

Funções Trigonométricas Inversas

Def. 1.1

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva. A função

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad CD_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto x \end{aligned}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por **função inversa de f** .

Dizemos que uma função é **invertível** se admite inversa.

Obs. 1.2

- f é invertível sse f é injetiva;
- O contradomínio de f^{-1} é D_f (isto é, $CD_{f^{-1}} = D_f$);
- $\forall x \in D_f, (f^{-1} \circ f)(x) = x$; $\forall y \in CD_f, (f \circ f^{-1})(y) = y$;
- $\forall x \in D_f, \forall y \in CD_f, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$;
- Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Def. 1.3

Função seno: $\begin{aligned} \text{sen} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{sen } x \end{aligned}$

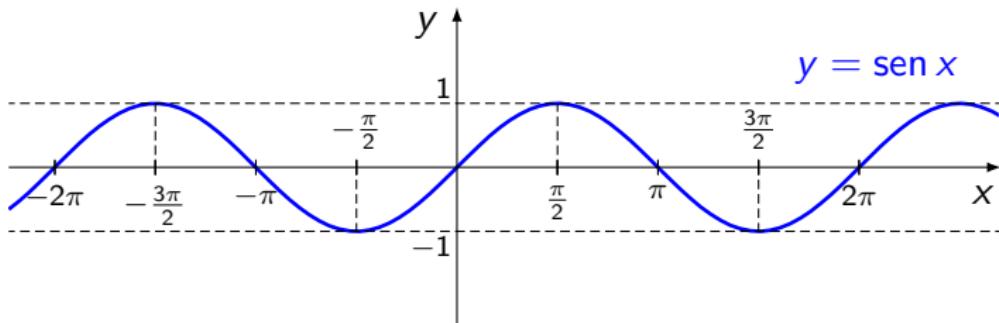
Prop. 1.4

Propriedades da função seno:

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: $[-1, 1]$;
- Função periódica de período 2π , isto é,

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.



Obs. 1.5

A função seno não é injetiva em \mathbb{R} .

No entanto, a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ já é injetiva.

Def. 1.6

A restrição principal da função seno é a função

$$\begin{aligned} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco seno, denota-se por **arcsen**, e define-se do seguinte modo

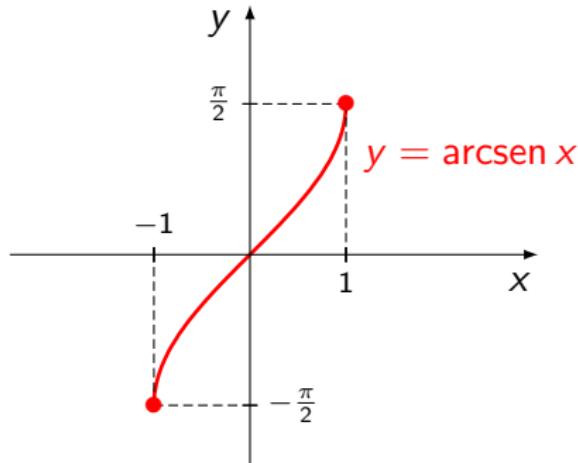
$$\begin{aligned} \text{arcsen} : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \text{arcsen } x \end{aligned}$$

onde

$$y = \text{arcsen } x \text{ sse } \sin y = x, \forall x \in [-1, 1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Obs. 1.7

arcsen x lê-se arco cujo seno é x .



Exer. 1.8

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{2} \sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \arcsen(1-x)}{3}$

(c) $f(x) = 2 \arcsen(\sqrt{x}) - \pi$

Def. 1.9

Função cosseno: $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cos x$$

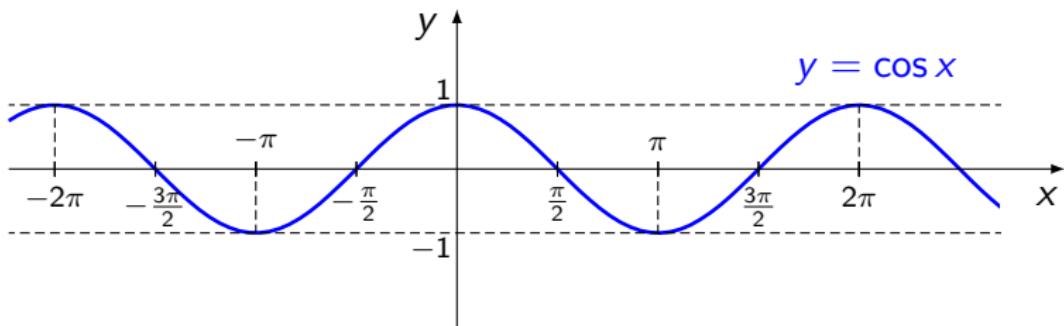
Prop. 1.10

Propriedades da função cosseno:

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: $[-1, 1]$;
- Função periódica de período 2π , isto é,

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- Função par;
- Não é injetiva.



Obs. 1.11

A função cosseno não é injetiva em \mathbb{R} .

No entanto, a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ já é injetiva.

Def. 1.12

A restrição principal da função cosseno é a função

$$\begin{aligned}f &: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \cos x\end{aligned}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco cosseno, denota-se por \arccos , e define-se do seguinte modo

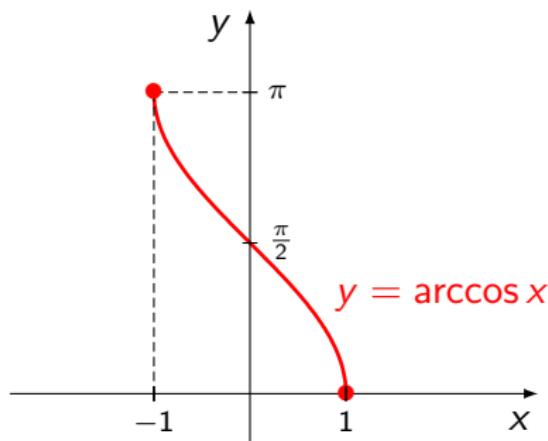
$$\begin{aligned}\arccos &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto y = \arccos x\end{aligned}$$

onde

$$y = \arccos x \text{ sse } \cos y = x, \forall x \in [-1, 1], \forall y \in [0, \pi].$$

Obs. 1.13

$\arccos x$ lê-se arco cujo cosseno é x .



Exer. 1.14

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$

(b) $f(x) = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

Def. 1.15

Função tangente: $\text{tg} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

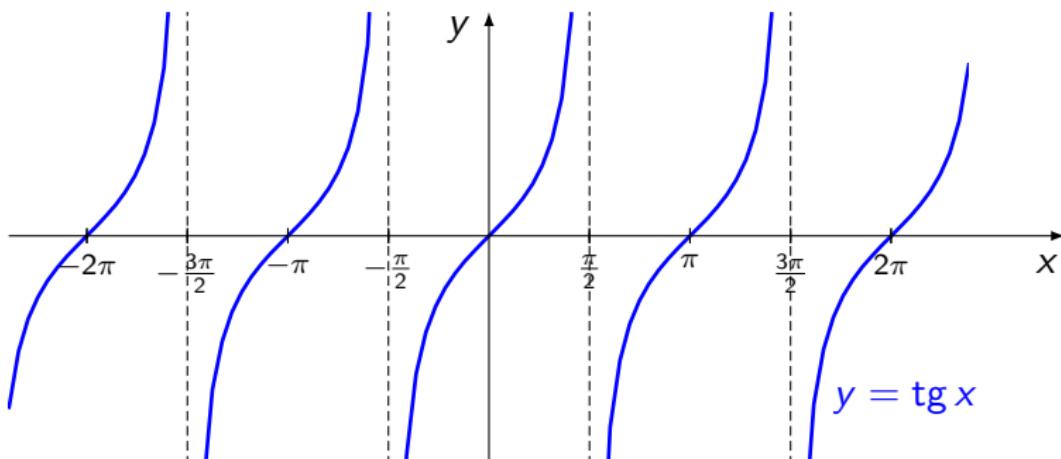
Prop. 1.16

Propriedades da função tangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$
- Contradomínio: $\mathbb{R};$
- Função periódica de período π , isto é,

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + k\pi), \quad \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.



Obs. 1.17

A função tangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ já é injetiva.

Def. 1.18

A restrição principal da função tangente é a função

$$\begin{aligned} f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco tangente, denota-se por arctg , e define-se do seguinte modo

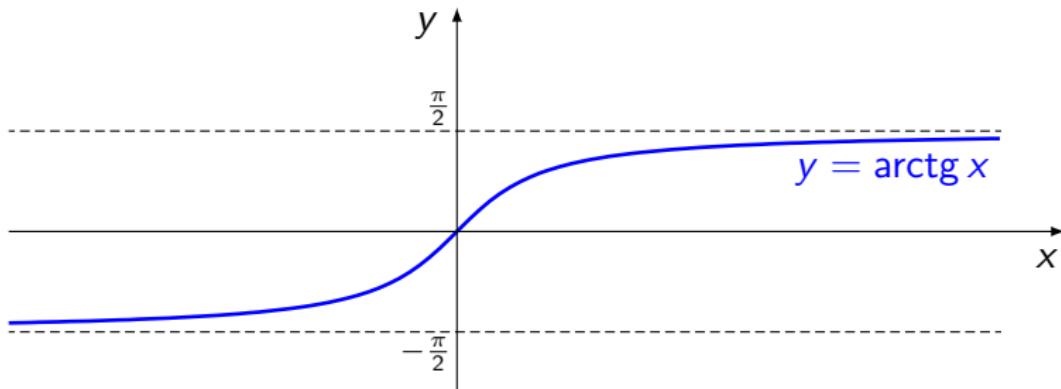
$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

onde

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ sse } \operatorname{tg} y = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Obs. 1.19

$\operatorname{arctg} x$ lê-se arco cuja tangente é x .



