

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Capítulo 4

Espaços Vetoriais Reais

O conjunto \mathcal{V} , munido das operações \oplus (adição) e \odot (multiplicação por escalar real), é um **espaço vetorial (e.v.) real** se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. \mathcal{V} é **fechado relativamente a** \oplus $X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. \oplus é comutativa $X \oplus Y = Y \oplus X$
3. \oplus é associativa $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de \mathcal{V}) para \oplus $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a \oplus $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. \mathcal{V} é **fechado relativamente a** \odot $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. \odot é distributiva em relação a \oplus $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. \odot é “distributiva” em relação a $+$ $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de \mathbb{R} e \odot) são “associativos” $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o “elemento neutro” para \odot $1 \odot X = X$

1. \mathbb{R}^n munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. \mathbb{R}^+ munido das operações:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ das **matrizes** $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as **funções reais de variável real** munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. Os conjuntos \mathcal{P} de todos os **polinómios** (de qualquer grau) e \mathcal{P}_n dos **polinómios de grau menor ou igual a n** com as operações usuais.

Não é e.v. o conjunto dos polinómios de grau n com as operações usuais.

Proposição: Seja \mathcal{V} um e.v. real. Então

- (a) $0 \odot X = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}, \forall X \in \mathcal{V};$
- (b) $\alpha \odot \mathbf{0}_{\mathcal{V}} = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (c) $\alpha \odot X = \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } X = \mathbf{0}_{\mathcal{V}};$
- (d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus, \forall X \in \mathcal{V}.$

Daqui em diante, escreve-se:

- i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V};$
- ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V};$
- iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}.$

O subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. real \mathcal{V} se, munido das mesmas operações de \mathcal{V} , for ele próprio um e.v. real.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. real \mathcal{V} se e só se

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. \mathcal{S} é **fechado em relação à adição** de \mathcal{V} ;
3. \mathcal{S} é **fechado em relação à multiplicação por escalar** de \mathcal{V} .

Proposição: Se \mathcal{S} é um subespaço de \mathcal{V} , então $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$.

Corolário: Se $0_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{S}$, então \mathcal{S} **não** é um subespaço de \mathcal{V} .

Exemplos:

- \mathcal{V} e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os **subespaços triviais** de \mathcal{V} ;
- $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 ;
- $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ **não** é subespaço de \mathbb{R}^2 ;
- $\mathcal{N}(A)$, o **espaço nulo** da matriz A $m \times n$, é subespaço de \mathbb{R}^n .

Seja $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$. Chama-se **espaço gerado** por K ao conjunto

$$S = \langle K \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \{X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas as **combinações lineares** de X_1, \dots, X_k . Diz-se também que K **gera** S ou é um **conjunto gerador** de S .

Exercício: Confirme que S é um subespaço vetorial de \mathcal{V} .

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a **reta** que passa pela origem e tem vetor director X_1 ;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o **plano** que passa pela origem e que contém X_1 e X_2 .

A matriz $m \times n$ $A = \begin{bmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_m^T \end{bmatrix} = [C_1 \ \dots \ C_n]$ tem linhas $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}^n$

e colunas $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$. Logo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A são os subespaços de \mathbb{R}^n e, respetivamente, \mathbb{R}^m

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \langle L_1, \dots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema: Dados $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \dots, k\}$, com $i \neq j$,

- i. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle$;
- ii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, \alpha X_i, \dots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_i + \beta X_j, \dots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Teorema: Se as matrizes A e B são equivalentes por linhas, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

$\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subseteq \mathcal{V}$ é **linearmente independente (l.i.)** no e.v. real \mathcal{V} se

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Caso contrário, \mathcal{K} é **linearmente dependente (l.d.)** em \mathcal{V} , ou seja,

existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- Dois vetores não nulos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são colineares se e só se são l.d.
- Três vetores não colineares de \mathbb{R}^3 definem um plano se e só se são l.d.

