Matemática Discreta

Princípios de Enumeração Combinatória

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Alguns exemplos de problemas de contagem

1. Quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

2. De quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?

3. Qual é a probabilidade de ganhar o Euromilhões?

Princípio da bijecção

Descrição do princípio da bijecção

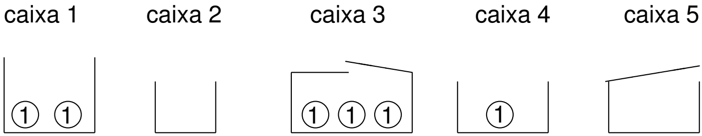
O princípio da bijecção consiste na identificação dos objectos de um conjunto A com os elementos de outro conjunto B com o qual, em princípio, é mais fácil trabalhar.

$$f: \; A \to B.$$

Recorde-se que se existe uma bijecção entre a A e B, então podemos concluir a igualdade $|A| = |B|$.

Exemplo

O número de possibilidades de colocar k bolas iguais em n caixas distintas é igual ao número de sequências binárias com $n-1$ zeros e k uns.



1 1 0 0 1 1 1 0 1 0

$\hookrightarrow$ 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0

Princípio da multiplicação

Teorema

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos não vazios finitos, então o conjunto dos n-uplos $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é tal que $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots \cdot |A_n|$.

Exemplo. Vamos determinar quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos em
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Denotando por C o conjunto dos números de 4 algarismos pertencentes a A, então $f : A^4 \to C$ tal que

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=1}^{4} a_k \times 10^{k-1}$$

é uma bijecção entre A^4 e C (verificar). Logo, pelos princípios da bijecção e multiplicação, $|C| = |A^4| = |A|^4 = 9^4 = 6561$.

Princípio da multiplicação generalizada

Teorema

Admitindo que um processo de escolha das componentes de um n-uplo se pode fazer em n passos sucessivos, de tal forma que existem

- p_1 escolhas possíveis para a $1^{\underline{a}}$ componente,
- p_2 escolhas possíveis para a $2^{\underline{a}}$ componente,

...

- p_n escolhas possíveis para a n-ésima componente,

então podemos escolher $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ n-uplos distintos.

Exemplo

Vamos determinar de quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?

Interessa a ordem pela qual vão sendo feitas as escolhas.

- Para a $1^{\underline{a}}$ escolha existem 20 jogadores disponíveis,
- para a $2^{\underline{a}}$ escolha existem 19 jogadores disponíveis,

...

- para a última escolha restam $20 - 10 = 10$ jogadores disponíveis.

Pelo princípio da multiplicação generalizada, existem $20 \times 19 \times \cdots \times 10 = 6.704425728 \times 10^{12}$ maneiras de escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores.

Princípio da adição

Observação. Note-se que, relativamente ao exemplo anterior, o problema da determinação do número de maneiras (sequências de decisões) de escolher uma equipa é distinto do problema da determinação do número de equipas que se podem formar.

Descrição do princípio da adição

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos (ou seja, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Exemplo

Vamos determinar quantos números de telefone fixo podem ser atribuídos (de acordo com a actual numeração) na zona de Coimbra, Aveiro e Porto? Note-se que

- os números de telefone fixo da zona de Coimbra são da forma $2\,3\,9\;-\;-\;-\;-\;-\;-$,
- os números de telefone fixo da zona de Aveiro são da forma $2\,3\,4\;-\;-\;-\;-\;-\;-$,
- e os números de telefone fixo da zona do Porto são da forma $2\,2\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$.

Sejam C, A e P, respectivamente, os conjuntos das sequências de números com este formato. Então, pelo princípio da adição, o número máximo de telefones que podem ser atribuídos nestas 3 zonas é: $|C| + |A| + |P| = 10^6 + 10^6 + 10^7 = 12 \times 10^6$ (a primeira igualdade vem do princípio da multiplicação).

