

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

## Capítulo 5

### Valores Próprios e Vetores Próprios

Sejam  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\lambda$  é um **valor próprio** de  $A$  se existe um vetor **não nulo**  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$AX = \lambda X.$$

Todo o vetor  $X \in \mathbb{R}^n$  **não nulo** que satisfaz  $AX = \lambda X$  é designado por **vetor próprio** de  $A$  **associado** ao **valor próprio**  $\lambda$ .

$\lambda$  é um **valor próprio** de  $A$



o sistema homogêneo  $(A - \lambda I_n)X = 0$  possui uma solução **não trivial**



$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .

O **polinómio caraterístico** de  $A$  é um polinómio de grau  $n$  em  $\lambda$  dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

A equação  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  diz-se a **equação caraterística** de  $A$ .

**Teorema:** Os valores próprios de  $A$  são as raízes **reais** do polinómio caraterístico de  $A$ .

**Observação:** Os valores próprios de uma matriz **triangular** são as entradas da sua diagonal principal.

**Teorema:** Seja  $\lambda$  um valor próprio da matriz  $A$   $n \times n$ . Então,

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : X \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{0\}$$

é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

$U_\lambda$  diz-se o subespaço próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$  e

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n).$$

**Teorema:** Seja  $A$   $n \times n$  com  $k$  valores próprios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  e

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}.$$

Então  $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Determinar valores os próprios e os subespaços próprios de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ .

O **polinómio caraterístico** de  $A$  é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

A equação caraterística de  $A$  é

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\mathbf{2} - \lambda)^1 (\mathbf{3} - \lambda)^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mathbf{2} \vee \lambda = \mathbf{3} \end{aligned}$$

Os valores próprios de  $A$  são **2** e **3**, com  $n_2 = n_3 = 1$ . A dimensão dos subespaços associados é igual a 1, pois  $1 \leq \dim U_2 \leq 1$  e  $1 \leq \dim U_3 \leq 1$ .

$$(A - \mathbf{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{X}_1 \rangle, \quad \text{com } \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - \mathbf{3}I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{X}_2 \rangle, \quad \text{com } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar valores e subespaços próprios de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

O polinómio caraterístico de  $A$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

possui **uma única raiz real**  $\lambda=0$  (e um par de raízes complexas conjugadas).

O espaço próprio de  $A$  é  $U_0 = \mathcal{N}(A) = \langle \mathbf{X} \rangle$ , com  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , e  $\dim U_0 = 1$ .

Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Determinar valores e subespaços próprios.

$A$  é **triangular**  $\Rightarrow p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \Rightarrow$  possui valores próprios **1** e **2**.

$$X \in U_1 \Leftrightarrow (A - 1I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X \in U_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$



$A$  e  $B$  são matrizes **semelhantes** se existir uma matriz invertível  $P$  tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

**Observação:** Com  $P$  invertível,  $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$ .

**Teorema:** Matrizes **semelhantes** possuem o mesmo polinómio caraterístico e, portanto, os mesmo valores próprios.

Uma matriz diz-se **diagonalizável** se é semelhante a uma **matriz diagonal**.

Sendo  $A$  **diagonalizável**, uma **matriz diagonalizante** de  $A$  é uma matriz invertível  $P$  tal que

$$P^{-1}AP = D$$

é uma **matriz diagonal**.

Sejam  $A$ ,  $P$  e  $D$  matrizes  $n \times n$ , sendo  $X_1, \dots, X_n$  as colunas de  $P$  e  $D$  diagonal com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  na diagonal principal. Então (verifique que)

- $AP = A \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{bmatrix}$
- $PD = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$
- $AP = PD \Leftrightarrow X_i$  é vetor próprio de  $A$  associado a  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema:**  $A$   $n \times n$  é diagonalizável  $\Leftrightarrow A$  possui  $n$  vetores próprios l.i.

Nestas condições,  $A$  é semelhante à matriz diagonal  $P^{-1}AP = D$  e

- as colunas da matriz diagonalizante  $P$  são  $n$  vetores próprios l.i. de  $A$ ,
- a matriz  $D$  contém os valores próprios de  $A$  na diagonal principal e
- a ordem dos vetores próprios determina a ordem dos valores próprios.

**Lema:** Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.

**Demonstração:** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  vetores próprios de  $A$  associados a dois valores próprios distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e suponha-se que  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$ . Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade por  $A - \lambda_1 I$ , obtém-se

$$\alpha_1 \underbrace{(A - \lambda_1 I)X_1}_0 + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda_1 I)X_2}_{AX_2 - \lambda_1 X_2} = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{X_2}_{\neq 0} = 0,$$

donde  $\alpha_2 = 0$ . Logo,  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 X_1 = 0$  e, como  $X_1 \neq 0$ , também  $\alpha_1 = 0$ . Conclui-se que o conjunto  $\{X_1, X_2\}$  é l.i.

