

Licenciatura em Engenharia Informática

Sistemas Multimédia

Série e Transformada de Fourier e Espectro de Sinais

Telmo Reis Cunha

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro – 2018/2019

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Mostrou-se que um sinal periódico (de período T) pode ser decomposto numa série de senos e/ou cossenos, de frequências múltiplas de $f = 1/T$, denominada **Série de Fourier**:

$$x(t) = \sum_{k=0}^K a_k \cos(2\pi kft) + \sum_{k=1}^K b_k \sin(2\pi kft) = \sum_{k=0}^K A_k \cos(2\pi kft + \varphi_k)$$

- Os coeficientes da série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi kft) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi kft) dt; \quad \forall k > 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (\text{Valor médio do sinal}) \quad b_0 = 0$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -\text{atan2}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Contudo, na maior parte dos casos, os sinais encontram-se discretizados no tempo (não são sinais contínuos).
- A Série de Fourier toma, neste caso, a seguinte forma:

$$x(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cos(2\pi k f n T_a) + \sum_{k=1}^K b_k \sin(2\pi k f n T_a) = \sum_{k=0}^K A_k \cos(2\pi k f n T_a + \varphi_k)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N$

- E os coeficientes desta série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \cos(2\pi k f n T_a); \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \sin(2\pi k f n T_a); \quad \forall k > 0$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad (\text{Valor médio do sinal}) \quad b_0 = 0 \quad N = \frac{T}{T_a}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -\text{atan2}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Considere-se a aplicação da fórmula de Euler à Série de Fourier:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=0}^K A_k \cos(2\pi kft + \varphi_k) = \sum_{k=0}^K A_k \frac{e^{j(2\pi kft + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi kft + \varphi_k)}}{2} = \\&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi kft} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K A_k e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi kft}\end{aligned}$$

- Esta expressão pode ser condensada na seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{k=-K}^K C_k e^{j2\pi kft}, \quad C_k \in \mathbb{C}$$

- Esta é conhecida por **Série Exponencial de Fourier**.

1. Série e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

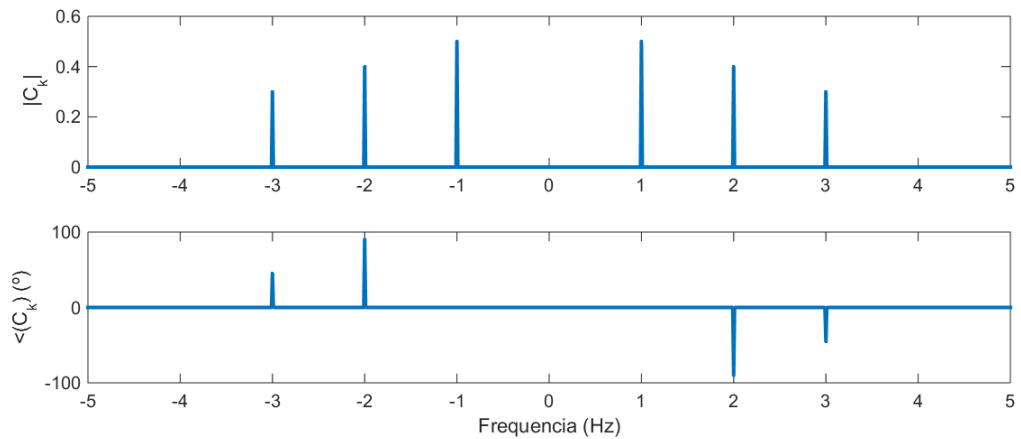
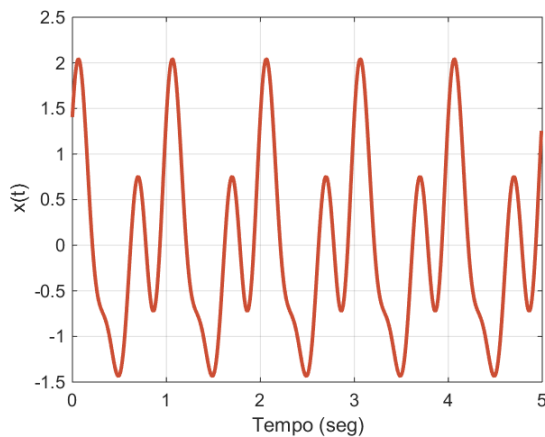
- Esta representação introduz o conceito de frequências “positivas” e “negativas”:

