Matematická analýza III

Tomáš Krejčí <tomas789@gmail.com>

30. prosince 2012

10 Konvergence posloupností a řad funkcí

10.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme $f : J \to \mathbb{R}$ a $f_n : J \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:*

1. konverguje bodově *k f na J, pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli*

$$\forall x \in J \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \to f$ na J.

2. konverguje stejnoměrně *k f na J, pokud*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

3. konverguje lokálně stejnoměrně*, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$*

Věta L 1 (kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$ pak*

$$f_n \rightrightarrows f na J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in J\} = 0$$

Důkaz.

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leq \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in J\} = 0$$

□

Věta T 2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $f_n, f : J \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f na J \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Důkaz. "$\Rightarrow$"Nechť $\epsilon > 0$. Zvolme n_0 z def. $f_n \rightrightarrows f$. Nyní

$$\forall x \in J \exists m, n \geq n_0 |f_n(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon$$

"$\Leftarrow$"Nechť $x \in J$ je pevné. Platí

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Tedy posloupnost $f_n(x)_{n=1}^{\infty}$ splňuje BC podmínku pro konvergenci posloupnosti. Teda existuje její limita, zn.: $f(x)$. Víme

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Provedme $lim_{n \to \infty}$, dostaneme:

$$\forall \epsilon > 0 \to n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

□

Věta T 3 (Moore-Osgood)**.** *Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n : J \to \mathbb{R}$ splňují*

1. $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,
2. *existuje* $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$

Pak existují $\lim_{n \to \infty} a_n$ *a* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny, neboli:*

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Důkaz. Víme, že $f_n \rightrightarrows$, tedy f_n splňuje BC podmínku pro stejnoměrnou konvergenci:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Provedme $\lim_{x \to x_0}$, dostávame

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \epsilon$$

Tedy platí BC podmínka pro posloupnosť a_n, tedy existuje $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ Nechť $\epsilon > 0$.

1. Z $\lim a_n = a$, $\exists n_1 \forall n \geq n_1 |a - a_n| < \epsilon$
2. Z $f_n \rightrightarrows f$, $\exists n_2 \forall n \geq n_2 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Voľme $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ pevné. Z $lim_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$ plyne

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, \delta) \text{ na J}, |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \epsilon$$

k zadanému ϵ jsem našel $\delta > 0$, že $\forall x \in B(x_0, \delta)$ na J.

$$|a - f(x)| \leq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon \Rightarrow a = lim_{x \to x_0} f(x)$$

□

Důsledek. *Nechť* $f_n \rightrightarrows f$ *na* I *a nechť* f_n *jsou na* I *spojité. Pak* f *je spojitá na* I*.*

Důkaz. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{MO} = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ □

Věta L 4 (o záměně limity a integrálu)**.** *Nechť funkce* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *a nechť* $f_n \in \mathbb{R}([a,b])$*. Pak* $f \in \mathbb{R}([a,b])$ *a*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n(x)dx$$

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$. Z $f_n \rightrightarrows f \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon$$

Nechť $n \geq n_0$ je pevné. Víme, že

$$f_n(x) \in \mathbb{R}([a,b]), \text{ tedy } \exists D, \text{ že } S(f_n, D) - s(f_n, D) < \epsilon$$

Nyní

$$S(f,D) - s(f,D) \leq S(f_n + \epsilon, D) - s(f_n - \epsilon, D) \leq S(f_n, D) + S(\epsilon, D) - s(f_n, D) - s(\epsilon, D) \leq$$
$$\leq S(f_n, D) - s(f_n, D) + \epsilon(b-a) - (-\epsilon)(b-a) <$$
$$< \epsilon + 2\epsilon(b-a)$$

□

Věta T 5 (o záměně limity a derivace)**.** *Nechť funkce* f_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, mají vlastní derivaci na intervalu* (a,b) *a nechť:*

1. *existuje* $x_0 \in (a,b)$ *tak, že* $\{f_n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje,*

2. *pro derivace* f'_n *platí* $f'_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)

Potom existuje funkce f *tak, že* $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na* (a,b)*,* f *má vlastní derivaci a platí* $f'_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f'$ *na* (a,b)*.*

Důkaz. Z bodu 2, víme, že f'_n splňuje BC podmínku ★

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in J : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \epsilon$$

Chceme f_n splňuje BC podmínku. K $\epsilon > 0$ volme n_0 jako v ★ . Pak:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =$$

Z věty o střední hodnote na $F = f_n - f_m$:

$$= |(f'_n(\xi) - f'_m(\xi) - (x - x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \bigstar \leq \epsilon(b-a) + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq$$
$$\leq \varepsilon(b - a + 1)$$

Teda $\exists f, f_n \rightrightarrows f na(a,b)$. Nyní chceme $\exists f'(x)$. To bude plynout z MO pro posloupnost $\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$.
Predpoklady MO:

1. Overíme BC podmínku pro φ_n. K $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako v $\bigstar$. Volme $m, n \geq n_0$ a h libovolné $|x+h| \in (a,b)$.

$$|\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| = |\frac{f_n(x+h) - f_m(x+h) - (f_n(x) - f_m(x))}{h}| =$$

   Dle věty o strední hodnotě

$$= \frac{(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)).h}{h} \leq \bigstar \leq \varepsilon$$

   Jsou splneny predpodklady MO. Teda můžu použít její záver.

$$\exists \lim_{x\to 0} lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\|$$

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

   OK.

