

Matematická analýza III

Tomáš Krejčí <tomas789@gmail.com>

19. prosince 2012

10 Konvergence posloupností a řad funkcí

10.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:

1. konverguje bodově k f na J , pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, neboli

$$\forall x \in J \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \rightarrow f$ na J .

2. konverguje stejnoměrně k f na J , pokud

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

3. konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Značíme $f_n \rightrightarrows_{loc} f$

Věta L 1 (kritérium stejnoměrné konvergence). Nechť $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in J\} = 0$$

Věta T 2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci). Nechť $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Věta T 3 (Moore-Osgood). Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ splňují

1. $f_n \rightarrow f$ na J ,
2. existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

Pak existují $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a jsou si rovny, neboli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Důsledek. Nechť $f_n \Rightarrow f$ na I a nechť f_n jsou na I spojité. Pak f je spojitá na I .

Věta L 4 (o záměně limity a integrálu). Nechť funkce $f_n \Rightarrow f$ na $[a, b]$ a nechť $f_n \in \mathbb{R}([a, b])$. Pak $f \in \mathbb{R}([a, b])$ a

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n(x) dx$$

Věta T 5 (o záměně limity a derivace). Nechť funkce f_n , $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť:

1. existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje,
2. pro derivace f'_n platí $f'_n \xrightarrow{loc} f'$ na (a, b)

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \xrightarrow{loc} f$ na (a, b) , f má vlastní derivaci a platí $f'_n \xrightarrow{loc} f'$ na (a, b) .

10.2 Stejnomořná konvergence řady funkcí

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na intervalu J , pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J .

Věta L 6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J . Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} u_n \Rightarrow$ na J , pak posloupnost funkcí $u_n(x) \Rightarrow 0$ na J .

Věta L 7 (Weierstrassovo kritérium). Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J . Pokud pro $a_n := \sup\{|u_n(x)|; x \in J\}$ platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow$ na J .

Věta L 8 (o spojitosti a derivování řad funkcí). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b) .

1. Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{loc} F(x)$ na (a, b) . Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b) .
2. Nechť funkce u_n , $n \in \mathbb{N}$ mají vlastní derivace na intervalu (a, b) a nechť
 - (a) existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje,
 - (b) pro derivace u'_n platí $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n \xrightarrow{loc} F'(x)$ na (a, b)

Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná diferencovatelná a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{loc} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{loc} F'(x)$ na (a, b) .

Vraťme se ke konvergenci obyčejných řad. Následující kritérium bude užitečné v kapitole Fourierovy řady. Existuje i varianta tohoto tvrzení pro stejnoměrnou konvergenci, tu však nebudeme potřebovat.

Věta T 9 (Abel-Dirichletovo kritérium, bez důkazu). *Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené součty, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad : |s_m| = \left| \sum_{i=1}^m a_i \right| < K$$

11 Mocninné řady

Definice. Nehť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n o středu x_0 .

Definice. Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup \left\{ r \in [0, \infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r; x_0 + r] \right\}$$

Věta L 1 (o poloměru konvergence mocninné řady). Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně pro všechna x taková, že $|x - x_0| < R$ a diverguje pro všechna x taková, že $|x - x_0| > R$.

Věta L 2 (výpočet poloměru konvergence). Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ její poloměr konvergence. Pak platí

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Pokud existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Věta L 3. Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$ (je-li $R = \infty$, pak na celém \mathbb{R}).

Věta L 4 (o derivaci mocninné řady). Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ (\mathbb{R} pro $R = \infty$) platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Věta L 5 (o integrování mocninné řady). Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ je také mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C \quad \text{na } (x_0 - R, x_0 + R)$$

Věta T 6 (Abelova). Nehť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nehť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $x_0 = 0$. Označme $t_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n R^n$. Víme, že $\sum a_n R^n$ konverguje, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |t_N| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= -t_N \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + t_{n-1} \left(\frac{x}{R}\right)^n - t_n \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Sečteme od N do $N+k$

$$\sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n = \left[\sum_{n=N}^{N+k} -t_n \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) \right] + t_{N-1} \left(\frac{x}{R}\right)^N - t_{N+k} \left(\frac{x}{R}\right)^{N+k+1}$$

Protože $x \in [0, R]$, tak $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1]$. Dále platí $\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n \right| &\leq \sum_{n=N}^{N+k} |t_n| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + |t_{N-1}| + |t_{N+k}| \\
&\leq \epsilon \sum_{n=N}^{N+k} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + 2\epsilon \\
&= \epsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^N - \left(\frac{x}{R}\right)^{N+k+1} \right) + 2\epsilon \\
&\leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