Exer. 1.20

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2-x} \right)$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(1-x)$

Def. 1.21

Função cotangente: $\cotg : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

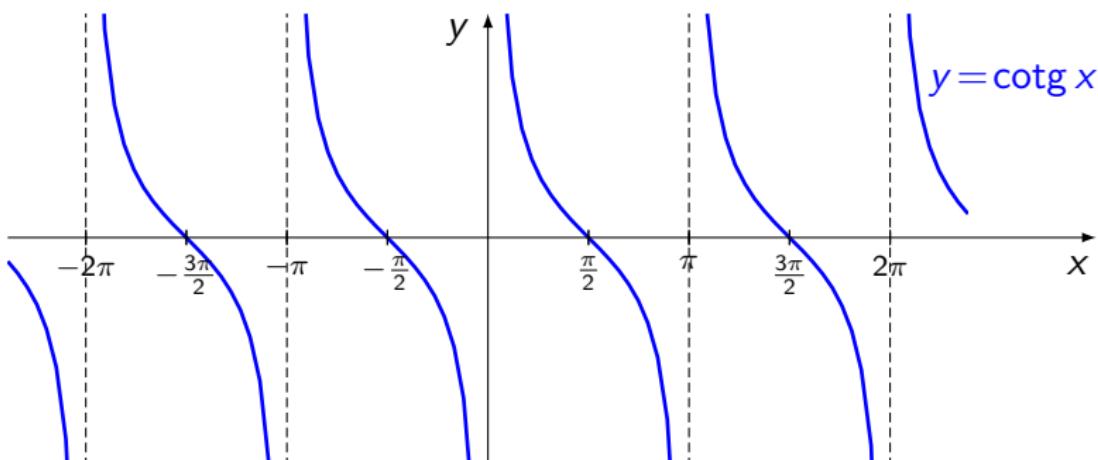
Prop. 1.22

Propriedades da função cotangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$
- Contradomínio: $\mathbb{R};$
- Função periódica de período π , isto é,

$$\cotg x = \cotg(x + k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.



Obs. 1.23

A função cotangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ já é injetiva.

Def. 1.24

A restrição principal da função cotangente é a função

$$\begin{aligned}f &:]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \cotg x\end{aligned}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco cotangente, denota-se por arccotg , e define-se do seguinte modo

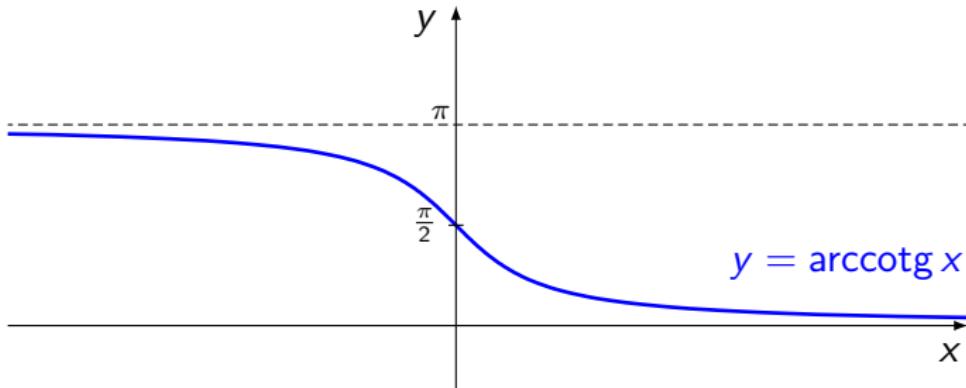
$$\begin{aligned}\text{arccotg} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto y = \text{arccotg } x\end{aligned}$$

onde

$$y = \text{arccotg } x \text{ sse } \cotg y = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, \pi[.$$

Obs. 1.25

$\text{arccotg } x$ lê-se arco cuja cotangente é x .



Exer. 1.26

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2 \cotg \left(\frac{x}{3} \right)$

(b) $f(x) = \pi + \text{arccotg} \left(\frac{x-1}{2} \right)$

Def. 1.27

Função secante: $\sec : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Prop. 1.28

Propriedades da função secante:

► Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$

► Contradomínio: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$

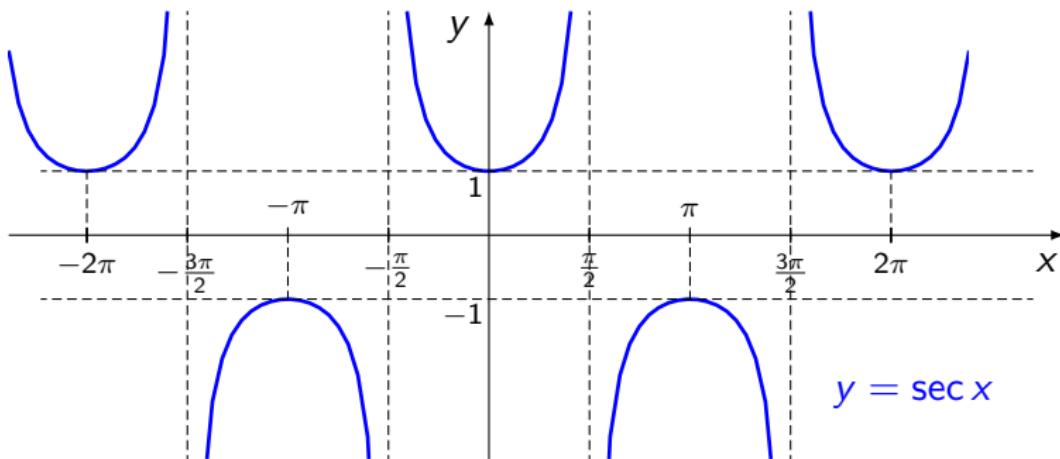
► Função periódica de período 2π , isto é,

$$\sec x = \sec(x + 2k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

► Função par;

► Não é injetiva;

► $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x, \forall x \in D.$



Obs. 1.29

A função secante não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2}, \pi]$ já é injetiva.

Def. 1.30

A restrição principal da função secante é a função

$$\begin{array}{ccc} f : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \sec x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco secante, denota-se por arcsec , e define-se do seguinte modo

$$\begin{array}{ccc} \text{arcsec} : &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto y = \text{arcsec } x \end{array}$$

onde, $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

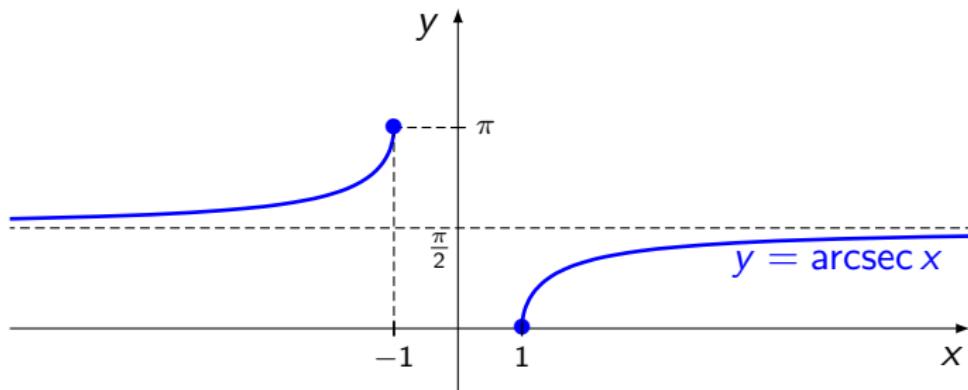
$$y = \text{arcsec } x \text{ sse } \sec y = x.$$

Obs. 1.31

$\text{arcsec } x$ lê-se arco cuja secante é x .

Gráfico da função arco secante

22



Def. 1.32

Função cossecante: $\text{cosec} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Prop. 1.33

Propriedades da função cossecante:

► Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$

► Contradomínio: $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$

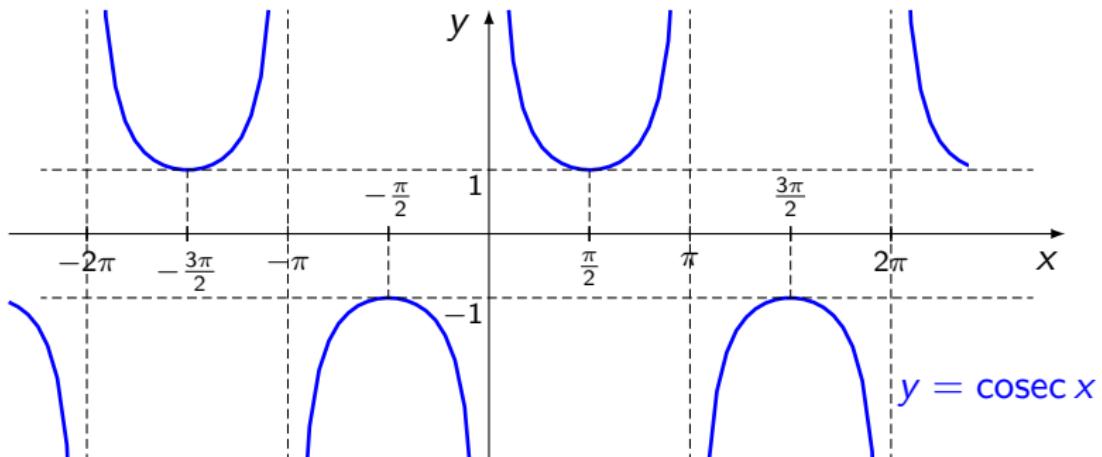
► Função periódica de período 2π , isto é,

$$\text{cosec } x = \text{cosec}(x + 2k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

► Função ímpar;

► Não é injetiva;

► $(\text{cosec } x)' = -\cotg x \text{ cosec } x, \forall x \in D.$



Obs. 1.34

A função cossecante não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [0, \frac{\pi}{2}]$ já é injetiva. À inversa dessa restrição chama-se **função arco cossecante**

Exer. 1.35

Defina formalmente e esboce o gráfico da função arco cossecante.

Obs. 1.36

Função	Domínio	Contradomínio
$\text{arcsen } x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\text{arccos } x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\text{arctg } x$	\mathbb{R}	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
$\text{arccotg } x$	\mathbb{R}	$] 0, \pi [$
$\text{arcsec } x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[0, \pi] \setminus \{ \frac{\pi}{2} \}$
$\text{arccosec } x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

Prop. 1.37

$$1 \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2 \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x, \text{ para } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3 \quad \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \text{ para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4 \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$5 \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$6 \quad \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$7 \quad \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$8 \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$9 \quad \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$10 \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$11 \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Teo. 1.38

Teorema da derivada da função inversa

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e f^{-1} a inversa de f . Se f é diferenciável em $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Exer. 1.39

- 1 Sendo $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(2) = 7$ e $f'(2) = \frac{2}{3}$, calcule, caso exista, $(f^{-1})'(7)$.
- 2 Sabendo que $f(x) = 4x^3 + x + 2$ é invertível, calcule $(f^{-1})'(2)$.
- 3 Seja $f(x) = x^3$. Determine a derivada de f^{-1} utilizando o teorema da função inversa.

Obs. 1.40

Resulta do teorema da derivada da função inversa que:

$$1 \quad (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$2 \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$3 \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4 \quad (\text{arccotg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exer. 1.41

Prove as fórmulas anteriores usando o teorema da derivada da função inversa.