2.
$$\exists \lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = f_n'(x)$$

   OK.

Tedy existuje $f\prime$ a

$$f_n' \rightrightarrows f'$$

□

10.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice. *Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje* stejnoměrně *(popřípadě* lokálně stejnoměrne*) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.*

Věta L 6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.*

Věta L 7 (Weirstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud pro $a_n := \sup\{|u_n(x)|; x \in J\}$ platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J.*

Věta L 8 (o spojitosti a derivování řad funkcí)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a,b).*

1. *Nechť u_n jsou spojité na (a,b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a,b).*

2. *Nechť funkce u_n, $n \in \mathbb{N}$ mají vlastní derivace na intervalu (a,b) a nechť*

   (a) existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje,

(b) *pro derivace* u_n' *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)

Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná diferencovatelná a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ *na* (a,b).

Vraťme se ke konvergenci obyčejných řad. Následující kritérium bude užitečné v kapitole Fourierovy řady. Existuje i varianta tohoto tvrzení pro stejnoměrnou konvergenci, tu však nebudeme potřebovat.

Věta T 9 (Abel-Dirichletovo kriterium, bez důkazu)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost reálných čísel a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní,*
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené součty, tedy*

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad : |s_m| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| < K$$

11 Mocninné řady

Definice. *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $a_n \in \mathbb{R}$ *pro* $n \in \mathbb{N}_0$. *Řadu funkcí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nazýváme* mocninnou řadou *s koeficienty* a_n *o středu* x_0.

Definice. Poloměrem konvergence *mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nazveme*

$$R = \sup\left\{ r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konverguje } \forall x \in [x_0 - r; x_0 + r] \right\}$$

Věta L 1 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,\infty]$ *její poloměr konvergence. Pak řada konverguje obsolutně pro všechna* x *taková, že* $|x-x_0| < R$ *a diverguje pro všechna* x *taková, že* $|x-x_0| > R$.

Věta L 2 (výpočet poloměru konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,\infty]$ *její poloměr konvergence. Pak platí*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *pak* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Věta L 3. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *(je-li* $R = \infty$, *pak na celém* $\mathbb{R}$*).*

Věta L 4 (o derivaci mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *(*$\mathbb{R}$ *pro* $R = \infty$*) platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=+}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

Věta L 5 (o integrování mocninné řady)**.** *Nehcť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Pak* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *je také mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Navíc platí*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \quad \text{na } (x_0 - R, x_0 + R)$$

Věta T 6 (Abelova)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Nechť navíc* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje. Potom řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konverguje stejnoměrně na* $[x_0, x_0 + R]$ *a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $x_0 = 0$. Označme $t_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n R^n$. Víme, že $\sum a_n R^n$ konverguje, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |t_N| < \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= -t_N \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + t_{n-1}\left(\frac{x}{R}\right)^n - t_n\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Sečteme od N do $N+k$

$$
\sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n = \left[\sum_{n=N}^{N+k} -t_n \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right)\right] + t_{N-1}\left(\frac{x}{R}\right)^n - t_{N+k}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+k+1}
$$

Protože $x \in [0, R]$, tak $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0,1]$. Dále platí $\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N}^{N+k} a_n x^n\right| &\leq \sum_{n=N}^{N+k} |t_n| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + |t_{N-1}| + |t_{N+k}| \\
&\leq \epsilon \sum_{n=N}^{N+k} |t_n| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) + 2\varepsilon \\
&= \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^N - \left(\frac{x}{R}\right)^{N+k+1}\right) + 2\varepsilon \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Z BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řady dostaneme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, R]$ Z MO věty dostaneme

$$
\lim_{n\to\infty} \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n
$$

$$
\lim_{r\to R_-} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n
$$

□

Příklad. *Sečtěte* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$

Řešení. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} x^{3n-2}$. To je mocninná řada poloměrem konvergence $R = 1$. Podle Laibnitze $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ konverguje.

