MPEI 2018-2019

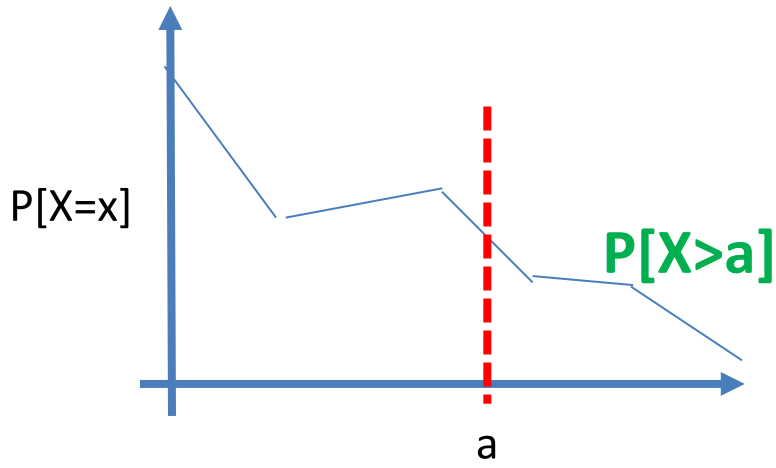
Aula 25 - Variáveis Aleatórias em Situações Limite

Desigualdades de Markov e Chebyshev

Lei dos Grandes Números

Motivação

- Vimos que E[X] dá informação sobre o valor médio de uma variável aleatória X
  - Muito útil para muitos problemas
- No entanto, em diversas situações interessa-nos saber a probabilidade para valores distantes de E[X]
  - Ou seja, o que acontece na "cauda" (tail) da distribuição



Motivação

- Também nos interessam situações limite
- Por exemplo, saber **o que acontece quando *n* tende para infinito** ao valor esperado e variância da Média de *n* medições
- Outro exemplo, muito importante:
  - Ao fazermos centenas de milhar ou milhões de experiências nas nossas simulações (teoria frequencista) estamos de facto a garantir boas estimativas das probabilidades ?

Média e variância da Média

- Se criarmos a v.a. relativa à média de *n* variáveis IID X_i, $\boldsymbol{M_n = \frac{S_n}{n}}$, e assumindo $E[X_i] = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$, teremos :

- $\boldsymbol{E[M_n]} = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\sum_i E[X_i]}{n} = E[X_i] = \boldsymbol{\mu}$

- $\mathbf{Var}[\boldsymbol{M_n}] = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\frac{\sum_i Var[X_i]}{1} = \frac{Var(X_i)}{n} = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{n}}$
- À medida que se aumenta o número de experiências vai diminuindo a variância da estimativa da média

Questões

- Colocam-se muitas vezes questões como:

- Quão provável é termos a média das amostras superior a um determinado valor (exemplo: o dobro do valor esperado) ?

- Quão próximo a média obtida com as amostras fica do valor médio ?

- Qual a distribuição da média para valores de *n* muito grandes ?

Desigualdades de Markov e Chebyshev

- Os dois teoremas que apresentaremos de seguida, sem muita preocupação com demonstrações, permitem estabelecer facilmente majorantes para probabilidades de certas classes de acontecimentos
  – partindo apenas do conhecimento da média e variância de uma variável aleatória

  – Mais informação, por exemplo, na secção 3.8 do livro de F. Vaz

Questão 1

- Probabilidade de termos valores superiores a um determinado valor ?

- Exemplo:
- A média das classificações numa turma é 15,2.
- Será que conseguimos determinar um limite superior para probabilidade de um dos alunos ter nota igual ou superior a 17 ?

Desigualdade de Markov

- Seja X uma variável aleatória **não negativa**
- Pela Desigualdade de Markov:
- $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \ \forall a > 0$

- Esta desigualdade dá-nos um limite superior para a probabilidade de a função X ser maior ou igual a um determinado valor
- Qual o valor de P com a = E[X] ?
  - E a < E(X) ?
  - E a > E(X) ?

Desigualdade de Markov

- Demonstração:
- $E[X] = ?$
- $= \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^\infty x f_X(x) dx \geq$
- $\geq \int_a^\infty x f_X(x) dx \geq \int_a^\infty a f_X(x) dx =$
- $a\, P[X \geq a]$
- Logo: $P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$

Exemplo (continuação)

- A média da altura de uma população é 1,65 m.
- Qual o limite superior de probabilidade de um indivíduo ultrapassar os 2 metros ?

- $P(X \geq 2) \leq \frac{1{,}65}{2} = 0{,}825$

- Limite não muito útil ou significativo !

Exemplo 2

- A média das classificações numa turma é 15,2.
- Qual o limite superior de probabilidade de um dos alunos ter nota igual ou superior a 17 ?

- $P(X \geq 17) \leq \frac{15,2}{17} = 0.8941$
- E superior a 19?

- $P(X \geq 19) \leq \frac{15,2}{19} = 0.8$

Questão 2

- Quão provável é a **diferença entre a variável e o seu valor esperado** ser superior/inferior a um determinado valor ?

