

## Espaço vetorial e subespaço

1. Averigue se são espaços vetoriais reais, com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar:

- (a) o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tais que  $x + 2y = 0$  e  $z = 1$ ;
- (b) o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  colineares a  $(1, 2, 3)$ , incluindo o vector nulo;
- (c) o conjunto das funções reais de variável real que são pares;
- (d) o conjunto das sucessões de números reais convergentes para zero.

2. Considere o conjunto  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$  munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$  assim definidas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha + 1 \\ \alpha x_2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial real e calcule o elemento neutro  $0_{\mathcal{V}}$  e o simétrico de  $X \in \mathcal{V}$ .
- (b) Verifique se o conjunto  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  é subespaço de  $\mathcal{V}$ .

3. Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais reais indicados.

- (a) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto dos vetores  $(x, y)$  tais que: i.  $x + y = 0$ ; ii.  $(x, y) \neq (1, 1)$ .
- (b) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  tais que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- (c) No espaço vetorial  $\mathcal{P}_2$  dos polinómios em  $x$  de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios  $ax^2 + bx + c$  com: i.  $c = 0$ ; ii.  $b = 1$ ; iii.  $bc = 0$ .
- (d) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n \times n}$  das matrizes quadradas de ordem  $n$ , o conjunto das matrizes
  - i. simétricas;      ii. triangulares;      iii. de determinante 1;      iv. invertíveis;
  - v.  $X$  tais que  $AX = O$ ;      vi.  $X$  tais que  $AX = I_n$ , sendo  $\det A \neq 0$
- (e) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$ , o conjunto  $\{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$ , sendo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
- (f) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vector  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- (g) No espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  das funções reais de variável real, o conjunto das funções  $f$  tais que  $f(0) = 0$ .

4. Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial real e  $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{V}$ . Mostre que o conjunto

$$\mathcal{S} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle = \{a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{S}$  é o subespaço de  $\mathcal{V}$  gerado por  $X_1, X_2, X_3$ ).

5. Mostre que se  $E$  é subespaço de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é invertível, então  $F = \{P^{-1}AP : A \in E\}$  é também subespaço de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Combinação linear, espaço gerado e independência linear

6. Escreva, sempre que possível, o vetor

- (a)  $(2, -3, -4, 3)$  como combinação linear dos vetores  $(1, 2, 1, 0)$  e  $(4, 1, -2, 3)$ ;
- (b)  $(1, 1, 0)$  como combinação linear dos vetores  $(2, 1, -2)$ ,  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ ;
- (c)  $-t^2 + t + 4$  como combinação linear dos vetores  $t^2 + 2t + 1$ ,  $t^2 + 3$  e  $t - 1$ ;
- (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  como combinação linear dos vetores  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

7. Determine o espaço gerado pelos conjuntos de vetores indicados.

- (a)  $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\{(0, 1), (0, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (d)  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (e)  $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$  em  $\mathcal{P}_2$ .

8. Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  e  $u$  um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Verifique que  $\langle u \rangle$  é a recta que passa pela origem e tem a direcção de  $u$ .
- (b) Represente geometricamente  $\langle(1, -1)\rangle$ .

10. Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  e os vetores  $u_1$  e  $u_2$  de  $\mathbb{R}^3$  linearmente independentes.

- (a) Mostre que o subespaço gerado por  $u_1$  é a recta que passa pela origem e tem a direcção de  $u_1$ .
- (b) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores  $u_1$  e  $u_2$  é o plano que passa pela origem e que contém os vetores  $u_1$  e  $u_2$ .
- (c) Represente geometricamente i.  $\langle(1, -1, 2)\rangle$ ; ii.  $\langle(1, 0, 1), (0, 0, 1)\rangle$ ; iii.  $\langle(1, -1, 1), (-2, 2, -2)\rangle$ .

11. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

- (a)  $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, -1, 1)\}$ ;
- (b)  $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ;
- (c)  $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 0, -1)\}$ ;
- (d)  $\{2t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$ .