Tedy podle Abelovy věty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = \lim_{x\to 1_-} f(x)$

Dle věty o derivaci mocninné řady máme $\forall x \in (-1, 1)$

$$
f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}(3n-2)x^{3n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-x^3\right)^{n-1} = \frac{1}{1+x^3}
$$

$$
f(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \ldots = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
$$

$$0 = f(0) = \frac{1}{3}0 - \frac{1}{6}0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} &= \lim_{x \to 1_-} \left(\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$\square$

12 Fourierovy řady

Definice. *Nechť* $a_k \in \mathbb{R}$ *pro* $k \in \mathbb{N}_0$ *a* $b_k \in \mathbb{R}$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Řadu* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ *pro* $x \in \mathbb{R}$ *nazveme* trigoniometrickou řadou. *Pro dané* n *je* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ trigoniometrický polynom stupně n. $\mathcal{P}_{2\pi}$ *značí množinu všech* 2π*-periodických funkcí majících Reimannův integrál na* $[0, 2\pi]$

Cílem je danou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ rozvinout do trigoniometrické řady a:

1. spočítat a_k, b_k
2. zjistit, zda-li je řada rovna původní funkci

Věta BD 1. *Nechť* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost reálných čísel a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost reálných čísel. Jestliže buď*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, nebo*

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty*

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Příklad. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Řešení. Pokud $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sum 0 \leftarrow$ konverguje.

Dále předpokládejme, že $x \neq \pi k$. Označme $a_n = \sin(nx)$, $b_n = \frac{1}{n}$. b_n je monotonní nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Nechť $m \in \mathbb{N}$.

$$\left| \sum_{n=a}^{m} \sin(nx) \right| = \left| Im \left(\sum_{n=0}^{m} e^{inx} \right) \right| = \left| Im \left(\frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} \right) \right| \leq \frac{3}{|1 - e^{ix}|}$$

Dle Dirichletova kriteria tato suma konverguje.

□

Věta L 2 (o ortogonalitě trigoniometrických funkcí)**.** *Nechť* $m, n \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx &= \pi \textit{ (pro } n = m\textit{)}, 0 \textit{ (pro } n \neq m\textit{)} \\
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx &= \pi \textit{ (pro } n \neq m\textit{)}, 0 \textit{ (pro } n = m\textit{)}
\end{aligned}$$

Poznámka proč se věta jmenuje o ortogonalitě trigoniometrických funkcí? Vraťme se zpět k lineární algebře. Skalární součin vektorů x a y jsme definovali jako $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$. Zcela ekvivalentně byl zaveden skalární součit funkcí f a g jako $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$. O vektorech řekneme, že jsou na sebe kolmé (ortogonální), pokud je jejich skalární součin roven nule. Nejinak je tomu i u skalárního součinu funkcí.

Poznámka 2 Skalární součin funkcí se nazývá Hilbertovy prostory

Důkaz.

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos((n-m)x) - \frac{1}{2}((n+m)x)\right] =$$

Pro $n \neq m$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{2}\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pro $n = m$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos 0 + (2.\text{ člen stejně}) = \pi$$

Zbylé rovnosti analogicky. □

Opakování (Vlastnosti Reimanovsky integrovantelných funkcí)**.**

1. $f \in R((a,b)) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ *dělení* (a,b) : $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$
2. $f \in R((a,b))$ *a* $f \in R((b,c)) \Leftrightarrow f \in R((a,c))$ *pro* $a < b < c$
3. f *je spojitá na* $[a,b] \Rightarrow f \in R((a,b))$
4. f *je spojitá na* (a,b) *a omezená na* $[a,b] \Rightarrow f \in R((a,b))$
5. $f, g \in R((a,b)) \Rightarrow f \pm g, f * g \in R((a,b))$

Věta L 3 (Fourierovy vzorce)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a nechť* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$, *nechť navíc řada napravo konverguje stejnoměrně. Pak*

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k \in \{0,1,2,\ldots\}\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k \in \{1,2,\ldots\}\end{aligned}$$

Důkaz. Idea důkazu je, že identitu pro $f(x)$ přenásobíme $\cos(kx)$ resp. $\sin(kx)$ a přeintegrujeme přes $[0, 2\pi]$ a díky větě "Věta L 2"(! odpovídá značení na přednášce, nikoliv v tomto skriptu) mnoho členů vypadne.

Opakování. $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(a,b) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Pozorování. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)\sin(lx) + b_k\sin(kx)\sin(lx))$ *konverguje stejnoměrně.*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2}\sin(lx) + \sum (a_k\cos(kx)\sin(lx) + b_k\sin(kx)\sin(lx))\right] dx =$$

$$b_k \int_0^{2\pi} \sin^2(lx)dx = b_k\pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx$$

podobně přenásobím funkcí $\sin(lx)$ dostanu vzorec pro a_k pro $k \in \mathbb{N}$.
Přenásobím funkcí $\cos(0x) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} 1 * f(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + 0 + 0 + \ldots + 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(0x)dx$$

$\square$

Definice. *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak definujeme čísla*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k = 0, 1, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

a nazveme je Fourierovými koeficienty *funkce f a*

$$aF_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

nazveme Fourierovou řadou funkce f.

Poznámka.

