Matemática Discreta

LPO3

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Formas normais conjuntiva e disjuntiva

Redução de fórmulas à forma normal prenex

Cláusulas da lógica de primeira ordem

Forma normal de Skolem

Definição (de literal e literal complementar)

Um literal é um átomo ou a negação de um átomo. Dois literais dizem-se complementares quando um é a negação do outro.

Definição (de forma normal conjuntiva)

Uma fórmula F diz-se na forma normal conjuntiva se $F \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} F_i$, com $n \geq 1$, onde cada fórmula $F_i \in \{F_1, \ldots, F_n\}$ é uma disjunção de literais.

Definição (de forma normal disjuntiva)

Uma fórmula F diz-se na forma normal disjuntiva se $F \equiv \bigvee_{i=1}^{n} F_i$, com $n \geq 1$, onde cada fórmula $F_i \in \{F_1, \ldots, F_n\}$ é uma conjunção de literais.

Exemplo 1

Se P, Q e R, são fórmulas atómicas, então

- a fórmula F_1: $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$ está na forma normal conjuntiva;
- a fórmula F_2: $(P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q)$ está na forma normal disjuntiva.

Exemplo 2

Sejam P, Q e R fórmulas atómicas e considere a fórmula F: $\neg P \vee (Q \wedge R) \Rightarrow R$.

- Vamos reduzir a fórmula F à forma normal conjuntiva.
- Vamos reduzir a fórmula F à forma normal disjuntiva.

Redução à forma normal disjuntiva prenex

Passo 1: Eliminar $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$:

$$F \Leftrightarrow G \equiv (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F) \quad (1)$$

$$F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G \quad (2)$$

Passo 2: Aplicação da dupla negação e das Leis de De Morgan:

$$\neg(\neg F) \equiv F \quad (3)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (4)$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$

Redução de fórmulas à forma normal disjuntiva prenex (cont.)

Denote-se por $F[x]$ uma fórmula que contém uma variável x e por G uma fórmula que não contém x.

Passo 3: Posicionamento da negações imediatamente antes das proposições atómicas:

$$\neg((\forall x)F[x]) \equiv (\exists x)(\neg F[x]) \quad (6)$$

$$\neg((\exists x)F[x]) \equiv (\forall x)(\neg F[x]) \quad (7)$$

Passo 4: Movimentação dos quantificadores com mudança de variáveis, se necessário:

$$(Qx)F[x] \vee G \equiv (Qx)(F[x] \vee G) \quad (8)$$

$$(Qx)F[x] \wedge G \equiv (Qx)(F[x] \wedge G) \quad (9)$$

$$(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)G[x] \equiv (\forall x)(F[x] \wedge G[x]) \quad (10)$$

$$(\exists x)F[x] \vee (\exists x)G[x] \equiv (\exists x)(F[x] \vee G[x]) \quad (11)$$

$$(Q_1 x)F[x] \wedge (Q_2 x)G[x] \equiv (Q_1 x)(Q_2 z)(F[x] \wedge G[z]) \quad (12)$$

$$(Q_3 x)F[x] \vee (Q_4 x)G[x] \equiv (Q_3 x)(Q_4 z)(F[x] \vee G[z]) \quad (13)$$

Exemplo

Vamos reduzir a fórmula

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

à forma normal prenex.

- $\neg((\forall x)P(x)) \vee (\exists x)Q(x)$ (por aplicação de (2));
- $\equiv (\exists x)(\neg P(x)) \vee (\exists x)Q(x)$ (por aplicação de (6));
- $\equiv (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))$ (por aplicação de (11)).

Cláusulas

Definição (de cláusula)

Uma r-cláusula é uma disjunção finita de r literais

$$L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_r$$

- Uma 0-cláusula é uma cláusula sem literais que se denota por $\Diamond$.

Exemplos de cláusulas

1) $P(x) \vee Q(a) \vee \neg R(y)$;
2) $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))$;
3) $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x)) \vee R(y)$.

Conjunto de cláusulas

- O conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ corresponde à conjunção

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k.$$

Exemplo

O conjunto de cláusulas

$$S = \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x)), T(x, f(x)), R(y)\}$$

corresponde à fórmula (na forma normal conjuntiva)

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))) \wedge (T(x, f(x))) \wedge R(y).$$

Forma normal de Skolem

Definição (de forma normal de Skolem)

Uma fórmula diz-se na forma normal de Skolem se é uma conjunção de cláusulas universalmente quantificadas, ou seja, sem variáveis livres e sem quantificadores existenciais.

Exemplos de fórmulas na forma normal de Skolem:

1. $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(a, y))$;
2. $\forall y \forall z (\neg Q(g(y, f(z))) \vee \neg P(b))$.

Uma vez que as cláusulas são disjunções de literais que não contêm quantificadores e em qualquer expressão na forma normal de Skolem cada variável está associado a um quantificador universal, nem sequer é necessário que tais quantificadores apareçam.