Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas

Gabinete: 11.3.10

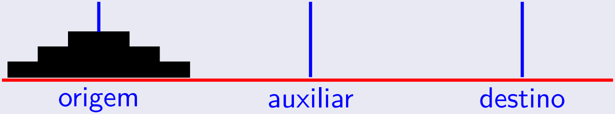
Atendimento de dúvidas: Terça, 15:00 – 17:00

Recorrência e Funções geradoras

Equações de Recorrência

Torre de Hanói

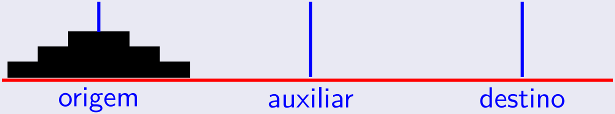
O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

Torre de Hanói

O problema é

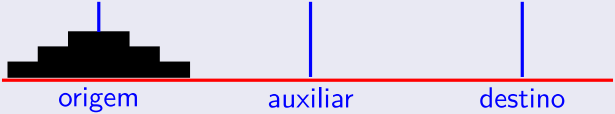


mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

Torre de Hanói

O problema é



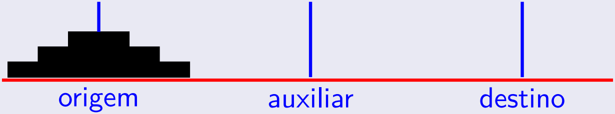
mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo "Brama" de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Torre de Hanói

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

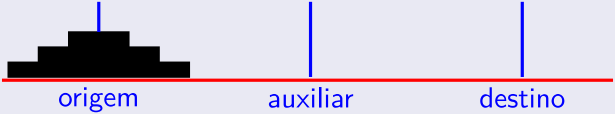
- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo "Brama" de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós?

Torre de Hanói

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

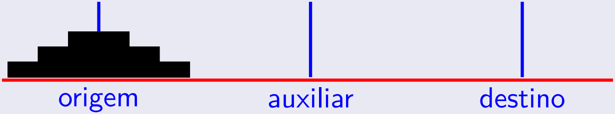
- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo "Brama" de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós? Vale a pena preparar o teste?

Torre de Hanói

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

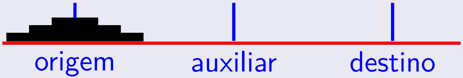
- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo "Brama" de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós? Vale a pena preparar o teste? (Sim!!)

Torre de Hanói

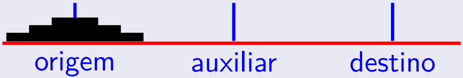
A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

Torre de Hanói

A questão



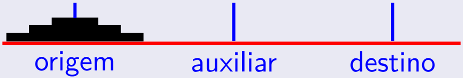
Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

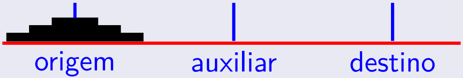
A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

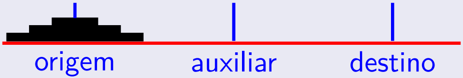
A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n > 1$, então podemos

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

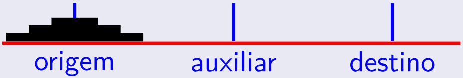
A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n > 1$, então podemos
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

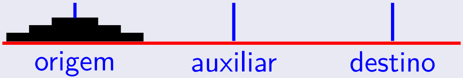
A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n > 1$, então podemos
  - mover os $n-1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

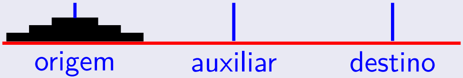
A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n > 1$, então podemos
  - mover os $n-1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n-1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Torre de Hanói

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar *recursivamente:*

- Se $n > 1$, então podemos
  - mover os $n-1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n-1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Logo, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

Os números de Fibonacci

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números de Fibonacci

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números de Fibonacci

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}, \dots$ e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números de Fibonacci

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}, \ldots$ e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

Estes números aparecem em muitos contextos . . . .

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos (ver exercício 5 da folha 6)

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais *adultos* (que podem ter descendentes) e animais *jovens* (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que depois de n meses temos A_n pares de coelhos adultos e J_n pares de coelhos jovens, e que cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês. Além disso, depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto.

Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número c_n de pares de coelhos no final do mês n?

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos (ver exercício 5 da folha 6)

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais *adultos* (que podem ter descendentes) e animais *jovens* (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que depois de n meses temos A_n pares de coelhos adultos e J_n pares de coelhos jovens, e que cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês. Além disso, depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto.
Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número c_n de pares de coelhos no final do mês n?

Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos (ver exercício 5 da folha 6)

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais *adultos* (que podem ter descendentes) e animais *jovens* (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que depois de n meses temos A_n pares de coelhos adultos e J_n pares de coelhos jovens, e que cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês. Além disso, depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto.
Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número c_n de pares de coelhos no final do mês n?

Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$; e $c_n = A_n + J_n$ satisfaz

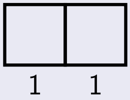
$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

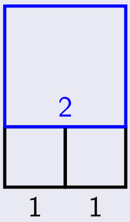
Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$\vdots$$



Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

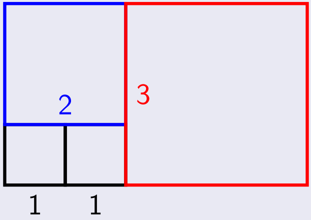


Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 2, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

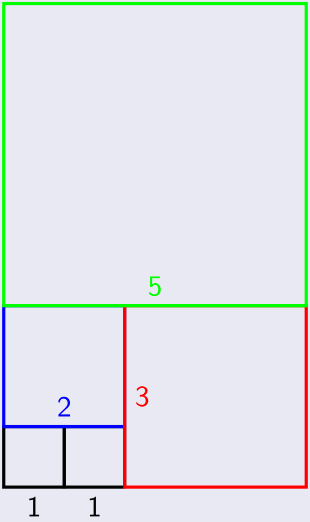


Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$\vdots$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

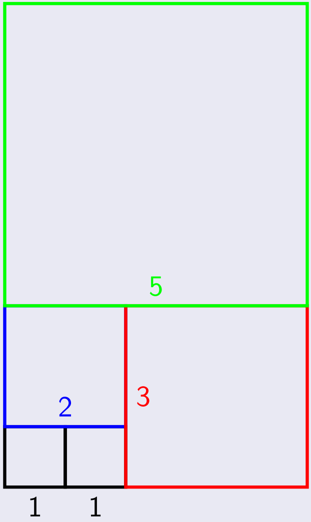


Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= 1,\\
a_2 &= 2,\\
a_3 &= 3,\\
a_4 &= 5,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado *n*?

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 2, \\
a_3 &= 3, \\
a_4 &= 5, \\
&\vdots \\
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n
\end{aligned}
$$

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Ordens totais

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Pelo princípio da multiplicação, o número a_{n+1} de ordens totais em $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ é

$$a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n-k}), \qquad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ (e $a_i \in \mathbb{R}$).

[a] ou relação de recorrência

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n-k}), \qquad (*)$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ (e $a_i \in \mathbb{R}$).
- A equação de recorrência $(*)$ diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n_2}, \dots, x_{n-k}), \qquad (*)$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ (e $a_i \in \mathbb{R}$).
- A equação de recorrência $(*)$ diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de $(*)$ quando os seus termos satisfazem a equação $(*)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Definição

- Uma equação de recorrência é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n-k}), \qquad (*)$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ (e $a_i \in \mathbb{R}$).
- A equação de recorrência $(*)$ diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de $(*)$ quando os seus termos satisfazem a equação $(*)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções.

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n_2}, \dots, x_{n-k}), \qquad (*)$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ (e $a_i \in \mathbb{R}$).
- A equação de recorrência $(*)$ diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de $(*)$ quando os seus termos satisfazem a equação $(*)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com *fórmulas fechadas*; ou seja, na forma

$$a_n = \text{“uma expressão que apenas envolve a variável } n\text{”}.$$

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de "quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?". Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de "quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?". Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Então,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1,\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!,\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4!.$$

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de “quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?”. Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Então,

$$a_1 = 1,\; a_2 = 2 \cdot 1,\; a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!,\; a_4 = 4 \cdot a_3 = 4!.$$

Será $a_n = n!$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de "quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?". Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Então,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1,\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!,\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4!.$$

Será $a_n = n!$, para cada $n \in \mathbb{N}$? Provamos esta conjetura por indução:

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de "quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?". Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Então,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1,\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!,\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4!.$$

Será $a_n = n!$, para cada $n \in \mathbb{N}$? Provamos esta conjetura por indução:

- Para $n = 0$: $a_0 = 1 = 1!$.