$$x(t) = \sum_{k=-K}^K C_k e^{j2\pi kft}$$

Para sinais reais
verifica-se a
relação: $C_k = C_k^*$

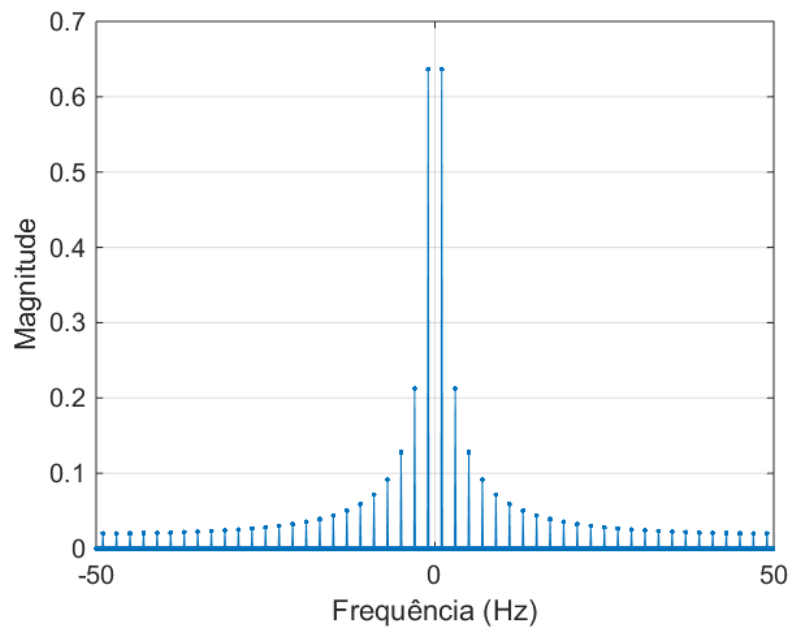
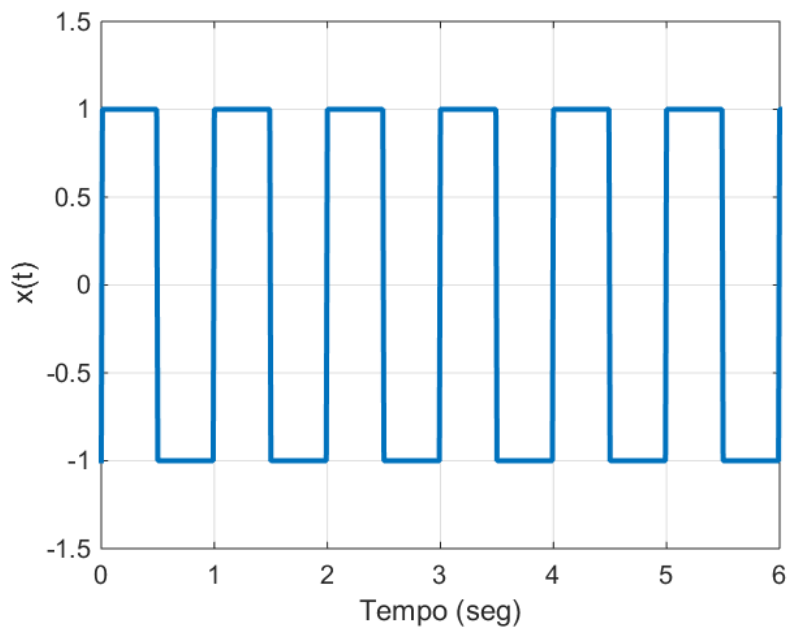
- Esta representação fez surgir o conceito de **Espetro** de um sinal (i.e., o seu conteúdo ao longo da frequência).

Exemplo: $x(t) = \cos(2\pi t) + 0.8 \sin(4\pi t) + 0.6 \cos(6\pi t - \pi/4)$



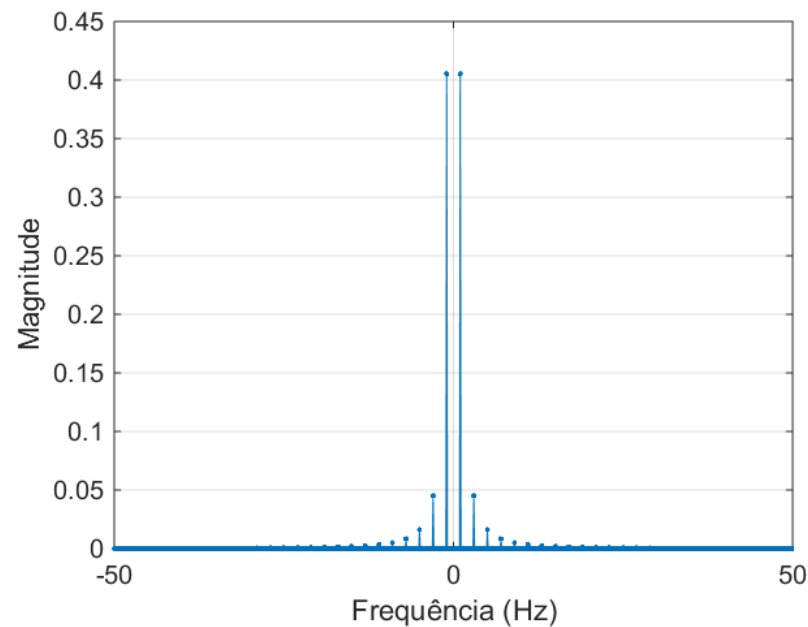
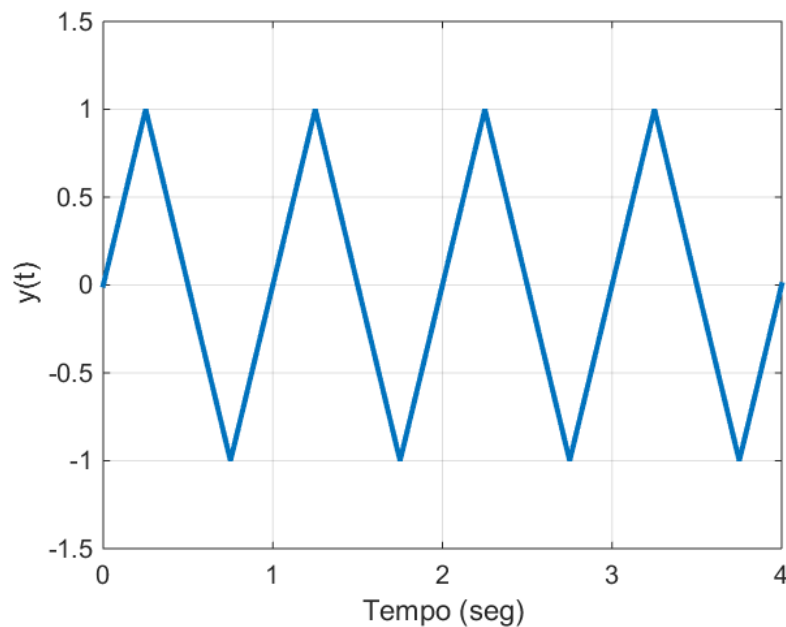
2. Exemplos da Aplicação da DFT

- Onda quadrada:



