



### Ficha de Exercícios 5

#### Séries numéricas

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais,  $S_n$ , e a soma  $S$  (se possível) de cada uma das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n;$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3};$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} 2n;$$

$$(d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1};$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

2. Calcule, se possível, a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right]$ , sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é dada por  $S_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série numérica, convergente e de soma igual a  $S$ . Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ 3a_n + \frac{2}{3^n} \right]$ .

4. Determine, se existir, a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ , onde  $u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$ .

5. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$  (onde  $a$  é um parâmetro real, com  $a \neq -1$ ).

- (a) Determine os valores de  $a$  para os quais a série dada é convergente.  
(b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (a) Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de números reais.

i. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , então a série converge.

ii. Se a série converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

iii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ , então a série diverge.

- (b) A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge se e só se:

i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$ ;

- ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k < 1$ ;  
 iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$ .

7. Estude a natureza das séries seguintes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2 - 2}}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$(q) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(r) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{50})}{2^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$$

$$(k) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2n}{n+1} \right)^{n^3}$$

$$(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$$

$$(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n - 1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$$

$$(u) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 1}{2^n - 1}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5 + n^3}}$$

$$(n) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$(v) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$(o) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$$

$$(w) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n + 5]^n}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

8. Estude a natureza das séries seguintes:

$$(a) \frac{1}{2} + \frac{3}{4+1} + \frac{5}{9+1} + \frac{7}{16+1} + \dots$$

$$(b) \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

9. Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries de termos não negativos, tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$  e  $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Indique, justificando, a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ .

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1};$$

$$(b) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$\begin{array}{lll}
(d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}; & (g) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n + 1}; & (j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}; \\
(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3 + 3n^2 + 4}; & (h) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^2; & (k) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right). \\
(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}; & (i) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; &
\end{array}$$

11. Sabendo que as sucessões  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  são tais que

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 15, \quad a_n = \left( \frac{3}{2} \right)^n, \quad \text{para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \quad \text{para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

12. Considere as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$ .

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ (-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$ , indique a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ . Justifique.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe  $2/3$  da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais tal que  $a_1 \neq 0$  e  $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Indique, justificando, a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

15. Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$  sabendo que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

16. Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de termos positivos tal que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$  é convergente. Prove que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$  é convergente.

17. Mostre que se  $a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$  converge.