Matemática Discreta

Relações binárias

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Pares ordenados e produto cartesiano

Definição (de par ordenado)

Dados x e y, designa-se por par ordenado e denota-se por (x, y) o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ou seja, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Adicionalmente, dizemos que x é o primeiro elemento e y o segundo.

- Mais geralmente, temos o n-uplo ordenado:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= (x_1, (x_2, x_3, \ldots, x_n)), \quad n \geq 3 \\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, (x_2, x_3, \ldots, x_n)\}\} \\ &= \{\{x_1\}, \{x_1, \{\{x_2\}, \{x_2, (x_3, \ldots, x_n)\}\}\}\}.\end{aligned}$$

Produto cartesiano

Definição (produto cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos. Designa-se por produto cartesiano de A e B e denota-se por $A \times B$, o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

- Se $A = B$, então $A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge \ y \in A\}$.

Relações binárias

Definição de relação binária (relação)

Uma relação binária (ou relação) $\mathcal{R}$ entre os conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

- Notação: escreve-se $x\mathcal{R}y$ para indicar $(x, y) \in \mathcal{R}$.
- Exemplo 1: Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$

e

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, c), (2, a)\} \subseteq A \times B$$

é uma relação entre A e B.

Casos particulares

- Se $A = B$, designamos $\mathcal{R} \subseteq A^2$ por relação binária definida em A (ou sobre A).
- Exemplo 2: a relação $\leq$ definida em $A = \{1, 2, 3\}$ é o subconjunto de A^2:

$$\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}.$$

- Nota: usualmente, $(x, y) \in \leq$ denota-se por $x \leq y$.
- Exemplo 3: igualmente se conclui que sendo $\leq$ uma relação binária definida em $\mathbb{N}$,

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}^2.$$

- A relação $I = \{(x, x) : x \in A\}$ designa-se por relação identidade de A ou definida em A.

Domínio e imagem

Definição (de domínio e imagem)

Sejam A e B dois conjuntos e $\mathcal{R}$ uma relação binária entre A e B.

- Designa-se por domínio de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } y \in B\}.$$

- Designa-se por imagem (ou contradomínio) de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{img}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } x \in A\}.$$

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca de um elemento)

Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

- Designa-se por imagem de $x \in A$ por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}(x)$, o conjunto

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

- Designa-se por imagem recíproca de $y \in B$ por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}^{-1}(y)$, o conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Relação inversa de $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$.

Composição

Definição (de composição de relações)

Dadas duas relações $\mathcal{R}_1$ entre A e B e $\mathcal{R}_2$ entre B e C designa-se por composição de $\mathcal{R}_1$ com $\mathcal{R}_2$ (e escreve-se $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$), a relação entre A e C definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a, c) \in A \times C : \text{ existe } b \in B \quad \text{tal que} \quad & (a, b) \in \mathcal{R}_1 \\ \wedge \quad & (b, c) \in \mathcal{R}_2\}.\end{aligned}$$

Exemplo: sendo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{\alpha, \beta\}$ e considerando as relações $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (2, b)\} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{R}_2 = \{(b, \beta), (c, \alpha)\} \subseteq B \times C$, vamos determinar

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1.$$

Propriedades das relações binárias

Dada uma relação binária $\mathcal{R}$ definida num conjunto A, dizemos que $\mathcal{R}$ é

- reflexiva: se $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in A$ ou, de modo equivalente, se $I \subseteq \mathcal{R}$, onde I denota a relação identidade;
- simétrica: se $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$;
- Anti-simétrica: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R}] \Rightarrow x = y$, para todos $x, y \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R} \subseteq I$;
- Transitiva: se $[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$, para todos $x, y, z \in A$ ou, de modo equivalente, se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Relação de ordem parcial e conjunto parcialmente ordenado

Definição (de ordem parcial)

Uma relação binária diz-se uma relação de ordem parcial se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

- Exemplos de relações de ordem parcial:
  - A relação $\leq$ definida em $\mathbb{N}$.
  - A relação $|$ (divide) definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Definição (de conjunto parcialmente ordenado)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto A, o par $(A, \mathcal{R})$ define um conjunto parcialmente ordenado (cpo).

Relação de ordem total e conjunto totalmente ordenado

Definição (de relação de ordem total ou linear)

Uma relação de ordem parcial, $\mathcal{R}$, definida num conjunto A diz-se uma relação de ordem total (ou relação de ordem linear) se quaisquer que sejam $a, b \in A$ se verifica $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Definição (de conjunto totalmente ordenado)

Diz-se que o par $(A, \mathcal{R})$ define um conjunto totalmente ordenado quando $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total sobre A.

Nota: a proposição $(a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R}$, quaisquer que sejam $a, b \in A$, designa-se por dicotomia.

Exemplos: 1) $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado;
2) a relação $|$ não é uma relação de ordem total no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Relações de equivalência

Definição (de relação de equivalência)

Uma relação binária diz-se uma relação de equivalência se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

- A relação $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação de equivalência em $A = \{a, b, c\}$.
- A relação $\mathcal{R}$ definida por $x \, \mathcal{R} \, y$ se $x - y$ é divisível por 2 é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Definição (de classe de equivalência)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida em A e $x \in A$, então o subconjunto $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ diz-se a classe de equivalência de x e x um seu representante (quando não existem dúvidas em relação a $\mathcal{R}$, essa classe denota-se, simplesmente, por $[x]$).

Propriedades

Teorema

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida num conjunto A, então

1) $[a] \neq \emptyset$, para todo $a \in A$;
2) $a \, \mathcal{R} \, b \Leftrightarrow [a] = [b]$, para todos $a, b \in A$;
3) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

Definição (de conjunto quociente)

Sendo $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência definida num conjunto A, o conjunto das classes de equivalência de A designa-se por conjunto quociente e denota-se por $A/\mathcal{R}$, ou seja,

$$A/\mathcal{R} = \{[x] : x \in A\}$$

Partições

Definição (de partição de um conjunto)

Se A é um conjunto não vazio, então uma colecção de subconjuntos $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

1) $S \neq \emptyset$, para todo $S \in P$;
2) $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$, quaisquer que sejam $S_1, S_2 \in P$;
3) $A = \bigcup_{S \in P} S$.

diz-se uma partição de A.

Nota: os elementos de uma partição P designam-se por blocos de P.

Partições e conjuntos quociente

Teorema
Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência definida num conjunto não vazio A, então o conjunto quociente $A/\mathcal{R}$ é uma partição de A.

Teorema
Seja P uma partição de um conjunto não vazio A e $\mathcal{R}$ a relação definida por $x \mathcal{R} y$ se e só se x e y pertencem ao mesmo bloco de P. Então $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A.

Nas condições do teorema anterior, diz-se que $\mathcal{R}$ é a relação induzida pela partição P.