

Ficha 4
1

Se n é par, $n = 2k$

$$(2k)^3 - 3(2k) - 1 = 8k^3 - 6k - 1 = 2(4k^3 - 3k) + 1 = 2a - 1 \text{ ímpar}$$

Considerando $4k^3 - 3k$ um número a , sabe-se que $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$

2.

n^2 é par $\Rightarrow n$ é par

$\Leftrightarrow n$ é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar

Se n é ímpar, $n = 2k + 1$

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1 = 2b + 1 \text{ ímpar}$$

3.

$$n! > n+1 \Rightarrow n > 2$$

$$n \leq 2 \Rightarrow n! \leq n+1$$

$$\text{Se } n=0, n! = 1 = 0+1$$

$$\text{Se } n=1, n! = 1! = 1 \leq 1+1 = 2$$

$$\text{Se } n=2, n! = 2! = 2 < 2+1 = 3$$

4.

Por redução ao absurdo, basta lembrar que

$$200 = p^2 \quad p \in \mathbb{N}$$

$$p = \sqrt{200}$$

$$p = \sqrt{100 \times 2}$$

$$p = 10\sqrt{2}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Logo 200 não é quadrado perfeito

5

Por contraposição, não se pode escolher 22 dias de um
obter-se no máximo 3 dias que são o mesmo dia da semana.

Isto é, no max., escolhe-se 3 segundos, 3 terças, ..., por
dia da semana, ou seja, no máximo escolhe-se $3 \times 7 = 21$.

Mas escolhem-se 22 dias, logo contradiz-se

6

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}$ não se pode escrever como uma fração
irredutível $\left(\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}\right)$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$(\Leftrightarrow) a^2 = 2b^2$$

$$(\Leftrightarrow) (2k)^2 = 2b^2$$

$$(\Leftrightarrow) 4k^2 = 2b^2$$

$$(\Leftrightarrow) b^2 = 2k^2$$

a^2 é par, logo pode se escrever
com $a = 2k$

b também é par, mas se são ambos
pares, $\frac{a}{b}$ não é uma fração
irredutível

7

a)

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{n-1+1}{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$$

a/

Por indução matemática

$$n=1$$

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(2 \times 1 - 1) \cdot (2 \times 1 + 1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2(n+1)(n+1/2)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

$$2n^2+3n+1=0$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$n = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$n = -1 \vee n = -\frac{1}{2}$$

$$P(n+1) = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

b)

Se n é ímpar, $n=2k+1$

$$n^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k^2+4k = 4k(k+1)$$

Por indução

$$k=1, \quad 4k(k+1) = 4 \cdot 1 \cdot (1+1) = 8$$

8 é divisível por 8, logo é verdadeiro

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$4(k+1)(k+2) = 4(k+2)(k+1) = (4k+8)(k+1) = 4k(k+1) + 8(k+1)$$

Por hipótese $4k(k+1)$ é divisível por 8 e, 8 com $1(k+1)$ também é, $P(k+1)$ também é divisível

c)

Para $n=1$

$$4^1+15 \cdot 1-1 = 4+15-1 = 18 \div 9=0$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Se $P(n)$ é divisível por 9, então $4^n+15n-1=9k$

$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n - 4 + 15$$

$$= 4(4^n+15n-1) + 9(-5n+2) = 9k \cdot 4 + 9(-5n+2), \text{ logo divisível por 9}$$

$$(d) \sum_{i=1}^n r^i = \frac{(r^{n+1}-1)r}{r-1}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^n r^i \quad S(n) = \frac{(r^{n+1}-1)r}{r-1}$$

$$R: P(1) = \sum_{i=1}^1 r^i = r^1 = r$$

$$S(1) = \frac{(r^{1+1}-1)r}{r-1} = \frac{(r^2-1)r}{(r-1)} = r$$

$$P(1) = S(1)$$

$$(P(n+1) = S(n+1)) \Rightarrow (P(n+1) = S(n+1))$$

$$S(n+1) = \frac{(r^{n+1+1}-1)r}{r-1} = \frac{(r \cdot r^{n+1}-1)r}{r-1}$$

$$P(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} r^i = \sum_{i=1}^n r^i + r^{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{(r^{n+1}-1)r}{r-1} + r^{n+1}$$

$$= \frac{(r^{n+1}-1)r + r^{n+1}(r-1)}{r-1} = \frac{r(r^{n+1}-1) + r \cdot r^{n+1}(r-1)}{r-1}$$

$$= \frac{r(r^{n+1}-1 + r^{n+1} - r^n)}{r-1} = \frac{r(r^{n+1}-1)}{r-1} = S(n+1)$$

e)

$$H_2 = H_1 = 1$$

$$1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{0}{2} = 1$$

$$H_2 \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{Verdade Para } i^{\text{to}} \text{ elemento}$$

$$H_2^n \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow H_2^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

$$H_2^{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

(c)

8

Para $t_1 = 1$

$$t_1 = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$$

Para t_{n+1}

$$t_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$t_{n+1} = t_n + n+1 = \frac{n^2 + n}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

9

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $n=1$ $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

Para $n \geq 1$ $A^{n+1} = A \times A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

10

Para não ser múltiplo de 2 $a_n = 2k+1, \forall k \in \mathbb{N}, n \geq 2$

~~a_2~~ $a_0 = 1$ $n = 2 \cdot 1 - 1$

$a_1 = 3$ $n = 2 \cdot 2 - 1$

$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$

Para a_{n+1}

$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (2k+1) - (2(k-1)-1)$

$= 2 \cdot (2k+1) - (2k-1) = 4k+2 - 2k+1 = 2k+3$, confirme se é par ou ímpar

11

para a_n

$a_1 = \frac{5^0 + 2(-1)^0}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Por hipótese
 $a_1 = 1$

$a_2 = \frac{5^1 + 2(-1)^1}{3} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = \frac{5^2 + 2(-1)^2}{3} = \frac{25+2}{3} = \frac{27}{3} = 9$

$a_3 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9$

$a_4 = \frac{5^3 + 2(-1)^3}{3} = \frac{125-2}{3} = \frac{123}{3} = 41$

$a_4 = 4 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 41$

para a_{n+1}

$a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \cdot \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + 5 \cdot \frac{5^{n-2} + 2(-1)^{n-2}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \cdot \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + \frac{5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^{n-2}}{3}$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 4 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 2(-1)^{n-1} + 5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^{n-2}$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^{n-1}(4+1) + 2(-1)^{n-1}(-4+5)$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^n + 2(-1)^n$

12

$f(0) = 0$

fun $f(n=0) = (0)^2 = 0$ ✓

$f(1) = f(0) + 2 \cdot 0 - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(n=1) = 1^2 = 1$ ✓

$f(2) = 4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot (-1) = -4$

$f(n=2) = 2^2 = 4$

Para $f(n+1)$

se $n+1$ for ímpar

$f(n+1) = f(n) + 2(n+1) - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$ ✓

se $n+1$ for par

$f(n+1) = 4 \cdot f\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$= 4 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right)$

$= 4 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right)$

$= 4 \cdot k^2 = 4 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \times (n+1)^2 = (n+1)^2$

13

* Considerando $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Sabe-se que n é primo ou não é primoSe n é primo, n é divisível por ele próprioE n não é primo,Considera-se $n=4$, divisível por 2, número primo
 $n=6$, " " " " " " n é divisível por primo $\Rightarrow n+1$ é div por primo $n+1 = ab$, como a e b são divisíveis por um
 $n+1 = p_1 q_1 p_2 q_2$ primo (por hipótese)divisível por
primos $a = p_1 q_1$
 $b = p_2 q_2$