Sejam \mathcal{V} um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{S} = \langle \mathcal{K} \rangle$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então, as duas afirmações são equivalentes:

1. X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$;
2. \mathcal{S} é gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X\}$.

Teorema: \mathcal{K} é um conjunto **linearmente**

- **dependente** \Leftrightarrow existe $X \in \mathcal{K}$ que satisfaz 1. ou 2. do lema anterior;
- **independente** \Leftrightarrow para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Corolário:

- Se \mathcal{K} gera \mathcal{V} e não é l.i., o conjunto obtido retirando um oportuno elemento de \mathcal{K} ainda é gerador de \mathcal{V} .
- Se \mathcal{K} é l.i. e não gera \mathcal{V} , é possível acrescentar um oportuno elemento a \mathcal{K} mantendo a independência linear.

Uma **base de um e.v.** $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um **conjunto (a) l.i. e (b) gerador** de \mathcal{V} .

Nota:

- Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do espaço por ele gerado.

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a **base canónica de \mathbb{R}^n** .
2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m \times n} = \{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ é a **base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$** .
3. A **base canónica** do e.v. \mathcal{P}_n dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$. O e.v. \mathcal{P} de todos os polinómios não admite uma base com um número **finito** de elementos.

Sejam \mathcal{V} um e.v. real e $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- Se \mathcal{K} **gera** \mathcal{V} , então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de **pelo menos** uma maneira.
- Se \mathcal{K} **é l.i.**, então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de **no máximo** uma maneira.

Proposição: Se \mathcal{K} é uma **base** de \mathcal{V} , então cada vetor de \mathcal{V} escreve-se de forma **única** como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} .

Teorema: \mathcal{V} tem uma base de n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ contém r vetores.

i. \mathcal{K} l.i. $\Rightarrow r \leq n$ (ou seja, $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ linearmente dependente)

Neste caso, existe uma base de \mathcal{V} que contém \mathcal{K} .

ii. \mathcal{K} gera $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$ (ou seja, $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera \mathcal{V})

Neste caso, existe um subconjunto de \mathcal{K} que é uma base de \mathcal{V} .

Corolário: Duas bases de \mathcal{V} possuem o mesmo número de elementos.

A **dimensão** de \mathcal{V} , $\dim \mathcal{V}$, é o número de elementos de qualquer base dele.

Exemplos: $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ e $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Teorema: Se $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. \mathcal{K} l.i. $\Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} ; ii. \mathcal{K} gera $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} .

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
sendo A_e e A_r as formas escalonada e, respetivamente, reduzida de A .

Teorema: As linhas não nulas de A_e e A_r formam bases de $\mathcal{L}(A)$.

Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Então, $X \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow A_r X = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Teorema: Os vetores na combinação linear de X (N_2 e N_4) são uma base de $\mathcal{N}(A)$. Assim, $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = \text{n.º de inc. livres do sistema } AX = 0$.

$$B = (a, b, c) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \text{o sistema } AX = B \text{ é possível. Logo, sendo } [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 2 & -4 & -7 & 5 & b \\ 1 & -2 & -3 & 2 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right], B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow a-b+c=0.$$

A **equação** que define $\mathcal{C}(A)$ é um sistema homogêneo e pode aplicar-se o teorema anterior: $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}([1 \ -1 \ 1]) = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Contudo,

Teorema: $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$ e as **colunas de A** que correspondem às **colunas dos pivots** da sua forma escalonada, formam uma **base de $\mathcal{C}(A)$** .

Assim, as **colunas 1 e 3** de A são l.i. e $\mathcal{C}(A) = \langle (1, 2, 1), (-4, -7, -3) \rangle$.

Corolários:

- A característica de uma matriz é o máximo número de linhas (colunas) l.i.
- Uma **matriz quadrada é invertível** se e só se o conjunto das suas **linhas (colunas)** é l.i.

