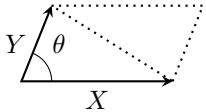
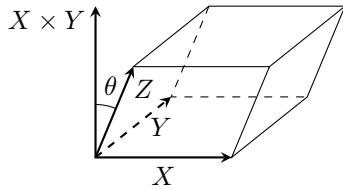


## Vetores

1. Considere os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $X = (1, -2, 1)$  e  $Y = (-1, 1, 0)$ .
  - (a) Calcule  $X + Y$ ,  $X - Y$  e  $3X - 2Y$ .
  - (b) Indique, justificando, se  $X$  e  $Y$  são vetores perpendiculares. E colineares?
  - (c) Determine o ângulo entre os vetores: i.  $X$  e  $Y$ ; ii.  $X$  e  $-Y$ ; iii.  $X + Y$  e  $X - Y$ .
  - (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor  $X$ .
  - (e) Encontre todos os vetores com a direção de  $X$  e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm: i. o sentido de  $X$ ; ii. o sentido oposto a  $X$ .
  - (f) Escreva o vetor  $X$  como soma de um vetor com a direção de  $Y$  e um vetor ortogonal a  $Y$ .
  - (g) Determine todos os vetores perpendiculares a  $X$  e a  $Y$ .
  - (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a  $X$ .
2. Mostre que o triângulo de vértices  $P_1(2, 3, -4)$ ,  $P_2(3, 1, 2)$  e  $P_3(-3, 0, 4)$  é isósceles.
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  com  $(1, 0, 0)$ .
4. Sendo  $X$  e  $Y$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ , mostre que
  - (a)  $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$  (Regra do Paralelogramo);
  - (b) se  $X$  e  $Y$  são ortogonais, então  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$  (Teorema de Pitágoras).
5. Sejam  $X = (2, -1, 1)$  e  $Y = (0, 2, -1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial)  $X \times Y$ .
  - (b) Verifique que o vetor  $X \times Y$  é ortogonal quer a  $X$  quer a  $Y$ .
6. Mostre que, sendo  $X$  e  $Y$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^3$ ,
  - (a)  $X$  e  $Y$  são colineares se e só se  $X \times Y = 0$ ;
  - (b)  $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$ .
7. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$  como na figura.
 
  - (a) Verifique que:
    - i. a altura do paralelogramo é igual a  $\|Y\| \sin(\theta)$ , sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor  $X$  e  $\theta = \angle(X, Y)$ ;
    - ii. a área do paralelogramo é  $A_{\square} = \|X \times Y\|$ ;
    - iii. a área do triângulo é  $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|X \times Y\|$ .
  - (b) Determine a área:
    - i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores  $(3, -1, -1)$  e  $(1, 2, 1)$ ;
    - ii. do triângulo de vértices  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ;
    - iii. dos vários paralelogramos com vértices em  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  e  $(1, 2, 1)$ .
8. Sejam  $X = (1, 2, 0)$  e  $Y = (1, -1, 1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Determine todos os vetores ortogonais a  $X$  e  $Y$ .
  - (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$ .

9. Considere o paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .



(a) Verifique que:

- i. o paralelepípedo tem altura igual a  $\|Z\| |\cos(\theta)|$ , considerando como base do paralelepípedo o paralelogramo de lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$  e sendo  $\theta = \angle(X \times Y, Z)$ ;
- ii. o volume do paralelepípedo é  $V = |(X \times Y) \cdot Z|$ .

(b) Calcule o volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas dadas pelos vetores:

- i.  $(3, -2, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  e  $(2, -1, 2)$ ;
- ii.  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 4)$  e  $(1, 0, -1)$ .

10. Usando as alíneas 6(b) e 7(a)iii, mostre que a área do triângulo, cujos lados são os vetores  $X$ ,  $Y$  e  $X + Y$  de comprimento  $a = \|X\|$ ,  $b = \|Y\|$  e, respectivamente,  $c = \|X + Y\|$ , é dada pela fórmula de Herão:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ onde } s = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ é o semiperímetro.}$$

## Retas e planos

11. Seja  $\mathcal{R}$  uma reta passante por  $P(x_0, y_0, z_0)$  com vetor diretor  $v = (v_x, v_y, v_z) \neq 0$ .

- (a) Prove que, se  $v_x v_y v_z \neq 0$ ,  $\mathcal{R}$  é definida pelas equações (cartesianas)  $\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$ .
- (b) Sejam  $u_1 = (0, -v_z, v_y)$ ,  $u_2 = (v_z, 0, -v_x)$  e  $u_3 = (-v_y, v_x, 0)$ . Verifique que, para qualquer combinação linear  $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \neq 0$ , com  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , a reta  $\mathcal{R}$  está contida no plano que passa por  $P$  e é ortogonal a  $u$ .

