Matemática Discreta

Funções Geradoras 1

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://elearning.ua.pt

Contagem com recurso a produtos formais

Exemplo

A determinação do número de escolhas de 4 letras de um conjunto que contém três letras A, duas letras B, uma letra C e quatro letras D, pode ser feita recorrendo ao produto
$(1+A+A^2+A^3)(1+B+B^2)(1+C)(1+D+D^2+D^3+D^4)$.

• Com efeito, o número de escolhas a considerar é dado pelo número de termos (da expansão do produto anterior) da forma $(A^iB^jC^kD^l)$, onde $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$ são tais que $i+j+k+l=4$ e

- i (≤ 3) $\longrightarrow$ n$^{\underline{o}}$ de letras A escolhidas,
- j (≤ 2) $\longrightarrow$ n$^{\underline{o}}$ de letras B escolhidas,
- k (≤ 1) $\longrightarrow$ n$^{\underline{o}}$ de letras C escolhidas,
- l (≤ 4) $\longrightarrow$ n$^{\underline{o}}$ de letras D escolhidas.

Contagem com recurso a produtos formais (cont.)

- Por exemplo, AB^2D corresponde a escolher uma letra A, duas letras B e uma letra D.

- Substituindo A, B, C e D por x obtém-se o desenvolvimento

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4) \\ = \; & 1+4x+9x^2+15x^3+20x^4+22x^5+20x^6+15x^7 \\ & +9x^8+4x^9+x^{10} = \sum_{k=0}^{10} c_k x^k, \end{aligned}$$

onde o coeficiente c_k ($0 \leq k \leq 10$) corresponde ao número de escolhas possíveis de k letras.

- Note-se que o coeficiente de x^2 é 9 o que significa que existem 9 possibilidades de escolha de duas letras (de um conjunto com 3 letras A, 2 letras B, 1 letra C e 4 letras D), ou seja, $\{A, A\}$, $\{A, B\}$ $\{A, C\}$ $\{A, D\}$, $\{B, B\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$ e $\{D, D\}$. O número de possibilidade de escolha de 4 letras é dado pelo coeficiente de x^4.

Séries formais de potências

Definição (de séria formal de potências)

Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sucessão de números e x uma variável formal. Então

$$\mathcal{A}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

designa-se por série formal de potências de x com coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Exemplos

Seguem-se algumas das séries (formais) de potências de entre as as mais conhecidas:

1. $1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$;
2. $1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$;
3. $1 + \alpha x + \frac{(\alpha)_2}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k = (1+x)^{\alpha}$, onde o coeficiente factorial $(\alpha)_k$ corresponde à sua forma mais geral com $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Raio de convergência

- Dada uma série formal de potências $\mathcal{A}(x)$, se o seu raio de convergência $r_{\mathcal{A}}$ é positivo então $\mathcal{A}(x)$ converge para todo o x tal que $|x| < r_{\mathcal{A}}$.

- Consequentemente, para tais valores de x (que garantem convergência), $\mathcal{A}(x)$ pode ser considerada como uma função de variável real (ou complexa) e todas as operações sobre séries de potências e sobre funções são válidas para $\mathcal{A}(x)$.

Exemplo

- Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ as séries formais de potências associadas às sucessões
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ e } (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$
dadas, respectivamente, por $a_n = n!$, $b_n = 2^n$ e $c_n = \frac{1}{n!}$.
- $r_{\mathcal{A}} = 0 \ \Rightarrow \mathcal{A}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k! x^k$ tem significado apenas para $x = 0$.
- $r_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \mathcal{B}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}$ é uma função para $|x| < \frac{1}{2}$.
- $r_{\mathcal{C}} = \infty \ \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ é uma função para todo o $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$).

Operações sobre séries formais de potências

- Sejam $\mathcal{A}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\mathcal{B}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ duas séries formais de potências.

Soma: $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$.

Produto: $\mathcal{A}(x) \cdot \mathcal{B}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, com $c_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$.

Exemplo

- Produto de um escalar por uma série formal de potências:
- Sendo $c \in \mathbb{R}$ (ou $c \in \mathbb{C}$) e $\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, vamos

determinar a série $c\mathcal{A}(x)$.

Considerando a série $\mathcal{D}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, com $d_0 = c$ e $d_k = 0$,

para $k \in \mathbb{N}$, vem $c\,\mathcal{A}(x) = \mathcal{D}(x)\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, com

$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n d_{k-n} = a_0\,0 + a_1\,0 + \cdots + a_{k-1}\,0 + a_k\,c = c\,a_k$.

Consequentemente, $c\,\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (c\,a_k) x^k$.

Derivada e integral de uma série formal de potências

Dada a série formal de potências $\mathcal{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, denotamos a sua derivada por $\mathcal{A}'(x)$ e o integral por $\int \mathcal{A}(x)$.

Definição (de derivada de uma série formal de potências)

$$\mathcal{A}'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k.$$

Definição (de integral de uma série formal de potências)

$$\int \mathcal{A}(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}x^k.$$

Observação:

1. Se $\mathcal{A}(x)$ é convergente então $\int \mathcal{A}(x) = \int_0^x \mathcal{A}(t)dt$.
2. As operações de derivação e integração são operações inversas uma da outra. Logo, $\left(\int \mathcal{A}(x)\right)' = \mathcal{A}(x)$.

Exemplo

Vamos determinar as séries formais de potências para as sucessões $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $a_k = k$ e $b_k = \frac{1}{k}$, para $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \\
&= x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \right) = \left(\int \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \\
&= \int \frac{1}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -ln(1-x).
\end{aligned}$$

Função geradora ordinária e função geradora exponencial

Definição (de função geradora ordinária)

Designa-se por função geradora ordinária (ou função geradora) da sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ a função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Definição (de função geradora exponencial

Designa-se por função geradora exponencial da sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ a função $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

- Quando, a partir de certa ordem, os termos da sucessão são todos iguais a zero, a função geradora ordinária (função geradora exponencial) associada designa-se por polinómio gerador ordinário (polinómio gerador exponencial).

Exemplo

1) Vamos determinar a função geradora ordinária da sucessão de Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 3$, com $f_1 = f_2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_n x^n \\
&= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} f_{n-2} x^n = \\
&= x + x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \\
&= x + x^2 + x(\mathcal{F}(x) - x) + x^2 \mathcal{F}(x) \\
&= \frac{x}{1 - x - x^2}.
\end{aligned}
$$

Outros exemplos

2) Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar a sucessão $(n^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, onde cada termo n^k determina o número de arranjos com repetição de n objectos k a k. Então a função geradora exponencial vem dada por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = e^{nx}$.

3) Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar a sucessão $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, onde $a_k = \binom{n}{k}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$ e $a_k = 0$, para $k > n$. Então o polinómio gerador ordinário vem dado por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

4) Uma vez que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k} \frac{x^k}{k!}$ concluimos que $f(x)$ é um polinómio gerador exponencial da sucessão $(A_{n,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ cujos termos são iguais a zero para $k > n$.