Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II **2013/14**

Folha 4: *Séries de Potências e Fórmula de Taylor*

---

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$

(h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$

(i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$

(k) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$ (*Exame de Recurso de 2010*)

(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$ (*Exame de Recurso de 2007*)

2. Mostre que:

(a) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo.

(b) se o domínio de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Considere a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$ dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine a representação em série de potências de (indicando o intervalo onde é válida):

(a) $\dfrac{1}{1-3x}$

(b) $\dfrac{2}{2+x}$

(c) $\dfrac{1}{x}$

4. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

(a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$;

(b) $T_\pi^3(\cos x)$;

(c) $T_1^3(xe^x)$;

(d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$;

(e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$;

(f) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$;

(g) $T_1^n(\ln x) \quad (n \in \mathbb{N})$.

5. Considere $f(x) = e^x$.

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

6. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

7. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

8. Determine um valor de n para o qual garanta que o polinómio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$ aproxima essa função, no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

9. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

10. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.