- Isto é $P(|X - E[X]| \geq a) = ?$

  Ou $P(|X - E[X]| < \ a) = ?$

- Exemplo: Probabilidade de os valores diferirem da média mais que 2 desvios padrão ?

Desigualdade de Chebyshev

- Pela Desigualdade de Chebyshev temos:
- $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

- Ou, em alternativa:
- $P(|X - E[X]| < a) \geq 1 - \frac{Var(X)}{a^2}$

Desigualdade de Chebyshev

- Demonstração:

- Define-se $D^2 = (X - E[X])^2$
- É óbvio que $D^2 \geq 0$ e $D^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |D| \geq a$
- Aplicando a Desigualdade de Markov

- $P(|D| \geq a) = P(D^2 \geq a^2)$
- $P(D^2 \geq a^2) \leq \frac{E\left[(X-E[X])^2\right]}{a^2}$
- $P(D^2 \geq a^2) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$; $P((X - E[X])^2 \geq a^2) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

- Assume-se E[X] e Var(X) finitos

Desigualdade de Chebyshev

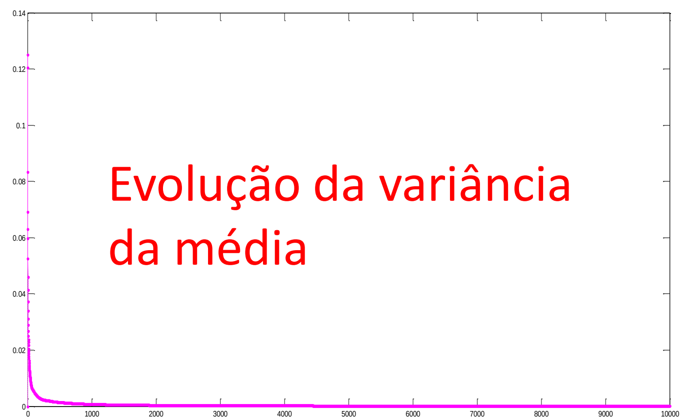
- Se expressarmos a em função do desvio padrão, fazendo $a = h\sigma$, teremos:
- $P(|X - E[X]| \geq h\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(h\sigma)^2} = \frac{1}{h^2}$
- Ou seja: a probabilidade de obter um valor que dista da média de h desvios padrão ou mais é menor ou igual a $\frac{1}{h^2}$
  - Exemplos:
    - h=1 => P <= 1
    - **h=2 => P <= ¼** Valores pouco precisos

Questão 3

- Ao fazermos centenas de milhar ou milhões de experiências nas nossas simulações (teoria frequencista) estamos de facto a garantir boas estimativas das probabilidades ?

Voltando à média de n variáveis aleatórias …

- Como vimos, **a variância da média das estimativas** tende para 0 à medida que n aumenta



- O que se pode interpretar como a probabilidade da média das amostras se aproximar do valor médio ser cada vez maior, aproximando-se de 1

Voltando à média de n variáveis aleatórias ...

- Qual a probabilidade da média das amostras se aproximar do valor médio (a menos de ϵ) ?
  - Ou seja: $P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon)$

- Recorrendo à Desigualdade de Chebyshev temos:
- $P(|M_n - E[M_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(M_n)}{\epsilon^2}$
- $P(|M_n - E[M_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2}$
- $P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\, \epsilon^2}$

Lei fraca dos grandes números

- Passando ao limite a última expressão teremos:

- $\lim_{n \to \infty} P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon) = 1$

- Resultado que é conhecido por **Lei Fraca dos Grandes Números**

Leis dos grandes números (LGN)

- Existe um segundo enunciado (fora dos objectivos de MPEI), a **lei forte dos grandes números**, que afirma:

$$P(\lim_{n\to\infty} M_n = \mu) = 1$$

- A **Lei Fraca dos Grandes Números** afirma que para um valor de *n* suficientemente elevado a média das amostras estará muito próxima do valor esperado

- Enquanto que a **lei forte** garante que é certo que o limite para que tende a média (das amostras) é o valor esperado

L. G. N. e definição frequencista

- Consideremos uma sequência de experiências aleatórias independentes e repetidas
- e seja I_j uma variável aleatória indicadora da ocorrência de A na experiência de ordem j

  [1 significa que A ocorreu]

- O número total de ocorrências de A nas n experiências será:

$$N_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

L. G. N. e definição frequencista

- Como a frequência relativa de A é

$$f_A(n) = \frac{(I_1 + I_2 + \cdots + I_n)}{n}$$

- f_A é a média das amostras das variáveis aleatórias I_i

- Então (pelas duas leis dos grandes números):

$$\lim_{n \to \infty} P(|f_A(n) - p(A)| < \epsilon) = 1$$

e

$$P[\lim_{n \to \infty} f_A(n) = p(A)] = 1$$

- Permitindo-nos dizer que **a frequência relativa é uma boa estimativa da probabilidade**

Um pouco de História (para terminar esta parte)

- 1713: Lei fraca descrita por Jacob **Bernoulli**
- 1835: **Poisson** chama-lhe "La Loi des Grands Nombres"
  - Lei dos Grandes Números em Francês
- 1909: Émile Borel desenvolve a Lei forte para variáveis de Bernoulli
- 1928: Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** prova a Lei forte no caso geral