universidade de aveiro departamento de matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Capítulo 7

Aplicações Lineares

Aplicação linear

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais reais.

Uma aplicação linear (ou transformação linear) de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é uma função

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{W} \\ X &\mapsto \phi(X) \end{aligned}$$

tal que

1. $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{V}$;
2. $\phi(c\,X) = c\,\phi(X), \quad \forall\, c \in \mathbb{R}, \ \forall\, X \in \mathcal{V}$.

Se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, então ϕ diz-se um operador linear (ou endomorfismo) de $\mathcal{V}$.

1. Em $\mathbb{R}^2$, a **reflexão** em relação ao eixo dos xx é dada pelo operador linear
$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto (x,-y)\end{aligned}$$

2. A **rotação** em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos zz de ângulo θ é o operador linear
$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) &\mapsto (x\cos(\theta)-y\sin(\theta), x\sin(\theta)+y\cos(\theta), z)\end{aligned}$$

3. A **derivada** de polinómios (funções deriváveis) é a aplicação linear
$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathcal{P}_n &\rightarrow \mathcal{P}_{n-1}\\ p(x) &\mapsto p'(x)\end{aligned}$$

4. A **primitiva** (nula em a) de um polinómio é obtida pela aplicação linear
$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathcal{P}_n &\rightarrow \mathcal{P}_{n+1}\\ p(x) &\mapsto \int_a^x p(t)\,dt\end{aligned}$$

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então $\phi(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.

Demonstração: Para qualquer $X \in \mathcal{V}$, $\phi(0_{\mathcal{V}}) = \phi(0X) = 0\phi(X) = 0_{\mathcal{W}}$.

Teorema: $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação linear se e só se

$$\phi\left(c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k\right) = c_1\phi(X_1) + \cdots + c_k\phi(X_k),$$

para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Corolário: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Então, ϕ é completamente determinada por $\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)$.

Exemplo 1

Determinar a aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, com $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, sabendo que $\phi(1,1) = (2,3,1)$ e $\phi(1,0) = (1,2,1)$.

- $(1,1)$ e $(1,0)$ são l.i. e, portanto, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \big((1,1),(1,0)\big)$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- $\phi\big(c_1(1,1) + c_2(1,0)\big) = c_1\phi(1,1) + c_2\phi(1,0)$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- se $(x_1, x_2) = c_1(1,1) + c_2(1,0) = (c_1 + c_2, c_1)$, então

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ \qquad c_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_2 \\ c_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- $\phi(x_1, x_2) = x_2\phi(1,1) + (x_1 - x_2)\phi(1,0)$

$$= x_2(2,3,1) + (x_1 - x_2)(1,2,1)$$

$$= (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1).$$

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $X \in \mathcal{V}$ e $\phi(X) \in \mathcal{W}$,
$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$.
Qual a relação entre os vetores de coordenadas $[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$ e $[\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$?

$$[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Rightarrow \quad X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

$$\Rightarrow \quad \phi(X) = a_1 \phi(X_1) + \cdots + a_n \phi(X_n)$$

$$\Rightarrow [\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = a_1 [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} + \cdots + a_n [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$$

$$\Rightarrow [\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \end{bmatrix}}_{[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}}$$

Teorema: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\mathcal{B}_\mathcal{V} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ uma base de $\mathcal{W}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,
$$\boxed{[\phi(X)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = [\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} [X]_{\mathcal{B}_\mathcal{V}}}$$

onde

$$\boxed{[\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \end{bmatrix}}$$

é a **matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{B}_\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W}$**

cujas colunas são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{B}_\mathcal{W}$

das imagens dos vetores da base $\mathcal{B}_\mathcal{V}$.

Determinar a matriz da aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ do exemplo 1 relativa às bases $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$.

Pela definição, $[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \Big[[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \ [\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \Big]$. Basta calcular

$$[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2,3,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$$

$$[\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (1,2,1) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(0,1,1)$$

Obtêm-se os sistemas $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ \beta_1 + \beta_3 = 1 \end{cases}$

que se podem resolver em simultâneo utilizando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow [\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, com $\mathcal{B}_\mathcal{V}$ base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ e $\mathcal{B}$ bases de $\mathcal{W}$. Então, $\left[M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{W}} \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} \right] \sim \left[I_m \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} \right]$.

Corolário: Generalizando o exemplo 2, sejam $\mathcal{B}_\mathcal{V} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ uma base de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$. Logo,

$$\left[M_{\mathcal{C}_m \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{W}} \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{C}_m \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} \right] = \left[Y_1 \cdots Y_m \,\middle|\, \phi(X_1) \cdots \phi(X_n) \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{método de eliminação de Gauss-Jordan}}}{\sim} \left[I_m \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} \right]$$

As matrizes da aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ relativas às bases $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ e, respetivamente, às bases $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$, satisfazem

$$\boxed{[\phi]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{S}_{\mathcal{W}}} \, [\phi]_{\mathcal{S}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \, \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}$ e $\boldsymbol{M}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{S}_{\mathcal{W}}}$ são as matrizes de mudança da base $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ para a base $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e, respetivamente, da base $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ para a base $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$.

$$\begin{tikzcd}
& \phi(\boldsymbol{X}) \in \mathcal{W} \arrow[dl, dashed, mapsto] \arrow[dd, dashed, mapsto] & & \boldsymbol{X} \in \mathcal{V} \arrow[ll, mapsto, "\phi"'] \arrow[dl, dashed, mapsto] \arrow[dd, dashed, mapsto] \\
{[\phi(\boldsymbol{X})]_{\mathcal{S}_{\mathcal{W}}}} \arrow[dr, mapsto, "\boldsymbol{M}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{S}_{\mathcal{W}}}"'] & & {[\boldsymbol{X}]_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}}} \arrow[ll, mapsto, "{[\phi]_{\mathcal{S}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{S}_{\mathcal{V}}}}"'] & \\
& {[\phi(\boldsymbol{X})]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}}} & & {[\boldsymbol{X}]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}} \arrow[ll, mapsto, "{[\phi]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}}"] \arrow[ul, mapsto, "\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{V}}}"']
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3

Determinar $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ do exemplo 1 usando mudanças de bases.