- *díky 2π-periodicitě lze funkci integrovat přes libovolný interval délky 2π (velmi často $\int_{-\pi}^{\pi}$)*
- *Fourierovy řady lze zavést i pro funkce s periodou l, pak mají vzorce tvar*

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \\ a_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)dx \\ b_k &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)dx \end{aligned}$$

- *někdy se pracuje s rozvoji vůči jinému systému než je trn trigoniometrický*
- *je-li f lichá, pak platí $\forall k : a_k = 0$*

- *je-li f sudá, pak platí $\forall k : b_k = 0$*
- *opecně neplatí $F_f = f$*

Příklad. *Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady na $(-\pi, \pi)$.*

Funkce f je sudá $\Rightarrow \forall k b_k = 0$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(kx)}{k}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 - 0 - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx\right) = \frac{4}{k^2\pi}\left(\left[x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 * \frac{\cos(kx)}{k}dx\right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi}\left(\pi\cos(k\pi) - 0 - 0\right) = \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

$$F_f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx)$$

Definice. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak* Dirichletovým jádrem *nazveme funkci*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)$$

Důsledek. *1. D_n je spojitá funkce, sudá, 2π-periodická, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$*

2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \pi$

3. $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Důkaz. 1. č

□

Věta L 4 (vlastnosti Dirichletova jádra). *Pro Dirichletovo jádro D_n platí*

1. D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická funkce

2. $\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)dx = \pi$

3. $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$

Důkaz. 1. plyne bezprostředně z definice

2.
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

3.

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{1}{2} + Re\left(e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix}\right) = \frac{1}{2} + Re\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \frac{1}{2} + Re\left(\frac{e^{ix}\left(1-e^{inx}\right)\left(1-e^{-ix}\right)}{\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-ix}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2} + Re\left(\frac{e^{ix}\left(1-e{-}ix - einx + ei(n-1)x\right)}{2-e^{ix}-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{1}{2} + Re\left(\frac{e^{ix}-1-e^{i(n+1)x}+e^{inx}}{2-2\cos(x)}\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\cos(x)-1-\cos(n+1)x+\cos(x)}{2-2\cos(x)}\\
&= \frac{\cos(mx)-\cos(n+1)x}{2-2\cos(x)}\\
&= \frac{-2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Pozn.: Důkaz třetí rovnosti je až na znaménko, na přednášce nevyšel. Snad se má použít jiný součtový vzorec goniometrických funkcí (?). Pokud někdo víte, jak to má vyjít, dejte mi prosím vědět. $\square$

Věta L 5 (částečné součty Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a F_f je Fourierova řada pro f. Potom pro částečné součty $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ platí*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(x+z)D_n(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)D_n(y)dy$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(ky)\sin(kx) + \sin(ky)\cos(kx)\right)f(y)dy\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos(k(y-x))\right)f(y)dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} D_n(y-x)f(y)dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt
\end{aligned}$$

substituce za $t - x = y$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)f(x+y)dy$$

Dále platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$$

Integrál $\int_{-\pi}^{0}$ spočteme substitucí $y \to -y$ (korektně bysme měli použít pomocnou proměnnou). $D_n(y)$ je sudá funkce, proto $f(x+y) \to f(x-y)$ □

Věta T 6 (Riemann-Lebesqueovo lemma)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in R([a,b])$. *Potom*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(tx)dx = 0 \text{a} \lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(tx)dx = 0$$

Speciálně pro Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *platí* $a_k \to 0$ *a* $b_k \to 0$.

Důkaz. Nechť $[c,d] \subset [a,b]$ a $f(x) = \chi_{[c,d]}(x)$.

$$\chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c,d] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b \chi_{[c,d]}(x)\cos(tx)dx = \lim_{t\to\infty} \int_c^d \cos(tx)dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{\sin(tx)}{t}\right]_c^d = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin(dt)-\sin(ct)}{t} = 0$$

Tvrzení platí pro $\chi_{[c,d]}(x)$, tedy platí pro $\alpha\chi_{[c,d]}(x) \Rightarrow$ pro pevné dělení $D = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ a α_i platí tvrzení pro

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

Nechť nyní $f \in R([a,b])$ a $\varepsilon > 0$. Pak $\exists$ dělení D, že $0 \leq (R)\int_a^b f(x)dy - s(f,D) < \varepsilon$
Označme

$$\alpha_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ a } g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

t. j. $(R)\int_a^b g = s(f,D)$.

Víme $\lim_{t\to\infty} \int_a^b g(x)\cos(tx) = 0$ tedy $\exists t_0\ \forall t \geq t_0 : \left|\int_a^b g(x)\cos(tx)dx\right| < \varepsilon$
Nyní pro $t \geq t_0$

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right| \leq \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\cos(tx)dx\right| + \left|\int_a^b g(x)\cos(tx)dx\right| \leq$$

Poznamenejme $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x)-g(x) \geq 0 : \left|\int F(x)\right| \leq \int |F(x)|$

$$\leq \int_a^b (f(x)-g(x))|\cos(tx)|dx + \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Pro sinus budeme postupovat analogicky □

Věta T 7 (Diniho kriterium)**.** *Nechť* $f \int \mathcal{P}_{2\pi}$ *a* $x \in \mathbb{R}$*. Nechť existují vlastní limity* $f(x+) = \lim_{y \to x+} f(y)$ *a* $f(x-) = \lim_{y \to x-} f(y)$ *a nechť existují vlastní limity*

$$\lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x+)}{y - x} \quad \text{a} \quad \lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x-)}{y - x}$$