Z BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řady dostaneme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$ na $[0, R]$ Z MO věty dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow R_-} \sum_{n=0}^N a_n R^n &= \lim_{r \rightarrow R_-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n R^n \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow R_-} \sum_{n=0}^N a_n R^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \\
\lim_{r \rightarrow R_-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n R^n &= \lim_{r \rightarrow R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n
\end{aligned}$$

□

Příklad. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$

Řešení. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} x^{3n-2}$. To je mocninná řada poloměrem konvergence $R = 1$. Podle Laibnitze $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ konverguje.

Tedy podle Abelovy věty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Dle věty o derivaci mocninné řady máme $\forall x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} (3n-2) x^{3n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^3)^{n-1} = \frac{1}{1+x^3}$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \dots = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$0 = f(0) = \frac{1}{3}0 - \frac{1}{6}0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

□

12 Fourierovy řady

Definice. Necht' $a_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $b_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ pro $x \in \mathbb{R}$ nazveme trigonometrickou řadou. Pro dané n je $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ trigonometrický polynom stupně n . $\mathcal{P}_{2\pi}$ značí množinu všech 2π -periodických funkcí majících Riemannův integrál na $[0, 2\pi]$

Cílem je danou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ rozvinout do trigonometrické řady a:

1. spočítat a_k, b_k
2. zjistit, zda-li je řada rovna původní funkci

Věta BD 1. Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost reálných čísel. Jestliže buď

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, nebo

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Řešení. Pokud $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sum 0 \leftarrow$ konverguje.

Dále předpokládejme, že $x \neq \pi k$. Označme $a_n = \sin(nx)$, $b_n = \frac{1}{n}$. b_n je monotónní nerostoucí a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Necht' $m \in \mathbb{N}$.

$$\left| \sum_{n=a}^m \sin(nx) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^m e^{inx} \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} \right) \right| \leq \frac{3}{|1 - e^{ix}|}$$

Dle Dirichletova kritéria tato suma konverguje.

□

Věta L 2 (o ortogonalitě trigonometrických funkcí). Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, pak

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \pi \text{ (pro } n = m), 0 \text{ (pro } n \neq m) \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \pi \text{ (pro } n \neq m), 0 \text{ (pro } n = m) \end{aligned}$$

Poznámka proč se věta jmenuje o ortogonalitě trigonometrických funkcí? Vraťme se zpět k lineární algebře. Skalární součin vektorů x a y jsme definovali jako $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^n x_i y_i$. Zcela ekvivalentně byl zaveden skalární součet funkcí f a g jako $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$. O vektorech řekneme, že jsou na sebe kolmé (ortogonální), pokud je jejich skalární součin roven nule. Nejinak je tomu i u skalárního součinu funkcí.

Poznámka 2 Skalární součin funkcí se nazývá Hilbertovy prostory

Důkaz.

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cos((n-m)x) - \frac{1}{2} \cos((n+m)x) \right] dx =$$

Pro $n \neq m$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\sin((n-m)x)}{n-m} \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{2} \frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Pro $n = m$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 0 + (2.\text{clen stejne}) = \pi$$

Zbylé rovnosti analogicky. □

Opakování (Vlastnosti Reimanovsky integrovatelných funkcí).

1. $f \in R((a, b)) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ dělení $(a, b) : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$
2. $f \in R((a, b))$ a $f \in R((b, c)) \Leftrightarrow f \in R((a, c))$ pro $a < b < c$
3. f je spojitá na $[a, b] \Rightarrow f \in R((a, b))$
4. f je spojitá na (a, b) a omezená na $[a, b] \Rightarrow f \in R((a, b))$
5. $f, g \in R((a, b)) \Rightarrow f \pm g, f * g \in R((a, b))$

Věta L 3 (Fourierovy vzorce). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, nechť navíc řada napravo konverguje stejnoměrně. Pak

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \{1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

Důkaz. Idea důkazu je, že identitu pro $f(x)$ přenásobíme $\cos(kx)$ resp. $\sin(kx)$ a přintegrujeme přes $[0, 2\pi]$ a díky větě "Věta L 2" (! odpovídá značení na přednášce, nikoliv v tomto skriptu) mnoho členů vypadne.

