universidade de aveiro deti departamento de electrónica, telecomunicações e informática

Lógica Combinatória - Mapas the Karnaugh

Introdução

A implementação duma função Booleana requere a utilização de *gates*. Quanto menos *gates* forem necessárias para implementar essa função menor é a complexidade e o custo.

Existem essencialmente duas maneiras de simplificar uma função Booleana. Uma é algébrica, através dos teoremas da álgebra de Boole a outra é gráfica conhecida por Mapa de Karnaugh[1] (K-mapa). Este método é simples e funciona bastante bem para um número de variáveis inferior ou igual a 4, sendo no entanto possível a sua utlização até 6 variáveis. Para funções mais complexas existem algoritmos de minimização do tipo Quine-McCluskey.

1. Aspecto gráfico do K-mapa

Nos mapas seguintes, assume-se sempre 'A' como sendo o bit mais significativo do *minterm*. As marcas com o fundo colorido são opcionais, mas aparecem em alguns diagramas da literatura.

Os *minterms* são colocados em células segundo a sequência do código de Gray, por forma a garantir que só diferem no valor duma variável, viabilizando assim a simplificação por Adjacência.

Também é possível construir K-mapas com base em *maxterms* mas não serão aqui abordados.

a) Duas variáveis (k-2)

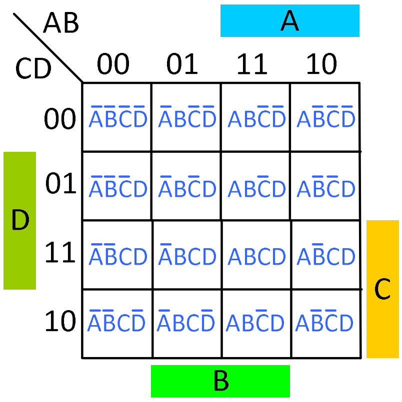
B \ A	0	1 (A)	
0	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$	
1	$\overline{A}B$	AB	B

b) Três variáveis (k-3)

C \ AB	00	01 (B)	11 (A, B)	10 (A)	
0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$	
1	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$	C

[1] Maurice Karnaugh - (1924 -) Físico e matemático americano, ainda vivo com 92 anos, que inventou os mapas com o seu nome, enquanto trabalhava nos Bell Labs (1952-66).

c) Quatro variáveis (k-4)



2. Minterm adjacentes

A cada célula do mapa está associada a um *minterm*. Por exemplo, no mapa de 4 variáveis (k-4) à célula 13 está associado ao minterm $A.B.\bar{C}.D$. Dois *minterms* dizem-se adjacentes quando diferem no valor duma só variável. Ainda no k-4, as células da primeira linha (0,1,3 e 2) são adjacentes às da última linha (8,9,11 e 10) e analogamente as células na primeira coluna (0,4,12 e 8) são adjacentes das células na última coluna (2,6,14 e 10). Ou seja, no K-mapa os extremos tocam-se *(wrap around)*.

3. Construção do K-mapa

Dada uma Tabela de verdade, construímos o respectivo mapa da forma ilustrada na figura abaixo.

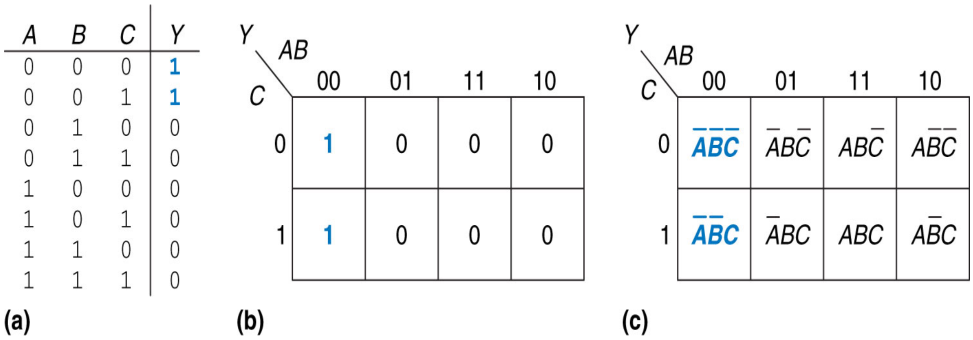


Figura 1 - Construção do K-mapa de 3 variáveis

Existe uma correspondência directa entre os 1's e os '0's (*minterms)* da Tabela de verdade com os 1's e os 0's inseridos nas células do mapa.