Defina agora a matriz quadrada  $M_v = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^\top$ . Mostre que

- |   |   |
|---|---|
| (c) $M_v w = v \times w$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^3$ ;           | (d) $w \in \mathcal{N}(M_v)$ se e só se $w = tv$ com $t \in \mathbb{R}$ ; |
| (e) $M_v^T w = w \times v$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^3$ ;         | (f) $\mathcal{C}(M_v) = \mathcal{L}(M_v)$ ;                               |
| (g) $X \in \mathcal{R}$ se e só se $v \times \overrightarrow{PX} = 0$ ; | (h) $w \in \mathcal{C}(M_v)$ se e só se $v \cdot w = 0$ .                 |

12. Determine uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação geral do plano  $\mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $P(2, 2, 1)$  e que contém a reta  $\mathcal{R}$ .

13. Considere o plano  $\mathcal{P}$  que passa pelos pontos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, 1, 0)$  e  $C(0, 0, 1)$  e a família de planos  $\mathcal{P}_{a,b}$  definidos pela equação geral  $ax + y + z = b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determine uma equação geral do plano  $\mathcal{P}$ .
- (b) Discuta a posição relativa dos planos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{a,b}$  em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

14. Considere a família de retas  $\mathcal{R}_a$  definidas pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases},$$

com  $a \in \mathbb{R}$ , e a família de planos  $\mathcal{P}_b$  definidos pela equação geral  $bx + by + z = 2$ , com  $b \in \mathbb{R}$ . Discuta a posição relativa do plano  $\mathcal{P}_b$  e da reta  $\mathcal{R}_a$  em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

15. Considere a reta  $\mathcal{R}$  definida por  $x = 2y + z = 1$  e a família de retas  $\mathcal{F}_{a,b}$  de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + s(0, 2, b), \quad s \in \mathbb{R},$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Discuta a posição relativa das retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{F}_{a,b}$  em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

16. Determine os pontos de  $\mathbb{R}^3$  equidistantes dos pontos  $A(-1, 0, 2)$  e  $B(1, -1, 1)$ .

17. Considere o ponto  $A(3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$  e o plano  $\mathcal{P}$  de equação geral  $y + z = -1$ .

(a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano  $\mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $A$ .

(b) Calcule a distância do ponto  $A$  ao plano  $\mathcal{P}$  por dois processos distintos.

18. Considere o ponto  $P(-1, 1, 2)$  e a reta  $\mathcal{R}$  que passa pelos pontos  $A(1, 0, 0)$  e  $B(0, 0, 1)$ .

(a) Escreva uma equação geral do plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $\mathcal{R}$ .

(b) Calcule a distância do ponto  $P$  à reta  $\mathcal{R}$ .

19. Considere os planos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{a,b}$  de equações  $x + y + 2z = 3$  e  $ax + 2y + 4z = b$ , respectivamente, com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(a) Discuta a posição relativa dos planos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{a,b}$  em função dos parâmetros reais  $a$  e  $b$ .

(b) Determine a distância entre os planos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{2,2}$ .

20. Verifique que o plano de equação geral  $x - y + z = 1$  e a reta definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

são estritamente paralelos e calcule a distância entre eles.

21. Considere a família de planos  $\mathcal{P}_k$  de equação geral  $y + kz = 1$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , e a reta  $\mathcal{R}$  definida por  $x = 2y = z - 1$ .

(a) Discuta a posição relativa da reta  $\mathcal{R}$  e do plano  $\mathcal{P}_k$  em função do parâmetro  $k$ .

(b) Determine equações gerais dos planos perpendiculares à reta  $\mathcal{R}$ , cuja distância à origem é 1.

22. Considere a reta  $\mathcal{R}_1$  que passa pelo ponto  $(1, 1, -1)$  e tem vetor diretor  $(-1, 2, -1)$  e a reta  $\mathcal{R}_2$  que passa pelos pontos  $(1, -1, 0)$  e  $(0, 1, -1)$ .