Opakování. $f_n \Rightarrow f$ na $(a, b) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Pozorování. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) \sin(lx) + b_k \sin(kx) \sin(lx))$ konverguje stejnoměrně.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(lx) dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin(lx) + \sum (a_k \cos(kx) \sin(lx) + b_k \sin(kx) \sin(lx)) \right] dx =$$

$$b_k \int_0^{2\pi} \sin^2(lx) dx = b_k \pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(lx) dx$$

podobně přenásobím funkcí $\sin(lx)$ dostanu vzorec pro a_k pro $k \in \mathbb{N}$.

Přenásobím funkcí $\cos(0x) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} 1 * f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + 0 + 0 + \dots + 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) dx$$

□

Definice. *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak definujeme čísla*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, & k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

a nazveme je Fourierovými koeficienty funkce f a

$$aF_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

nazveme Fourierovou řadou funkce f .

Poznámka.

- díky 2π -periodicitě lze funkci integrovat přes libovolný interval délky 2π (velmi často $\int_{-\pi}^{\pi}$)
- Fourierovy řady lze zavést i pro funkce s periodou l , pak mají vzorce tvar

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \\ a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) dx \\ b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

- někdy se pracuje s rozvoji vůči jinému systému než je trn trigonometrický
- je-li f lichá, pak platí $\forall k : a_k = 0$

- je-li f sudá, pak platí $\forall k : b_k = 0$
- opecně neplatí $F_f = f$

Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady na $(-\pi, \pi)$.

Funkce f je sudá $\Rightarrow \forall k b_k = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2 \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 - 0 - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \right) = \frac{4}{k^2 \pi} \left(\left[x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 * \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2 \pi} (\pi \cos(k\pi) - 0 - 0) = \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{4}{k^2} (-1)^k \end{aligned}$$

$$F_f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx)$$

Definice. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Pak Dirichletovým jádrem nazveme funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx)$$

Důsledek. 1. D_n je spojitá funkce, sudá, 2π -periodická, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi$

3. $D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Důkaz. 1. č

□

Věta L 4 (vlastnosti Dirichletova jádra). Pro Dirichletovo jádro D_n platí

1. D_n je spojitá, sudá, 2π -periodická funkce

2. $\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) dx = \pi$

3. $D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi\}$

Věta L 5 (částečné součty Fourierovy řady). Necht' $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a F_f je Fourierova řada pro f . Potom pro částečné součty $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) D_n(y) dy$$

Věta T 6 (Riemann-Lebesgueovo lemma). *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f \in R([a, b])$. Potom*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0 \text{ a } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0$$

Speciálně pro Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ platí $a_k \rightarrow 0$ a $b_k \rightarrow 0$.

Věta T 7 (Diniho kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+) = \lim_{y \rightarrow x+} f(y)$ a $f(x-) = \lim_{y \rightarrow x-} f(y)$ a nechť existují vlastní limity*

$$\lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x+)}{y - x} \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow x-} \frac{f(y) - f(x-)}{y - x}$$

Potom Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k hodnotě $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Důsledek. *Nechť $x \in \mathbb{R}$ a nechť pro $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ existuje $f'(x)$. Potom $f(x) = F_f(x)$.*

Věta T 8 (Jordan-Dirichletovo kritérium - bez důkazu). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je po částech monotónní. Tedy nechť existuje konečně mnoho bodů $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_m = 2\pi$ tak, že f je monotónní na (a_i, a_{i+1}) pro $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Potom Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k hodnotě $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

13 Základy komplexní analýzy

Připomenutí vlastností \mathbb{C} a operací $+$ a \times na \mathbb{C} . Limita posloupnosti $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ je definována jako $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, pokud obě limity reálných čísel existují.

13.1 Holomorfní funkce a křivkový integrál

Definice. Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a zobrazující do \mathbb{C} . Komplexní derivací f v z_0 nazýváme komplexní číslo

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pokud tato limita existuje.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Funkce $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá holomorfní, má-li ve všech bodech G komplexní derivaci.

Poznámka. Jsou-li f a g holomorfní na G , pak jsou $f + g$ i fg holomorfní na G a f/g je holomorfní na $G \cap \{g \neq 0\}$.

Definice. Zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě zobrazení. Definujeme křivkový integrál

$$\int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

existuje-li integrál na pravé straně. Tento integrál můžeme značit i $\int_{\varphi} f(z) dz$.

Věta T 1 (Cauchyho věta pro trojúhelník). Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a $\Delta \subset G$ je trojúhelník. Pak $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$.

