Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II — Agrupamento IV 2017/2018

Ficha de Exercícios 2
Sucessões e Série de Funções; Séries de Potências(revisitadas) e Séries de Fourier

1. Considere a série de funções
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$
   (a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
   (b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.
$$\text{(a)}\;\; e^{-x^2}\,; \quad \text{(b)}\;\; \cosh x\,; \quad \text{(c)}\;\; \operatorname{senh}(3x)\,; \quad \text{(d)}\;\; 2\cos^2 x\,; \quad \text{(e)}\;\; \frac{1}{4+x^2}.$$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:
   (a) $1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$
   (b) $1-x^3+x^6-x^9+\cdots+(-1)^n x^{3n}+\cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$. (Sugestão: desenvolva primeiro a função $\dfrac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).
   (b) Calcule a soma da série
$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 3}-\frac{x^5}{5\cdot 4}+\cdots+\frac{(-1)^n\,x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):
$$\text{(a)}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\,; \quad \text{(c)}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}\,; \quad \text{(d)}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n n!}\,.$$

6. (a) Verifique que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.
   (b) Seja $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n\,,\quad -2<x<2$. Explicite $f(x)$.
   (Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\ ;\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

8. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

   (a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

   (b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

   (b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3}dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2}\ ,\qquad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = x\, e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

   (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^n}{n!}$
   (Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

   (c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

Séries de Fourier:

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x + x^2\ ,\qquad x \in [-\pi, \pi[$;

   (b) $g(x) = e^x\ ,\qquad x \in [-\pi, \pi[$;

   (c) $h(x) = \begin{cases} -1\ , & -\pi \le x < 0, \\ 0\ , & x = 0, \\ 1\ , & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

    (a) Determine a série de Fourier de f.

    (b) Mostre que

    $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

    (c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

    (d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

    (e) Justifique que

    $$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).

2. (a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\operatorname{senh}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \; x \in \mathbb{R}.$

   (d) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

   $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (e) $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-2, 2[.$

3. (a) $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in]-1, 1[.$

4. (a) $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$

   (Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada no Texto de Apoio).

   (b) $(x+1)\ln(x+1) - x, \quad x \in]-1, 1[$
   (por integração termo a termo da série da alínea anterior).

5. (a) 1; (b) $\cosh(1)$; (c) $-3\ln(2/3)$; (d) $2\sqrt{e}$.

6. (a) —

   (b) $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$

7. —

8. (a) $]1, 5[$.

   (b) $f'(4) = 1$.

9. (a) $x e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\int_0^1 x e^{x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\, n!}.$

10. Representar e^{x^2} em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.

11. (a) $x e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}$.

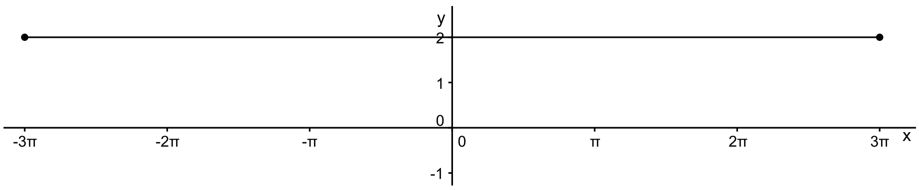
(c) $|R_0^2 f(x)| < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$.

12. (a) $\displaystyle f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right]$;

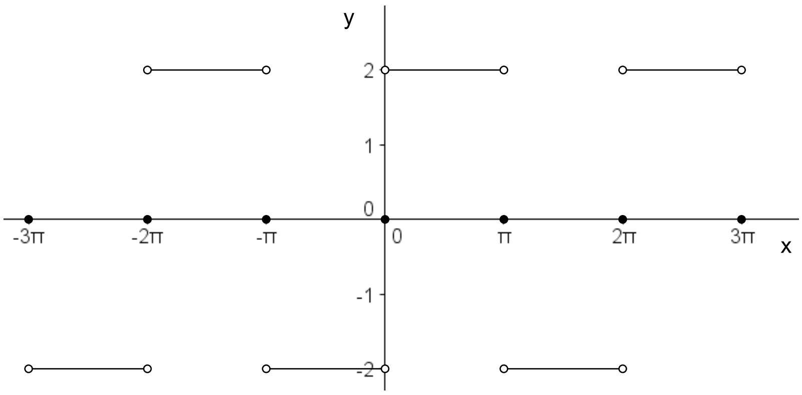
(b) $\displaystyle g(x) \sim \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right]$;

(c) $\displaystyle h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x)$.

13. Soma da série de cossenos: $s(x) = 2$;



Soma da série de senos: $S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.



14. Série de Fourier de senos: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2-1} \operatorname{sen}(2kx)$.

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função $\cos x$.

15. (a) $\displaystyle f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \qquad x \in \mathbb{R}$.

(b) A função f é contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, a soma da série coincide com a própria função f (em $\mathbb{R}$). Notar que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

(c) Tomar, em particular, $x = 0$ na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).