12. Seja  $A = \{X_1, X_2, X_3\}$  um conjunto linearmente independente num espaço vetorial real  $\mathcal{V}$ . Averigue se o conjunto  $B = \{X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3\}$  é linearmente independente em  $\mathcal{V}$ .

13. Seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  um conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independente. Mostre que, se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível, então  $\{AX_1, \dots, AX_n\}$  é linearmente independente.

14. Seja  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Mostre que as linhas de  $A$  são linearmente independentes se e só se as suas colunas o são.

## Bases e dimensão

15. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:

- (a)  $\{(1, 2), (2, 4)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (c)  $\{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (d)  $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^4$ ;
- (e)  $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$  em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;
- (f)  $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$  em  $\mathcal{P}_2$ .

16. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

- (a)  $(1, 3, 0), (-1, 1, 0)$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (b)  $(1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2)$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (c)  $t^2 + 1, t^2 - t + 1$  em  $\mathcal{P}_2$ .

17. Determine todos os valores de  $a$  para os quais  $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

18. Determine uma base de  $\mathbb{R}^4$  que contenha os vetores  $(1, 0, 1, 0)$  e  $(0, 1, -1, 0)$ .

19. Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$ .

- (a) Verifique que  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determine um conjunto gerador de  $S$  e verifique se ele é linearmente independente.
- (c) Indique, justificando, a dimensão de  $S$ .

20. Mostre que, se  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  for uma base de um espaço vetorial real  $\mathcal{V}$ , então

- (a)  $\{cX_1, X_2, \dots, X_n\}$  com  $c \neq 0$  é também uma base de  $\mathcal{V}$ ;
- (b)  $\{X_1 + X_2 + \dots + X_n, X_2 + \dots + X_n, \dots, X_n\}$  é ainda uma base de  $\mathcal{V}$ .

### Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo e nulidade

21. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine uma base do espaço nulo de  $A$  e indique, justificando, a nulidade de  $A$ .
- (b) Determine o subespaço  $\mathcal{S} = \{AX : X \in \mathbb{R}^4\}$ .
- (c) Mostre que  $\{(1, -1, -1), (4, -3, -2)\}$  é uma base de  $\mathcal{S}$ .

22. Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Mostre que

- (a) se  $m > n$ , então pelo menos as linhas de  $A$  são linearmente dependentes;
- (b) se  $m < n$  então pelo menos as colunas são linearmente dependentes.

23. Para cada uma das matrizes  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$	(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	(h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- i. determine uma base para o espaço nulo  $\mathcal{N}(A)$  de  $A$ ;
- ii. determine bases para o espaço das linhas  $\mathcal{L}(A)$  e o espaço das colunas  $\mathcal{C}(A)$  de  $A$ ;
- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que  $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$ ;
- iv. diga, usando a informação dada pela característica, se as linhas de  $A$  são linearmente independentes.

24. Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Mostre que o espaço das colunas de  $AB$  está contido no espaço das colunas de  $A$ .

## Coordenadas, mudança de base e bases ortonormadas

25. Considere a base  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  constituída pelos vetores

$$X_1 = (1, 1, 0, 0), \quad X_2 = (1, 0, 0, 0), \quad X_3 = (1, 1, 1, 0), \quad X_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Determine as coordenadas na base  $\mathcal{B}$  dos vetores (a)  $(-1, 2, -6, 5)$ , (b)  $(2, 1, 0, 0)$  e (c)  $(1, 2, 3, 4)$ .

26. Considere as bases  $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$  e  $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 3, -1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Calcule  $[X]_{\mathcal{B}_1}$  e  $[X]_{\mathcal{B}_2}$  para i.  $X = (2, 3, 5)$ , ii.  $X = (-1, 2, 0)$  e iii.  $X = (1, 1, 1)$ .

(b) Determine a matriz  $M$  de mudança da base  $\mathcal{B}_1$  para a base  $\mathcal{B}_2$ . Confirme os resultados obtidos em (a) usando  $M$ .

