Equações diferenciaias

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem- variáveis separáveis

Exercício 1

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Valide as seguintes afirmações

1. A sua solução geral pode ser dada por
   (a) $y = ke^{-\ln(|x|)}$, com $k \in \mathbb{R}$.
   (b) $y = kx$, com $k \in \mathbb{R}$.
   (c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = k$, com $k \in \mathbb{R}^+$.
   (d) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = k$, com $k \in \mathbb{R}$.
2. Uma solução particular desta equação diferencial é
   (a) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 36$.
   (b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 36$.
   (c) $y = 36\,x$.
   (d) $y = 36\,e^{-\ln(|x|)}$.
3. O integral geral da equação diferencial é uma família de
   (a) hipérboles.
   (b) retas.
   (c) circunferências.
   (d) elipses.

Resolução

A equação dada é de variáveis separáveis e pode ser escrita na forma:

$$ydy = xdx$$

Integrando ambos os membros da equação diferencial obtemos

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + k$$

A solução pode também ser escrita na forma

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = k$$

A família de curvas que representa o integral geral da equação diferencial é uma família de hipérboles.

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Exercício 1

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{2\,(2\,x-3)} = -\left(y - e^{-2\,x^2+3\,x+5}\right)dx$$

1. Verifique que se trata de uma equação diferencial linear.
2. Determine um fator integrante que simplifique a resolução da equação diferencial.
3. Determine a solução geral da equação.

Resolução

Uma equação diferencial linear de 1ª ordem é do tipo

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde a_0 é uma função não nula. Pode ser também escrita na forma $y' + P(x)y = Q(x)$.

A equação dada é equivalente a

$$2\,(2\,x-3)y + y' = e^{-2\,x^2+3\,x+5}$$

que é uma equação do tipo $y' + P(x)y = Q(x)$, onde $P(x) = 4\,x - 6$ e $Q(x) = e^{-2\,x^2+3\,x+5}$.

Procuremos o factor $\mu(x)$:

$$\mu(x)(y' + P(x)y) = \mu(x)Q(x)$$

este fator será dado por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$\int P(x)dx = 2\,x^2 - 6\,x$$

Assim, μ é

$$\mu(x) = e^{2\,x^2-6\,x}$$

Reescrevendo a equação diferencial teremos

$$2\,(2\,x-3)ye^{2\,x^2-6\,x} + y'e^{2\,x^2-6\,x} = e^{-3\,x+5}$$

Como

$$2\,(2\,x-3)ye^{2\,x^2-6\,x} + y'e^{2\,x^2-6\,x} = \left(ye^{2\,x^2-6\,x}\right)'$$

podemos afirmar que

$$ye^{2\,x^2-6\,x} = \int e^{-3\,x+5}\,dx = -\frac{1}{3}\,e^{-3\,x+5}$$

Então

$$y = \frac{1}{3}\left(3\,k - e^{-3\,x+5}\right)e^{-2\,x^2+6\,x},\ k \in \mathbb{R}$$

Exercício 2

Considere a equação diferencial

$$-\frac{\left(x^2-1\right)y'}{2\,x} + y = \left(x^2-1\right)x$$

1. Verifique que se trata de uma equação diferencial linear.
2. Determine um fator integrante que torne a resolução da equação diferencial num mero processo de integração .

3. Determine a solução geral da equação.

Resolução

Uma equação diferencial linear de 1ª ordem é do tipo

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde a_0 é uma função não nula. Pode ser também escrita na forma $y' + P(x)y = Q(x)$. A equação dada é equivalente a

$$-\frac{2\,xy}{x^2-1} + y' = -2\,x^2$$

que é uma equação do tipo $y' + P(x)y = Q(x)$, onde $P(x) = -\dfrac{2\,x}{x^2-1}$ e $Q(x) = -2\,x^2$.