Obs. 1.42

Sejam u e v funções de x , $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

$$\bullet (u^k)' = ku^{k-1}u'$$

$$\bullet (e^u)' = u'e^u$$

$$\bullet (a^u)' = u'a^u \ln a$$

$$\bullet (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\bullet (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$\bullet (\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$\bullet (\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$\bullet (\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$$

$$\bullet (\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\bullet (\sec u)' = u' \operatorname{tg} u \sec u$$

$$\bullet (\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cotg} u \operatorname{cosec} u$$

$$\bullet (\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\bullet (\operatorname{arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\bullet (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\bullet (\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$\bullet (u+v)' = u' + v'$$

$$\bullet (uv)' = u'v + uv'$$

$$\bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exer. 1.43

1 Seja $f(x) = \ln(\arcsen x)$, com $x \in]0, 1[$.

Calcule $(f^{-1})'$ utilizando o teorema da função inversa.

2 Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$ (c) $f(x) = \operatorname{arccotg} (\operatorname{sen}(4x^3))$

(b) $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$

3 Considere a função $f(x) = \arcsen(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

(a) Determine o domínio de f .

(b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1.8.

(a) $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

$CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$

$f^{-1}(y) = \arcsen(2y) - \frac{\pi}{2}$

(b) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$

$CD_{f^{-1}} = [0, 2]$

$f^{-1}(y) = 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$

(c) $D_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$

$CD_{f^{-1}} = [0, 1]$

$f^{-1}(y) = \sen^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$

1.14.

(a) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$

$CD_{f^{-1}} = [0, \pi]$

$f^{-1}(y) = \arccos\left(\frac{1}{y} - 2\right)$

(b) $D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi]$

$CD_{f^{-1}} = [-2, 2]$

$f^{-1}(y) = 2 \cos y$

1.20. (a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

$f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$

(b) $D_{f^{-1}} =]0, \pi[$

$CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

1.26. (a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$CD_{f^{-1}} =]0, 3\pi[$

$f^{-1}(y) = 3 \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{2}\right)$

(b) $D_{f^{-1}} =]\pi, 2\pi[$

$CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = 2 \cotg(y - \pi) + 1$

1.39.

1. $\frac{3}{2}$

2. 1

3. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

1.43.

1. $\left(f^{-1}\right)'(y) = e^y \cos(e^y)$

2. (a) $2x \operatorname{arctg} x + 1$

(b) $-\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

(c) $-\frac{12x^2 \cos(4x^3)}{1+\sen^2(4x^3)}$

(d) $-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos^2 x}}$

3. (a) $[0, 2]$

Teoremas do Cálculo Diferencial

Def. 2.1

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um **maximizante local** de f e $f(a)$ diz-se um **máximo local** de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- a é um **minimizante local** de f e $f(a)$ diz-se um **mínimo local** de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- Aos máximos e mínimos locais chamamos **extremos locais**.
- Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos **extremantes locais**.

Def. 2.2

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um **maximizante global** de f e $f(a)$ diz-se um **máximo global** de f se

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

- a é um **minimizante global** de f e $f(a)$ diz-se um **mínimo global** de f se

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

- Aos máximos e mínimos globais chamamos **extremos globais**.
- Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos **extremantes globais**.

Teo. 2.3

Se $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e D_f é um conjunto compacto, então f atinge em D_f o máximo e o mínimo globais (isto é, $\exists x_1, x_2 \in D_f$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in D_f$).

Obs. 2.4

Notar que um intervalo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Assim, toda a função contínua em $[a, b]$ tem aí máximo e mínimo globais.

Exer. 2.5

Seja $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

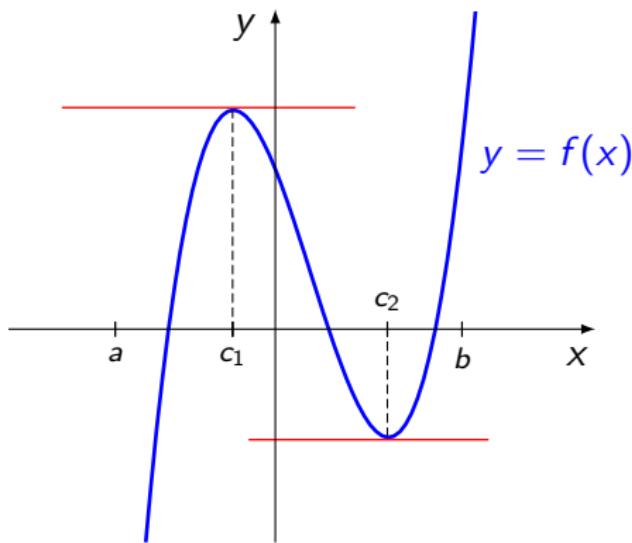
- A função f tem mínimo global em $[-1, 1]$?
- A alínea (a) contradiz o teorema de Weierstrass?

Prop. 2.6

Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in]a, b[$.

Se c é um extremante local de f , então $f'(c) = 0$.

Ilustração gráfica:



Obs. 2.7

- 1 O recíproco da proposição do slide anterior não é verdadeiro. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante.

Por exemplo, $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$.

- 2 Pode acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0 , mas x_0 ser extremante. Por exemplo:

► $f(x) = |x|$, no ponto $x_0 = 0$.

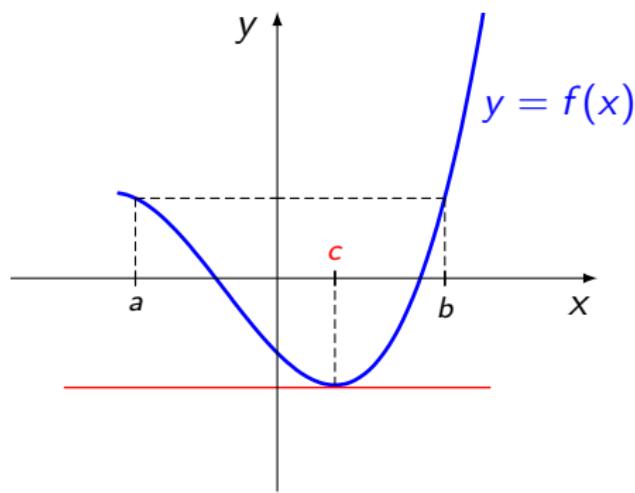
► $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$

Teo. 2.8

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica:



Cor. 2.9

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

- Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f' .
- Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f .

Exer. 2.10

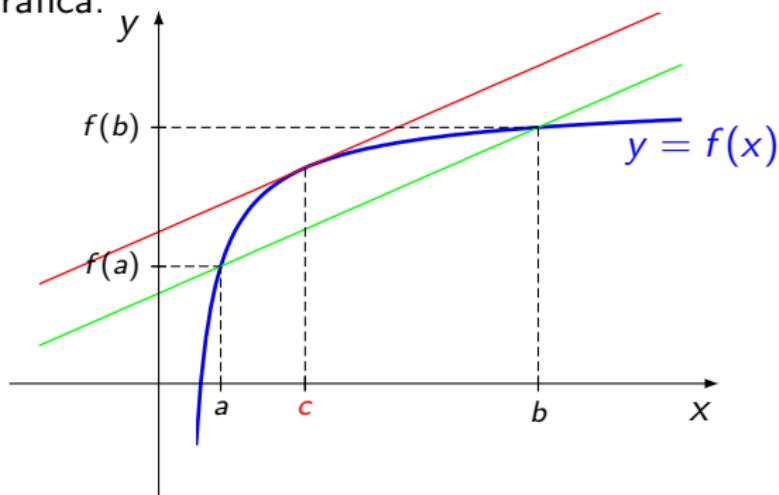
- Seja f a f.r.v.r. definida por $f(x) = \arctg((x - 1)^2) + 2$. Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$.
- Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.
- Mostre que a função definida por $f(x) = \sin x + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Teo. 2.11

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.
Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Ilustração Gráfica:



Exer. 2.12

1 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.
(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

2 Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.

- (a) Determine o domínio de f .
(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$.

3 Seja h uma função de domínio \mathbb{R} tal que $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$ e $h(0) = 0$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Prop. 2.13

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $\text{int}(I)$. Então

- (i) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **constante** em I .
- (ii) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **crescente** em I .
- (iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **decrescente** em I .
- (iv) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **estritamente crescente** em I .
- (v) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **estritamente decrescente** em I .

Prop. 2.14

Seja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subseteq D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$. Então,

- (i) se $f'(x) > 0, \forall x < c$, e $f'(x) < 0, \forall x > c$,
então $f(c)$ é um **máximo local** de f .
- (ii) se $f'(x) < 0, \forall x < c$, e $f'(x) > 0, \forall x > c$,
então $f(c)$ é um **mínimo local** de f .

Exer. 2.15

- 1 Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 - (a) Determine o domínio de f .
 - (b) Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.
- 2 Mostre que $g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x - 1$ tem um único zero em $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 3 Mostre que $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Teo. 2.16

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Obs. 2.17

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — **Regra de Cauchy** — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Prop. 2.18

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$. Se

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.19

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$. Se

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.20

Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em I e diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$.

Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.21

Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I , com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.22

Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I , com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exer. 2.23

1 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arcsen x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{\ln x}$$

2 Mostre que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

2.5.

- (a) Não
- (b) Não

2.12.

1.(a) É contínua em $x = 0$

2.(a) $\left[\frac{1}{e}, e \right]$

2.15.

1.(a) \mathbb{R}^+

(b) Est. crescente em $]0, e[$
Est. decrescente em $]e, +\infty[$

Máximo em $x = e$ cujo valor é $\frac{1}{e}$

2.23.

1. (a) $\frac{2}{3}$
(b) 1
(c) 0
(d) 0
(e) 0
(f) $-\infty$
(g) 1
(h) 1
(i) e
(j) 1

2. 1

Integrais Indefinidos

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 3.1

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo não degenerado (isto é, com mais do que um ponto) de \mathbb{R} .

Chama-se **primitiva ou antiderivada de f** a toda a função F diferenciável em I tal que, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é **primitivável em I** .

Obs. 3.2

- Caso $I = [a, b]$, dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a, b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$.
Convenções análogas para $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

Exer. 3.3

Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)

- (a) $f(x) = 2x$, em \mathbb{R}
- (b) $f(x) = e^x$, em \mathbb{R}
- (c) $f(x) = \cos x$, em \mathbb{R}
- (d) $f(x) = \frac{1}{x}$, em \mathbb{R}^+

Prop. 3.4

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I .
Então, para cada $C \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + C$ é também uma
primitiva de f em I .

Prop. 3.5

Se $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, então
existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo o $x \in I$.

Def. 3.6

À família de todas as primitivas de uma função f chamamos **integral indefinido de f** . Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x) \, dx.$$

A f chamamos **função integranda** e a x **variável de integração**.

