze $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ konverguje.

Tedy podle Abelovy věty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = \lim_{x\to 1_-} f(x)$

Dle věty o derivaci mocninné řady máme $\forall x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}(3n-2)x^{3n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-x^3\right)^{n-1} = \frac{1}{1+x^3}$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \ldots = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$0 = f(0) = \frac{1}{3}0 - \frac{1}{6}0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} &= \lim_{x \to 1_-} \left(\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

12 Fourierovy řady

Definice. *Nechť $a_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ pro $x \in \mathbb{R}$ nazveme* trigoniometrickou řadou. *Pro dané n je $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$* trigoniometrický polynom stupně *n. $\mathcal{P}_{2\pi}$ značí množinu všech 2π-periodických funkcí majících Reimannův integrál na* $[0, 2\pi]$

Cílem je danou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ rozvinout do trigoniometrické řady a:

1. spočítat a_k, b_k
2. zjistit, zda-li je řada rovna původní funkci

Věta BD 1. *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost reálných čísel. Jestliže buď*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, nebo*

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty*

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Příklad. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Řešení. Pokud $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sum 0 \leftarrow$ konverguje.

Dále předpokládejme, že $x \neq \pi k$. Označme $a_n = \sin(nx)$, $b_n = \frac{1}{n}$. b_n je monotonní nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Nechť $m \in \mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{n=a}^{m} \sin(nx)\right| = \left|Im\left(\sum_{n=0}^{m} e^{inx}\right)\right| = \left|Im\left(\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right)\right| \leq \frac{3}{|1-e^{ix}|}$$

Dle Dirichletova kriteria tato suma konverguje.

□

Věta L 2 (o ortogonalitě trigoniometrických funkcí). *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, pak*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx &= \pi \text{ (pro } n = m), 0 \text{ (pro } n \neq m) \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx &= \pi \text{ (pro } n \neq m), 0 \text{ (pro } n = m) \end{aligned}$$

Poznámka proč se věta jmenuje o ortogonalitě trigoniometrických funkcí? Vraťme se zpět k lineární algebře. Skalární součin vektorů x a y jsme definovali jako $\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$. Zcela ekvivalentně byl zaveden skalární součit funkcí f a g jako $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)dx$. O vektorech řekneme, že jsou na sebe kolmé (ortogonální), pokud je jejich skalární součin roven nule. Nejinak je tomu i u skalárního součinu funkcí.

Poznámka 2 Skalární součin funkcí se nazývá Hilbertovy prostory

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\left((n-m)x\right)-\frac{1}{2}\left((n+m)x\right)\right]=$$

Pro $n\neq m$

$$=\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\left((n-m)x\right)}{n-m}\right]_0^{2\pi}-\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\left((n+m)x\right)}{n+m}\right]_0^{2\pi}=0$$

Pro $n=m$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos 0+(2.clenstejne)=\pi$$

Zbylé rovnosti analogicky. □

Opakování (Vlastnosti Reimanovsky integrovantelných funkcí)**.**

1. $f\in R((a,b))\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$ *dělení* (a,b) $: S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$
2. $f\in R((a,b))$ *a* $f\in R((b,c))\Leftrightarrow f\in R((a,c))$ *pro* $a<b<c$
3. f *je spojitá na* $[a,b]\Rightarrow f\in R((a,b))$
4. f *je spojitá na* (a,b) *a omezená na* $[a,b]\Rightarrow f\in R((a,b))$
5. $f,g\in R((a,b))\Rightarrow f\pm g, f*g\in R((a,b))$

Věta L 3 (Fourierovy vzorce)**.** *Nechť* $f\in\mathcal{P}_{2\pi}$ *a nechť* $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$, *nechť navíc řada napravo konverguje stejnoměrně. Pak*

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)dx,\quad k\in\{0,1,2,\dots\}\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)dx,\quad k\in\{1,2,\dots\}
\end{aligned}$$

Důkaz. Idea důkazu je, že identitu pro $f(x)$ přenásobíme $\cos(kx)$ resp. $\sin(kx)$ a přeintegrujeme přes $[0,2\pi]$ a díky větě "Věta L 2"(! odpovídá značení na přednášce, nikoliv v tomto skriptu) mnoho členů vypadne.

