Matemática Discreta

Números Combinatórios

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Factorial

- $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$.
- Esta fórmula recursiva $\Rightarrow$ elevado esforço de cálculo!
- Por convenção, $0! = 1$.

Teorema (fórmula de Stirling)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}.$$

Factorial duplo

- Para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$n!! = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \{0,1\} \\ n(n-2)!!, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Observações:
  - $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n.
  - Para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$n!!(n-1)!! = n!$$

Exemplo e exercício

Exemplo

Vamos mostrar que para $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ $n!! = 2^k k!$.

- Solução.

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \; \ldots \; (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots 2(k-1)(2k) \\ &= 2^k k! \end{aligned}$$

Exercício

Mostrar que para $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}_0$, $\quad n!! = \frac{n!}{2^k k!}$.

Números binomiais e números binomiais generalizados

- Uma vez que para $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

obtém-se a fórmula recursiva para a de terminação de $\binom{n}{k}$:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, para $0 < k < n$ e $n > 2$.

Definição (de número binomial generalizado)

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} &= \frac{(x)_k}{k!} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}, & \text{se k>0.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo e exercício

Exemplo

Vamos determinar $\binom{-1}{k}$.

- Solução.

$$\begin{aligned}\binom{-1}{k} &= \frac{(-1)_k}{k!} \\ &= \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-k)}{k!} \\ &= (-1)^k.\end{aligned}$$

Exercício

Determinar $\binom{-1/2}{k}$.

Números de Fibonacci

- Os números de Fibonacci foram definidos pela seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \\ f_1 &= f_2 = 1 \end{aligned}$$

- Raízes características da fórmula recursiva:
  - $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894... \rightarrow$ número de ouro
  - $\hat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{\Phi} = -0.61803988749...$

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \hat{\Phi}^n), \; n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Função geradora dos números de Fibonacci

- $\mathcal{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Exemplo

Determinar a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Solução. Da igualdade $f_n = f_{n+1} - f_{n-1},\ n \geq 2$, vem

$$\begin{array}{rcl}
f_2 & = & f_3 - f_1 \\
f_3 & = & f_4 - f_2 \\
 & \vdots & \\
f_{n-1} & = & f_n - f_{n-2} \\
f_n & = & f_{n+1} - f_{n-1} \\
\hline
\sum_{k=2}^{n} f_k & = & f_n + f_{n+1} - f_1 - f_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1
\end{array}$$

Exercício

Exercício

Determinar a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índice par e com índice ímpar, ou seja,

$$P_n = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k},$$

e

$$I_n = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1}.$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar uma fórmula não recursiva para os números de Lucas definidos por:

$$L_n = f_{n+1} + f_{n-1}, \tag{2}$$

onde f_k denota o $k^{-\text{ésimo}}$ número de Fibonacci e $f_0 = 0$.

Solução. Dado que

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &\stackrel{(2)}{=} f_n + f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-3} \\ &= f_{n+1} + f_{n-1} \\ &= L_n, \end{aligned} \tag{3}$$

a solução geral da equação de recorrência (3) é (ver (1))

$$L_n = C_1 \Phi^n + C_2 \hat{\Phi}^n. \tag{4}$$

Exemplo (cont.)

- Os valores iniciais de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são:

$$\begin{aligned} L_1 &\overset{(2)}{=} f_2 + f_0 = 1 && (5)\\ L_2 &\overset{(2)}{=} f_3 + f_1 = 3 \\ L_0 &\overset{(3)}{=} L_2 - L_1 = 2 && (6) \end{aligned}$$

- A determinação de C_1 e C_2 faz-se a partir de (4), (5) e (6).
- Assim, obtém-se $C_1 = C_2 = 1$. Logo,

$$L_n = \Phi^n + \hat{\Phi}^n.$$

Números de Stirling de 1ª espécie

Definição (de número de Stirling de primeira espécie)

Dados os inteiros $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, designa-se por número de Stirling de 1ª espécie, e denota-se por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, o número de permutações de n elementos com exactamente k ciclos. Por convenção, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0$, para $k > 0$.

- Observação: $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$

Exemplo

- Uma vez que as permutações dos elementos do conjunto $S_3 = \{1, 2, 3\}$, com um único ciclo, são

$$[1, 2, 3] \quad \text{e} \quad [1, 3, 2],$$

então $\left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right] = 2$.

Exercício

Determinar $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, onde

(a) $n = 3$ e $k \in \{2, 3\}$;

(b) $k > n$;

(c) $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

Relação de recorrência para a determinação dos números de Stirling de primeira espécie

- Relação de recorrência para a determinação dos números de Stirling de 1ª espécie.

Teorema

Se $1 \leq k \leq n$, então $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$.

- Exercício: demonstre este teorema.

- Sugestão: determine o número de permutações de S_n com k ciclos que incluem o ciclo $[n]$ e o número de permutações de S_n com k ciclos que não incluem o ciclo $[n]$.

Números de Stirling de segunda espécie

Definição (de número de Stirling de segunda espécie)

Dados os inteiros $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, designa-se por número de Stirling de segunda espécie, e denota-se por $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, o número de partições de um conjunto de cardinalidade n em k subconjuntos. Por convenção, $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ k \end{array} \right\} = 0$, para $k > 0$.

- Exemplo: uma vez que o conjunto $S_3 = \{1, 2, 3\}$ tem uma única partição em 3 subconjuntos, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, então

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right\} = 1.$$

Relação de recorrência para a determinação dos números de Stirling de segunda espécie

Exercício

Vamos determinar $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, com

(a) $n = 3$ e $k \in \{1, 2\}$;

(b) $k > n$;

(c) $k \in \{0, 1, n\}$.

Teorema

Se $1 \leq k \leq n$, então $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$.

Exercício

- Exercício: prove o teorema anterior.

- Sugestão: determine o número de partições do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ em k subconjuntos que incluem o subconjunto $\{n\}$ e em k subconjuntos que não incluem o subconjunto $\{n\}$.

Referências bibliográficas I

- D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.

- R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 2nd Ed. (2005).