Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Lógica proposicional

- Proposição: afirmação que é verdadeira ou falsa.
- Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa (ao mesmo tempo).
- Princípio do terceiro excluído: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (i.e., verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).
- O valor lógico de uma proposição é verdadeiro (V ou 1) ou falso (F ou 0).

Exemplos

São proposições:
1) $2 > 3$

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas

3) a equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais

Não são proposições:
1) $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3) $x^2 = 4$

Exemplos

São proposições:
1) $2 > 3$ $\rightarrow$ Falso

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas $\rightarrow$ Verdadeiro

3) a equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais $\rightarrow$ Verdadeiro

Não são proposições:
1) $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3) $x^2 = 4$

Decomposição de proposições

Uma proposição

atómica não se pode decompor noutras proposições.

- Denotam-se por letras minúsculas: p, q, $\ldots$

composta pode decompor-se em proposições atómicas e operadores lógicos.

Exemplo de proposição composta:

- Se o cão tem fome então o cão come muito,

proposições atómicas:

- p: "o cão tem fome"
- q: "o cão come muito"

operador lógico: $\Rightarrow$

$$p \Rightarrow q$$

Operadores lógicos (ou conectivos)

Negação	$\neg$	(não)
Conjunção	$\wedge$	(e)
Disjunção	$\vee$	(ou)
Implicação	$\Rightarrow$	(se ... então)
Equivalência	$\Leftrightarrow$	(se e só se (sse))

Tabelas de verdade

Tabela de verdade da **negação**:

p	$\neg\, p$
1	
0	

Tabelas de verdade

Tabela de verdade da **negação**:

p	$\neg\, p$
1	0
0	1

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da **conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da **disjunção**:

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da **conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela de verdade da **disjunção**:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da implicação:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da equivalência:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da implicação:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela de verdade da equivalência:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fórmulas bem formadas

Definição [fórmula bem formada (fbf)]

1. Verdadeiro (V ou 1) é uma fbf;
2. Falso (F ou 0) é uma fbf;
3. Uma proposição atómica é uma fbf;
4. se r é uma fbf então (r) é uma fbf;
5. se r é uma fbf então $\neg r$ é uma fbf;
6. se r e s são fbf's então $r \wedge s$, $r \vee s$, $r \Rightarrow s$, $r \Leftarrow s$ e $r \Leftrightarrow s$ são fbf's.

Uma fórmula bem formada também se designa por **expressão lógica**.

Tautologias e contradições

Definição de tautologia e contradição

Uma **tautologia** é uma fórmula que tem valor lógico 1 qualquer que seja a interpretação.
Uma **contradição** é uma fórmula que tem valor lógico 0 qualquer que seja a interpretação.

Exemplo de tautologia: $p \vee \neg p$

Exemplo de contradição: $p \wedge \neg p$

Fórmulas válidas, inconsistentes e equivalentes

Definição [fórmula válida]

Uma fbf diz-se **válida** se é uma tautologia, i.e., se é verdadeira sobre qualquer das suas possíveis interpretações.

Uma fbf diz-se **não válida (ou inválida)** se não é válida.

Definição [fórmula inconsistente]

Uma fbf diz-se **inconsistente** se é uma contradição, i.e., se é falsa qualquer que seja a interpretação.

Uma fbf diz-se **consistente** se não é inconsistente.

Fórmulas lógicas equivalentes

Definição [fórmulas equivalentes]

Duas fórmulas lógicas, r e s, dizem-se **equivalentes** ($\equiv$) se $r \Leftrightarrow s$ é uma tautologia.

- Duas fórmulas lógicas com as mesmas variáveis são equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.

- Como consequência, podemos afirmar que
  $(p \Rightarrow q)$ é equivalente a $\neg p \vee q$
  conforme decorre das respectivas tabelas de verdade.

Comutatividade, leis de De Morgan e associatividade

- Comutatividade:
  - $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
  - $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- Leis de De Morgan:
  - $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
  - $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Associatividade:
  - $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
  - $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

Idempotência, distributividade, lei da contraposição, lei da dupla negação

- Idempotência:
  - $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
  - $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
- Distributividade:
  - $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
  - $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- Lei da contraposição:
  - $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- Lei da dupla negação:
  - $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Outras propriedades

Seja p uma proposição arbitrária.

- $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$;
- $(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$;
- $(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$;
- $(p \vee 0) \Leftrightarrow p$;
- $\neg 1 \Leftrightarrow 0$;
- $\neg 0 \Leftrightarrow 1$;

Modus ponens e modus tollens

- Modus ponens:
  - $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
- Modus tollens:
  - $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

Outras

- Adição:
  - $p \Rightarrow (p \vee q)$
- Simplificação:
  - $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- Silogismo hipotético:
  - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Utilização do "ou exclusivo" em fórmulas lógicas

- Para além do conectivo $\vee$ que se designa também por *ou inclusivo*, por vezes adopta-se o *ou exclusivo* (ou *rejeição*) que se denota por $\dot{\vee}$.

- Este *ou exclusivo* aplicado às proposições p e q produz a proposição $p \dot{\vee} q$ que significa p ou q, mas não ambos.

- Assim, a proposição $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições p ou q é verdadeira.