Princípio de inclusão-exclusão

Dados dois conjuntos finitos A e B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemplo: Vamos determinar o número de bytes (sequências binárias de comprimento 8) que começam por 1 ou terminam em 00?

Solução: Seja A o conjunto dos bytes que começam com 1 e B o conjunto dos bytes que terminam em 00. Pelos princípios da bijecção e da multiplicação,

$$|A| = |\{(1, x_2, \ldots, x_8) : x_i \in \{0,1\}, i = 2, ..., 8\}| = 2^7 = 128,$$

$$|B| = |\{(x_1, x_2, ..., x_6, 0, 0) : x_i \in \{0,1\}, i = 1, ..., 6\}| = 2^6 = 64$$

e $|A \cap B| = |\{(1, x_2, \cdots, x_6, 0, 0) : x_i \in \{0,1\}, i = 2, \ldots, 6\}| = 2^5 = 32$. Pelo princípio de inclusão-exclusão, o número de bytes que começam por 1 ou terminam em 00 é dado por $|A| + |B| - |A \cap B| = 128 + 64 - 32 = 160$.

Princípio de inclusão-exclusão

No caso mais geral podemos aplicar a fórmula de Daniel da Silva:
Dados os conjuntos finitos arbitrários $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

onde $S_k^{(n)} = \sum_{I \in [n]^k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$ e $[n]^k$ é o conjunto de subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ com k elementos.

Princípio de inclusão-exclusão (continuação)

O princípio de inclusão-exclusão pode ser descrito da seguinte forma:
Seja X um conjunto finito, $1, 2, \ldots, n$, as propriedades que cada elemento de X pode ou não ter e $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Então o número de elementos de X que têm pelo menos uma das propriedades $1, 2, \ldots, n$ é dado por

$$\begin{aligned} N(1) + N(2) + & \cdots & +N(n) - N(1,2) - N(1,3) - \cdots \\ & \cdots & -N(n-1,n) + N(1,2,3) + N(1,2,4) + \cdots \\ & \cdots & +N(n-2,n-1,n) - \cdots \\ & \cdots & +(-1)^{(n-1)} N(1,2,\ldots,n). \end{aligned}$$

Princípio da inclusão-exclusão (continuação)

O número de elementos de X que não possui nenhuma das propriedades $1, 2, \cdots, n$ é dado por

$$
\begin{aligned}
|X| - N(1) - N(2) - \quad \cdots \quad & -N(n) + N(1,2) + N(1,3) + \cdots \\
\cdots \quad & +N(n-1,n) - N(1,2,3) - N(1,2,4) - \cdots \\
\cdots \quad & -N(n-2,n-1,n) + \cdots \\
\cdots \quad & +(-1)^n N(1,2,\ldots,n).
\end{aligned}
$$

Exemplo

Sendo A o conjunto dos números inteiros positivos não superiores a 500 que não são divisíveis por 2, nem por 3, nem por 5, vamos determinar o número de elementos de A.

Solução: Sendo $A_i = \{n \in [500] : \ n \text{ é divisível por } i\}$, para $i = 2, 3, 5$. Então, $A = A_2^c \cap A_3^c \cap A_5^c = [500] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)$ e, pelo princípio de inclusão-exclusão,

$$
\begin{aligned}
|A| &= 500 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| \\
&= 500 - |A_2| - |A_3| - |A_5| \\
&\quad + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\
&= 500 - \lfloor \frac{500}{2} \rfloor - \lfloor \frac{500}{3} \rfloor - \lfloor \frac{500}{5} \rfloor \\
&\quad + \lfloor \frac{500}{2 \times 3} \rfloor + \lfloor \frac{500}{2 \times 5} \rfloor + \lfloor \frac{500}{3 \times 5} \rfloor - \lfloor \frac{500}{2 \times 3 \times 5} \rfloor \\
&= 500 - 250 - 166 - 100 + 83 + 50 + 33 - 16 = 134.
\end{aligned}
$$