Procuremos um factor $\mu(x)$ que transforme a equação numa equação diferencial fácil de integrar:

$$\mu(x)(y' + P(x)y) = \mu(x)Q(x)$$

este fator será dado por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$\int P(x)dx = -\ln\left(x^2-1\right)$$

Assim, μ pode ser

$$\mu(x) = e^{-\ln\left(x^2-1\right)} = \frac{1}{x^2-1}$$

Reescrevendo a equação diferencial teremos

$$-\frac{2\,xy}{(x^2-1)^2} + \frac{y'}{x^2-1} = \frac{-2\,x^2}{x^2-1}$$

Como

$$-\frac{2\,xy}{(x^2-1)^2} + \frac{y'}{x^2-1} = \left(\frac{y}{x^2-1}\right)'$$

podemos afirmar que

$$\frac{y}{x^2-1} = \int \frac{-2\,x^2}{x^2-1}\,dx = -2\,x - \ln(x-1) + \ln(x+1) + k$$

Então

$$y = \left(x^2-1\right)(k - 2\,x - \ln(x-1) + \ln(x+1)),\ k \in \mathbb{R}$$

Método dos coeficientes indeterminados

Exercício 1

Considere a equação diferencial

$$2\,x^2e^{7\,x} + 3\,y - y' = 0$$

Valide as seguintes afirmações

1. A solução geral da equação homogénea associada é
   (a) $y_h = ke^{3\,x}$, com $k \in \mathbb{R}$.
   (b) $y_h = kxe^{3\,x}$, com $k \in \mathbb{R}$.
   (c) $y_h = ke^{7\,x}$, com $k \in \mathbb{R}$.
   (d) $y_h = kxe^{7\,x}$, com $k \in \mathbb{R}$.
2. Uma solução particular da equação diferencial completa é

(a) $y_p = \frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x}$.

(b) $y_p = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 2\,x\right)e^{7\,x}$.

(c) $y_p = -\frac{1}{16}\left(4\,x - 1\right)e^{7\,x}$.

(d) $y_p = -\frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x}$.

3. A solução geral da equação diferencial completa é

(a) $y = \frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x} + ke^{3\,x}$.

(b) $y = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 2\,x\right)e^{7\,x} + ke^{3\,x}$.

(c) $y = -\frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x} + ke^{3\,x}$.

(d) $y = \frac{1}{16}\left(8\,x^2 + 16\,k - 4\,x + 1\right)e^{7\,x}$.

Resolução

A equação dada é equivalente a:

$$-3\,y + y' = 2\,x^2 e^{7\,x}$$

Para resolver a equação diferencial podemos determinar uma solução geral da equação homogénea associada, $-3\,y + y' = 0$ e uma solução particular da equação completa. A solução geral da equação dada é a soma da solução geral da homogénea associada com a particular da equação completa. Consideremos a equação homogénea associada:

$$-3\,y + y' = 0$$

Esta é uma equação de variáveis separáveis e pode, portanto, ser escrita na forma

$$\frac{dy}{y} = 3\,dx$$

Integrando ambos os membros da equação diferencial obtemos

$$\ln\left(|y|\right) = k + 3\,x$$

A solução geral da equação homogénea pode ser escrita na forma

$$y_h = ke^{3\,x}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

Para determinar uma solução particular da equação completa, observemos que o segundo membro da equação diferencial é o produto de um polinómio $(2x^2)$ por uma exponencial $(e^{7\,x})$, assim, uma solução particular será do mesmo tipo

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{7\,x}$$

Para determinar A, B e C, deriva-se y_p, e substituímos na equação diferencial original y por y_p:

Como $y_p' = \left(7\,Ax^2 + 2\,Ax + 7\,Bx + B + 7\,C\right)e^{7\,x}$, substituindo na equação diferencial obtemos

$$-3\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{7\,x} + \left(7\,Ax^2 + 2\,Ax + 7\,Bx + B + 7\,C\right)e^{7\,x} = 2\,x^2 e^{7\,x} \Leftrightarrow 4\,Ax^2 + 2\,Ax + 4\,Bx + B + 4\,C = 2\,x^2$$

Então $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{16}$ e uma solução particular da equação completa é

$$y_p = \frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x}$$

A solução geral da equação completa é

$$y = y_h + y_p = \frac{1}{16}\left(8\,x^2 - 4\,x + 1\right)e^{7\,x} + ke^{3\,x}$$