Obs. 3.7

- 1 Atendendo à segunda proposição do slide anterior,

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f .

- 2 Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obs. 3.8

$$1 \quad \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x \in \mathbb{R}^-)$$

$$3 \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$4 \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$5 \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$6 \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.8 (cont.)

$$7 \quad \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$8 \quad \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$9 \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$10 \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$11 \quad \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$12 \quad \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Prop. 3.9

Sejam f e g funções definidas em I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos.

Se f e g são primitiváveis em I , então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx .$$

Exer. 3.10

Calcule:

(a) $\int (2^x - 3 \sin x) dx$

(c) $\int \frac{x+3}{x^2} dx$

(b) $\int (x+3)x^2 dx$

(d) $\int \sqrt[5]{x^3} dx$

Prop. 3.11

Sejam I e J dois intervalos de números reais, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.

Se g é diferenciável em J , então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f .

Exemplo de aplicação

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \operatorname{sen}(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12

(Esta lista generaliza os slides 56 e 57, e é uma consequência da Prop. 3.11)

Seja u uma função de x .

$$\text{1} \quad \int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\text{2} \quad \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{3} \quad \int u' e^u dx = e^u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{4} \quad \int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\text{5} \quad \int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{6} \quad \int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12 (cont.)

$$7 \quad \int u' \sec^2 u \, dx = \operatorname{tg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$8 \quad \int u' \operatorname{cosec}^2 u \, dx = -\operatorname{cotg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$9 \quad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$10 \quad \int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arctg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$11 \quad \int u' \sec u \operatorname{tg} u \, dx = \sec u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$12 \quad \int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, dx = -\operatorname{cosec} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exer. 3.13

Determine os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{x^4}{1+x^5} dx \quad (f) \int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx \quad (k) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(b) \int \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) dx \quad (g) \int \frac{x}{x^2+9} dx \quad (l) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(c) \int x 7^{x^2} dx \quad (h) \int \frac{1}{(x+9)^2} dx \quad (m) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(d) \int \operatorname{tg} x dx \quad (i) \int \frac{1}{x^2+9} dx \quad (n) \int \frac{5}{x \ln^3 x} dx$$

$$(e) \int \operatorname{sen} x \cos^5 x dx \quad (j) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (o) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Exer. 3.14

- 1 Determine a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.
- 2 Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \quad \text{e} \quad f(0) = \ln 4.$$

- 3 Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

determinar $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Prop. 3.15

Sejam u e v funções de x diferenciáveis em I . Então

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx.$$

Exemplo de aplicação

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obs. 3.16

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e, além disso, é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação. Por vezes essa escolha é indiferente.
- Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

Exer. 3.17

Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x \cos x \, dx$

(e) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

(b) $\int e^{-3x}(2x + 3) \, dx$

(f) $\int e^{2x} \sin x \, dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(g) $\int \sin(\ln x) \, dx$

(d) $\int x^3 \ln x \, dx$

(h) $\int \ln^2 x \, dx$

Obs. 3.18

1 Potências ímpares de $\sin x$ ou $\cos x$

Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função usando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2 Potências pares de $\sin x$ ou $\cos x$

Passam-se para o arco duplo através das fórmulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{ou} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

3 Produtos onde existem fatores tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$

Aplicam-se as fórmulas

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y));$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$

Obs. 3.18 (cont.)

4 Potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ou $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplicam-se as fórmulas

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}^2 x = \cosec^2 x - 1.$$

5 Potências pares de $\sec x$ ou $\cosec x$

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\cosec^2 x$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{ou} \quad \cosec^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

6 Potências ímpares de $\sec x$ ou $\cosec x$

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\cosec^2 x$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

Exer. 3.19

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \cos^2 x \, dx$

(f) $\int \sec^6 x \, dx$

(b) $\int \sin^3 x \, dx$

(g) $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

(c) $\int \tan^6 x \, dx$

(h) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

(d) $\int \sin^4 x \, dx$

(i) $\int \sin(3x) \cos(4x) \, dx$

(e) $\int \sec^3 x \, dx$

(j) $\int \sin(2x) \sin(-3x) \, dx$

Prop. 3.20

Sejam I e J intervalos de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e invertível tal que $\varphi(J) \subseteq I$. Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f .

Obs. 3.21

Na prática, quando calculamos uma primitiva recorrendo à proposição anterior, usando a mudança de variável $x = \varphi(t)$, escrevemos, por abuso de linguagem,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = H(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo de aplicação da técnica de primitivação por substituição

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx$$

Substituição de variável: $\sqrt{2x} = t$, donde resulta $x = \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$.

$\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ é diferenciável e invertível em \mathbb{R}_0^+ e $\varphi'(t) = t$. Assim

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx &= \int \frac{t}{1 + t} dt \\&= \int \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt \\&= t - \ln|1 + t| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\&= \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exer. 3.22

Determine, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x^2 \sqrt{1-x} dx$

(e) $\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx$

(b) $\int x(2x+5)^{10} dx$

(f) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

(g) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

(h) $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)} dx$

Obs. 3.23

As **substituições trigonométricas** dadas na seguinte tabela permitem transformar a primitivação de uma função que envolve radicais na primitivação de uma função trigonométrica.

função com o radical	substituição
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}, \ a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \sen t, \text{ com } t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}, \ a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \tg t, \text{ com } t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}, \ a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \sec t, \text{ com } t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Exer. 3.24

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$

(e) $\int \sqrt{4-(x+1)^2} dx$

(b) $\int x\sqrt{8+x^2} dx$

(f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(c) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}} dx$

(g) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

(d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx$

(h) $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$

Def. 3.25

Uma função cuja expressão analítica admite a forma

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo, diz-se uma **função racional**.

Caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma **fração própria**.

Prop. 3.26

Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, então existem polinómios Q e R tais que

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x),$$

com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$.

A Q e R chamamos quociente e resto da divisão de N por D , respetivamente.

Obs. 3.27

Assim, caso $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

↙ ↘
polinómio fração própria

Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx ,$$

e a primitivação de funções polinomiais é imediata, a primitivação de funções racionais reduz-se à primitivação de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à **primitivação de frações simples**.

Def. 3.28

Chamamos **fração simples** a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de frações simples

$$\frac{2}{x - 1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{1}{(x^2 + x + 2)^3}$$

Prop. 3.29

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Obs. 3.30

Fração a decompor: $\frac{R(x)}{D(x)}$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

Procedimento

- 1 Decompor $D(x)$ em fatores irreduutíveis:

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_n)^{p_n} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{q_1} \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{q_m}$$

onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com
 $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

- 2 Fazer corresponder a cada factor de $D(x)$ uma determinada fração simples de acordo com o seguinte:

- (i) Ao fator de $D(x)$ do tipo $(x - \alpha)^r$ ($r \in \mathbb{N}$) corresponde

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r}$$

onde A_1, \dots, A_r são constantes reais a determinar.

Procedimento (cont.)

(ii) Ao fator de $D(x)$ do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \text{ com } \beta^2 - 4\gamma < 0 \quad \text{e} \quad s \in \mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $i = 1, \dots, s$.

- 3 Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Primitivação de Frações Simples

1 Fração do tipo: $\frac{A}{(x - \alpha)^r}$

Se $r = 1$, $\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln|x - \alpha| + C, C \in \mathbb{R}$

Se $r \neq 1$, $\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A(x - \alpha)^{-r+1}}{-r + 1} + C, C \in \mathbb{R}$

2 Fração do tipo: $\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$

Reduz-se à primitivação de frações do tipo (i) ou (ii):

(i) $\frac{t}{(1 + t^2)^s}$

(ii) $\frac{1}{(1 + t^2)^s}$

Primitivação das frações do tipo (i) e (ii) do slide anterior

(i) Fração do tipo: $\frac{t}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } s \neq 1, \int \frac{t}{(1+t^2)^s} dt = \frac{(1+t^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(ii) Fração do tipo: $\frac{1}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se $s \neq 1$, aplica-se o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de $\int \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exer. 3.31

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$

(e) $\int \frac{x+2}{x(x^2 + 4)} dx$

(b) $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx$ (f) $\int \frac{x^3 + 4x - 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

(c) $\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)^2} dx$

(g) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$

(d) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

(h) $\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx$

Exer. 3.32

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$

(e) $\int x \ln(1 + x^2) dx$

(b) $\int x \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$

(f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

(c) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

(g) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$

(d) $\int \frac{(\operatorname{arc sen} x)^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

(h) $\int \frac{6x^2 - 7x - 1}{(2x^2 + 1)(x - 2)} dx$

3.3.

- (a) x^2
- (b) $e^x + 3$
- (c) $\operatorname{sen} x$
- (d) $\ln x$

3.10.

- (a) $\frac{2^x}{\ln 2} + 3 \cos x + c, c \in \mathbb{R}$
- (b) $\frac{x^4}{4} + x^3 + c, c \in \mathbb{R}$
- (c) $\ln |x| - \frac{3}{x} + c, c \in \mathbb{R}$
- (d) $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c, c \in \mathbb{R}$

3.13.

- (a) $\frac{1}{5} \ln |1+x^5| + c, c \in \mathbb{R}$
- (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\sqrt{2}x) + c, c \in \mathbb{R}$
- (c) $\frac{7x^2}{2 \ln 7} + c, c \in \mathbb{R}$
- (d) $-\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}$
- (e) $-\frac{\cos^6 x}{6} + c, c \in \mathbb{R}$
- (f) $e^{\operatorname{tg} x} + c, c \in \mathbb{R}$
- (g) $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 9| + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $-\frac{1}{x+9} + c, c \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$

(j) $\operatorname{arctg}(e^x) + c, c \in \mathbb{R}$

(k) $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen}(x^2) + c, c \in \mathbb{R}$

(l) $-\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + c, c \in \mathbb{R}$

(m) $\frac{\ln^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(n) $-\frac{5}{2} \frac{1}{\ln^2 x} + c, c \in \mathbb{R}$

(o) $\ln |\ln x| + c, c \in \mathbb{R}$

3.14.

1. $-\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}$

2. $2 \ln |3+e^x| - \ln 4$

3. $\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$

3.17.

(a) $x \operatorname{sen} x + \cos x + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $-\frac{e^{-3x}(6x+11)}{9} + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{e^{2x}(2 \operatorname{sen} x - \cos x)}{5} + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c, c \in \mathbb{R}$

3.19.

(a) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)) + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{12x - 8 \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x)}{32} + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{\sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $-\frac{\cos^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c, c \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{\cos(7x)}{7} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(j) $\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} - \operatorname{sen} x \right) + c, c \in \mathbb{R}$

3.22.