Um método ingénuo

Exemplo

Voltamos à questão de "quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?". Já observamos que o correspondentes números a_n satisfazem

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Então,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1,\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!,\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4!.$$

Será $a_n = n!$, para cada $n \in \mathbb{N}$? Provamos esta conjetura por indução:

- Para $n = 0$: $a_0 = 1 = 1!$.
- Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos $a_n = n!$. Então,
$$a_{n+1} = (n+1)a_n = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear[a] é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(c_k \neq 0)$ são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

[a] de coeficientes constantes

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação $(*)$ diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

(Diz-se que $(*)$ é não homogénea quando não é homogénea.)

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(c_k \neq 0)$ são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação $(*)$ diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a $(*)$ é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(c_k \neq 0)$ são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação $(*)$ diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a $(*)$ é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) da ordem 2.

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação $(*)$ diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a $(*)$ é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) da ordem 2.
- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}$ é a equação homogénea associada.

Mais exemplos

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas *não tem coeficientes constantes*.

Mais exemplos

Exemplo

- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

Mais exemplos

Exemplo

- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes). Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação.

Mais exemplos

Exemplo

- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes). Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

Mais exemplos

Exemplo

- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes). Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

Um cálculo semelhante revela que as sucessões

$$(0)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}$$

são soluções da equação acima.

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}.$$

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}.$$

Um resultado deste tipo já conhecemos de

- ALGA: resolver equações lineares;
- Cálculo II: resolver equações diferenciais lineares.

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}.$$

Demonstração.

- Se b é uma solução de $(*)$ e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de $(*)$.

$\square$

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}.$$

Demonstração.

- Se b é uma solução de $(*)$ e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de $(*)$.
- Se b_1 e b_2 são soluções de $(*)$, então $b_1 - b_2$ é uma solução da equação homogénea associada.

□

Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} \qquad (*)$$

$(c_k \neq 0)$ uma equação de recorrência linear homogénea. Então:

Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja
$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} \qquad (*)$$
($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea. Então:

- O conjunto das soluções de $(*)$ é um subespaço do espaço de todas as sucessões (digamos reais ou complexos).

Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{$*$}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea. Então:

- O conjunto das soluções de $(*)$ é um subespaço do espaço de todas as sucessões (digamos reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(*)$ é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0,\dots,a_{k-1}) &\longmapsto (a_0,\dots,a_{k-1},\, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo, $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} \qquad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea. Então:

- O conjunto das soluções de $(*)$ é um subespaço do espaço de todas as sucessões (digamos reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(*)$ é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo, $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Conclusão: Para descrever todas as soluções de $(*)$, procuramos k soluções não nulas de $(*)$ *linearmente intendente*.

Equações de recorrência lineares homogéneas

Uma tentativa (mais ou menos) "esperta"

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Equações de recorrência lineares homogéneas

Uma tentativa (mais ou menos) "esperta"

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções?

Equações de recorrência lineares homogéneas

Uma tentativa (mais ou menos) “esperta”

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$,

Equações de recorrência lineares homogéneas

Uma tentativa (mais ou menos) "esperta"

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

Uma tentativa (mais ou menos) "esperta"

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \dots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \dots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de $(*)$ se e somente se

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k.$$

Equações de recorrência lineares homogéneas

Uma tentativa (mais ou menos) "esperta"

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \dots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \dots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de $(*)$ se e somente se

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k.$$

A equação acima diz-se equação caraterística de $(*)$.

Equações de recorrência lineares homogéneas

Corolário

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \qquad (*)$$

Se a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

de $(*)$ *têm as* k *soluções (diferentes)* $q_1, q_2, \dots, q_k$, *então as soluções de* $(*)$ *são precisamente as combinações lineares das sucessões*[a] $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$*; ou seja, as sucessões da forma*

$$(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \cdots + C_k q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

com constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

[a] linearmente independente

Um exemplo

Exemplo

Procuramos *a* solução da equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{$*$}$$

que satisfaz $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$.