Potom Fourierova řada funkce f *konverguje v bodě* x *k hodnotě* $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Důsledek. *Nechť* $x \in \mathbb{R}$ *a nechť pro* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *existuje* $f'(x)$*. Potom* $f(x) = F_f(x)$*.*

Důkaz. Chceme $F_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, tedy $s_n(x) \overset{n\to\infty}{\to}$

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y))\, D_n(y) dy - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(y) dy \\ &\overset{V5, VL4(ii)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+y) - f(x+) + f(x-y) - f(x-))\, D_n(y) dy \\ &\overset{VL4(iii)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\left(\frac{f(x+y) - f(x+) + f(x-y) - f(x-)}{2 \sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)}_{\text{pokud } \in R([0,\pi]),\text{ pak VT6 dokončí důkaz}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) y dy \end{aligned}$$

Chceme $F(y) = \frac{f(x+y)-f(x+)+f(x-y)-f(x-)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \in R([0,\pi])$.
Existuje

$$\lim_{y\to 0} F(y) = \lim_{x \to 0} \frac{y}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \lim_{y \to 0} \left(\frac{f(x+y) - f(x+)}{y} + \frac{f(x-y) - f(x-)}{y} \right) = A \in \mathbb{R}$$

Tvrzení. $h \in R([a,b])$ *spojitá na* $[a,b]$, $0 < \delta \le g \le D$*. Pak* $\frac{h}{g} \in R([a,b])$*.*

Nechť $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [0,\delta] : |F(y) - A| < \varepsilon$
Nyní δ je pevné a tedz dle tvrzení $F(y) \in R([\delta,\pi])$, $g(y) = 2\sin\frac{y}{2}$.
Tedy $\exists \overline{D}$ dělení $[\delta,\pi]$ že $S(F,\overline{D}) - s(f,\overline{D}) < \epsilon$.
Nechť D je dělení $[0,\pi]$ mající interval k $\overline{D}$ a interval k $[0,\delta]$. Pak

$$S(F,D) - s(f,D) = \left(\max_{x\in[0,\delta]} F(x) - \min_{x \in [0,\delta]} F(x) \right) \delta + S(F,\overline{D}) - s(F,\overline{D}) \le 2\varepsilon\delta + \varepsilon \le \varepsilon(2\pi + 1)$$

□

Věta T 8 (Jordan-Dirichletovo kriterium - bez důkazu)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *je po částech monotónní. Tedy nechť existuje konečně mnoho bodů* $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = 2\pi$ *tak, že* f *je monotónní na* (a_i, a_{i+1}) *pro* $i \in \{1, \ldots, m-1\}$*. Potom Fourierova řada funkce* f *konverguje v bodě* x *k hodnotě* $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*.*

13 Základy komplexní analýzy

Připomenutí vlastností $\mathbb{C}$ a operací $+$ a $\times$ na $\mathbb{C}$. Limita posloupnosti $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ je definována jako $\lim_{n\to\infty} b_n$, pokud obě limity reálných čísel existují.

13.1 Holomorfní funkce a křivkový integrál

Definice. *Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a zobrazující do $\mathbb{C}$. Komplexní derivací f v z_0 nazýváme komplexní číslo*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pokud tato limita existuje.

Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Funkce $f : G \to C$ se nazývá* holomorfní*, má-li ve všech bodech G komplexní derivaci.*

Poznámka. *Jsou-li f a g holomorfní na G, pak jsou $f + g$ i fg holomorfní na G a f/g je holomorfní na $G \cap \{g \neq 0\}$.*

Definice. *Zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Definujeme křivkový integrál*

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

existuje-li integrál na pravé straně. Tento integrál můžeme značit i $\int_\varphi f(z)dz$.

Věta T 1 (Cauchyho věta pro trojúhélník)**.** *Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a $\Delta \subset G$ je trojúhelník. Pak $\int_{\delta\Delta} f(z)dz = 0$.*

Důkaz. Sporem : nechť $\int_{\partial\triangle} f = M > 0$. Rozdělíme na čtyři trojúhelníky.

Sečteme $\int$ přes hranice $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3 + \triangle_4$ v opačném směru.