Como $\phi(1,1)=(2,3,1)$, $\phi(1,0)=(1,2,1)$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}=\big((1,1),(1,0)\big)$, tem-se:

- $\phi(X) = [\phi(X)]_{\mathcal{C}_3} = [\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{C}_2}[X]_{\mathcal{C}_2} = [\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{C}_2}X$, sendo
- $[\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{C}_2} = [\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{C}_2}$, com
- $[\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix}[\phi(1,1)]_{\mathcal{C}_3} & [\phi(1,0)]_{\mathcal{C}_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ e
- $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{C}_2} = M^{-1}_{\mathcal{C}_2\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$.

Logo, $\phi(X)=[\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{C}_2} X = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\ 2x_1+x_2\\ x_1\end{bmatrix}$.

De um operador linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ consideram-se, geralmente, matrizes relativas a uma única base. Assim, sendo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$,

$$[\phi]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{T}} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}\,[\phi]_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}\,M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = (M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}})^{-1}[\phi]_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}}\,M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}.$$

Teorema: Duas matrizes são semelhantes se e só se são matrizes representativas do mesmo operador linear relativas a duas bases diferentes.

A aplicação (operador) identidade de $\mathcal{V}$ é $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$.

- **A matriz da aplicação identidade relativa a qualquer base $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade: $[\mathrm{id}_{\mathcal{V}}]_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = I$.**
- **A matriz da aplicação identidade relativa às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ de $\mathcal{V}$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{S}$ para a base $\mathcal{T}$: $[\mathrm{id}_{\mathcal{V}}]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$.**

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. O **núcleo** de ϕ é o conjunto

$$\ker(\phi) = \{X \in \mathcal{V} : \ \phi(X) = 0_{\mathcal{W}}\}.$$

Nota: $\ker(\phi) \neq \emptyset$, já que $0_{\mathcal{V}} \in \ker(\phi)$.

A **imagem** de ϕ é o conjunto

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(X) \in \mathcal{W} : X \in \mathcal{V}\}$$

de todos os vetores de $\mathcal{W}$ que são imagem de algum vetor de $\mathcal{V}$.

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- $\ker(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
- $\mathrm{im}(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{W}$.

Recordar que uma função $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é **injetiva** se, $\forall\, X_1, X_2 \in \mathcal{V}$,

$$X_1 \neq X_2 \;\Rightarrow\; \phi(X_1) \neq \phi(X_2),$$

ou equivalentemente, $\phi(X_1) = \phi(X_2) \;\Rightarrow\; X_1 = X_2$.

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$\phi \text{ é } \textbf{injetiva} \;\Leftrightarrow\; \ker(\phi) = \{0_{\mathcal{V}}\} \;\Leftrightarrow\; \dim \ker(\phi) = 0.$$

Recordar que uma função $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é **sobrejetiva** se $\operatorname{im}(\phi) = \mathcal{W}$.

Teorema: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$\phi \text{ é } \textbf{sobrejetiva} \;\Leftrightarrow\; \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{W}.$$

Uma aplicação linear injetiva e sobrejetiva é um **isomorfismo**.

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$ e $A = [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$ $(m \times n)$.

Então,

$$X \in \ker(\phi) \;\Leftrightarrow \phi(X) = 0_{\mathcal{W}} \Leftrightarrow \; A[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = 0_{\mathbb{R}^m} \;\Leftrightarrow\; [X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \in \mathcal{N}(A),$$

$$Y \in \operatorname{im}(\phi) \;\Leftrightarrow\; Y = \phi(Z) \;\Leftrightarrow [Y]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = A[Z]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \Leftrightarrow\; [Y]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \in \mathcal{C}(A),$$

onde $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ são, respetivamente, o espaço nulo e o espaço das colunas da matriz representativa de ϕ e $Z \in \mathcal{V}$ é um vetor oportuno.

Teorema: Usando a notação anterior, sendo $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ bases quaisquer,

$$\dim \ker(\phi) = \dim \mathcal{N}(A) = \operatorname{nul}(A) \quad \text{e}$$

$$\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car}(A).$$

Teorema (das dimensões): Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$\dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{V}.$$

Corolário: Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear.

- Se $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W}$, então ϕ <u>não é</u> sobrejetiva (pode ser injetiva);
- se $\dim \mathcal{V} > \dim \mathcal{W}$, então ϕ <u>não é</u> injetiva (pode ser sobrejetiva);
- se $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ (por exemplo, quando ϕ é um operador linear),

  ϕ é injetiva $\Leftrightarrow$ ϕ é sobrejetiva $\Leftrightarrow$ ϕ é um isomorfismo;
- se ϕ é um isomorfismo, então $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$.

Teorema: Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$. Então,

$$\phi \text{ é um } \textbf{isomorfismo} \iff [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \text{ é } \textbf{invertível}.$$

Para além disso, se ϕ é um isomorfismo, então ϕ é invertível e $\phi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ é uma aplicação linear, sendo

$$\left[\phi^{-1}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \left([\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}\right)^{-1}.$$

Exercício: Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{V}$, com $\dim \mathcal{V} = n$, e

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} &\to \mathbb{R}^n, \\ X &\mapsto [X]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Verifique que ϕ é um isomorfismo e que $[\phi]_{\mathcal{C}_n \leftarrow \mathcal{B}} = I_n$.