Um exemplo

Exemplo

Procuramos *a* solução da equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad (*)$$

que satisfaz $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$. A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$.

Um exemplo

Exemplo

Procuramos *a* solução da equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad (*)$$

que satisfaz $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$. A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Portanto, todas as soluções (reais) da equação $(*)$ tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Um exemplo

Exemplo

Procuramos *a* solução da equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{$*$}$$

que satisfaz $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$. A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Portanto, todas as soluções (reais) da equação $(*)$ tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Procuramos aquele com $\alpha + \beta = 5$ (caso $n = 0$) e $2\alpha - \beta = 4$ (caso $n = 1$); resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Um exemplo

Exemplo

Procuramos *a* solução da equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad (*)$$

que satisfaz $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$. A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Portanto, todas as soluções (reais) da equação $(*)$ tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Procuramos aquele com $\alpha + \beta = 5$ (caso $n = 0$) e $2\alpha - \beta = 4$ (caso $n = 1$); resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. Assim, a solução é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Os números de Fibonacci outra vez ...

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, consideramos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem duas soluções:

$$q_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Os números de Fibonacci outra vez ...

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, consideramos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem duas soluções:

$$q_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, todas as soluções da equação homogénea são combinações lineares das sucessões $(q_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em particular,

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(q_0^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_0} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_1}.$$

Exemplo

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_0} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_1}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_0 & q_1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q_1 - q_0 & (1 - q_0) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-q_0}{q_1-q_0} = \frac{1-q_0}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = \frac{q_1-1}{q_1-q_0} = -\frac{1-q_1}{\sqrt{5}}$.

Exemplo

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_0} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{q_1}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_0 & q_1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q_1 - q_0 & (1 - q_0) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-q_0}{q_1-q_0} = \frac{1-q_0}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = \frac{q_1-1}{q_1-q_0} = -\frac{1-q_1}{\sqrt{5}}$.
Portanto, com algum cálculo,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((1-q_0)q_1^n - (1-q_1)q_0^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_0^{n+1}).$$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

Exemplo

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\ldots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q -$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\ldots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q \qquad .$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\ldots = (q - q_1)(q - q_2)\ldots(q - q_k).$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q$ $\quad$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\ldots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q+2)$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideramos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\ldots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$
- Se obtemos k soluções diferentes, então todas as soluções da equação de recorrência tem a forma
$$(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \cdots + C_k q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$$
com constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Exemplo

- Consideramos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Eq. car.: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q+2)$.

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

.

Mais um . . .

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$.$$

Mais um . . .

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 \qquad .$$

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q \qquad .$$

Mais um . . .

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 \qquad .$$

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q \qquad .$$

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q \qquad .$$

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q \qquad\qquad .$$

Mais um . . .

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) \qquad .$$

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

Mais um ...

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

E agora? Temos apenas duas soluções diferentes ...

Equações de recorrência lineares homogéneas (caso geral)

Teorema

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

$(n_1 + \cdots + n_l = k,\ n_i > 0)$.

Equações de recorrência lineares homogéneas (caso geral)

Teorema

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_l)^{n_l}$$

$(n_1 + \cdots + n_l = k,\ n_i > 0)$. Então, as soluções da equação $(*)$ são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{lllll}
(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_1-1} \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_2-1} \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
\quad\ldots & & & & \\
(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_l-1} \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Um exemplo

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

Um exemplo

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Um exemplo

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Considerando os valores iniciais, procuramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha + \beta = 0, \qquad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 4, \qquad \alpha + 4\beta + 8\gamma = 18.$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz a

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz a

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$. Assim, a solução da equação de recorrência com os valores iniciais é a sucessão

$$(2 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

A de(s)monstração (do teorema)

Preparação

Consideramos a função linear S "esquecer o primeiro termo" definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

A de(s)monstração (do teorema)