Platí

$$\int_{\partial\triangle_4} f = \int_{\partial\triangle_1} f + \int_{\partial\triangle_2} f + \int_{\partial\triangle_3} f + \int_{\partial\triangle_4} f$$

Tady $\exists\triangle_i : \left|\int_{\partial\triangle_i} f\right| \geq \frac{M}{4}$. Tento trojúhelník opět rozdělíme na čtyři kusy. Dostaneme posloupnost trpjúhelníků $\triangle^K$ tak, že

$$\left|\int_{\partial\triangle^K} f\right| \geq \frac{M}{4^K}$$

a

$$(\text{obvod } \triangle^K) = \frac{\text{obvod } \triangle}{2^K}$$

$\triangle^K$ uzavřené, zanořené do sebe $\Rightarrow$

$$\exists x_0 \in \bigcap_{K=1}^{\infty} \triangle^K$$

(důkaz přes konvergentní Cauchyovskou posloupnost)

Funkce f je diferencovatelná v x_0, tady $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)(z - z_0)$

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z - z_0) = 0$$

$$\left| \int_{\partial \triangle^K} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \triangle^K} \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{\circledast} + \varepsilon(z - z_0)(z - z_0) dz \right|$$

$\circledast$: má primitivní funkci $f(z)z + f'(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}$ a $\partial \triangle_K$ je uzavřená křivka, tedy

$$\int_{\partial \triangle^K} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)] = 0$$

$$\frac{M}{4^K} \leq \left| \int_{\partial \triangle^K} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \triangle^K} \varepsilon(z - z_0)(z - z_0) dz \right| \leq \text{délka } \partial \triangle_K \sup_{z \in \partial \triangle_K} |\varepsilon(z - z_0)| \sup_{z \in \partial \triangle_K} |z - z_0|$$

$$\leq \frac{c}{2^K} \varepsilon_K \frac{c}{2^K} \Rightarrow M \leq c^2 \varepsilon_K \overset{k \to \infty}{\to} 0 \Rightarrow M \leq 0$$

a to je spor. $\square$

Věta BD 2 (Cauchy)**.** *Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Nechť $\langle \varphi \rangle \subset G$ je uzavřená křivka taková, že vnitřek $\langle \varphi \rangle \subset G$ (tedy případné "díry"uvnitř G nejsou uvnitř $\langle \varphi \rangle$). Pak $\int_\varphi f(z)dz = 0$.*

Věta L 3 (Cauchyův vzorec)**.** *Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$ a $0 < r < R$. Pro křivku $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, platí*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - s} = \begin{cases} f(z) & \textit{pro } |s - z_0| < r \\ 0 & \textit{pro } |s - z_0| > r \end{cases}$$

Důkaz. 1. $|s - z_0| > r$

pak $\frac{f(z)}{z-s}$ je holomorfní na $B(z_0, r + \varepsilon)$ dle Cauchyho věty

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z - s} dz = 0$$

2. $|s - z_0| < r$

Definujme funkce

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(s)}{z - s} & \text{pro } z \neq s \\ f'(s) & \text{pro } z = s \end{cases}$$

Pak $F(z)$ je holomorfní na $B(z_0, R) \backslash \{s\}$ a v s spojitá. Dle Poznámky

$$\int_\varphi F(z) dz = 0 = \int_\varphi \frac{f(z)}{z - s} dz - \int_\varphi \frac{f(s)}{z - s} dz$$

$\square$

Věta T 4 (Liouville)**.** *Nechť f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak f je konstantní.*

Důkaz. Nechť $\varphi(t) = Re^{it}$. Podle Věty 3 (Cauchyův vzorec) máme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz \qquad \circledcirc$$

$(\int \quad)' = (\int(\quad)')$. Poznámka p. doc. Hencla: "Vy to udělat nemůžete, já ano, protože jsem absolvoval přednášku z teorie míry a integrálu."

Tedy $|f'(s)| \leq \frac{1}{2\pi}2\pi R \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|\frac{1}{|R-|s||^2} \overset{R\to\infty}{\to} 0$

$$f'(s) = 0 \ \forall s \in \mathbb{C} \Rightarrow f \text{ je konstantní}$$

Nyní stačí ukázat, že mužeme udělat $(\int \quad)' = (\int(\quad)')$.

Připomeň: $F_n \rightrightarrows F$, pak $\int F_n \to \int F$ (pro $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, takpro \mathbb{R}\to\mathbb{C}$)

Lze použít i pro $\int_\varphi F = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int F_n = \int \lim_{n\to\infty} F_n$

$$f'(s) = \lim_{h\to 0}\frac{f(s+h)-f(s)}{h} \overset{\circledcirc}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_\varphi \frac{f(z)}{z-(s+h)}dz - \int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}dz\right) = \lim_{h\to 0}\int_\varphi f(z)\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(s+h)} - \frac{1}{z-s}\right)dz$$

Pohle Heineho stačí

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varphi \underbrace{f(z)\frac{1}{(z-(s+h_n))(z-s)}}_{F_n(z)}dz$$

pro $h_n \to 0$

!!! ZDE CHYBÍ KOUSEK !!!, potom $\lim\int = \int \lim_{n\to\infty} = \int_\varphi f(z)\frac{1}{(z-s)^2}dz$

$F_n(z) \rightrightarrows F(z)$

$$|F_n(z) - F(z)| = |f(z)|\left|\frac{1}{(z-(s+h_n))(z-s)} - \frac{1}{(z-s)^2}\right| \leq \sup_{z\in\langle\varphi\rangle}|f(z)| \max\frac{1}{|z-s|}\frac{|h_n|}{|\underbrace{(z-(s+h_n))}_{\leq\frac{1}{2}(z-s)}(z-s)|}$$