Sendo A uma matriz $m \times 3$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ são subespaços de \mathbb{R}^3 .

Se $\text{car}(A) = 0$ (i.e. A é a matriz nula), então $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ e $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$.

Se $\text{car}(A) = 1$ e (a, b, c) é a linha não nula da forma escalonada de A ,
 $\mathcal{L}(A)$ é a reta que contém $(0, 0, 0)$ e tem vetor diretor (a, b, c) ,
 $\mathcal{N}(A)$ é o plano ortogonal à reta anterior e que contém $(0, 0, 0)$.

Se $\text{car}(A) = 2$ e (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) são as linhas não nulas da forma escalonada de A ,

$\mathcal{L}(A)$ é o plano que contém $(0, 0, 0)$ e tem vetores diretores (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) ,
 $\mathcal{N}(A)$ é a reta ortogonal ao plano anterior e que contém $(0, 0, 0)$.

Se $\text{car}(A) = 3$, então $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$.

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma **base ordenada** de um e.v. \mathcal{V} .

Teorema: Cada vetor $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , ou seja, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes a_1, \dots, a_n dizem-se as **coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} .

O **vetor das coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo: Verifique que, relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nota: Para $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{V}$, \mathcal{S} base ordenada de \mathcal{V} e $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$,

$$[a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_r [Y_r]_{\mathcal{S}}.$$

Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de \mathcal{V} e $X \in \mathcal{V}$.

Qual a relação entre $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$\begin{aligned} [X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &\Rightarrow X = a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n \\ &\Rightarrow [X]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

Teorema: Sejam \mathcal{S} e $\mathcal{T} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$ duas bases ordenadas de \mathcal{V} .

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$[X]_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} [X]_{\mathcal{T}}$$

onde

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{Y}_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [\mathbf{Y}_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}$$

é a **Matriz de mudança de base de \mathcal{T} para \mathcal{S}**

cujas colunas são os vetores das
coordenadas na base \mathcal{S} dos elementos da base \mathcal{T}

Sejam $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$ e $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a(0, 1) + b(1, -1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0, 1)]_{\mathcal{S}} + b[(1, -1)]_{\mathcal{S}}$. Pelo exemplo anterior,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Teorema: Sejam \mathcal{S} e \mathcal{T} duas bases de \mathcal{V} . Então $M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$ é invertível e

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}^{-1} = M_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}.$$

Demonstração: Sejam $M = M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$, $\dim \mathcal{V} = n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $MY = 0$. Existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $Y = [X]_{\mathcal{T}}$. Então

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = MY = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

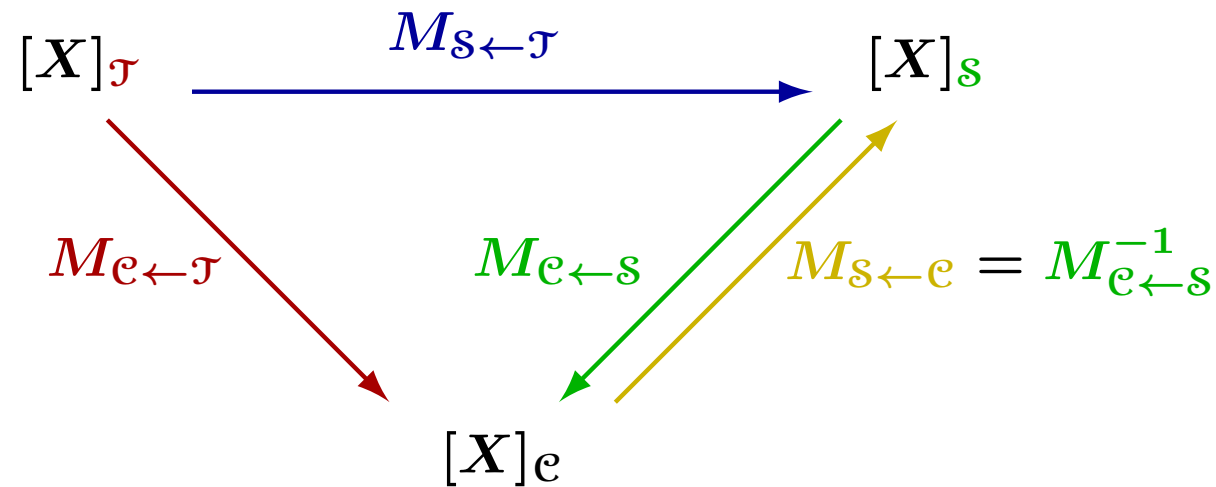
Mostrámos que o sistema homogéneo $MY = 0$ possui apenas a solução trivial, ou seja, que M é invertível. Para cada $X \in \mathcal{V}$, tem-se

