



1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Para cada uma das relações binárias \mathcal{R} indicadas a seguir, determine os elementos de \mathcal{R} , o domínio e o contradomínio de \mathcal{R} e, finalmente, as propriedades (de reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade) que possui \mathcal{R} :
 - (a) \mathcal{R} é a relação $<$ em A .
 - (b) \mathcal{R} é a relação \geq em A .
 - (c) \mathcal{R} é a relação \subset em $\mathcal{P}(A)$.
2. Considere a relação $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N}_0^2 : a + b = 4\}$
 - (a) Determine \mathcal{R} e \mathcal{R}^{-1} .
 - (b) Determine as imagens de 1 e 3 por \mathcal{R} .
 - (c) Determine as imagens recíprocas por \mathcal{R} de 0, 2 e 4.
3. Seja \mathcal{R} uma relação de equivalência definida num conjunto A e denote por $[x]_{\mathcal{R}}$ a classe de equivalência de $x \in A$.
 - (a) Mostre que
$$\forall a, b \in A \quad a \in [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}.$$
 - (b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determine a relação de equivalência \mathcal{R}_1 induzida pela partição $\mathcal{P}_1 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ em A .
4. Em cada uma das seguintes alíneas diga se a relação binária \mathcal{R} definida no conjunto A é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.
 - (a) $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}; A = \{a, b\}$;
 - (b) $\mathcal{R} = \emptyset; A \neq \emptyset$;
 - (c) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x - y = 1; A = \mathbb{R}$;
 - (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : |x| \leq |y|\}, \text{ onde } A = \mathbb{R}$;
 - (e) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x \cdot y \geq 0; A = \mathbb{Q}$;
 - (f) $x\mathcal{R}y$ se e só se $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}; A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 - (g) $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e só se $a^2 + b^2 = c^2 + d^2; A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
5. Das relações binárias definidas no exercício anterior diga quais são:
 - (a) funções de A em A ;
 - (b) relações de equivalência e para essas determine o conjunto quociente A/\mathcal{R} ;
 - (c) relações de ordem parcial;
 - (d) relações de ordem total.
6. Seja A um conjunto não vazio e $B \subseteq A$. Considere-se a relação \mathcal{R} definida em $\mathcal{P}(A)$ (conjunto das partes de A) da seguinte forma: $X\mathcal{R}Y$ se $B \cap X = B \cap Y$, com $X, Y \subseteq A$.
 - (a) Verifique que \mathcal{R} é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.
 - (b) Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b\}$, qual a partição induzida em $\mathcal{P}(A)$ por \mathcal{R} ?
 - (c) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c\}$, determine a classe de equivalência $[\{a, c\}]$.
 - (d) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quantas classes de equivalência constituem a partição definida por \mathcal{R} ?

7. (a) Exiba todas as relações binárias distintas que se podem definir no conjunto $\{0, 1\}$, explicitando cada uma delas numa tabela adequada, e, em cada caso, diga se se trata de uma relação reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva.
- (b) Uma relação binária, \mathcal{R} definida num conjunto A diz-se anti-reflexiva se para todo $x \in A$ se tem $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
 A relação complementar de uma relação \mathcal{R} , denota-se por $\overline{\mathcal{R}}$, e $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times A : (x, y) \notin \mathcal{R}\}$.
 Mostre que uma relação \mathcal{R} num conjunto A é reflexiva se e só se a relação complementar $\overline{\mathcal{R}}$ é anti-reflexiva.
8. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A relação de equivalência R definida em A com menor número de elementos e que contém os pares $(1, 2)$, $(1, 3)$ e $(4, 5)$ é
- (A) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)\}$;
- (B) $R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 5)\}$;
- (C) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$;
- (D) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 4)\}$.
9. Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios e f uma função de X em Y . Considere a relação binária definida em X por

$$x\mathcal{R}y \text{ se } f(x) = f(y), \text{ para todos } x, y \in X.$$

- (a) Mostre que \mathcal{R} é uma relação de equivalência.
- (b) Determine o cardinal do conjunto quociente definido por R , X/R , se f é injetiva.
10. Considere a relação binária definida em \mathbb{Z} por: $x R y$ se $x - y$ é divisível por 3.
- (a) Prove que R é uma relação de equivalência.
- (b) Determine o conjunto quociente de \mathbb{Z} por R .
11. Considere o conjunto \mathbb{Z} dos inteiros e defina aRb por $b = a^r$ para algum inteiro positivo r .
- (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial em \mathbb{Z} .
- (b) Verifique se R é uma relação de ordem total em \mathbb{Z} .
12. Considere uma estrutura de dados contendo pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde estão definida uma relação \mathcal{R} , tal que,

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2), \text{ onde } (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2.$$

Diga, justificando, se \mathcal{R} é uma relação de ordem e, em caso afirmativo, indique se se trata de uma relação de ordem parcial ou total.