Věta BD 2 (Cauchy). Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Nechť $\langle \varphi \rangle \subset G$ je uzavřená křivka taková, že vnitřek $\langle \varphi \rangle \subset G$ (tedy případné "díry" uvnitř G nejsou uvnitř $\langle \varphi \rangle$). Pak $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$.

Věta L 3 (Cauchyův vzorec). Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$ a $0 < r < R$. Pro křivku $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - s} = \begin{cases} f(s) & \text{pro } |s - z_0| < r \\ 0 & \text{pro } |s - z_0| > r \end{cases}$$

Věta T 4 (Liouville). Nechť f je holomorfní a omezená na \mathbb{C} . Pak f je konstantní.

Věta L 5 (Základní věta algebry). Každý nekonstantní polynom (s komplexními koeficienty) má v \mathbb{C} alespoň jeden kořen.

13.2 Rozvoj do Taylorovy a Laurentovy řady

Definice. Nechť $z_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pro $z \in \mathbb{C}$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n o středu z_0 .

Věta T 6 (o rozvoji do Taylorovy řady). *Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$. Pak existuje právě jedna mocninná řada s poloměrem konvergence alespoň R , že na $B(z_0, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Navíc platí $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Jako u reálných mocninných řad lze na kruhu konvergence prohazovat \sum a derivaci a důkaz je podobný.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na G , pak na G existují derivace všech řádů $f^{(k)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.*

Definice. *Množina $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá oblast, pokud je otevřená a souvislá. Tedy pokud platí*

$$\forall A, B \in G \text{ otevřené v } G, G = A \cup B, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \text{ nebo } B = \emptyset$$

Věta L 7 (o jednoznačnosti holomorfní funkce). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou holomorfní na G . Předpokládejme, že množina*

$$M = \{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v G , neboli existují $z_n \in M$ a $z_0 \in G$ takové, že $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$. Pak $f = g$ na G .

Definice. *Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, je-li funkce*

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{k+1} f(z) & \text{pro } z \neq z_0 \\ 0 & \text{pro } z = z_0 \end{cases}$$

holomorfní na nějakém okolí bodu z_0 . Řekneme, že má pól násobnosti k , je-li $k \in \mathbb{N}$ nejmenší s touto vlastností.

Například funkce $f(z) = 1/z^k$ má v bodě 0 pól násobnosti k .

Definice. *Nechť $M \subset G \subset \mathbb{C}$ je konečná množina. Řekneme, že funkce $f : G \setminus M \rightarrow \mathbb{C}$ je meromorfní v G , pokud je f holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech M má f póly (konečné násobnosti).*

Věta T 8 (o rozvoji do Laurentovy řady). *Nechť f je holomorfní na mezikruží $B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$, $0 < r < R$. Pak existují jednoznačně určená čísla $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, že platí*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ pro všechna } z \in B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$$

13.3 Reziduová věta a její aplikace

Definice. *Nechť $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je Laurentova řada funkce f . Reziduum funkce f v bodě z_0 nazveme koeficient $a_{(-1)}$ a značíme ho $\text{res}_{z_0} f$.*

Definice. *Index bodu z_0 vzhledem v uzavřené křivce φ je definován jako*

$$\text{ind}_{\varphi} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Index bodu udává, kolikrát oběhne křivka φ okolo bodu z_0 , pokud uvažujeme násobnost a obíhání v opačném směru bereme s opačným znaménkem.

Věta T 9 (Reziduová věta). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, f je meromorfní funkce na G , φ je křivka a póly f neleží na $\langle \varphi \rangle (\subset G)$. Pak platí*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\{z: z \text{ je pól } f\}} \text{res}_z f \text{int}_z f$$

Důkaz. Označme $P = \{z \in G : f(z) = +\infty \text{ resp. } f \text{ má pól v } z\}$. Pro $z_0 \in G$ označme

$$H_{z_0} = \sum_{k=-kz}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

část rozvoje f do Laurentovy řady. Pak

$$F(z) = f(z) - \sum_{z_0 \in P} H_{z_0}(z)$$

je F holomorfní na G . Podle Cauchyovy věty $\int_{\varphi} F(z) dz = 0$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F(z) dz &= \int_{\varphi} \sum_{z_0 \in P} H_{z_0}(z) dz \\ &= \sum_{z_0 \in P} \sum_{k=-kz}^{-1} \int_{\varphi} a_k (z - z_0)^k dz \\ &= \sum_{z_0 \in P} \text{res}_{z_0} f \int_{\varphi} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i \sum_{z_0 \in P} \text{res}_{z_0} f \text{ind}_{\varphi} z_0 \end{aligned}$$

□