27. Sejam  $\mathcal{S} = ((1, 2), (0, 1))$  e  $\mathcal{T} = ((1, 1), (2, 3))$  duas bases de  $\mathbb{R}^2$  e o vetor  $X = (1, 5)$ . Determine

- (a) as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{T}$ ;
- (b) o vetor  $Z$  tal que  $[Z]_{\mathcal{T}} = (1, -3)$ ;
- (c) a matriz  $M$  de mudança da base  $\mathcal{T}$  para a base  $\mathcal{S}$ ;
- (d) as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{S}$  usando  $M$ ;
- (e) as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{S}$  directamente;
- (f) a matriz  $N$  de mudança da base  $\mathcal{S}$  para a base  $\mathcal{T}$ ;
- (g) as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{T}$  usando  $N$ .

28. Sejam  $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3)$  e  $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  bases de  $\mathbb{R}^3$  com  $X_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $X_2 = (1, 0, 1)$  e  $X_3 = (0, 0, 1)$ .

Determine  $\mathcal{T}$ , sabendo que a matriz de mudança da base  $\mathcal{T}$  para a base  $\mathcal{S}$  é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

29. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:

- (a)  $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$ ;
- (b)  $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ .

30. Indique para que valores de  $a$  e  $b$  o conjunto  $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b)\right\}$  é ortonormado.

31. Sejam  $X_1 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ ,  $X_2 = (0, 1, 0)$  e  $X_3 = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Verifique que  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Calcule o vetor  $[X]_{\mathcal{B}}$  para  $X = (1, 1, 1)$ , usando o facto de  $\mathcal{B}$  ser uma base ortonormada.
- (c) Calcule a matriz  $M$  de mudança da base  $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$  para a base  $\mathcal{B}$ .
- (d) Calcule  $[Y]_{\mathcal{B}}$ , sabendo que  $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)$ .

32. Sejam  $X, Y_1, \dots, Y_n$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que se  $X$  é ortogonal a  $Y_1, \dots, Y_n$ , então  $X$  é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por  $Y_1, \dots, Y_n$ .

33. Considere o plano  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $X_1 = (1, 1, 0)$  e  $X_2 = (0, 0, 1)$ .

- (a) Determine uma base ortonormada de  $\mathcal{P}$ .
- (b) Determine a projeção ortogonal do vetor  $X = (2, -2, 1)$  sobre o plano  $\mathcal{P}$ .
- (c) Determine a distância do ponto  $(2, 1, 1)$  ao plano  $\mathcal{P}$ , usando a alínea (a).

34. Calcule as projeções ortogonais de  $X = (4, 0, -9)$  e  $Y = (2, 7, -1)$  sobre o subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $(0, 1, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

35. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

- (a) Todos os vetores da forma  $(a, 0, -a)$  com  $a \in \mathbb{R}$  formam um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Todo o conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^3$  com dois vetores é linearmente independente.
- (c) O espaço das soluções do sistema homogéneo  $AX = 0$  é gerado pelas colunas de  $A$ .
- (d) Se as colunas de uma matriz  $n \times n$  formarem uma base de  $\mathbb{R}^n$ , então o mesmo acontece com as linhas.
- (e) Se  $A$  é uma matriz  $8 \times 8$  tal que o sistema homogéneo  $AX = 0$  só tem a solução trivial, então  $\text{car}(A) < 8$ .
- (f) Todo o conjunto de 5 vetores em  $\mathbb{R}^5$  é uma base em  $\mathbb{R}^5$ .
- (g) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em  $\mathbb{R}^5$  é uma base em  $\mathbb{R}^5$ .
- (h) Todo o conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^3$  linearmente independente contém 3 vetores.
- (i) Se  $A$  é uma matriz simétrica  $n \times n$ , então  $\text{car}(A) = n$ .
- (j) Todo o conjunto de vetores que geram  $\mathbb{R}^3$  contém pelo menos 3 vetores.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) sim.

2. (a)  $0_V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  e  $\ominus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \end{bmatrix}$ . (b) Sim.

3. (a) i. Sim; ii. não. (b) Não. (c) i. Sim; ii. não; iii. não. (d) i. Sim; ii. não; iii. não; iv. não; v. sim; vi. não. (e) Sim. (f) Sim. (g) Sim.