□

Věta L 5 (Základní věta algebry)**.** *Každý nekonstantní polynom (s komplexními koeficienty) má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.*

Důkaz. Sporem. Nechť $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) \neq 0$. Pak $\frac{1}{P(z)}$ he holomorfní funkce na $\mathbb{C}$.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}\right)$$

$\exists R > 0 \ \forall |Z| > R :$

$$\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}\right) > \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{R} - \frac{|a_{n-2}|}{|a_n|}\frac{1}{R^2} - \ldots - \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{R^n}$$

Tedy

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{|a_n z^n|(\ldots)} \leq \frac{2}{|a_n||z^n|}$$

Tedy $\frac{1}{P(z)}$ je omezená holomorfní funkce, tedy dle Věty 4 je $\frac{1}{P(z)}$ konstantní a to je spor. □

13.2 Rozvoj do Taylorovy a Laurentovy řady

Definice. *Nechť $z_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ pro $z \in \mathbb{C}$ nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n o středu z_0.*

Věta T 6 (o rozvoji do Taylorovy řady)**.** *Nechť f je holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$. Pak existuje právě jedna mocninná řada s poloměrem konvergence alespoň R, že na $B(z_0, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Navíc platí $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Jako u reálných mocninných řad lze na kruhu konvergence prohazovat $\sum$ a derivaci a důkaz je podobný.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na G, pak na G existují derivace všech řádů $f^{(k)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.*

Definice. *Množina $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá* oblast*, pokud je otevřená a souvislá. Tedy pokud platí*

$$\forall A, B \in G \text{ } otevrene \text{ } v \text{ } G, G = A \cup B, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \text{ } nebo \text{ } B = \emptyset$$

Věta L 7 (o jednoznačnosti holomorfní funkce)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou holomorfní na G. Předpokládejme, že množina*

$$M = \{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v G, neboli existují $z_n \in M$ a $z_0 \in G$ takové, že $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0$. Pak $f = g$ na G.

Důsledek. $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ *platí $\forall z \in \mathbb{C}$, neboť platí na $\mathbb{R}$ - reálná osa $\to$ úsečka*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $g = 0$ a $z_0 = 0$ (jinak posuneme oblast).
Nechť $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (lze dle věty 6)
Pokud $a_n = 0, \forall n \Rightarrow \checkmark$
Nechť $\exists n_0 : a_n \neq 0$, první takové.

$$f(z) = a_{n_0}z^{n_0} + a_{n_0+1}z^{n_0+1} + \ldots = z^{n_0}\left(a_{n_0} + \underbrace{a_{n_0+1}z + \ldots}_{\lim_{z\to 0}=0 \text{ ze spojitosti}}\right)$$

Tedy k $\varepsilon = \frac{|a_{n_0}|}{2}$ $\exists \delta$ $\forall z : |z| < \delta (a_{n_0+1}z + \ldots) < \frac{|a_{n_0}|}{2}$, tedy $|f(z)| > |z|^{n_0}\frac{|a_{n_0}|}{2}$ spec. $f \neq 0$ na $B(0, \delta)\backslash\{0\}$ spor s 0 je hromadný bod $\{f = g = 0\}$ (1. člen a_{n_0} je nenulový) □

Definice. *Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, je-li funkce*

$$F(z) = \begin{cases} (z-z_0)^{k+1}f(z) & pro \ z \neq z_0 \\ 0 & pro \ z = z_0 \end{cases}$$

holomorfní na nějakém okolí bodu z_0. Řekneme, že má pól násobnosti k, je-li $k \in \mathbb{N}$ nejmenší s touto vlastností.

Například funkce $f(z) = 1/z^k$ má v bodě 0 pól násobnosti k.

Definice. *Nechť $M \subset G \subset \mathbb{C}$ je konečná množina. Řekneme, že funkce $f : G \backslash M \to \mathbb{C}$ je* meromorfní *v G, pokud je f holomorfní na $G \backslash M$ a v bodech M má f póly (konečné násobnosti).*

Věta T 8 (o rozovji do Laurentovy řady)**.** *Nehcť f je holomorfní na mezikruží $B(z_0, R) \backslash \overline{B(z_0, r)}$, $0 < r < R$. Pak existují jednoznačně určená čísla $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, že platí*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ pro všechna } z \in B(z_0, R) \backslash \overline{B(z_0, r)}$$

13.3 Reziduová věta a její aplikace

Definice. *Nechť $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je Laurentova řada funkce f.* Rezuduum *funkce f v bodě z_0 nazveme koeficient $a_{(-1)}$ a značíme ho $res_{z_0} f$.*

Definice. Index bodu *z_0 vzhledem v uzavřené křivce φ je definován jako*

$$ind_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - z_0} dz$$

Index bodu udává, kolikrát oběhne křivka φ okolo bodu z_0, pokud uvažujeme násobnost a obíhání v opačném směru bereme s opačným znaménkem.