Preparação

Consideramos a função linear S "esquecer o primeiro termo" definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação $x_n - c_1x_{n-1} - c_2x_{n_2} - \cdots - c_kx_{n-k}$ se e somente se

$$\begin{aligned}\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1S^{n-1}(a) - \cdots - c_kS^{n-k}(a)\\ &= (S^n - c_1S^{n-1} - \cdots - c_kS^{n-k})(a)\\ &= S^{n-k}\circ(S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id})(a),\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

A de(s)monstração (do teorema)

Preparação

Consideramos a função linear S "esquecer o primeiro termo" definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação $x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n_2} - \cdots - c_k x_{n-k}$ se e somente se

$$\begin{aligned}
\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1 S^{n-1}(a) - \cdots - c_k S^{n-k}(a) \\
&= (S^n - c_1 S^{n-1} - \cdots - c_k S^{n-k})(a) \\
&= S^{n-k} \circ (S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id})(a),
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Veremos agora quais sucessões a função linear

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id}$$

anula.

A de(s)monstração (do teorema)

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística,

A de(s)monstração (do teorema)

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

A de(s)monstração (do teorema)

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

"A chave" da prova do teorema é o seguinte lema.

A de(s)monstração (do teorema)

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

"A chave" da prova do teorema é o seguinte lema.

Lema

Seja $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. A função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^2 \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \dots \quad (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

A de(s)monstração (do lema)

$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\ldots$ $s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Demonstração.

Utilizamos indução sobre m.

$\square$

A de(s)monstração (do lema)

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_2 = (n\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ \ldots s_m = (n^{m-1}\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Demonstração.

Utilizamos indução sobre m.

Para $m = 1$, $S((q^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = q(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

A de(s)monstração (do lema)

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ \ldots s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Demonstração.

Seja agora $m > k$ e suponhamos que, para cada $r < m$, $(S - q\,\mathrm{id})^r$ anula as sucessões $s_1, \ldots, s_k$. □

A de(s)monstração (do lema)

$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_2 = (n\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ \dots s_m = (n^{m-1}\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Demonstração.

Seja agora $m > k$ e suponhamos que, para cada $r < m$, $(S - q\,\mathrm{id})^r$ anula as sucessões $s_1, \dots, s_k$. Calculamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $S(s_m) - (q \cdot s_m)$:

$$\begin{aligned}
&(n+1)^{m-1}\cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1}\\
&\qquad = \left(\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\cdot n^i\cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1}\\
&\qquad = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q\cdot\binom{m-1}{i}\cdot n^i\cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear de } s_1,\dots,s_{m-1}};
\end{aligned}$$

$\square$

A de(s)monstração (do lema)

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_2 = (n\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}},\ \dots s_m = (n^{m-1}\cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Demonstração.

Seja agora $m > k$ e suponhamos que, para cada $r < m$, $(S - q\,\mathrm{id})^r$ anula as sucessões $s_1, \dots, s_k$. Calculamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $S(s_m) - (q\cdot s_m)$:

$$\begin{aligned}
&(n+1)^{m-1}\cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1}\\
&\qquad = \left(\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\cdot n^i\cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1}\\
&\qquad = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q\cdot\binom{m-1}{i}\cdot n^i\cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear de } s_1,\dots,s_{m-1}};
\end{aligned}$$

Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$. $\square$

Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos:

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} \quad + \quad \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}\ .$$

Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos:

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} \quad + \quad \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).} \, .$$

- Já sabemos resolver a segunda questão.

Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos:

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea ass. a } (*).}.$$

- Já sabemos resolver a segunda questão.
- Estudamos agora métodos para obter *uma solução particular* de $(*)$.

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

- Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.}$$

  ($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p *não* é solução da equação caraterística

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

- Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

  ($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p *não* é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

- Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

  ($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p *não* é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

- Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

  se 1 *não* é solução da equação caraterística respetivamente

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

- Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

  ($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p *não* é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

- Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

  $$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

  se 1 *não* é solução da equação caraterística respetivamente

  $$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

  se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

- Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma
$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$
($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p *não* é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).
- Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma
$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$
se 1 *não* é solução da equação caraterística respetivamente
$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$
se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Os valores dos parâmetros A, A_i obtém-se substituindo b_n na equação de recorrência dada.