Opakování. $f_n\rightrightarrows f$ *na* $(a,b)\Rightarrow\int_a^b f_n\to\int_a^b f$

Pozorování. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)\sin(lx)+b_k\sin(kx)\sin(lx)\right)$ *konverguje stejnoměrně.*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2}\sin(lx) + \sum\left(a_k\cos(kx)\sin(lx) + b_k\sin(kx)\sin(lx)\right)\right]dx =$$

$$b_k\int_0^{2\pi}\sin^2(lx)dx = b_k\pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx$$

podobně přenásobím funkcí $\sin(lx)$ dostanu vzorec pro a_k pro $k \in \mathbb{N}$.
Přenásobím funkcí $\cos(0x) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} 1 * f(x)dx = \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2} + 0 + 0 + \ldots + 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(0x)dx$$

$\square$

Definice. *Nehchť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak definujeme čísla*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k = 0, 1, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

a nazveme je Fourierovými koeficienty *funkce f a*

$$aF_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

nazveme Fourierovou řadou funkce f.

Poznámka.

- *díky 2π-periodicitě lze funkci integrovat přes libovolný interval délky 2π (velmi často $\int_{-\pi}^{\pi}$)*
- *Fourierovy řady lze zavést i pro funkce s periodou l, pak mají vzorce tvar*

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \\ a_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)dx \\ b_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)dx \end{aligned}$$

- *někdy se pracuje s rozvoji vůči jinému systému než je trn trigoniometrický*
- *je-li f lichá, pak platí $\forall k : a_k = 0$*

- *je-li f sudá, pak platí $\forall k : b_k = 0$*
- *opecně neplatí $F_f = f$*

Příklad. *Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady na $(-\pi, \pi)$.*

Funkce f je sudá $\Rightarrow \forall k b_k = 0$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(kx)}{k}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 - 0 - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx\right) = \frac{4}{k^2\pi}\left(\left[x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 * \frac{\cos(kx)}{k}dx\right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi}\left(\pi\cos(k\pi) - 0 - 0\right) = \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}
$$

$$
F_f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx)
$$

Definice. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak* Dirichletovým jádrem *nazveme funkci*

$$
D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)
$$

Důsledek.

1. *D_n je spojitá funkce, sudá, 2π-periodická, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$*
2. *$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \pi$*
3. *$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$*

Důkaz. 1. č

□

Věta L 4 (vlastnosti Dirichletova jádra)**.** *Pro Dirichletovo jádro D_n platí*

1. *D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická funkce*
2. *$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)dx = \pi$*
3. *$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$*

Věta L 5 (částečné součty Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a F_f je Fourierova řada pro f. Potom pro částečné součty $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ platí*

$$
s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(x+z)D_n(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+y) + f(x-y)\right)D_n(y)dy
$$

Věta T 6 (Riemann-Lebesqueovo lemma)**.** *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in R([a, b])$*. Potom*

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0 \text{a} \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0$$

Speciálně pro Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *platí* $a_k \to 0$ *a* $b_k \to 0$*.*

Věta T 7 (Diniho kriterium)**.** *Nechť* $f \int \mathcal{P}_{2\pi}$ *a* $x \in \mathbb{R}$*. Nechť existují vlastní limity* $f(x+) = \lim_{y \to x+} f(y)$ *a* $f(x-) = \lim_{y \to x-} f(y)$ *a nechť existují vlastní limity*

$$\lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x+)}{y - x} \quad \text{a} \quad \lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x-)}{y - x}$$

Potom Fourierova řada funkce f *konverguje v bodě* x *k hodnotě* $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$*.*

Důsledek. *Nechť* $x \in \mathbb{R}$ *a nechť pro* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *existuje* $f'(x)$*. Potom* $f(x) = F_f(x)$*.*

Věta T 8 (Jordan-Dirichletovo kriterium - bez důkazu)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *je po částech monotónní. Tedy nechť existuje konečně mnoho bodů* $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = 2\pi$ *tak, že* f *je monotónní na* (a_i, a_{i+1}) *pro* $i \in \{1, \ldots, m-1\}$*. Potom Fourierova řada funkce* f *konverguje v bodě* x *k hodnotě* $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*.*

13 Základy komplexní analýzy

Připomenutí vlastností $\mathbb{C}$ a operací + a $\times$ na $\mathbb{C}$. Limita posloupnosti $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ je definována jako $\lim_{n\to\infty} b_n$, pokud obě limity reálných čísel existují.

13.1 Holomorfní funkce a křivkový integrál

Definice. *Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a zobrazující do $\mathbb{C}$. Komplexní derivací f v z_0 nazýváme komplexní číslo*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pokud tato limita existuje.

Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Funkce $f : G \to C$ se nazývá* holomorfní*, má-li ve všech bodech G komplexní derivaci.*

Poznámka. *Jsou-li f a g holomorfní na G, pak jsou $f + g$ i fg holomorfní na G a f/g je holomorfní na $G \cap \{g \neq 0\}$.*

Definice. *Zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Definujeme křivkový integrál*

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

existuje-li integrál na pravé straně. Tento integrál můžeme značit i $\int_\varphi f(z)dz$.