(a) $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1}) + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $-2 \cos(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{3}{2} \ln|x^{\frac{2}{3}} + 1| + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\operatorname{arctg}(\ln x) + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $-\frac{1}{e^x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + c, c \in \mathbb{R}$

3.24.

(a) $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{1}{3}(8+x^2)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{2}{x} \right| + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{2} \right) + \frac{(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{x} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + c, c \in \mathbb{R}$

3.31.

(a) $3 \ln|x-3| - 2 \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $-\ln|x-2| + \frac{5}{4} \ln|x-3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{1}{16} \left(-\frac{4}{x+3} + 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+3| \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(4+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + c, c \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - \operatorname{arctg}(x+2) + c, c \in \mathbb{R}$

3.32.

(a) $-\frac{1}{2} \cos(e^{2x}) + c, c \in \mathbb{R}$

(b) $-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{1+x^2}{2} (\ln(1+x^2) - 1) + c, c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c, c \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{9}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

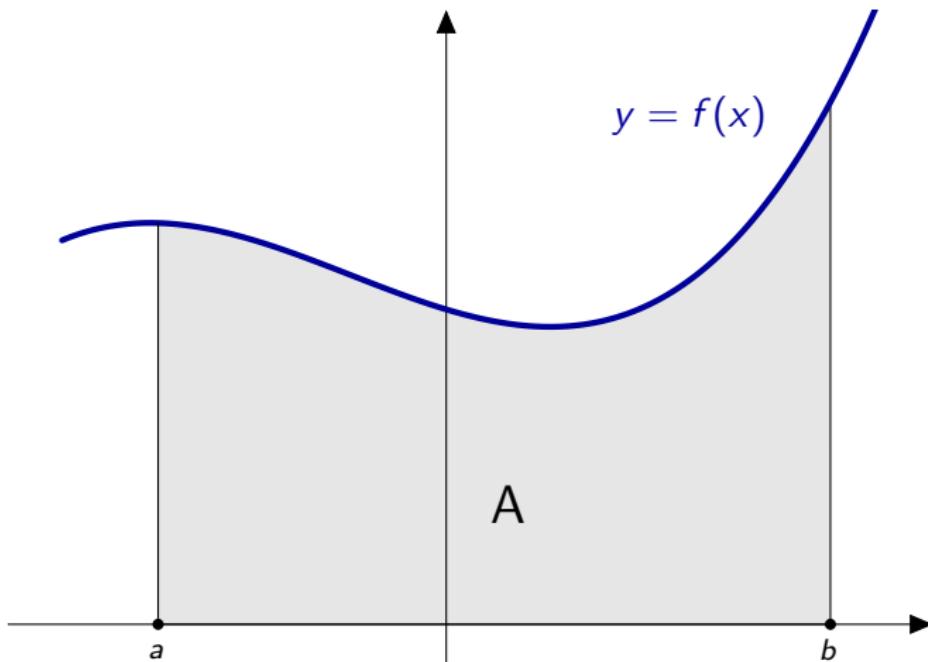
(h) $\ln|x-2| + \ln(2x^2 + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + c, c \in \mathbb{R}$

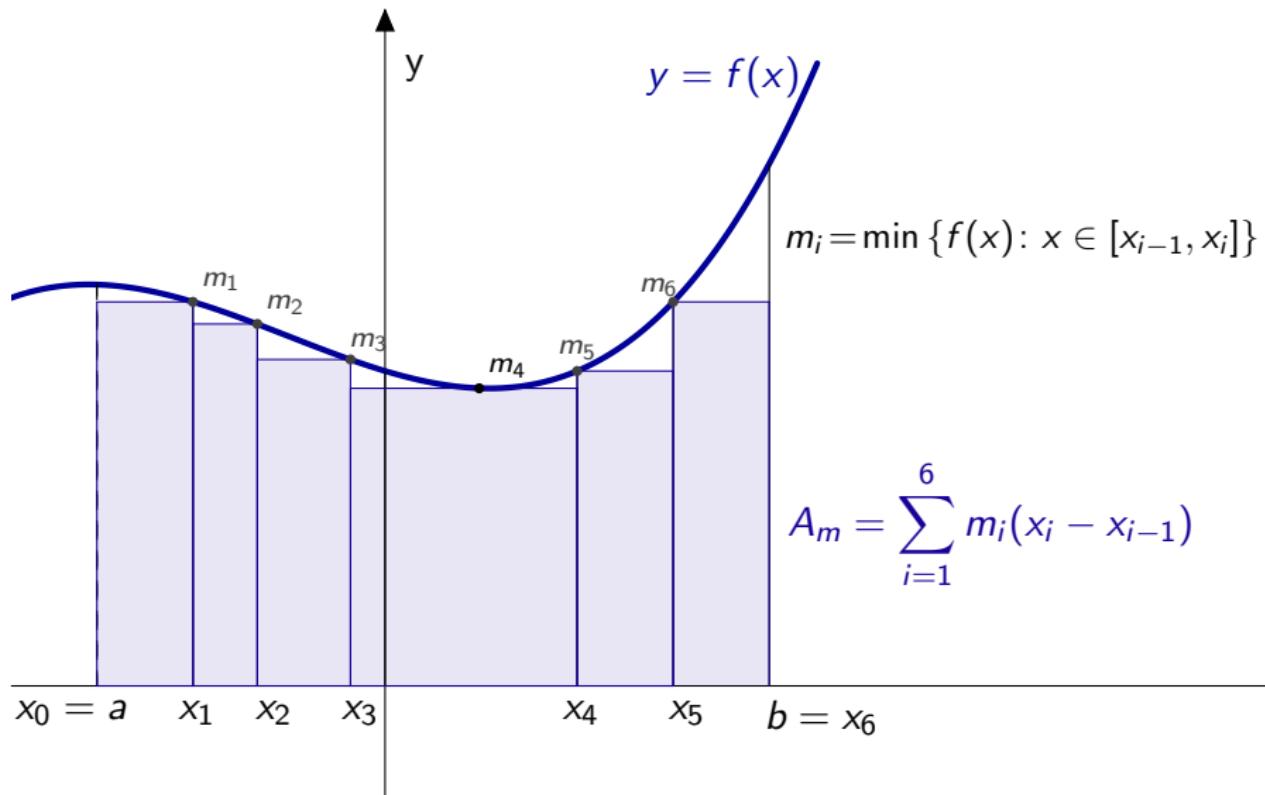
Integrais Definidos

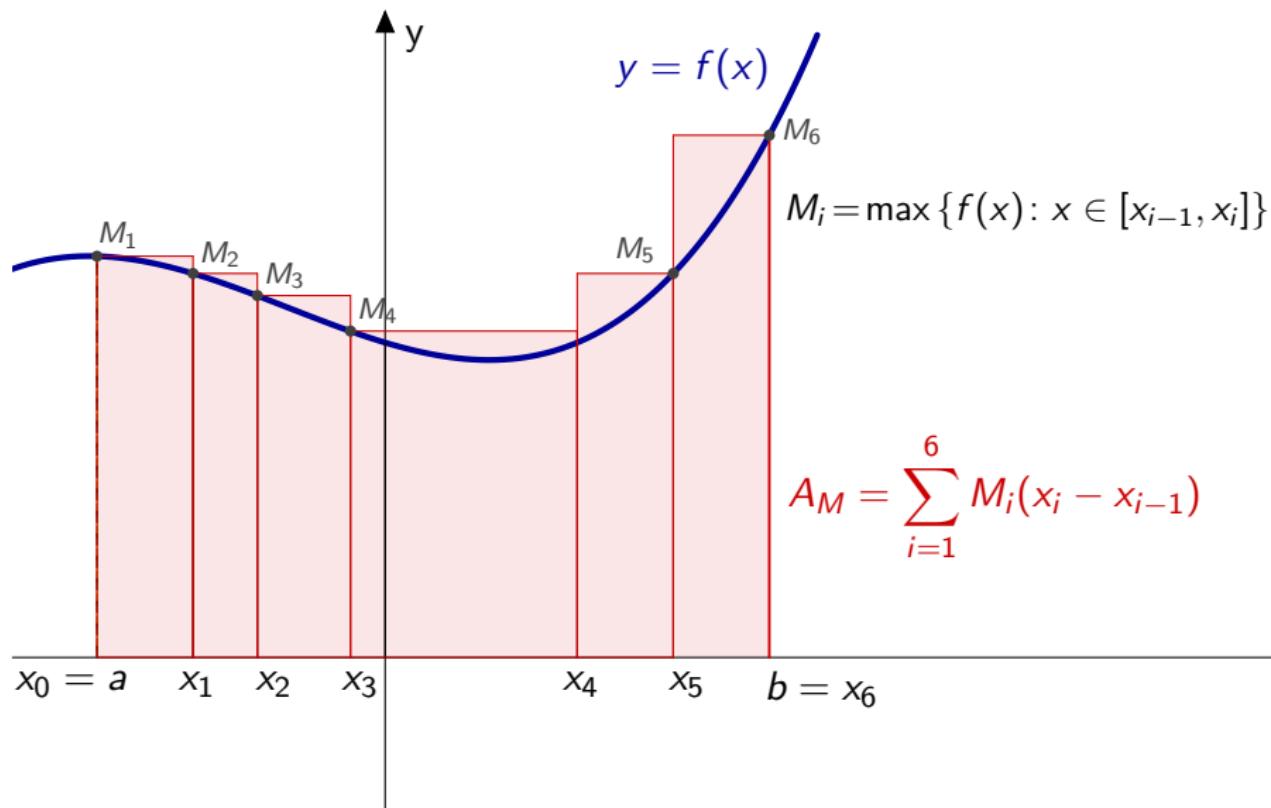
Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