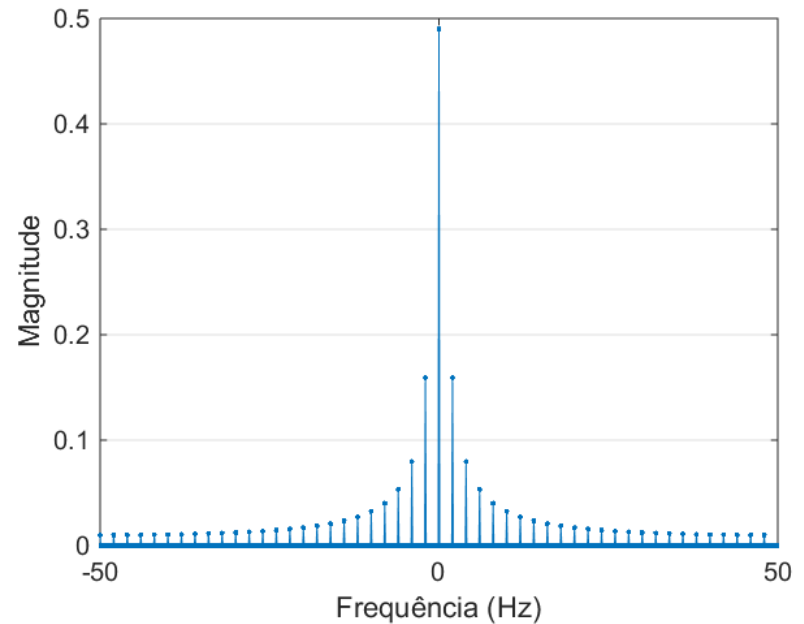
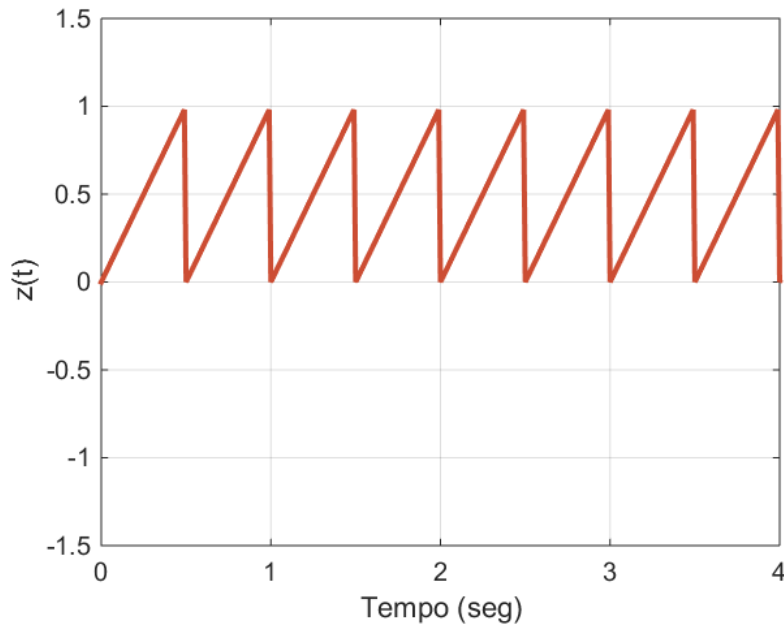
2. Exemplos da Aplicação da DFT

- Onda triangular:



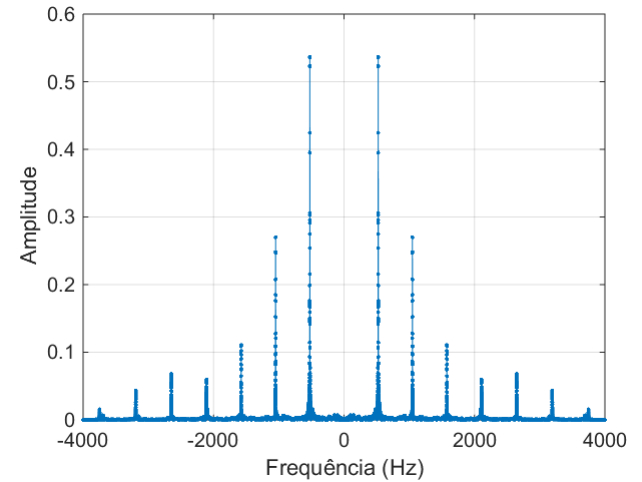
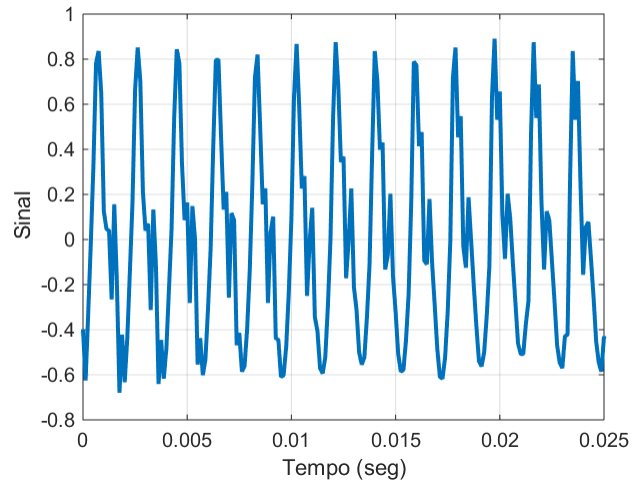
2. Exemplos da Aplicação da DFT

- Onda dente-de-serra:

