X. Konvergence posloupností a řad funkcí

7.1. Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbf{R}$ a $f_n : J \to \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:

- *konverguje bodově* k f na J, pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli
$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \to f$ na J.
- *konverguje stenoměrně* k f na J, pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J.
- *konverguje lokálně stejnoměrně*, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na J.

Věta L 1 (kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť* $f, f_n : J \to \mathbf{R}$. *Pak*
$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in J\} = 0.$$

Věta T 2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť* $f, f_n : J \to \mathbf{R}$. *Pak*
$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Věta T 3 (Moore-Osgood)**.** *Nechť* x_0 *je krajní bod intervalu* J *(může být i* $\pm\infty$*). Nechť* $f, f_n : J \to \mathbf{R}$ *splňují*

(*i*) $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,

(*ii*) *existuje* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny, neboli*
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důsledek: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Věta L 4 (o záměně limity a integrálu)**.** *Nechť funkce* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a, b]$ *a nechť* $f_n \in R([a, b])$. *Pak* $f \in R([a, b])$ *a*
$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} (R) \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Věta T 5 (o záměně limity a derivace)**.** *Nechť funkce* f_n, $n \in \mathbf{N}$, *mají vlastní derivaci na intervalu* (a, b) *a nechť*

(*i*) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *tak, že* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* ,

(*ii*) *pro derivace* f_n' *platí* $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ *na* (a, b).

Potom existuje funkce f *tak, že* $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* (a, b), f *má vlastní derivaci a platí* $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f'$ *na* (a, b).

7.1. Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje *stejnoměrně* (popřípadě *lokálně stejnoměrně*) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta L 6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.*

Věta L 7 (Weirstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud pro*

$$a_n := \sup\{|u_n(x)| : \ x \in J\} \text{ platí, že číselná řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J.

Věta L 8 (o spojitosti a derivování řad funkcí)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b).*

a) Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na (a, b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b).
b) Nechť funkce u_n, $n \in \mathbf{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

$$(i) \text{ existuje } x_0 \in (a, b) \text{ tak, že } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ konverguje },$$

$$(ii) \text{ pro derivace } u_n' \text{ platí } \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } (a, b).$$

Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná a diferencovatelná a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a, b).

Vraťme se ke konvergenci obyčejných řad. Následující kritérium bude užitečné v kapitole Fourierovy řady. Existuje i varianta tohoto tvrzení pro stejnoměrnou konvergenci, tu však nebudeme potřebovat.

Věta T 9 (Abel-Dirichletovo kritérium - bez důkazu)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.*

$$\text{(A) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní,}$$

$$\text{(D) } \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0 \ \forall m \in \mathbf{N} : \quad |s_m| = \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i\Big| < K.$$