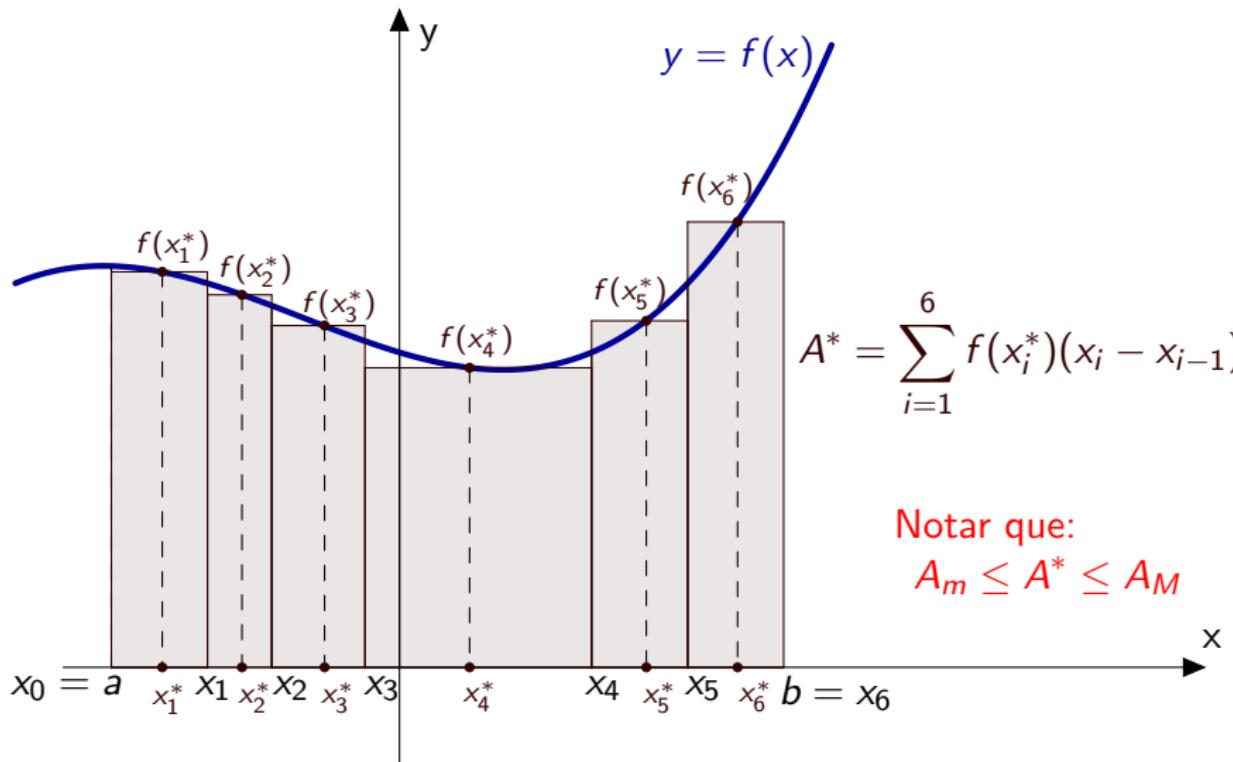
Questão:

Como calcular a área delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$?









Def. 4.1

- Chama-se **partição** de $[a, b]$ a todo o subconjunto finito de $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

tal que $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$.

- Chama-se **diâmetro de \mathcal{P}** , e denota-se por $\Delta\mathcal{P}$, à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é,

$$\Delta\mathcal{P} = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

- Chama-se **seleção de \mathcal{P}** a todo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

tal que $x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2^* \in [x_1, x_2]$, \dots , $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$.

Def. 4.2

Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ uma sua seleção. Chama-se soma de Riemann de f associada à partição \mathcal{P} e seleção \mathcal{C} à seguinte soma,

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Exer. 4.3

- 1 Determine uma partição \mathcal{P} de $[0, 4]$ com 4 pontos e uma sua seleção \mathcal{C} .
- 2 Calcular a soma de Riemann de $f(x) = \sqrt{x}$ associada à partição \mathcal{P} e seleção \mathcal{C} anteriores.

Obs. 4.4

Nos slides anteriores, as somas A_m , A_M e A^* são somas de Riemann de f para uma mesma partição de $[a, b]$ em 6 sub-intervalos, para três seleções diferentes.

Def. 4.5

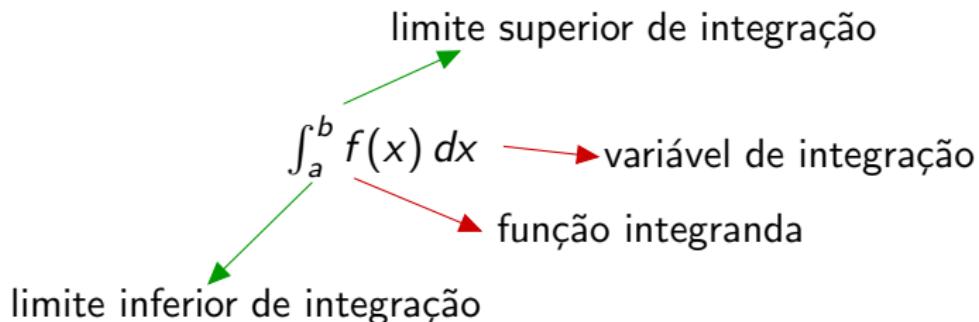
Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $I \in \mathbb{R}$. Diz-se que I é o integral de Riemann (ou integral definido) de f em $[a, b]$ (ou de a para b) se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda a partição \mathcal{P} de $[a, b]$, tal que $\Delta\mathcal{P} < \delta$, se tem

$$|S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) - I| < \epsilon$$

para toda a seleção \mathcal{C} de \mathcal{P} .

Caso exista I , nas condições anteriores, diz-se que f é integrável em $[a, b]$ e escreve-se

$$I = \int_a^b f(x) dx .$$



Obs. 4.6

- A variável de integração é uma variável muda, i.e., podemos escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du, \text{ por exemplo.}$$

- Na definição de integral de Riemann considerou-se $a < b$.

Caso $a = b$, $\int_a^b f(x) dx = 0$;

Caso $a > b$, $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Prop. 4.7

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e I um número real.

Então I é o integral de Riemann de f de a para b se e só se, para toda a sucessão $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Delta \mathcal{P}_n) = 0$$

se tem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I ,$$

para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{C}_n é uma seleção de \mathcal{P}_n .

Exer. 4.8

- 1 Sabendo que f definida por $f(x) = x$ é integrável em $[0, 1]$, mostre usando a proposição anterior que

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

- 2 Seja $k \in \mathbb{R}$. Sabendo que f definida por $f(x) = k$ é integrável no intervalo $[a, b]$, mostre usando a proposição anterior que

$$\int_a^b k \, dx = k(b - a)$$

Obs. 4.9

O cálculo do valor de $\int_a^b f(x) \, dx$ usando a definição pode por vezes ser complicado. Mais à frente veremos como determinar o valor do integral conhecendo apenas uma primitiva de f em $[a, b]$.

Prop. 4.10

Seja f uma f.r.v.r definida em $[a, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se, para todo o $\epsilon > 0$, existe uma partição

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que, para todas as seleções $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ e $\mathcal{C}' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ de \mathcal{P} , se tem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i^*) - f(x'_i)|(x_i - x_{i-1}) < \epsilon .$$

Exer. 4.11

Verifique que a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é limitada mas não é integrável em $[0, 1]$.

Prop. 4.12

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é integrável em $[a, b]$ então f é limitada em $[a, b]$.

Obs. 4.13

- A proposição anterior permite concluir que
 f não é limitada em $[a, b] \Rightarrow f$ não é integrável em $[a, b]$.
- A proposição anterior é apenas necessária, isto é, existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo (ver Exer. 6.11).

Exer. 4.14

Mostre que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a < 0 < b$.

Prop. 4.15

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- 1 Se f for contínua em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.
- 2 Se f for limitada em $[a, b]$ e descontínua num número finito de pontos então f é integrável em $[a, b]$.
- 3 Se f for monótona em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Prop. 4.16

Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos (isto é, $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, exceto para um número finito de valores de x), então

$$g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

Exer. 4.17

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no intervalo considerado:

1 $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, em $[0, 4]$

2 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, em $[0, \frac{\pi}{2}]$

3 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$, em $[-2, 1]$

4 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [3, 7] \text{ e } x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$, em $[3, 7]$

Prop. 4.18

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1 $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

- 2 αf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$;

- 3 $f \cdot g$ é integrável em $[a, b]$;

- 4 f é integrável em qualquer sub-intervalo $[c, d]$ de $[a, b]$;

- 5 Se $c \in]a, b[$, então f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

Prop. 4.18 (cont.)

6 Se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;

7 Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx ;$$

8 Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) ;$$

9 $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$

Exer. 4.19

1 Mostre que $\int_0^2 e^{-x^2} dx \geq 0$.

2 Sabendo que

$$\int_1^3 f(x) dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_7^1 f(x) dx = -11,$$

calcule $\int_3^7 f(x) dx$.

3 Mostre que se f é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $[1, 3]$, então

$$f(1) < \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx < f(3).$$

Teo. 4.20

Seja f uma função integrável em $[a, b]$ e

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Então

- (i) F é contínua em $[a, b]$;
- (ii) se f é contínua em $c \in]a, b[$, então F é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$.

Cor. 4.21

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Então F é diferenciável em $[a, b]$ e tem-se que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

isto é,

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Exer. 4.22

- 1 Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

$$(a) \ F(x) = \int_1^x (\sin t^2 + e^{-t^2}) dt \quad (b) \ F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$$

- 2 Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ e seja

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad \text{para } x > 1.$$

Justifique que F é diferenciável em $x = 2$ e calcule $F'(2)$.

- 3 Mostre que se f é uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = 0$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Sugestão: Considere a função $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ e use o Teo. 6.20.

Cor. 4.23

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a).$$

Exer. 4.24

Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

- 1 Justifique que a função F é contínua em $[1, 4]$.
- 2 Calcule $F(1)$ e $F'(2)$.
- 3 Mostre que existe um $c \in]1, 4[$ tal que $F(4) = 3c^2$.

Cor. 4.25

Se f é contínua em $[a, b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Cor. 4.26

Sejam I um intervalo aberto de \mathbb{R} , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ e $g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em I tais que $g_1(I) \subseteq]a, b[$ e $g_2(I) \subseteq]a, b[$.

Então a função H definida em I por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt ,$$

é diferenciável em I e, $\forall x \in I$,

$$H'(x) = f(g_2(x))g'_2(x) - f(g_1(x))g'_1(x) .$$

Exer. 4.27

1 Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

$$(a) \ F(x) = \int_{x^3}^{\cos x} \ln(t^2 + 1) dt \quad (b) \ F(x) = x^3 \int_1^x e^{-t^2} dt$$

2 Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função definida em \mathbb{R}^+ por

$$F(x) = \int_x^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

3 Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \sin t) dt.$$

(a) Calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Estude a função F quanto à monotonía e existência de extremos locais.

Exer. 4.28

- 1 Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_0^{x^3} t e^{\sin t} dt.$$

- (a) Justifique que F é diferenciável em \mathbb{R} e determine $F'(x)$.
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\sin x}$
- 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função contínua. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Justifique que φ é diferenciável em \mathbb{R} e determine $\varphi'(x)$.
- (b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$.