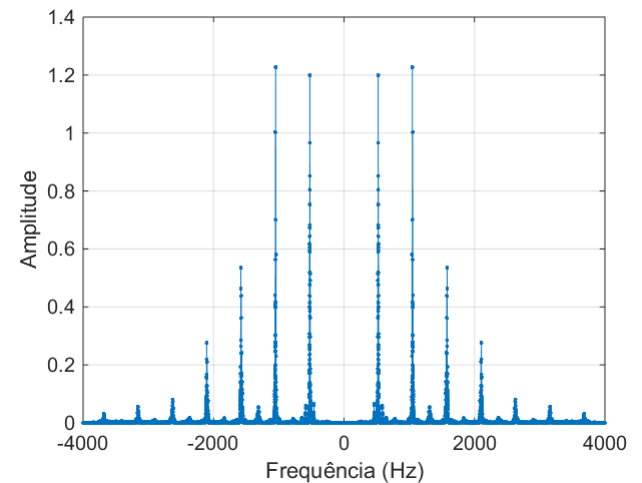
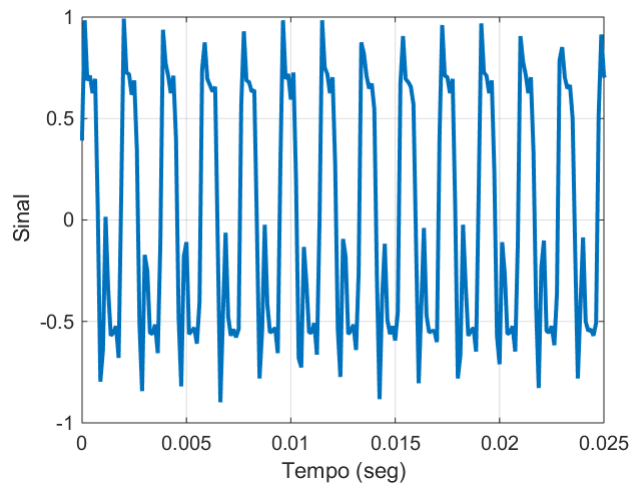


2. Exemplos da Aplicação da DFT

- Piano C5:

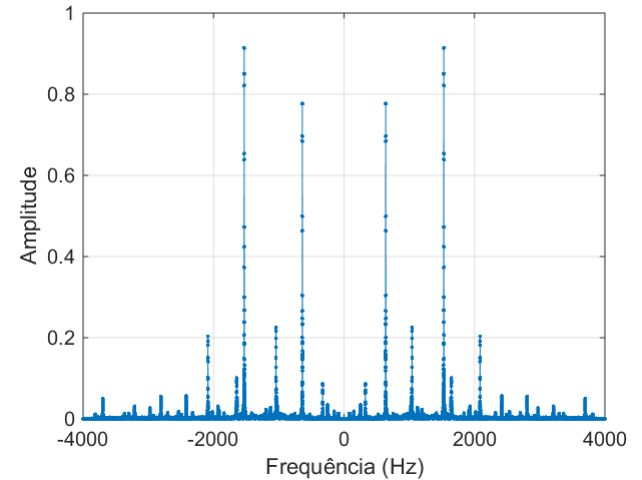
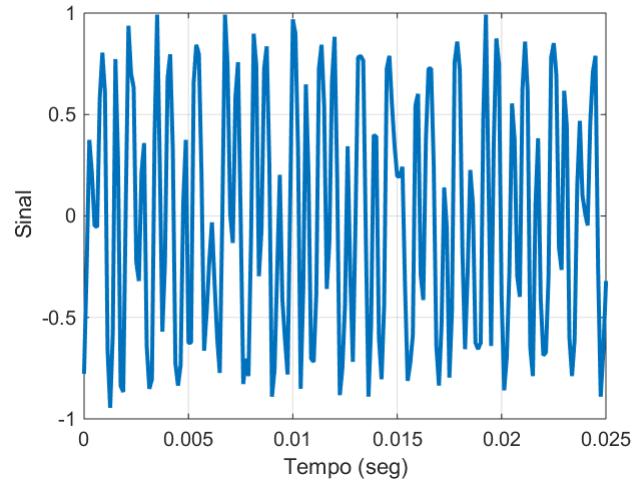


- Flauta C5:

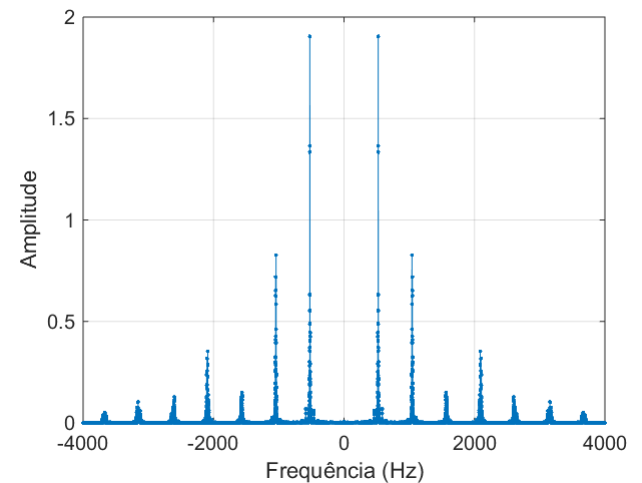
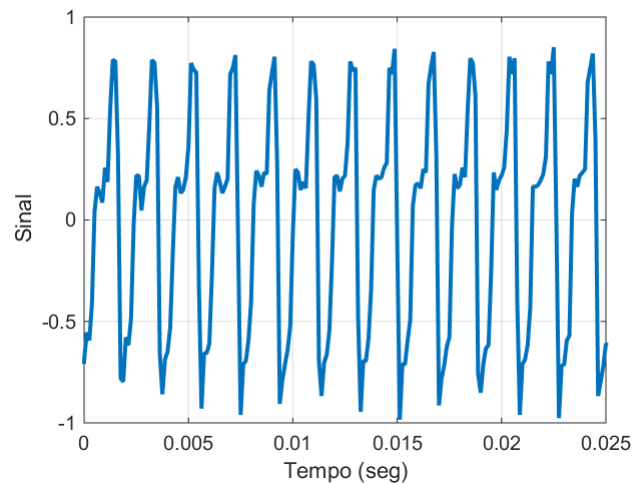