4. Vantagens do K-mapa na simplificação de funções Booleanas

Por inspeção visual, podemos simplificar o valor de 'Y' agrupando os *minterms* adjacentes, dando como resultado **Y = 'A.'B**, o que é visualizado através do círculo (ou elipse) a azul envolvendo os *minterms* em causa (note-se que a variável 'C' foi eliminada):

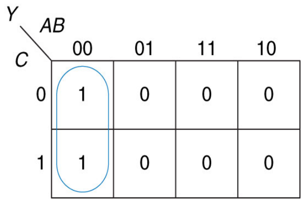


Figura 2 - Exemplo de simplificação

A idéia base consiste em envolver com círculos (*loops*) todas as zonas rectangulares que contêm 1's, usando o menor número de círculos. O resultado da simplificação é obtido somando os *minterms* depois de simplificados a que correspondem os círculos. Quanto mais elementos forem envolvidos pelo círculo mais simples resulta o *minterm*. No entanto, existem algumas regras a respeitar.

5. Regras para 'fazer' círculos no K-mapa

1. Usar o menor número de círculos que garantem que todos os 1's ficam incluídos.

2. Cada círculo deve envolver as células (na direção vertical e/ou na horizontal) em número de potências de 2 (i.e., 1,2 ou 4). O círculo pode envolver células localizadas nos extremos do K-mapa (*wrap around*).

3. Um círculo não pode conter 0's mas pode conter X's (*don't cares*).

4. Um 1 pode ser envolvido por um círculo múltiplas vezes.

6. Outro exemplo com 3-variáveis

A expressão não minimizada é: $Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

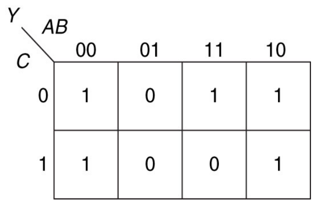


Figura 3 - K-mapa de 3 variáveis

Os quatro 1's nos cantos podem ser envolvidos por um único círculo. Todavia ainda resta um 1 para cobrir $A.B.\overline{C}$. Podemos associar este 1 isolado com o termo á sua direita, resultando: $Y = A.\overline{C} + \overline{B}$

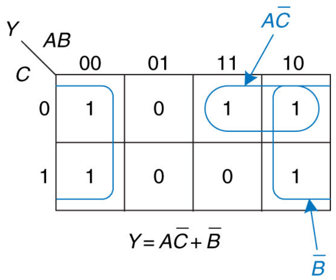
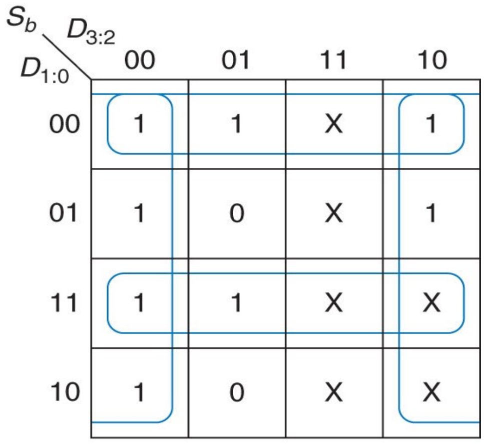


Figura 4 - K-mapa de 3 variáveis: *minterms* simplificados

Note-se que uma associação de dois *minterms* elimina uma só variável (e.g.,$A.\overline{C}$) e que a associação de 4 *minterms* elimina duas variáveis (e.g., $\overline{B}$).

7. Exemplo com 4-variáveis e *don't cares* (X')

Um círculo pode incluir X's (*don't cares*) se isso contribuir para reduzir o número de círculos final. No entanto, os X's não precisam de ser incluídos.



$$S_b = \overline{D}_2 + D_1 D_0 + \overline{D}_1 \overline{D}_0$$

Figura 5 - Exemplo 3: K-mapa de 4 variáveis: *minterms* simplificados

8. Conclusão

Apresentámos um breve descrição sobre a técnica de simplificação gráfica de funções Booleanas conhecida por mapas de Karnaugh. Este assunto é tratado duma forma mais detalhada em quase todos os livros sobre sistemas digitais. Pretendeu-se aqui motivar o aluno para o estudo desta interessante técnica de simplificação que se reveste de grande interesse pedagógico nos primeiros passos com a álgebra de Boole.