Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Cálculo I - Agrupamento II — Exame Final - Época de Recurso
25 de janeiro de 2016
Duração: **2h30m**

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\cos(x^2)} - e}{x} & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{4 + e^{\frac{1}{x}}} & se \quad x > 0. \end{cases}$

[10pts] (a) Averigúe se o gráfico de f admite assíntota horizontal à esquerda. Justifique convenientemente.

[18pts] (b) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e determine $f'(0)$.

[07pts] (c) A função f é integrável no sentido de Riemann no intervalo $[-3, 1]$? Justifique convenientemente.

[15pts] (d) Sem recorrer à definição, estude a natureza do seguinte integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$.

[15pts] 2. Sendo $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2,\ x \in \mathbb{R}$, mostre que h tem um único zero no intervalo $]-1, 2[$.

3. Considere a função g definida por $g(x) = \operatorname{arcsen}(1 + \ln x) + \frac{\pi}{2}$.

[20pts] (a) Caracterize a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

[10pts] (b) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = \frac{1}{e}$.

4. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[22pts] (a) $\displaystyle\int \frac{9x^2 + 1}{(x-1)(x^2+9)}\, dx$

[23pts] (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2.\sqrt{4 + x^2}}\, dx$ (Sugestão: use a mudança de variável dada por $x = 2 \operatorname{tg} t$)

5. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (t+1) \cdot 3^{\operatorname{sen} t} dt$.

[10pts] (a) Determine, justificando, $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

[13pts] (b) Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

[22pts] 6. Calcule o valor da área da região do plano definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{4}x \le y \le \operatorname{arctg}(x)\}.$$

[15pts] 7. Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = \int_b^x g(t)\, dt$, onde a e b são números reais. Mostre que $f = g$ e que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$.