

Ficha 4

1.

Se $n \in \text{par}$, $n = 2k$

$$(2k)^3 - 3(2k) - 1 = 8k^3 - 6k - 1 = 2(4k^3 - 3k) + 1 = 2a + 1 \text{ ímpar}$$

Considerando $4k^3 - 3k$ um número a, sabe-se
que se $k \in \mathbb{N}$, a $\in \mathbb{N}$

2.

 $n^2 \in \text{par} \Rightarrow n \in \text{par}$

$$\Leftrightarrow n \in \text{ímpar} \Rightarrow n^2 \in \text{ímpar}$$

Se $n \in \text{ímpar}$, $n = 2k+1$

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1 = 2b + 1 \text{ ímpar}$$

3.

$$n! > n+1 \Rightarrow n > 2$$

$$n < 2 \Rightarrow n! < n+1$$

$$\text{Se } n=0, \quad n! = 1 = 0+1$$

$$\text{Se } n=1, \quad n! = 1! = 1 \leq 1+1 = 2$$

$$\text{Se } n=2, \quad n! = 2! = 2 < 2+1 = 3$$

4.

Por redução ao absurdo, temos que

$$200 = p^2 \quad p \in \mathbb{N}$$

$$p = \sqrt{200}$$

$$p = \sqrt{100 \cdot 2}$$

$$p = 10\sqrt{2}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Logo 200 não é quadrado perfeito

5

Por contraposição, suponha que escolhendo 27 dias de um

obtenha no máximo 3 dias, que são o mesmo dia de Sábado.

Isto é, no max., escolhe-se 3 segundas, 3 terças, ..., por

dia de sábado, ou seja, no maximo escolhe-se $3 \times 7 = 21$.

Mas escolhem-se 27 dias, logo contradicção

6

$$\exists \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}$ não se pode escrever como uma fração irracional ($\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

a^2 é par, logo pode ser escrito com
 (com $a = 2k$)

$$\Leftrightarrow (2k)^2 = 2b^2$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2$$

b também é par, mas os são ambos

pares $\frac{a}{b}$ não é uma fração
 irracional

7

$$\text{a)} \quad \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{n-1+1}{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$$

a)

Por indução matemática:

$$\text{Se } n=1$$

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\ & 2n^2+3n+1 = 0 \\ & n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \\ & n = -\frac{3+1}{4} \\ & n = -1 \vee n = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P(n+1) = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

b)

Se n é ímpar, $n = 2k+1$

$$n^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k^2+4k = 4k(k+1)$$

Por indução

$$\text{Se } n=1, 4k(k+1) = 4 \cdot 1 \cdot (1+1) = 8$$

8 é divisível por 8, logo é verdadeira

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$4k(k+1)(k+2) = 4(k+2)(k+1) = (4k+8)(k+1) = 4k(k+1) + 8(k+1)$$

Por hipótese $4k(k+1)$ é divisível por 8 e, 8 com $1(k+1)$ também
é, $P(n+1)$ também é divisível

c) Para $n=1$

$$4^1+15 \cdot 1 - 1 - 1 = 4+15-1-1 = 18 \not\equiv 9 \pmod{9}$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \text{Se } P(n) \text{ é divisível por 9, então } 4^n+15n-1 \equiv 9k$$

$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4 \cdot 4^n + 15n+15-1 = 4 \cdot 4^n + 60n - 4 + 3 + 15$$

$$= 4(4^n+15n-1) + 9(-5n+2) = 9k \cdot 4 + 9(-5n+2), \text{ logo divisível por 9}$$

$$(d) \sum_{i=1}^n r^i = \frac{(r^n - 1)r}{r-1}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^n r^i \quad S(n) = \frac{(r^n - 1)r}{r-1}$$

