

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II

2013/14

Folha 5: *Séries de Funções (em geral); Séries de Taylor; Séries de Fourier*

1. Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$.

(a) Mostre que a série converge uniformemente em \mathbb{R} .

(b) Justifique que a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$ é contínua em \mathbb{R} .

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2} ; (b) $\cosh x$; (c) $\sinh(3x)$; (d) $2\cos^2 x$; (e) $\frac{1}{4+x^2}$.

3. Desenvolva a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

4. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$

5. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.
(Sugestão: desenvolva primeiro a função $\frac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).

(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$$

6. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

7. (a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

8. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

9. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

$$(a) f(x) = x + x^2, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$(b) g(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

10. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine as (somas da) série de Fourier de senos e da série de Fourier de cossenos de f e represente-as graficamente no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

11. Considere a função f , 2π -periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Determine a série de Fourier de f .

(b) Verifique que a série de Fourier é uniformemente convergente em \mathbb{R} .

(c) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(d) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

– Exercícios de Testes e Exames –

12. Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{2^n}$.

Justifique que a função S definida por $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{2^n}$ é integrável no intervalo

$$[0, \ln 2] \text{ e mostre que } \int_0^{\ln 2} S(x) dx = \frac{2}{3}.$$

(2.º teste, junho de 2010).

13. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

(a) Determine o maior subconjunto de \mathbb{R} no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (definida no domínio de convergência da série).

(Exame de Recurso, julho de 2011).

14. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de \mathbb{R} em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

(*Exame da Época Normal, junho de 2008*).

15. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(*2.º teste, maio de 2011*).

16. Considere a série de Fourier

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

da função f , periódica de período 2π , definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = x^2$.

(a) Indique, justificando, a função soma desta série.

(b) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(*Exame de Recurso, julho de 2011*).