13. Seja A um conjunto de pessoas e definam-se em A as relações binárias:

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b & \text{ se e só se } b \text{ é pai de } a; \\ a\mathcal{S}b & \text{ se e só se } b \text{ é irmão de } a; \end{aligned}$$

Diga qual é o grau de parentesco entre a e b e defina a relação, em cada um dos seguintes casos:

- (a) $a \mathcal{R}_1 b$ onde $\mathcal{R}_1 = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$;
- (b) $a \mathcal{R}_2 b$ onde $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$;
- (c) $a \mathcal{R}_3 b$ onde $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

14. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \rightarrow A$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 6 \\ 1 & \text{se } x = 6 \end{cases}$$

- (a) Determine $f(3), f(6), (f \circ f)(3)$ e $f(f(2))$.
- (b) Mostre que f é injectiva.

15. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injectiva e sobrejectiva enquanto que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$ não é injectiva nem sobrejectiva.

16. Qual é a cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos

$$\{1, 2, \emptyset\}, \quad \{1, \{1, \emptyset\}\}, \quad \{\emptyset\}, \quad \{1\}, \quad \{\{1\}\}, \quad \emptyset.$$

17. Demonstre que os pares de conjuntos a seguir indicados são equipotentes:

- (a) $\{1, \{1, 2\}\}$ e $\{1, 2\}$;
- (b) \mathbb{N} e $2\mathbb{N}$, onde $2\mathbb{N}$ denota o conjunto de números naturais pares;
- (c) \mathbb{N} e \mathbb{Q} .

18. Sejam A e B conjuntos infinitos numeráveis, i.e. existem funções bijectivas $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow B$. Encontre uma função bijectiva entre A e B , se tal existir. Neste caso, defina explicitamente a sua inversa. Poder-se-á concluir que $|A| = |B|$?

19. Seja A um conjunto finito e $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A , mostre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

20. Mostre que $]0, 1[$ não é numerável. Conclua que \mathbb{R} não é numerável.

Soluções:

1. (a) Não reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (b) Reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (c) Não reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva
2. (a) $\mathcal{R} = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$; $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$; (b) $\mathcal{R}(1) = 3$; $\mathcal{R}(3) = 1$; $\mathcal{R}^{-1}(0) = 4$; $\mathcal{R}^{-1}(2) = 2$; $\mathcal{R}^{-1}(4) = 0$.
3. (b) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
4. (a) Reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (b) Não reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva; (c) Não é reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, não transitiva; (d) \mathcal{R} é reflexiva e transitiva mas não é simétrica, nem anti-simétrica; (e) Reflexiva, simétrica, não transitiva; (f) Reflexiva, simétrica, transitiva; (g) Reflexiva, simétrica, transitiva.
5. (a) A relação em (c) é função de A em A .
(b) As relações em (f) e (g) são relações de equivalência;
Em (f): $A/\mathcal{R} = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \cup \{y \in A : y = xq, x \in A, q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$;
Em (g): $A/\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{R}_0^+\}$, o conjunto das circunferências de raio $r \geq 0$.
(c) A relação em (a).
(d) A relação em (a).
6. (b) $\{\{\emptyset, \{c\}\}, \{\{a\}, \{a, c\}\}, \{\{b\}, \{b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}\}$; (c) $\{\{a, c\}, \{a, c, d\}\}$; (d) 8
8. (C)
9. (b) $|X/\mathcal{R}| = |X|$.
10. (b) $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 0\}, \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 1\}, \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 2\}\}$, onde $a \bmod b = c$ significa que o resto da divisão de a por b é c .
11. (b) Não é.
12. É relação de ordem parcial.
13. (a) $a\mathcal{R}_1b$ se e só se b é tio de a ; $\mathcal{R}_1 = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, b) \in A^2 : \text{existe } s \in A \text{ tal que } (a, s) \in \mathcal{R} \wedge (s, b) \in \mathcal{S}\}$.
(b) $a\mathcal{R}_2b$ se e só se b é avô de a ; $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(a, b) \in A^2 : \text{existe } r \in A \text{ tal que } (a, r) \in \mathcal{R} \wedge (r, b) \in \mathcal{R}\}$.
(c) $a\mathcal{R}_3b$ se e só se b é primo de a ;
 $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, b) \in A^2 : \text{existem } u, v \in A \text{ tal que } (a, u) \in \mathcal{R} \wedge (u, v) \in \mathcal{S} \wedge (v, b) \in \mathcal{R}^{-1}\}$.
16. 3; 2; 1; 1; 1, 0.
17. Ver Exemplo 1.24 do Livro MD, Bibliografia principal.