2. Exemplos da Aplicação da DFT

- Sino C5:



- Violino C5:

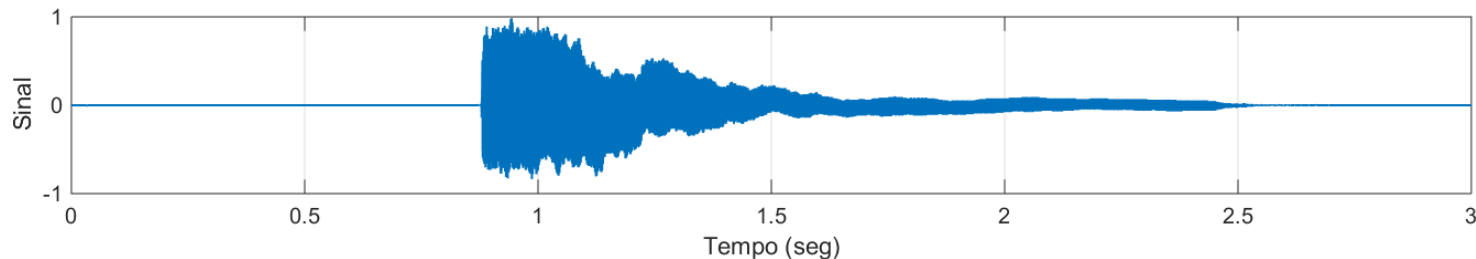


3. DFT em Sinais Não Periódicos

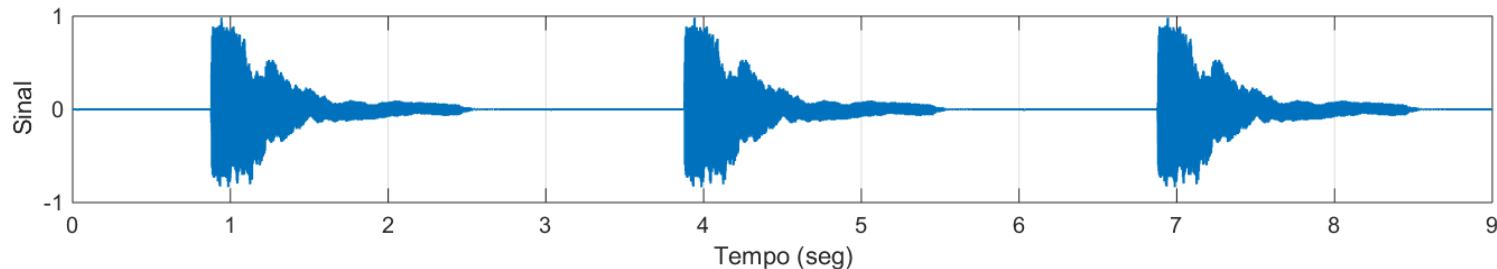
- A DFT foi definida para sinais periódicos.
- Mas como poderá ser analisado o espectro de sinais não periódicos (como os recebidos numa sequência de áudio)?
- Tal pode ser conseguido forçando o sinal recolhido a ser considerado como periódico.
- Existem várias técnicas para este efeito, sendo a mais usada a de *windowing*.

3. DFT em Sinais Não Periódicos

- Por exemplo, considere-se o registo do som produzido por se carregar numa tecla C5 de um piano:



- Para fins de análise do seu espectro, este sinal pode ser entendido como replicado vezes sem conta ao longo do tempo:

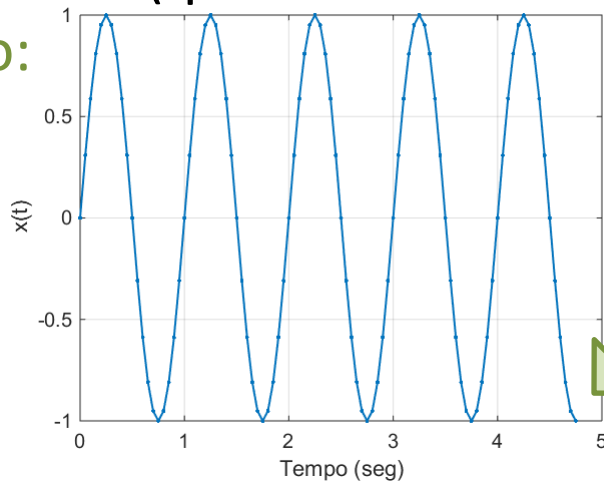


- Então, a DFT pode ser aplicada a uma sequência de amostras, ficando implícita a repetição dessa sequência indefinidamente.