Věta T 1 (Cauchyho věta pro trojúhélník)**.** *Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a $\Delta \subset G$ je trojúhelník. Pak $\int_{\delta\Delta} f(z)dz = 0$.*

Věta BD 2 (Cauchy)**.** *Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Nechť $\langle\varphi\rangle \subset G$ je uzavřená křivka taková, že vnitřek $\langle\varphi\rangle \subset G$ (tedy případné "díry"uvnitř G nejsou uvnitř $\langle\varphi\rangle$). Pak $\int_\varphi f(z)dz = 0$.*

Věta L 3 (Cauchyův vzorec)**.** *Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$ a $0 < r < R$. Pro křivku $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z - s} = \begin{cases} f(z) & pro\ |s - z_0| < r \\ 0 & pro\ |s - z_0| > r \end{cases}$$

Věta T 4 (Liouville)**.** *Nechť f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak f je konstantní.*

Věta L 5 (Základní věta algebry)**.** *Každý nekonstantní polynom (s komplexními koeficienty) má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.*

13.2 Rozvoj do Taylorovy a Laurentovy řady

Definice. *Nechť $z_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ pro $z \in \mathbb{C}$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n o středu z_0.*

Věta T 6 (o rozvoji do Taylorovy řady)**.** *Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$. Pak existuje právě jedna mocninná řada s poloměrem konvergence alespoň R, že na $B(z_0, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Navíc platí $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Jako u reálných mocninných řad lze na kruhu konvergence prohazovat $\sum$ a derivaci a důkaz je podobný.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na G, pak na G existují derivace všech řádů $f^{(k)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.*

Definice. *Množina $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá* oblast*, pokud je otevřená a souvislá. Tedy pokud platí*

$$\forall A, B \in G \text{ otevrene v } G, G = A \cup B, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \text{ nebo } B = \emptyset$$

Věta L 7 (o jednoznačnosti holomorfní funkce)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou holomorfní na G. Předpokládejme, že množina*

$$M = \{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v G, neboli existují $z_n \in M$ a $z_0 \in G$ takové, že $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0$. Pak $f = g$ na G.

Definice. *Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, je-li funkce*

$$F(z) = \begin{cases} (z-z_0)^{k+1} f(z) & \text{pro } z \neq z_0 \\ 0 & \text{pro } z = z_0 \end{cases}$$

holomorfní na nějakém okolí bodu z_0. Řekneme, že má pól násobnosti k, je-li $k \in \mathbb{N}$ nejmenší s touto vlastností.

Například funkce $f(z) = 1/z^k$ má v bodě 0 pól násobnosti k.

Definice. *Nechť $M \subset G \subset \mathbb{C}$ je konečná množina. Řekneme, že funkce $f : G \backslash M \to \mathbb{C}$ je* meromorfní *v G, pokud je f holomorfní na $G \backslash M$ a v bodech M má f póly (konečné násobnosti).*

Věta T 8 (o rozovji do Laurentovy řady)**.** *Nehcť f je holomorfní na mezikruží $B(z_0, R) \backslash \overline{B(z_0, r)}$, $0 < r < R$. Pak existují jednoznačně určená čísla $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, že platí*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ pro všechna } z \in B(z_0, R) \backslash \overline{B(z_0, r)}$$

13.3 Reziduová věta a její aplikace

Definice. *Nechť* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *je Laurentova řada funkce* f. Rezuduum *funkce* f *v bodě* z_0 *nazveme koeficient* $a_{(-1)}$ *a značíme ho* $res_{z_0}f$.

Definice. Index bodu z_0 *vzhledem v uzavřené křivce* φ *je definován jako*

$$ind_{\varphi}z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi}\frac{1}{z-z_0}dz$$

Index bodu udává, kolikrát oběhne křivka φ okolo bodu z_0, pokud uvažujeme násobnost a obíhání v opačném směru bereme s opačným znaménkem.