(a) Determine a posição relativa das retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

(b) Calcule a distância entre as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

23. Considere as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  de equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Verifique que as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  são enviezadas.

(b) Determine o plano que contém  $\mathcal{R}_2$  e é paralelo a  $\mathcal{R}_1$ .

(c) Calcule a distância e o ângulo entre as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

24. Considere os planos de equações

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(0, 1, -1) + t(4, -1, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

e  $x + \alpha y + 2z = \beta$ . Determine os valores dos parâmetros reais  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais a distância entre os dois planos é igual a 3.

25. Determine equações cartesianas das retas contidas no plano de equação  $x + y = 0$  cuja distância ao plano de equação  $x + y + z = 1$  é igual a  $\sqrt{3}/3$ .

26. Sabendo que  $M_1(2, 1, 3)$ ,  $M_2(5, 3, -1)$  e  $M_3(3, -4, 0)$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ , determine

(a) uma equação da recta que contém o lado  $AB$ , cujo ponto médio é  $M_1$ ;

(b) a área do triângulo (verifique o resultado, numericamente, usando a fórmula de Herão do exercício 10).

1. (a)  $X+Y=(0, -1, 1)$  e  $3X-2Y=(5, -8, 3)$ . (b) Não. Não. (c) i.  $\frac{5\pi}{6}$ ; ii.  $\frac{\pi}{6}$ ; iii.  $\arccos(\frac{2}{\sqrt{7}})$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ .  
 (e) i.  $\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ ; ii.  $-\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ . (f)  $X = -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ . (g)  $\alpha(1, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (h)  $\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
2. Dois lados do triângulo têm comprimento  $\sqrt{41}$ .
3.  $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2 + 3z^2}, y, z\right)$ ,  $y, z \in \mathbb{R}$ ,  $y$  e  $z$  não simultaneamente nulos.
5. (a)  $(-1, 2, 4)$ .
7. (b) i.  $\sqrt{66}$ ; ii.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; iii. 2.
8. (a)  $\alpha(2, -1, -3)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sqrt{14}$ .
9. (b) i. 8; ii. 3.
12. Uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  é  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; uma equação vetorial do plano  $\mathcal{P}$  é  $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e uma equação geral de  $\mathcal{P}$  é  $y - z = 1$ .
13. (a)  $x - y - z + 1 = 0$ ; (b)  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{a,b}$  são coincidentes se  $a = -1$  e  $b = 1$ ; estritamente paralelos se  $a = -1$  e  $b \neq 1$ ; concorrentes se  $a \neq -1$  e  $b \in \mathbb{R}$ .
14.  $\mathcal{R}_a$  está contida em  $\mathcal{P}_b$  se  $a = b = 1$ ;  $\mathcal{R}_a$  e  $\mathcal{P}_b$  são concorrentes se  $a \neq 1$  e  $b \neq 0$ ; estritamente paralelos se ( $a = 1$  e  $b \neq 1$ ) ou ( $a \in \mathbb{R}$  e  $b = 0$ ).
15.  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_{a,b}$  são coincidentes se  $a = 1$  e  $b = -4$ ; estritamente paralelas se  $a \neq 1$  e  $b = -4$ ; concorrentes se  $a = 1$  e  $b \neq -4$ ; enviezadas se  $a \neq 1$  e  $b \neq -4$ .
16. Todos os pontos do plano de equação geral  $2x - y - z + 1 = 0$ .
17. (a)  $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; (b)  $\sqrt{2}$ .
18. (a)  $x - z + 3 = 0$ ; (b) 1.
19. (a)  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}_{a,b}$  são coincidentes se  $a = 2$  e  $b = 6$ ; estritamente paralelos se  $a = 2$  e  $b \neq 6$ ; concorrentes se  $a \neq 2$  e  $b \in \mathbb{R}$ . (b)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$ .
20.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .
21. (a)  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}_k$  são concorrentes se  $k \neq -\frac{1}{2}$  e estritamente paralelos se  $k = -\frac{1}{2}$ . (b)  $2x + y + 2z = \pm 3$ .
22. (a) estritamente paralelas; (b)  $\frac{1}{6}\sqrt{30}$ .
23. (b)  $x + y + z = 1$ ; (c)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  e  $\frac{1}{3}\pi$ .
24.  $\alpha = 2$  e ( $\beta = -8$  ou  $\beta = 10$ ).
25.  $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  e  $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ .
26. (a)  $(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(2, 7, -1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; (b)  $6\sqrt{110}$ .