Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I - Agrupamento IV **2017/2018**

Ficha de Exercícios 4

Integrais Impróprios de 1ª espécie

1. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução: Uma vez que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[\ln|\ln x|\Big]_e^b = \lim_{b\to+\infty}\Big(\ln|\ln b| - \ln|\ln e|\Big) = +\infty$$

podemos concluir que o integral dado é divergente.

2. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução:

Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx.$$

Usando o método de integração por partes podemos concluir que

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

pois

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \frac{2}{e}.$$

3. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5}{4+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \ln x\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x(4-x)\,dx$

4. Calcule, caso exista, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ com

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

5. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e calcule o seu valor caso seja convergente.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-st}dt \quad (s>0)$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt \quad (s>\alpha)$

6. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}^+$.

7. Estude, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza dos integrais impróprios:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx$

8. Estude, utilizando o critério de comparação ou critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

9. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x+2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx$

10. Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ \\ 0 & \text{se } |x| > 2. \end{cases}$

Determine m de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Exercícios de testes/exames de anos anteriores

11. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\, dx$$

calculando o seu valor caso seja convergente.

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2012/2013)

12. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{6x^2-4}{x^7+2x+1}\, dx.$$

(Exame Final, Cálculo I, 2013/2014)

13. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^6+\pi x+5}\, dx.$$

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2013/2014)