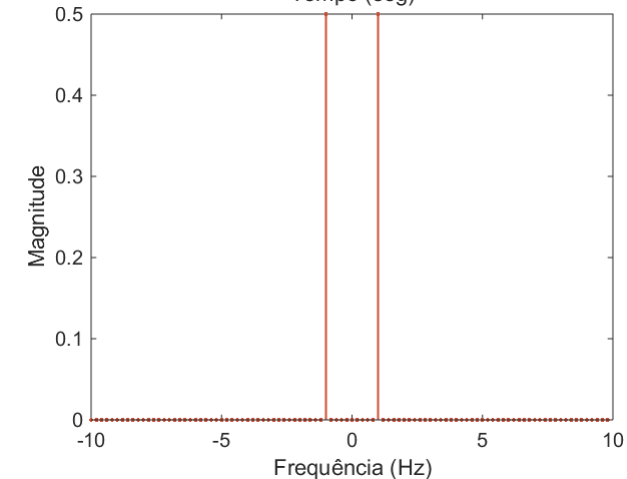
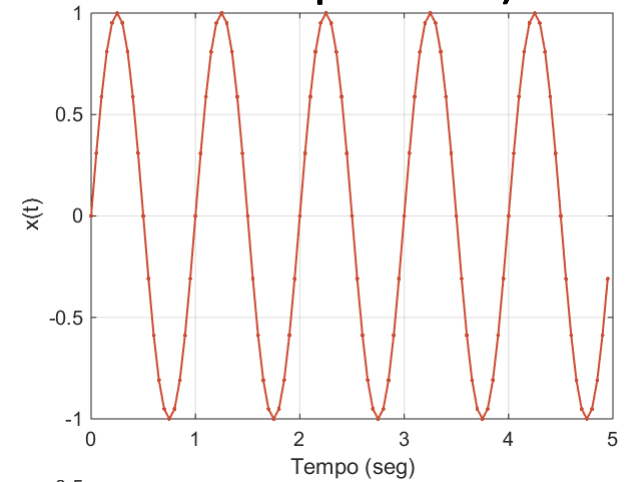
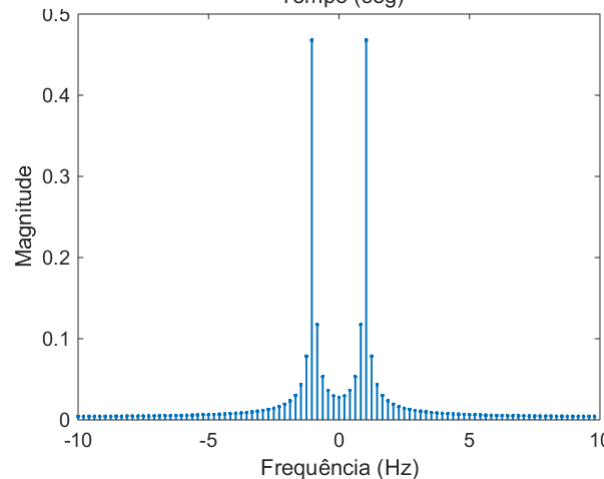
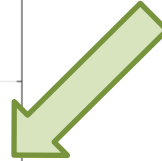
3. DFT em Sinais Não Periódicos

- A técnica de *windowing* aplica-se quando a parte inicial da sequência de amostras recolhida não apresenta a continuidade da parte final (quando se concatenam réplicas dessa sequência).

Exemplo:



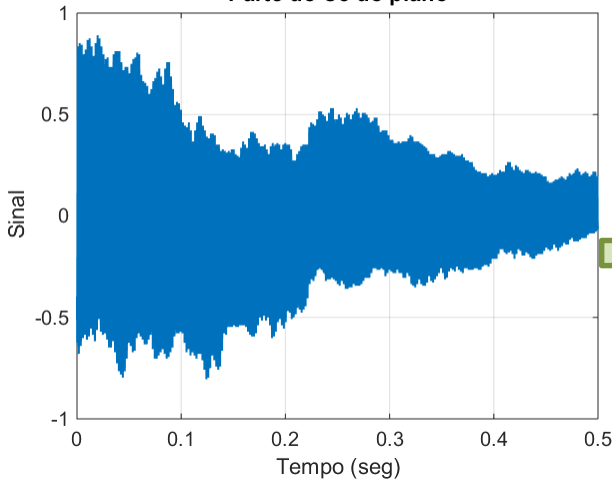
Termina
muito
cedo...



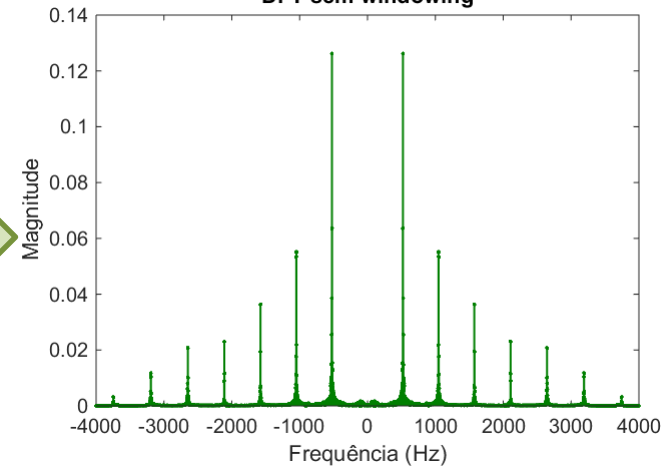
3. DFT em Sinais Não Periódicos

- A técnica de *windowing* consiste em multiplicar a sequência não “circular” por uma “janela” que força a forma periódica.

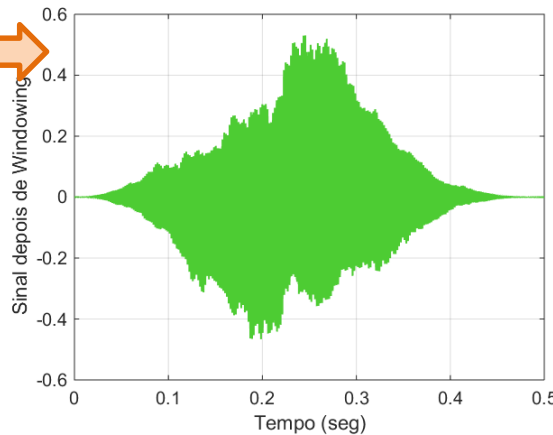
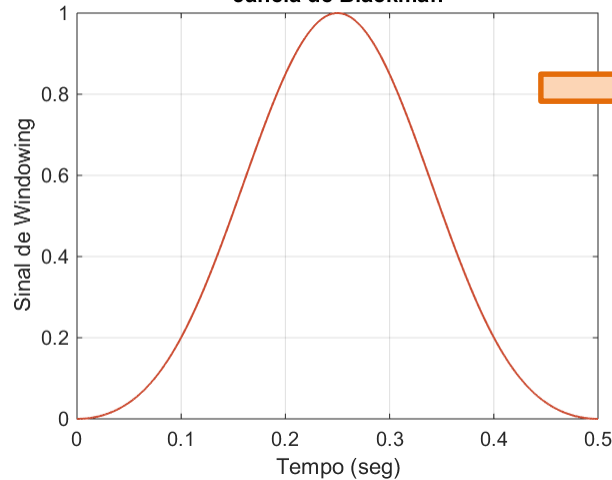
Parte do C5 do piano



