

1. Determine a equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:

(a)  $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$ ;

(b)  $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$ ;

(c)  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ .

2. Determine a equação reduzida e classifique as quádricas definidas pelas equações:

(a)  $x^2 - y^2 - 6z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$ ;

(b)  $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ ;

(c)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$ ;

(d)  $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 2z + 1 = 0$ ;

(e)  $3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0$ ;

(f)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$ ;

(g)  $-x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ .

3. Determine os valores do parâmetro  $\alpha$  para os quais a cónica definida por

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$

é uma elipse.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que  $P$  é uma matriz ortogonal e determine a matriz diagonal  $D$  tal que  $P^T A P = D$ .

(b) Determine a equação reduzida e classifique a cónica de equação  $4xy + x + y = 0$ .

5. Seja  $A$  o ponto de coordenadas  $(0, 1, 1)$ . Verifique que o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^3$  cuja distância a  $A$  difere da sua distância à origem numa unidade é uma quádrica e classifique-a.

6. Identifique o lugar geométrico dos pontos de  $\mathbb{R}^3$  cuja distância ao ponto  $(0, 0, -2)$  é a terça parte da distância ao plano de equação  $z + 18 = 0$ .

1. (a) Parábola de equação reduzida  $\tilde{y} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{x}^2$ , sendo  $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \frac{19\sqrt{2}}{24} \end{cases}$  e  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ ;
  - (b) hipérbole de equação reduzida  $\frac{\hat{x}^2}{3} - \frac{\hat{y}^2}{3} = 1$ , sendo  $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \sqrt{2} \end{cases}$  e  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ ;
  - (c) elipse (que é uma circunferência) de equação reduzida  $\frac{\hat{x}^2}{5} + \frac{\hat{y}^2}{5} = 1$ , sendo  $\begin{cases} \hat{x} = x + 1 \\ \hat{y} = y - 2 \end{cases}$ .
2. (a) Hiperbolóide de duas folhas de equação reduzida  $\frac{\hat{x}^2}{4} - \frac{\hat{y}^2}{4} - \frac{\hat{z}^2}{3} = 1$ , sendo  $\begin{cases} \hat{x} = x + 2 \\ \hat{y} = y + 3 \\ \hat{z} = z \end{cases}$ ;
  - (b) elipsóide de equação reduzida  $\frac{\hat{x}^2}{3} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{3}{2}} + \frac{\hat{z}^2}{3} = 1$ , sendo  $\begin{cases} \hat{x} = x - 1 \\ \hat{y} = y + 1 \\ \hat{z} = z \end{cases}$ ;
  - (c) parabolóide elíptico de equação reduzida  $\hat{z} = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ , sendo  $\begin{cases} \hat{x} = x + 2 \\ \hat{y} = y - 3 \\ \hat{z} = z + 13 \end{cases}$ ;
  - (d) cilindro parabólico de equação reduzida  $\tilde{y} = -\frac{5}{2}\tilde{x}^2$ , sendo  $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \tilde{y} = \hat{y} \\ \tilde{z} = \hat{z}3 \end{cases}$  e  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$ ;
  - (e) hiperbolóide de uma folha de equação reduzida  $\frac{\hat{x}^2}{3} + \hat{y}^2 - \hat{z} = 1$ ;
  - (f) dois planos paralelos de equação reduzida  $3\hat{z}^2 = 1$ , ou seja, de equações  $\hat{z} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $\hat{z} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;
  - (g) cilindro hiperbólico de equação reduzida  $\hat{y}^2 - \hat{x}^2 = 1$ .
3.  $\alpha < \frac{1}{2}$
  4. (a)  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ . (b) Hipérbole.
  5. O conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pretendido é a quádras de equação geral
$$4x^2 - 8yz + 4y + 4z - 1 = 0$$
que é um hiperbolóide de duas folhas.
  6. É um elipsóide de equação  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{36} = 1$ .