Prop. 4.29

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Obs. 4.30

Notação: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left[F(x) \right]_a^b$

Exemplos de aplicação:

$$1 \quad \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}$$

$$2 \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{y \ln y} dy = \left[\ln |\ln y| \right]_e^{e^2} = \ln |\ln(e^2)| - \ln |\ln(e)| = \ln(2)$$

Exer. 4.31

1 Calcule

(a) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

(b) $\int_{-\pi}^0 \sin(3x) dx$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

(d) $\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x + 3}} dx$

(e) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

(f) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

2 Calcule $\int_{-1}^1 f(x) dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$

Prop. 4.32

$$\int_a^b u'v \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \, dx.$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos x \, dx &= [\operatorname{sen} x \cdot x]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx \\&= 0 - [-\cos x]_0^\pi \\&= \cos \pi - \cos 0 = 2\end{aligned}$$

Exer. 4.33

Calcule:

(a) $\int_0^1 (x+2)e^x \, dx$ (b) $\int_1^e x \ln x \, dx$

Prop. 4.34

Sejam f uma função contínua em I e

$$\begin{aligned}\varphi : J &\longrightarrow I \\ t &\mapsto x = \varphi(t)\end{aligned}$$

diferenciável em J e tal que φ' é contínua em J .

Sejam $a, b \in I$ e $c, d \in J$ tais que $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Obs. 4.35

I e J denotam intervalos não degenerados de \mathbb{R} .

Exer. 4.36

Calcule:

(a) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx$

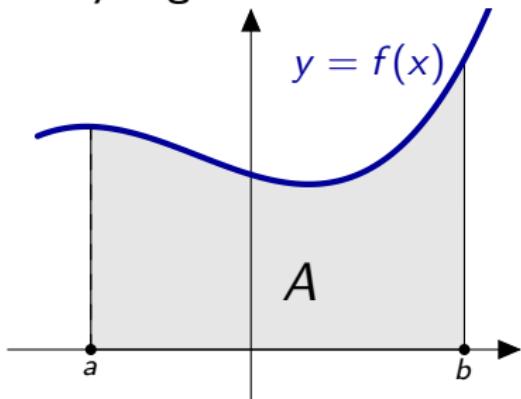
(b) $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$

Prop. 4.37

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ilustração gráfica



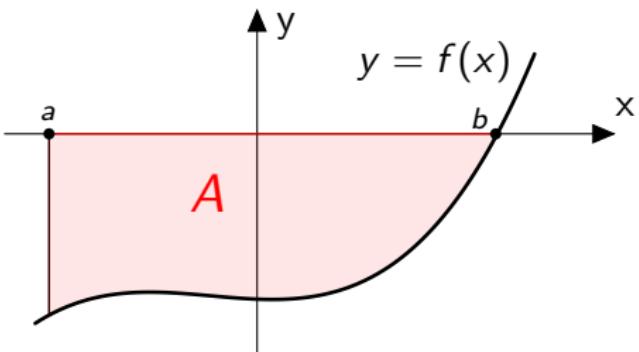
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Prop. 4.38

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

Ilustração gráfica



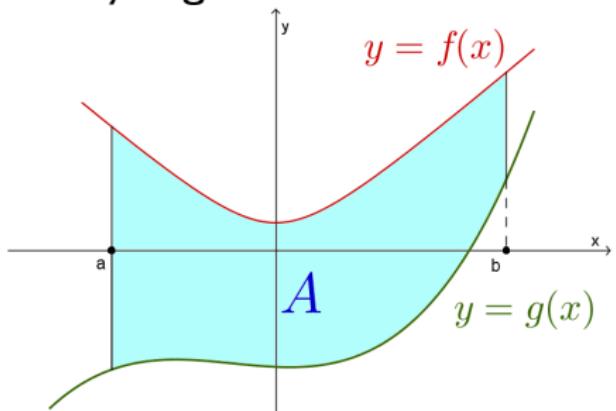
$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

Prop. 4.39

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$,
 $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelos gráficos
de f e de g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Ilustração gráfica



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Exer. 4.40

- 1 Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.
- 2 Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abscissas e pelo gráfico da função h definida por

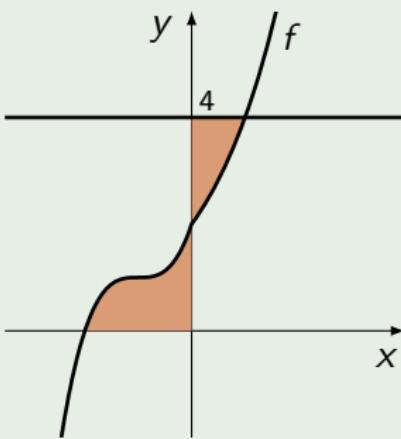
$$h(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 3 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2, y \geq x-1, y \leq 4\}$.
 - (a) Represente geometricamente a região A .
 - (b) Calcule o valor da área da região A .

Exer. 4.41

Calcule a área da seguinte região sombreada, onde

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$



4.3.

1. Por exemplo:
 $\mathcal{P} = \{0, 1, 3, 4\}$
 $\mathcal{C} = \{0, 2, 4\}$
2. $2\sqrt{2} + 2$

4.17.

1. Sim
 2. Não
 3. Sim
 4. Sim

4.19.

2. 6

4.22.

1. (a) $\sin(x^2) + e^{-x^2}$
 (b) $-\cos(x^4)$
2. $-2 \ln 2$

4.24.

2. $F(1) = 0$; $F'(2) = 4$

4.27.

1. (a) $-\sin x \ln(\cos^2 x + 1) - 3x^2 \ln(x^6 + 1)$
 (b) $3x^2 \int_1^x e^{-t^2} + x^3 e^{-x^2}$

2. $k = e^{-1}$

3. (a) $2x(4 + \sin(x^2))$
 (b) Est. decresc. em \mathbb{R}^-
 Est. cresc. em \mathbb{R}^+
 Mín 0 em $x = 0$

4.28.

1. (a) $3x^5 e^{\sin(x^3)}$
 (b) 0

2. (a) $2x f(1+x^2) - e^x f(e^x)$

4.31.

1. (a) $\ln 2$
 (b) $-\frac{2}{3}$
 (c) $\frac{\pi}{6}$
 (d) 2

(e) $\frac{1}{2}$

(f) $-\frac{\ln 3}{4}$

2. $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

4.33.

(a) $2e - 1$

(b) $\frac{e^2 + 1}{4}$

4.36.

(a) $\frac{\ln 3}{4}$

(b) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.40.

1. $\frac{1}{3} + \ln 2$

2. $\frac{\pi^2}{72}$

3. (b) $\frac{37}{6}$

4.41. $6 - \frac{2}{\ln 2}$

Integrais Impróprios

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Obs. 5.1

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f , esteja definida num intervalo fechado e limitado, I , e que f seja limitada. Vamos agora estender este conceito omitindo uma (ou as duas) dessas condições, passando ao estudo do que chamamos **Integrais Impróprios**.

Os **Integrais Impróprios** podem ser de três espécies:

1.^a Espécie: I é ilimitado

2.^a Espécie: f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I

3.^a Espécie: I é ilimitado e f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I

Def. 5.2

Integral impróprio de 1.^a espécie no limite superior de integração

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$.

Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

então o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diz-se **convergente** e
escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctg(x)]_0^t \\&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t \\&= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exer. 5.3

- 1 Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_{\pi}^{+\infty} \cos(x) dx \quad (b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2} dx \quad (c) \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

- 2 Prove que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é:

divergente se $\alpha \leq 1$;

convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

- 3 Prove que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx$ é:

divergente se $\beta \geq 0$;

convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx = -\frac{1}{\beta}$.

Def. 5.4

Integral impróprio de 1.^a espécie no limite inferior de integração

Seja $f :] -\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, $\forall t \leq a$.

Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

então o integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ diz-se **convergente** e
escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctg(x)]_t^1 \\&= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg t \right) \\&= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Exer. 5.5

- 1 Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{4-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{1+(x+1)^2} dx$

- 2 Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^0 a^x dx$$

Prop. 5.6

Sejam $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$. Então verificam-se as seguintes condições:

- 1 Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ são convergentes, então $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$
- 2 Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x)) dx$ é divergente, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obs. 5.7

Resultado análogo é válido para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Prop. 5.8

Sejam $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Obs. 5.9

Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Exemplos de aplicação:

- 1 Pelo Exercício 7.3.2 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

- 2 Como, atendendo ao Exercício 7.3.2, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} x^2 dx \text{ é divergente, então o integral impróprio}$$

$$\int_3^{+\infty} x^2 dx \text{ também é divergente.}$$

Def. 5.10

Integral impróprio de 1.^o espécie em ambos os limites de integração

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

- 1 Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{são ambos convergentes}$$

dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **convergente**
e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Def. 5.11 (cont.)

2 Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **divergente**.

Exer. 5.12

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$

Prop. 5.13

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

- (i) se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- (ii) se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente.

Obs. 5.14

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} . \text{(justifique!)} \quad (1)$$

Uma vez que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Prop. 5.15

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ têm a mesma natureza.
- (ii) Se $L = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- (iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que, $\forall x \in [1, +\infty[, \sin \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 .$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Obs. 5.16

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Estudo da natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx.$

$$\forall x \in] -\infty, 0], \frac{e^x}{(x-1)^2} > 0 \text{ e } \frac{1}{(x-1)^2} > 0.$$

Uma vez que

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

e que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ é convergente (**verifique!**), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$ é convergente.

Exer. 5.17

Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$$

(d)
$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}} dx$$

(b)
$$\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1} dx$$

(e)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^7 + 2x + 1} dx$$

(c)
$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$$

(f)
$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2} dx$$

Def. 5.18

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é **absolutamente convergente**, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

é também convergente.

Prop. 5.19

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$. Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Obs. 5.20

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exer. 5.21

Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$(b) \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2x^4} dx, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Def. 5.22

Integral impróprio de 2.^a espécie no limite inferior de integração

Seja $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, $\forall a < t \leq b$.

Se existe e é finito

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é **convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Def. 5.23

Integral impróprio de 2.^a espécie no limite de integração superior

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall a \leq t < b$.

Se existe e é finito

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é **convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Def. 5.24

Integral impróprio de 2.^a espécie em ambos os limites de integração

Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t_1, t_2]$, para todos os t_1 e t_2 tais que $a < t_1 < t_2 < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é **convergente** se, para algum $c \in]a, b[$, os integrais

$$\int_a^c f(x) dx \text{ e } \int_c^b f(x) dx$$

são ambos convergentes e escreve-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Def. 5.25

Integral impróprio de 2.^a espécie num ponto interior do intervalo de integração

Seja f uma função definida em $[a, b]$ exceto possivelmente em $c \in]a, b[$, e integrável em $[a, t]$, para todo o $a \leq t < c$ e em $[r, b]$, para todo o $c < r \leq b$. Se os integrais impróprios

$\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ forem ambos convergentes,

então o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Exer. 5.26

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} dx$$

$$(c) \int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(d) \int_{-2}^1 \frac{1}{|x|} dx$$

$$(e) \int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$$

Obs. 5.27

As propriedades, definições e critérios de convergência apresentados para os integrais de 1.^a espécie têm as suas versões para os integrais de 2.^a espécie.