Věta T 9 (Reziduová věta)**.** *Nechť* $G \subset \mathbb{C}$ *je oblast,* f *je meromorfní funkce na* G*,* φ *je křivka a póly* f *neleží na* $\langle\varphi\rangle(\subset G)$*. Pak platí*

$$\int_{\varphi} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\{z: z \text{ je pól } f\}} res_z f int_z f$$

Důkaz. Označme $P = \{z \in G : f(z) = +\infty \text{ resp. } f \text{ má pól v } z\}$. Pro $z_0 \in G$ označme

$$H_{z_0} = \sum_{k=-kz}^{-1} a_k(z-z_0)^k$$

část rozvoje f do Laurentovy řady. Pak

$$F(z) = f(z) - \sum_{z_0\in P} H_{z_0}(z)$$

je F holomorfní na G. Podle Cauchyovy věty $\int_{\varphi} F(z)dz = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} F(z)dz &= \int_{\varphi}\sum_{z_0\in P} H_{z_0}(z)dz \\
&= \sum_{z_0\in P}\sum_{k=-kz}^{-1}\int_{\varphi} a_k(z-z_0)^k dz \\
&= \sum_{z_0\in P} res_{z_0} f \int_{\varphi}\frac{1}{z-z_0}dz \\
&= 2\pi i \sum_{z_0\in P} res_{z_0} f ind_{\varphi} z_0
\end{aligned}$$

□

Pravidla pro výpočet rezidua

1. Je-li h holomorfní na okolí a a g má v a jednoduchý pól, pak

$$res_a(hg) = h(a)res_a(g)$$

2. Jsou-li h, g holomorfní na okolí a a g má v a jednoduchý kořen, pak

$$res_a\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{h(a)}{g\prime(a)}$$

3. Má-li f v a pól násobnosti n, pak lze reziduum spočítat za pomoci derivování řádu $(n-1)$ jako

$$res_a(f) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

Výpočet integrálů za pomoci reziduové věty:

Nechť Q je racionální funkce.

1. $\int_0^{2\pi} Q(\cos(t), \sin(t))dt$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\sin(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\cos(x)dx$
5. $\int_0^{\infty} Q(x)x^{p-1}dx$

14 Metrické prostory II

Definice. Metrickým prostorem *budeme rozumět dvojici* (P, ϱ)*, kde* P *je množina bodů a* $\varrho : P \times P \to \mathbb{R}$ *splňuje*

1. $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ *(symetrie)*
3. $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(x, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Funkce ϱ *nazýváme* metrika.

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků* P *a* $x \in P$*. Řekneme, že* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x (v (P, ϱ))*, pokud* $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$*. Značíme* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, nebo* $x_n \overset{\varrho}{\to} x$*.*

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor v* $K \subset P$*. Řekneme, že* K *je* kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků* K *lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v* K*.*

Věta BD 1 (charakterizace kompaktních množin $\mathbb{R}^n$)**.** *Množina* $K \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Věta L 2 (nabývání extrémů na kompaktu)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $K \subset P$ *je kompaktní. Nechť* $f : K \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Pak* f *nabývá na* K *svého maxima i minima. Speciálně je tedy* f *na* K *omezená.*

14.2 Úplné metrické prostory

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a nechť* $x_n \in P, n \in \mathbb{N}$*, je posloupnost bodů z* P*. Posloupnost* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nazveme* cauchyovskou*, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Posloupnost $\{x_n\}_{ninN}$ *nezveme* konvergentní*, pokud existuje* $x \in P$ *tak, že*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$$

Řekneme, že (P, ϱ) *je* úplný*, pokud je každá cauchzovská poslouopnost konvergentní.*

Věta L 3 (úplnost $\mathbb{R}^n$)**.** *Metrický prostor* $(\mathbb{R}, |.|)$ *je úplný.*

Příklad.

1. *Metrický prostor* $(Q, |.|)$ *není úplný.*
2. *Metrický prostor všech spojitých funkcí* $C([0, 1])$ *s metrikou*

$$\varrho_1(f, g) = (R) \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

není úplný.

3. Metrický prostor všech Lebesqueovsky integrovatelných funkcí $L([0,1])$ *s metrikou*

$$\varrho(f,g) = (L)\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

je úplný

Věta T 4 (úplnost spojitých funkcí)**.** *Metrický prostor spojitých funkcí* $(C([0,1]),\varrho)$ *se supremovou metrikou*

$$\varrho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

je úplný

Věta T 5 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je úplný metrický prostor a* $K < 1$*. Nechť* $T : P \to P$ *je zobrazení takové, že*

$$\varrho(Tx,Ty) \le K\varrho(x,y) \quad \forall x,y \in P$$

Pak existuje právě jeden bod $x_0 \in P$ *tak, že* $T(x_0) = x_0$

Věta T 6 (o zúplnění metrického prostoru)**.** *Nechť* (Q,ϱ) *je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor* (P,σ) *tak, že* $Q \subset P$ *a*

$$\sigma(x,y) = \varrho(x,y) \quad \forall x,y \in Q$$

Věta L 7 (úplnost a uzavřená podmnožina)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je úplný metrický prostor a* $F \subset P$ *je uzavřená podmnožina. Pak je metrický prostor* (F,ϱ) *úplný.*