Combinar soluções

Teorema

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} + \cdots + d_n^{(m)} \qquad (*)$$

uma equação de recorrência linear e suponhamos que as sucessões $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ *são soluções de*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(2)} \\ &\vdots \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n_2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(m)} \end{aligned}$$

respetivamente. Então, a sucessão $b^{(1)} + \cdots + b^{(m)}$ *é uma solução de* $(*)$.

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Portanto, a solução geral da equação de recorrência homogénea é dada por

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

da forma

$$b_n = A \cdot n \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

da forma

$$b_n = A \cdot n \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

da forma

$$b_n = A \cdot n \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.
Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = A \cdot n \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Logo, uma solução da equação de recorrência acima é $(n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned} .$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Portanto, a solução é

$$(6 - 6\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.
A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.
A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada,

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.
A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.
A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

e $(b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (1+n), \qquad n = 2, 3, \dots.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar *uma solução* da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar *uma solução* da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = (1 + n), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar *uma solução* da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Uma vez que $1+n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar *uma solução* da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Uma vez que $1+n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Portanto, a solução geral da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}\;;$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned};$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{array}{rl} 0 & = \alpha + \beta \\ -2 & = \alpha + 2\beta + 4 - \frac{7+1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} 0 & = \alpha + \beta \\ -2 & = \alpha + 2\beta \end{array};$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Logo, a solução da equação de recorrência dada com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$ é

$$\left(2 - 2\cdot 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideramos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideramos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos "linearizar" a equação utilizando um substituição adequada.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideramos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos "linearizar" a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (Substituição "simples")

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$; aqui suponhamos $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideramos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos "linearizar" a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (Substituição "simples")

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$; aqui suponhamos $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Escrevendo $y_n = x_n^2$, esta equação de recorrência não linear transforma-se na equação de recorrência linear

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $y_0 = x_0^2 = 4$.

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo "não homogéneo" é o polinómio de grau zero 1, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo "não homogéneo" é o polinómio de grau zero 1, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$. Tendo em conta a condição inicial $y_0 = 4$, obtemos $c = 5$; assim, a solução da equação $x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1$ com $x_0 = 2$ é a sucessão

$$(\sqrt{5 \cdot 2^n - 1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Utilizar o “linearizator”

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Utilizar o "linearizator"

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Portanto, em muitos exemplos podems "linearizar" passando para o logaritmo.

Utilizar o “linearizator”

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Portanto, em muitos exemplos podems “linearizar” passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Utilizar o "linearizator"

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Portanto, em muitos exemplos podems "linearizar" passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Utilizar o “linearizator”

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}),\ \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad y_0 = y_1 = 1;$$

Utilizar o “linearizator”

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \; \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci.

Utilizar o "linearizator"

Exemplo

Consideramos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \ \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci. Portanto, a solução da equação acima com as condições iniciais é

$$(2^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\cdots \sqrt{x_0}}}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$.

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$,

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\cdots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$;

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \ (n \geq 2).$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideramos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2 \log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \ (n \geq 2).$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$, obtemos a equação de recorrência linear $y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2}$ $(n \geq 2)$ com a condição inicial $y_1 = 1$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = \tfrac{1}{2} y_{n-1} + \tfrac{1}{2} \;\; (n \geq 2),\; y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$\left(c\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1\right)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \;\; (n \geq 2),\; y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$\left(c\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1\right)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1;$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = \tfrac{1}{2} y_{n-1} + \tfrac{1}{2} \;\; (n \geq 2),\; y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \;\; (n \geq 2),\; y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$\left(c\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 1\right)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$. Portanto, para todo o $n \geq 1$,

$$x_n = 2^{y_n} = 2,$$

e $x_0 = 4$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideramos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot 2 \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideramos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot 2 \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = 2 \cdot n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = 2 \cdot n! \cdot y_{n-1},$$

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideramos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot 2 \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = 2 \cdot n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = 2 \cdot n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = 2 \cdot y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideramos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot 2 \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = 2 \cdot n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = 2 \cdot n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = 2 \cdot y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$. Portanto, a solução geral da equação acima é dada por

$$(n! \cdot c \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$