**Teorema:** Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os valores próprios distintos de  $A$ . Então

$A$  possui  $\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k}$  vetores próprios l.i.

**Teorema:** Seja  $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$  o polinómio caraterístico de  $A$ , sendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os valores próprios distintos. Então,

$A$  é diagonalizável se e só se  $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Observações:** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .

- Se  $A$  possui  $n$  valores próprios distintos, é diagonalizável.
- O recíproco da afirmação anterior é falso! Vide o exemplo 4.
- Para descobrir se  $A$ , com  $k < n$  valores próprios distintos, é diagonalizável, é preciso verificar se  $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$  só para  $n_{\lambda_i} > 1$ .
- $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(A - \lambda_i I) = n - \text{car}(A - \lambda_i I)$ .

**Exemplo 1:**  $A$   $2 \times 2$  é diagonalizável, pois tem 2 valores próprios distintos.

**Exemplo 2:**  $A$   $3 \times 3$  não é diagonalizável, tendo apenas 1 vetor próprio l.i.

**Exemplo 3:**  $A$  não é diagonalizável, pois  $\dim U_1 = 1 < n_1 = 2$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem valores próprios } 1 \text{ e } 2 \text{ e } p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^1.$$

$$1 \leq \dim U_2 \leq 1 \Rightarrow \dim U_2 = 1, \text{ mas } 1 \leq \dim U_1 \leq 2 \Rightarrow \dim U_1 \in \{1, 2\}.$$

$$\text{Contudo, } A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tem caraterística } 1.$$

Logo,  $\dim U_1 = \text{nul}(A - 1I) = 3 - \text{car}(A - 1I) = 2$  e  $A$  é diagonalizável.

$$\text{Assim, } U_1 = \mathcal{N}(A - 1I) = \langle X_1, X_2 \rangle. \text{ Verifique que } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Como } A - \mathbf{2}I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_2 = \langle \mathbf{X}_3 \rangle \text{ com } \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, uma **matriz diagonalizante** de  $A$  é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{P}^{-1} A \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Outra **matriz diagonalizante** de  $A$ , por exemplo, é

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3 \quad \mathbf{X}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathbf{Q}^{-1} A \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Se  $A$  é **diagonalizável**, então existe  $P$  invertível tal que  $A = PDP^{-1}$ .

Para  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Se  $A$  é invertível,  $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ .

**Exemplo:**  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$  é semelhante a  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

$$\text{Então, } A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}.$$

Recorde que  $A$  é **simétrica** se  $A^T = A$ .

**Teorema:** Uma matriz **simétrica**  $n \times n$  possui  **$n$  valores próprios (reais)**.

**Teorema:** **Vetores próprios** de uma matriz **simétrica** associados a **valores próprios distintos** são **ortogonais**.

**Demonstração:** Se  $A$   $n \times n$  é **simétrica** e  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ , tem-se que

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1 \cdot (AX_2).$$

Se  $X_1$  e  $X_2$  são vetores próprios de  $A$  associados, respetivamente, aos valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $(AX_1) \cdot X_2 = \lambda_1 X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2) = \lambda_2 X_1 \cdot X_2$ , donde  $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$ . Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $X_1 \cdot X_2 = 0$ .



A matriz quadrada  $P$  é **ortogonal** se  $P^T P = I \Leftrightarrow$  é invertível e  $P^{-1} = P^T$ .

**Teorema:** Dada uma matriz  $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$  de colunas  $P_1, \dots, P_n$ ,  
 $P$  é **ortogonal**  $\Leftrightarrow \{P_1, \dots, P_n\}$  é uma **base o.n.** de  $\mathbb{R}^n$ .

$A$  é **ortogonalmente diagonalizável** se  $A$  é diagonalizável e possui uma **matriz diagonalizante ortogonal** (cujas colunas são uma **base o.n.** de  $A$  formada por **vetores próprios**).

**Teorema:** Toda a matriz **simétrica** é **ortogonalmente diagonalizável**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \Rightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda^2) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -1$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonalizante ortogonal de  $A$  é

$$P = [P_1 \ P_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo} \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \Rightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_2 = 0$$

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Então  $\{P_1, P_2, P_3\}$  é uma base o.n. de vetores próprios de  $A$  e

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante ortogonal de  $A$  tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$