$$P(1) = \sum_{i=1}^1 r^i = r^1 = r$$

$$S(1) = \frac{(r^1 - 1)r}{r-1} = \frac{(r-1)r}{(r-1)} = r$$

$$P(1) = S(1)$$

$$(P(n) = S(n)) \Rightarrow (P(n+1) = S(n+1))$$

$$S(n+1) = \frac{(r^{n+1} - 1)r}{r-1} = \frac{(r \cdot r^n - 1)r}{r-1}$$

$$P(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} r^i = \sum_{i=1}^n r^i + r^{n+1} = \frac{(r^n - 1)r}{r-1} + r^{n+1}$$

$$= \frac{(r^n - 1)r + r^{n+1}(r-1)}{r-1} = \frac{r(r^n - 1) + r \cdot r^n(r-1)}{r-1}$$

$$= \frac{r(r^{n-1} + r^{n+1} - r^n)}{r-1} = \frac{r(r^{n+1} - 1)}{r-1} = S(n+1)$$

e)

$$H_2^0 = H_1 = 1$$

$$1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{0}{2} = 1$$

$$H_2^0 \geq 1 + \frac{0}{2} \quad \text{Verdade Para } t^{\circ} \text{ elemento}$$

$$H_2^n \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

$$H_{2^{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

(e)

8

$$\text{Para } t_1 = 1$$

$$t_n = \frac{n(t^2 + 1)}{2} = 1$$

Para t_{n+1}

$$t_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$t_{n+1} = t_n + n+1 = \frac{n^2+n}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$9 \quad A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $n=1$ $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$

Para $n+1$ $A^{n+1} = A \times A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$

10

Para não ser múltiplo de 2 $a_n = 2k+1$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = a_0 = 2 \cdot 1 - 1$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$$

Para a_{n+1}

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (2k+1) - a_{n-1} (2(k-1)+1)$$

$$= 2 \cdot (2k+2) - 2k+3 = 2k+1 \text{, confirma se é ímpar}$$

11

para a_1

$$a_1 = \frac{5^0 + 2(-1)}{3} = \frac{1+2 \cdot 1 - 3}{3} = 1 \quad \text{Por hipótese } a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{5^1 + 2(-1)}{3} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad a_2 = 1$$

$$a_3 = \frac{5^2 + 2(-1)^2}{3} = \frac{25+2}{3} = \frac{23}{3} \cdot 9 \quad a_3 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9$$

$$a_4 = \frac{5^3 + 2(-1)^3}{3} = \frac{125-2}{3} = \frac{123}{3} \cdot 41 \quad a_4 = 4 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 49$$

para a_{n+1}

$$a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \times \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + \frac{5^{n-2} + 2(-1)^{n-2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \times \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + \frac{5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^{n-1}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 9 \times 5^{n-1} + 4 \times 2(-1)^{n-1} + 5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^n$$

$$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^{n-1}(9+1) + 2(-1)^n(-4+5)$$

$$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^n + 2(-1)^n$$

12.

$$f(0) = 0$$

$$\text{faz } f(n=0) = (0)^2 = 0. \checkmark$$

$$f(1) = f(0) + 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(n=1) = 1^2 = 1 \checkmark$$

$$f(2) = 4f(\frac{1}{2}) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(n=2) = 2^2 = 4$$

Para $f(n+1)$

Se $n+1$ for ímpar

$$f(n+1) = f(n) + 2(n+1) + 1 \\ = n^2 + 2n + 1 \\ = (n+1)^2 \quad \checkmark$$

Se $n+1$ for par

$$f(n+1) = 4f\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad n+1 = 2k \Leftrightarrow k = \frac{n+1}{2} \\ = 4f\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ = 4f\left(k\right) \\ = 4k^2 = 4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{4} \times (n+1)^2 = (n+1)^2$$

13

* Considerando $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Sai-se que n é primo ou não é primo

Se n é primo, n é divisível por ele próprio

E se n não é primo,

Considerar $n = 4$, divisível por 2, número primo
 $n = 6$, divisível por 2 e 3, números primos

$n + 1$ é divisível por primo $\Rightarrow n + 1$ é div. por primo

$n + 1 = ab$, como a e b são divisíveis por um primo (por hipótese)

divisível por primos

$$\begin{aligned} a &= p_1 q_1 \\ b &= p_2 q_2 \end{aligned}$$