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{T}} = M^{-1}[X]_{\mathcal{S}},$$

pelo que $M^{-1} = M_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}$.

\mathcal{S}, \mathcal{T} : bases de \mathbb{R}^n

\mathcal{C} : base canónica de \mathbb{R}^n



$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}}$: matriz cujas **colunas** são os vetores da base \mathcal{S}

$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{T}}$: matriz cujas **colunas** são os vetores da base \mathcal{T}

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}} M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{T}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}}^{-1} M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{T}}$$

Dadas as bases de \mathbb{R}^n $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ e \mathcal{C} canónica,

$$\left[M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} \mid M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{T}} \right] = \left[X_1 \cdots X_n \mid Y_1 \cdots Y_n \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{método de eliminação de Gauss-Jordan}}}{\sim} \left[I_n \mid M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} \right]$$

Exemplo: Para obtermos a matriz $M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$ de mudança da base

$\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$ para a base $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$, temos de calcular

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow (0, 1) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (1, 2),$$

$$[(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow (1, -1) = \beta_1 (1, 1) + \beta_2 (1, 2).$$

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a **mesma matriz dos coeficientes** (cujas **colunas são os vetores de \mathcal{S}**).

Os sistemas anteriores podem-se resolver em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right],$$

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Um conjunto $\{X_1, \dots, X_k\}$ de vetores de \mathbb{R}^n diz-se **ortogonal** se

$$X_i \cdot X_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

e diz-se **ortonormado (o.n.)** se é ortogonal e também se verifica

$$X_i \cdot X_i = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Exemplo: 1. $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$ é ortogonal;

2. $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário: Todo o conjunto o.n. é l.i.

Uma **base ortogonal/o.n.** é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Nota: Todo o conjunto o.n. de n vetores de \mathbb{R}^n é uma **base** de \mathbb{R}^n .

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma **base o.n.** de \mathbb{R}^n . Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é, $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$, sendo $a_i = X \cdot X_i$, $i = 1, \dots, n$.

Exemplo: Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de \mathbb{R}^2

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right).$$

$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n se $Y \cdot Z = 0$ para cada $Z \in \mathcal{W}$.

Teorema: Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e \mathcal{B} uma base de um subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n . Então, Y é ortogonal a \mathcal{W} se e só se Y é ortogonal a cada vetor de \mathcal{B} .

