

# Matemática Discreta

## Funções Geradoras 3

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://moodle.ua.pt>

## Funções geradoras mais gerais

## Exemplos de funções geradoras bidimensionais

## Funções geradoras de duas variáveis

- As funções geradoras podem ser utilizadas nos casos multidimensionais.
- Porém, no contexto deste curso, vamos analisar apenas o caso bidimensional.

### Definição (Função geradora ordinária com duas variáveis)

Dada a sucessão bidimensional de números  $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ , designa-se por função geradora (ordinária) bidimensional desta sucessão a série formal de potências

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} a_{n,k} x^n y^k. \quad (1)$$

## Exemplos

### Exemplo 1

Vamos determinar a função geradora para a sucessão de números binomiais  $(b_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ , tal que  $b_{n,k} = \binom{n}{k}$ .

**Solução.** Uma vez que  $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$ , vem

$$\mathcal{B}(x, y) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} b_{n,k} x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^k. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+y)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1+y)x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x+xy)^n\end{aligned}$$

e, consequentemente,  $\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{1-x-xy}$ .

## Exemplos (cont.)

### Exemplo 2

Vamos determinar a função geradora para a sucessão

$(b_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ , tal que  $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$ , convencionando que  $0^0 = 1$ .

Solução. Uma vez que

$$\mathcal{B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} y^k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \right) x^n,$$

$$\text{vem } \mathcal{B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ny} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xe^y)^n.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{1-xe^y}.$$