Věta T 9 (Reziduová věta)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, f je meromorfní funkce na G, φ je křivka a póly f neleží na $\langle \varphi \rangle (\subset G)$. Pak platí*

$$\int_\varphi f(z) dz = 2\pi i \sum_{\{z : z \text{ je pól } f\}} res_z f int_z f$$

Důkaz. Označme $P = \{z \in G : f(z) = +\infty$ resp. f má pól v $z\}$. Pro $z_0 \in G$ označme

$$H_{z_0} = \sum_{k=-kz}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

část rozvoje f do Laurentovy řady. Pak

$$F(z) = f(z) - \sum_{z_0 \in P} H_{z_0}(z)$$

je F holomorfní na G. Podle Cauchyovy věty $\int_\varphi F(z) dz = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_\varphi F(z) dz &= \int_\varphi \sum_{z_0 \in P} H_{z_0}(z) dz \\
&= \sum_{z_0 \in P} \sum_{k=-kz}^{-1} \int_\varphi a_k (z - z_0)^k dz \\
&= \sum_{z_0 \in P} res_{z_0} f \int_\varphi \frac{1}{z - z_0} dz \\
&= 2\pi i \sum_{z_0 \in P} res_{z_0} f ind_\varphi z_0
\end{aligned}$$

□

Pravidla pro výpočet rezidua

1. Je-li h holomorfní na okolí a a g má v a jednoduchý pól, pak

$$res_a(hg) = h(a)res_a(g)$$

2. Jsou-li h, g holomorfní na okolí a a g má v a jednoduchý kořen, pak

$$res_a\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{h(a)}{g\prime(a)}$$

3. Má-li f v a pól násobnosti n, pak lze reziduum spočítat za pomoci derivování řádu $(n-1)$ jako

$$res_a(f) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

Výpočet integrálů za pomoci reziduové věty:

Nechť Q je racionální funkce.

1. $\int_0^{2\pi} Q(\cos(t), \sin(t))dt$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\sin(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\cos(x)dx$
5. $\int_0^{\infty} Q(x)x^{p-1}dx$

14 Metrické prostory II

Definice. Metrickým prostorem *budeme rozumět dvojici* (P, ϱ)*, kde* P *je množina bodů a* $\varrho : P \times P \to \mathbb{R}$ *splňuje*

1. $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ *(symetrie)*
3. $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(x, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Funkce ϱ *nazýváme* metrika.

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků* P *a* $x \in P$*. Řekneme, že* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x (v (P, ϱ)), *pokud* $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$*. Značíme* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, nebo* $x_n \xrightarrow{\varrho} x$*.*

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor v* $K \subset P$*. Řekneme, že* K *je* kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků* K *lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v* K*.*

Věta BD 1 (charakterizace kompaktních množin $\mathbb{R}^n$)**.** *Množina* $K \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Věta L 2 (nabývání extrémů na kompaktu)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $K \subset P$ *je kompaktní. Nechť* $f : K \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Pak* f *nabývá na* K *svého maxima i minima. Speciálně je tedy* f *na* K *omezená.*

14.2 Úplné metrické prostory

Definice. *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a nechť* $x_n \in P, n \in \mathbb{N}$*, je posloupnost bodů z* P*. Posloupnost* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nazveme* cauchyovskou*, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nezveme* konvergentní*, pokud existuje* $x \in P$ *tak, že*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$$

Řekneme, že (P, ϱ) *je* úplný*, pokud je každá cauchzovská poslouopnost konvergentní.*

Věta L 3 (úplnost $\mathbb{R}^n$)**.** *Metrický prostor* $(\mathbb{R}, |.|)$ *je úplný.*

Příklad. 1. *Metrický prostor* $(Q, |.|)$ *není úplný.*

2. *Metrický prostor všech spojitých funkcí* $C([0, 1])$ *s metrikou*

$$\varrho_1(f, g) = (R) \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

není úplný.

3. Metrický prostor všech Lebesqueovsky integrovatelných funkcí $L([0,1])$ s metrikou

$$\varrho(f,g) = (L)\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

je úplný

Věta T 4 (úplnost spojitých funkcí)**.** *Metrický prostor spojitých funkcí $(C([0,1]),\varrho)$ se supremovou metrikou*

$$\varrho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

je úplný

Věta T 5 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a $K < 1$. Nechť $T : P \to P$ je zobrazení takové, že*

$$\varrho(Tx, Ty) \leq K\varrho(x,y) \quad \forall x, y \in P$$

Pak existuje právě jeden bod $x_0 \in P$ tak, že $T(x_0) = x_0$

Věta T 6 (o zúplnění metrického prostoru)**.** *Nechť (Q,ϱ) je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor (P,σ) tak, že $Q \subset P$ a*

$$\sigma(x,y) = \varrho(x,y) \quad \forall x, y \in Q$$

Věta L 7 (úplnost a uzavřená podmnožina)**.** *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená podmnožina. Pak je metrický prostor (F,ϱ) úplný.*