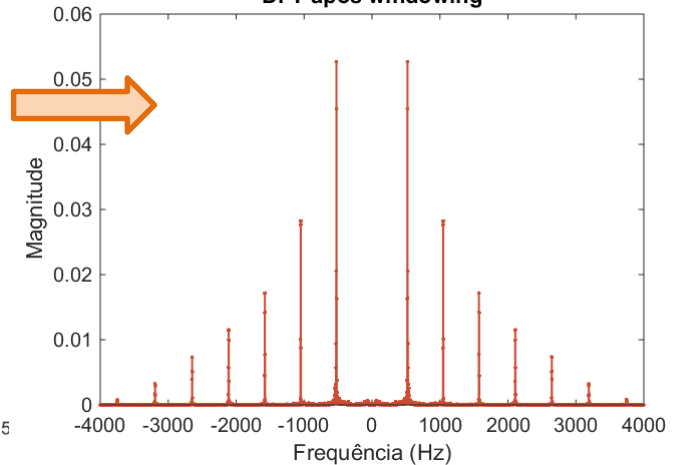
DFT sem windowing



Janela de Blackman



DFT após windowing

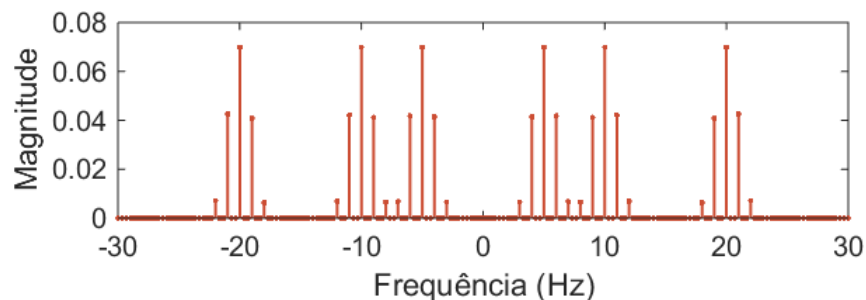
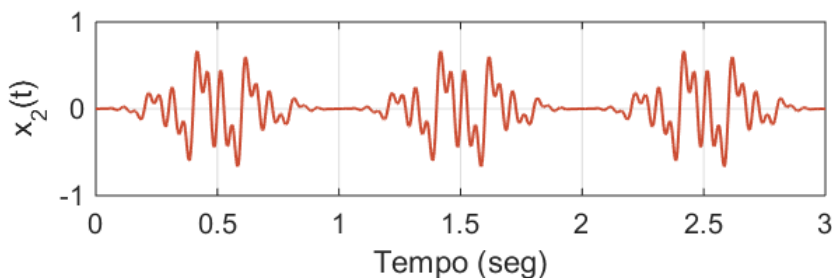
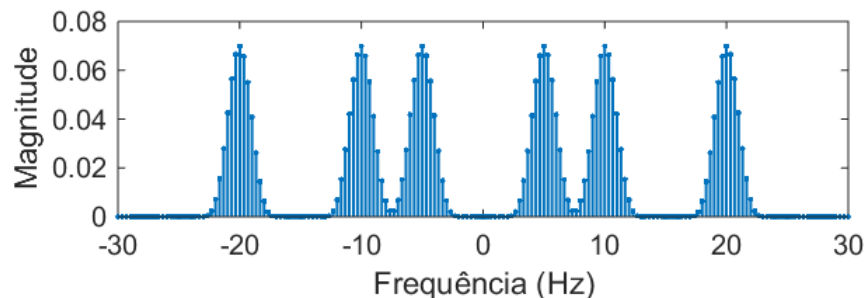
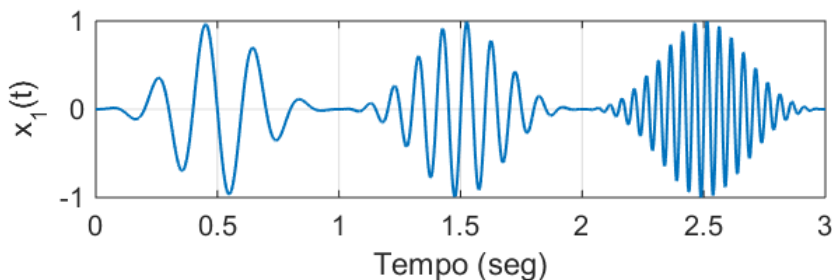


3. DFT em Sinais Não Periódicos

- O algoritmo **FFT** (***Fast Fourier Transform***) implementa a DFT de uma forma muito eficiente.
- Seja \mathbf{x} um vetor de N amostras consecutivas de um sinal, com período de amostragem T_a .
- $\gg \mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x})/N;$
- O vetor \mathbf{X} tem também N elementos: um coeficiente ($C_k \in \mathbb{C}$) para cada frequência da decomposição.
- O vetor de frequências (em Hz) correspondente a \mathbf{X} é:
- $\gg f = [0 : df : (N - 1) * df];$ Usar **fftshift(X)** para ordenar de $-f_a/2$ a $+f_a/2$.