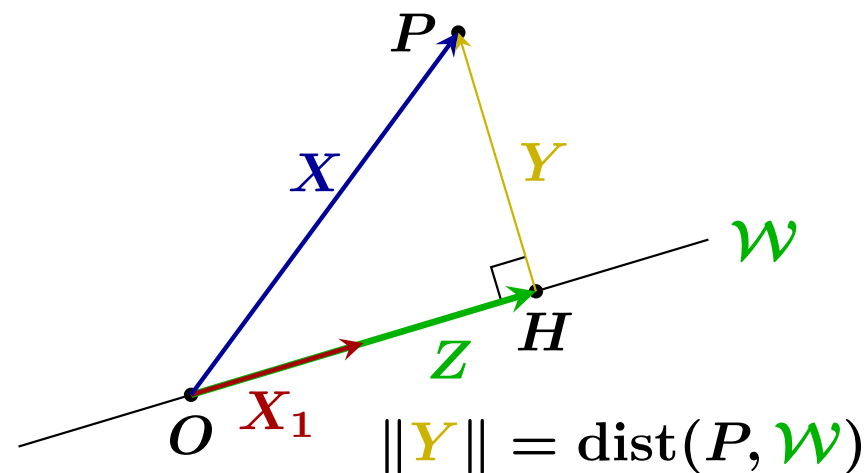
A **projeção ortogonal** de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é o vetor $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X \in \mathcal{W}$ tal que $X = Y + Z$, sendo Y ortogonal a \mathcal{W} .

Exemplo: Sejam $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, $\{X_1\}$ base o.n. de \mathcal{W} e $X = \overrightarrow{OP}$. Logo, $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1$ e $Y \cdot X_1 = 0$.

Então, se $X = Y + Z = Y + \alpha X_1$,

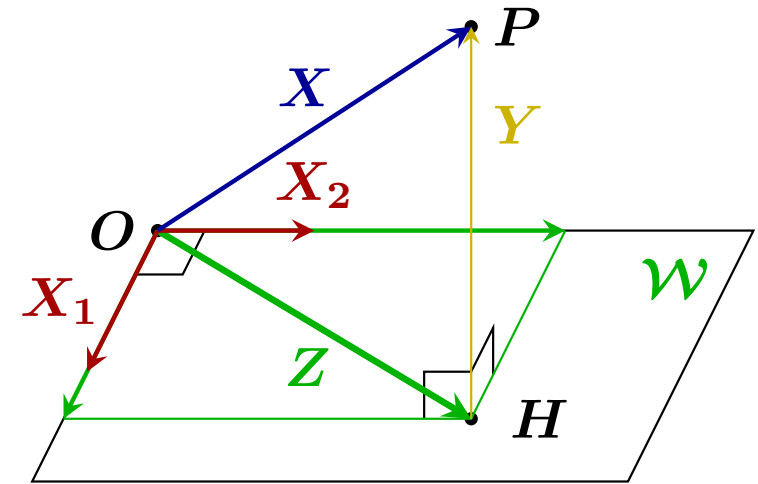
$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha.$$

Portanto, $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1$.



Exemplo: Sejam \mathcal{W} um plano gerado pela base o.n. $\{X_1, X_2\}$ e $X = \overrightarrow{OP} = Z + Y$, com $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ e $Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0$. Então, sendo $X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$,
 $X \cdot X_1 = \alpha_1$ e $X \cdot X_2 = \alpha_2$.

Logo, $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + (X \cdot X_2)X_2$.



$$\|Y\| = \text{dist}(P, \mathcal{W})$$

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \in \mathcal{W},$$

em que $\{X_1, \dots, X_k\}$ é uma base o.n. de \mathcal{W} .

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de \mathbb{R}^n possui uma base o.n.

Demonstração:

Dada $\{X_1, \dots, X_m\}$ uma base de \mathcal{W} , sejam $\mathbf{Y}_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, $\mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle$ e

$$\mathbf{X}'_k = X_k - \text{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k, \quad \mathbf{Y}_k = \frac{\mathbf{X}'_k}{\|\mathbf{X}'_k\|}, \quad \mathcal{Z}_k = \langle \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k \rangle,$$

para $k = 2, \dots, m$. Então $\mathcal{B} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m\}$ é um conjunto o.n., logo **i.i.** em \mathcal{W} . Sendo $\dim \mathcal{W} = m$, conclui-se que \mathcal{B} é uma **base o.n.** de \mathcal{W} .

Exemplo:

Determinar uma base o.n. de $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 3), (2, 1, -2, 2) \rangle$.