6. (a)  $(2, -3, -4, 3) = -2(1, 2, 1, 0) + (4, 1, -2, 3)$ ; (b)  $(1, 1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) - \frac{1}{3}(1, 0, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, 1)$ ; (c) e (d) não é possível.

7. (a)  $\mathbb{R}^2$ ; (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ; (c)  $\mathbb{R}^3$ ; (d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ ; (e)  $\mathcal{P}_2$ .

8.  $\{(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ .

11. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim.

12. Sim.

15. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim; (e) sim; (f) sim.

16. (a)  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ , dimensão 2; (b)  $\{(1, -1, 1), (0, 2, 1)\}$ , dimensão 2; (c)  $\{t^2 + 1, t\}$ , dimensão 2.

*Nota:* Em (a) e (c), o conjunto dado também constitui uma base.

17.  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

18.  $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .

19. (b)  $\{(1, 1, 0), (0, 3, 1)\}$  que é l.i.; (c) 2.

21. (a)  $\{(-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 1)\}$  e  $\text{nul } A = 2$ . (b)  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + 2b\}$ .

23. (a) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 2, -3, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 1, \frac{2}{3})\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. não.

(b) i.  $\{(-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4})\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 2$ ,  $\text{nul } A = 2$ ; iv. sim.

(c) i.  $\{(5, -2, -9, 13, 0), (-6, -8, 3, 0, 13)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 2, 3, 2, 1), (0, 1, \frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$  ou  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0, -\frac{5}{13}, \frac{6}{13}), (0, 1, 0, \frac{2}{13}, \frac{8}{13}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 2$ ; iv. sim.

(d) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.

(e) i.  $\{(0, 0, 1, 0)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 1$ ; iv. não.

(f) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.

(g) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, -2, -1), (0, 1, \frac{5}{3}), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 2, 1, 1), (0, 1, \frac{2}{3}, 1), (0, 0, 1, -\frac{9}{2})\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. não.

(h) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 4$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.

*Nota:* Em (a) e (g), as colunas da matriz dada também constituem uma base de  $\mathcal{C}(A)$ .

Em (b) e (c), as linhas da matriz dada também constituem uma base de  $\mathcal{L}(A)$ .

Em (d), (f) e (h), as linhas/colunas da matriz dada também constituem bases de  $\mathcal{L}(A)/\mathcal{C}(A)$ .

25. (a)  $[-1, 2, -6, 5]_{\mathcal{B}} = (8, -3, -11, 5)$ ; (b)  $[2, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0, 0)$ ; (c)  $[(1, 2, 3, 4)]_{\mathcal{B}} = (-1, -1, -1, 4)$ .

26. (a) i.  $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_1} = (2 - \frac{1}{2}, -3)$  e  $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_2} = (-\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{1}{5})$ ; ii.  $[-1, 2, 0]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 2, -1)$  e  $[-1, 2, 0]_{\mathcal{B}_2} = (-2, -1, 1)$ ; iii.  $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_1} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$  e  $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_2} = (0, 1, 0)$ . (b)  $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

27. (a)  $[X]_{\mathcal{T}} = (-7, 4)$ ; (b)  $Z = (-5, -8)$ ; (c)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ; (d)  $[X]_S = M[X]_{\mathcal{T}} = (1, 3)$ ; (f)  $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

28.  $\mathcal{T} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, 2, 2)\}$ .

29. (a) Não; (b) sim.

30.  $a = b = \frac{1}{2}$  ou  $a = b = -\frac{1}{2}$ .

31. (b)  $[X]_{\mathcal{B}} = (\frac{7}{5}, 1, \frac{1}{5})$ . (c)  $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ . (d)  $[Y]_{\mathcal{B}} = (6, 5, 3)$ .

33. (a)  $\left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$ ; (b)  $(0, 0, 1)$ ; (c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

34.  $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = \left( 1 - \frac{9\sqrt{3}}{4}, 0, \sqrt{3} - \frac{27}{4} \right)$  e  $\text{proj}_{\mathcal{W}} Y = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, 7, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$ .

35. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Verdadeira. (e) Falsa. (f) Falsa. (g) Verdadeira. (h) Falsa. (i) Falsa. (j) Verdadeira.