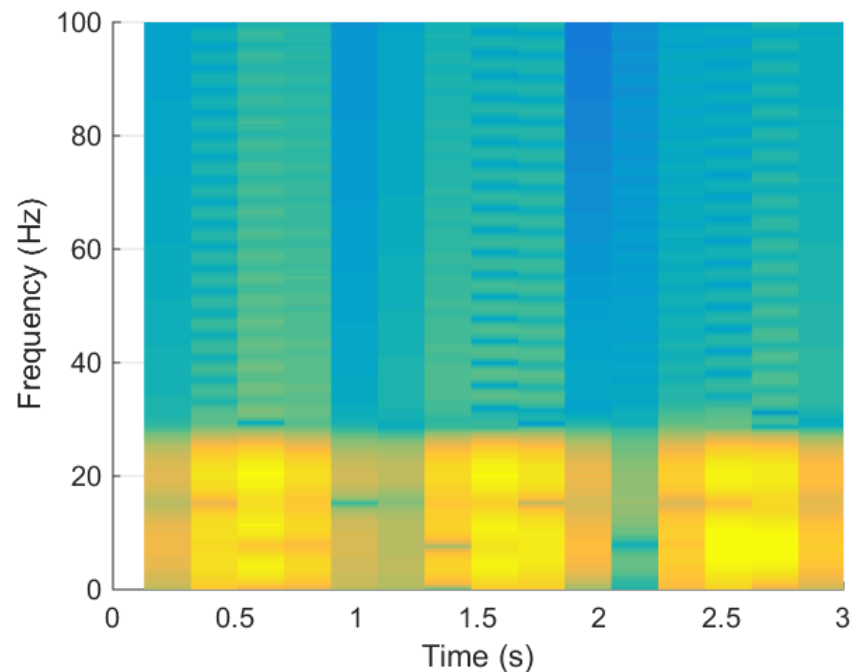
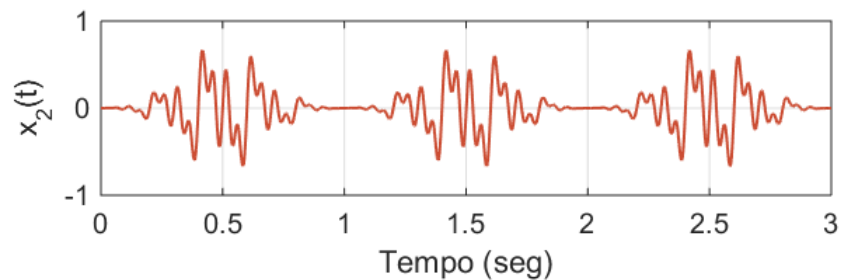
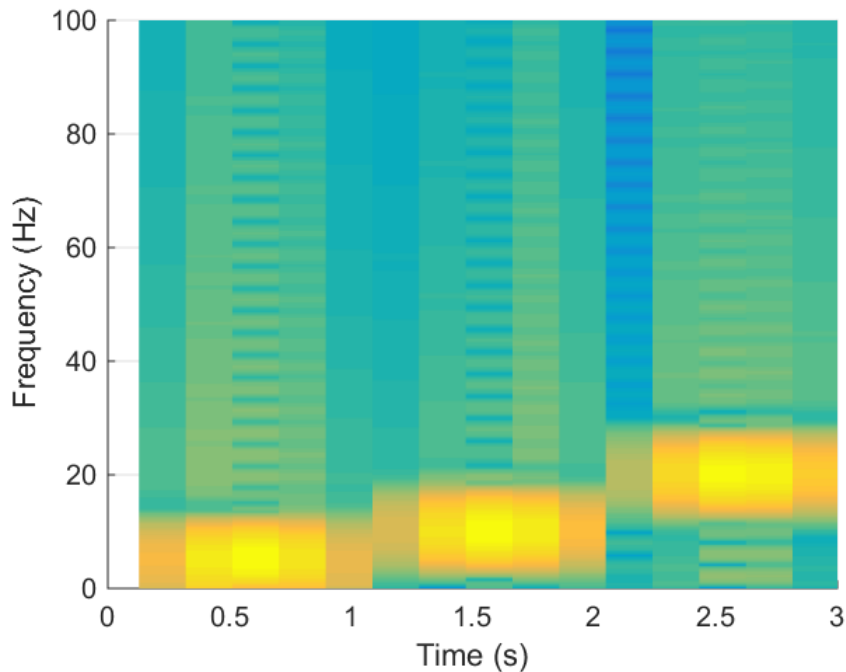
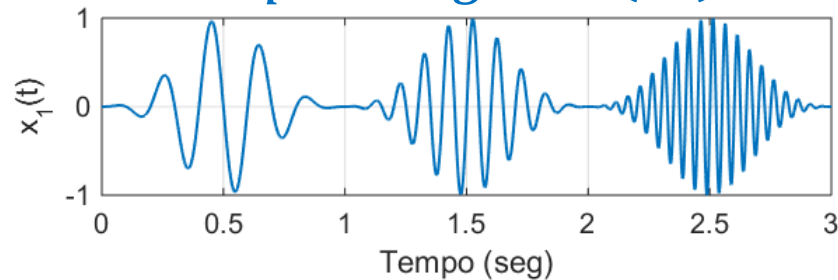
4. Espectrograma

- Em sinais áudio, por exemplo, é por vezes relevante estudar a evolução do conteúdo em frequência (espectro) ao longo do tempo.
- Por exemplo, uma sequência de tons diferentes tem um espectro idêntico ao dos mesmos tons considerados em simultâneo:



4. Espetrograma

- Nestes casos, é usual considerar-se a *short-time* FFT, cujo resultado é conhecido por **Espetrograma**.
- `>> spectrogram(...);`



4. Espetrograma

- Nestes casos, é usual considerar-se a *short-time* FFT, cujo resultado é conhecido por **Espetrograma**.
- `>> spectrogram(...);`