Nos slides seguintes apresentamos esses resultados para o caso dos integrais de 2.^a espécie no limite inferior de integração, para os outros o estudo faz-se analogamente.

Prop. 5.28

Sejam $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$. Então verificam-se as seguintes condições:

1 Se $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ são convergentes, então

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx .$$

2 Se $\int_a^b f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^b (\alpha f(x)) dx$ é divergente, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prop. 5.29

Sejam $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$, e $a < b' < b$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{b'} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b'} f(x) dx + \int_{b'}^b f(x) dx.$$

Prop. 5.30

Sejam f e g duas funções definidas em $]a, b]$, integráveis em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

para todo o $x \in]a, b]$. Então:

- (i) se $\int_a^b g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x) dx$ é convergente.
- (ii) se $\int_a^b f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^b g(x) dx$ é divergente.

Prop. 5.31

Sejam f e g duas funções definidas em $]a, b]$ e integráveis em $[t, b]$, $\forall t \in]a, b]$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in]a, b]$. Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ têm a mesma natureza.
- (ii) Se $L = 0$ e $\int_a^b g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x) dx$ é convergente.
- (iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^b g(x) dx$ é divergente, então $\int_a^b f(x) dx$ é divergente.

Def. 5.32

Seja $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.

Dizemos que o integral impróprio

$\int_a^b f(x) dx$ é absolutamente convergente,

se o integral impróprio

$\int_a^b |f(x)| dx$ é também convergente.

Prop. 5.33

Seja $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.

Se o integral impróprio

$\int_a^b f(x) dx$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Exer. 5.34

1 Prove que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ é:

divergente se $\alpha \geq 1$;

convergente se $\alpha < 1$ e, neste caso, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

2 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_0^1 \frac{\pi}{1 - \sqrt{x}} dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$

Def. 5.35

Integral impróprio de 3.^a espécie do tipo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$,
onde f é ilimitada ou não está definida em $x = a$.

Seja $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $a < t < t'$.

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é **convergente** se,
 para algum $c \in]a, +\infty[$, os integrais impróprios $\int_a^c f(x) dx$ e
 $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Def. 5.36

Integral impróprio de 3.^a espécie do tipo $\int_{-\infty}^b f(x) dx$,
onde f é ilimitada ou não está definida em $x = b$.

Seja $f :] -\infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $t < t' < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ é **convergente** se, para algum $c \in] -\infty, b[$, os integrais impróprios $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

Obs. 5.37

- Definem-se de modo análogo os integrais impróprios de 3.^a espécie dos tipos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

onde f não está definida ou é ilimitada em algum ponto do interior do intervalo de integração.

- Atendendo às definições apresentadas, para estudar a natureza de integrais impróprios de 3.^a espécie, devemos decompor o intervalo de integração de modo conveniente e estudar a natureza de integrais impróprios de 1.^a e de 2.^a espécies (correspondentes).

Exer. 5.38

- 1 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

- 2 Calcule, caso exista, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ sendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \arctg x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.3.

1. (a) Divergente
(b) $\frac{1}{4}$
(c) Divergente

5.5.

1. (a) $-\frac{1}{2}$
(b) Divergente
(c) 3π
2. Diverge se $0 < a < 1$
Converge se $a > 1$
e tem valor $\frac{1}{\ln a}$

5.12.

- (a) Divergente
(b) π
(c) Divergente

5.17.

- (a) Convergente
(b) Convergente
(c) Divergente
(d) Divergente

(e) Convergente
(f) Divergente

5.21.

- (a) Sim
(b) Sim

5.26.

- (a) $\frac{\pi}{2}$
(b) Divergente
(c) 0
(d) Divergente
(e) Divergente

5.34.

2. (a) Divergente
(b) Convergente

5.38.

1. (a) 2
(b) Divergente
2. Divergente

Séries Numéricas

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 6.1

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. Chama-se **série numérica de termo geral** a_n à “soma de todos os termos da sucessão $(a_n)_n$ ”:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

A **sucessão das somas parciais** $(S_n)_n$ associada a esta série é a sucessão definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Obs. 6.2

Um exemplo de série é a **série harmónica** dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Def. 6.3

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe e é finito, caso em que é designado por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Se $(S_n)_n$ é divergente, dizemos que a série é **divergente**.

Exer. 6.4

Estude a convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Def. 6.5

Uma **série geométrica** de razão $r \in \mathbb{R}$, é uma série do tipo

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o primeiro termo da série.

Obs. 6.6

Note-se que o termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = \begin{cases} na, & \text{se } r = 1 \\ a \frac{1 - r^n}{1 - r}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

Obs. 6.6 (cont.)

Conclui-se assim que, para $a \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ converge se e só se } |r| < 1$$

e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Exer. 6.7

Verifique se as seguintes séries são convergentes e em caso afirmativo calcule a sua soma:

- (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ (d) $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$

Def. 6.8

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **redutível** (ou de **Mengoli** ou **telescópica**) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde (u_n) é uma sucessão e $p \in \mathbb{N}$.

Obs. 6.9

No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$

$$S_n = \sum_{k=1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$$

e no caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^p u_k = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} - (u_1 + \cdots + u_p)$$

Obs. 6.9 (cont.)

Assim, a série é convergente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$ for finito.

Além disso, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = k \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = pk$.

Exer. 6.10

Determine a soma (se existir) das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)(n+4)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(f) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

Teo. 6.11

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots, \forall p \in \mathbb{N}$$

têm a mesma natureza. Assim, a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

Obs. 6.12

Como $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ e $S'_n = \sum_{k=p+1}^n a_k$ (com $n > p + 1$), temos

$S_n = S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$, e, portanto, se existir um dos limites o outro também existe:

$$\lim_n S_n = \lim_n S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$$

Teo. 6.13

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Obs. 6.14

O resultado anterior é considerado como um primeiro critério de convergência de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ou não existir $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

revelando-se, assim, como um “critério de divergência”. Note-se que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série.

Exer. 6.15

Analise a natureza das séries seguintes à luz da condição necessária de convergência:

(a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{10} \right)^n}$$

Teo. 6.16

- (a) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas convergentes com somas A e B respectivamente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e tem soma A , então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Teo. 6.16 (cont.)

(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é divergente.

(d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Obs. 6.17

Note-se que o resultado anterior nada diz quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ tanto pode ser convergente como divergente.

Exer. 6.18

Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

(a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12}{n^2 - 1}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{7}{11} \right)^n + \left(\frac{10}{3} \right)^n \right]$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$$

Def. 6.19

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma **série de termos não negativos** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Exer. 6.20

Verifique quais das seguintes séries são séries de termos não negativos:

(a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Teo. 6.21

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

Teo. 6.22

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Teo. 6.23

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Exer. 6.24

Estude a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

Def. 6.25

Às séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos **séries de Dirichlet** (ou **série harmónica de ordem α**).

Obs. 6.26

A convergência destas séries é analisada usando o critério do integral. É fácil ver que (exercício!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é : } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente se } \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Exer. 6.27

Indique a natureza das seguintes séries

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n^5}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$$

Obs. 6.28

Convém notar que, na utilização do critério do integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio quando este é convergente **não é** a soma da respectiva série.

Teo. 6.29

Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Então:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Obs. 6.30

Convém notar que, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, nada se pode concluir.

Teo. 6.31

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(a) se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.

(b) se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(c) se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Obs. 6.32

Podemos assim concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Em muitas situações, as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ revelam-se de grande utilidade (como referência).

Exer. 6.33

Use o critério da comparação ou o critério do limite para estudar a natureza das séries seguintes:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^3}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n - 13}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^6 + 1}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3 + 2}}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$$

Def. 6.34

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente **série dos módulos**.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente**.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente**.

Teo. 6.35

Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

Obs. 6.36

- (a) Realça-se que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta pode ser convergente ou divergente.
- (b) Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

Exer. 6.37

Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

Teo. 6.38

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

- (a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.
- (b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
- (c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Teo. 6.39

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

- (a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.
- (b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
- (c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Exer. 6.40

Estude a natureza das seguintes séries:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$$

Def. 6.41

Uma **série alternada** é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exer. 6.42

Verifique se as seguintes séries são alternadas:

(a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n!}$$

Teo. 6.43

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ uma série alternada. Se

(a) a sucessão (a_n) é monótona decrescente;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

então a série é convergente.

Exer. 6.44

Estude a natureza das seguintes séries usando o critério de Leibniz.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

Exer. 6.45

Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) das seguintes séries numéricas:

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/n)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} - 1}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{5^n} \right]$$

6.4.

- (a) Div.
- (b) Conv. e $S = 0$ se $\alpha = 0$;
Div. se $\alpha \neq 0$
- (c) Conv. e $S = 1$

6.7.

- (a) Conv. e $S = 100$
- (b) Div.
- (c) Conv. e $S = 1$
- (d) Conv. e $S = \frac{1}{4}$

6.10.

- (a) $S = \frac{3}{2}$
- (b) Div.
- (c) $S = 1$
- (d) $S = \frac{1}{2}$
- (e) $S = \frac{47}{60}$
- (f) $S = \frac{3}{2}$

6.15.

- (a) Div.
- (b) Nada se pode concluir
- (c) Nada se pode concluir

(d) Div.

- (e) Div.
- (f) Div.

6.18.

- (a) Div.
- (b) Conv. e $S = 9$
- (c) Div.
- (d) Conv. e $S = 2$

6.20.

- (a) Não
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

6.24.

- (a) Div.
- (b) Conv.
- (c) Div.

6.27.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.
- (d) Div.

6.33.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.

- (d) Conv.
- (e) Conv.
- (f) Div.
- (g) Conv.
- (h) Div.

6.37.

- (a) Sim
- (b) Não
- (c) Sim
- (d) Não

6.40.

- (a) Abs. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Abs. Conv.
- (f) Div.
- (g) Div.
- (h) Div.
- (i) Abs. Conv.
- (j) Div.

6.42.

- (a) Sim
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

6.44.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Nada se pode concluir
- (d) Conv.

6.45.

- (a) Simp. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Simp. Conv.
- (f) Simp. Conv.