

Valores e vectores próprios

Neste capítulo, sempre que não haja especificação em contrário, todas as matrizes envolvidas são quadradas. Se nada for dito em contrário, quando se fala de uma matriz A estamos a falar de uma matriz $n \times n$.

Definição

Seja λ um número real. Diz-se que λ é um **valor próprio** da matriz A se existe uma matriz coluna **não nula** $X_{n \times 1}$ tal que $AX = \lambda X$. À matriz coluna X chama-se **vector próprio** da matriz A associado ao **valor próprio** λ .

Exemplo:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underbrace{3}_{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_X$$
, pelo que $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

associado ao valor próprio 3.

Determinação dos valores próprios de uma matriz

Pretende-se determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual existe $X \neq 0_{n \times 1}$ tal que $AX = \lambda X$. Tem-se que :

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AX - \lambda X = 0_{n \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AX - \lambda I_n X = 0_{n \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) X = 0_{n \times 1} \end{aligned} \tag{1}$$

A expressão (1) é um sistema homogéneo cuja matriz é $A - \lambda I_n$. Como se procura uma solução $X \neq 0_{n \times 1}$, o sistema tem de ter soluções não nulas, isto é, tem de ser indeterminado. É sabido que um sistema homogéneo é indeterminado se e só se a característica da matriz do sistema é menor que n ou, ainda, se o determinante da matriz é nulo. Assim, os valores próprios da matriz são os valores λ tais que $\det(A - \lambda I_n) < n$, ou tais que $\det(A - \lambda I_n) = 0$. É esta última equação, chamada **equação característica** de A , que se utiliza para o cálculo dos valores próprios. O determinante de $A - \lambda I_n$ é um polinómio na incógnita λ denominado **polinómio característico** da matriz A .

Resumindo: Os valores próprios da matriz A são as soluções da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$, ou seja, as raízes do polinómio característico de A , $\det(A - \lambda I_n)$.

À matriz $A - \lambda I_n$ chama-se **matriz característica** de A .

Quando um valor próprio tem multiplicidade k como raiz do polinómio característico, diz-se que tem **multiplicidade algébrica** k .

Observações:

- O polinómio característico de A tem grau n , pelo que tem no máximo n raízes. Uma matriz de ordem n tem, portanto, no máximo, n valores próprios.
- Uma matriz real pode não ter valores próprios reais. Por exemplo, as raízes do polinómio característico da matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que é $\lambda^2 + 1$ são i e $-i$.

Exemplos:

- Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz característica de A é

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

pelo que o polinómio característico de A é

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

cujas raízes são -1 e 3 . Os valores próprios de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$, ambos com multiplicidade algébrica 1.

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. O polinómio característico de A é

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 2\lambda - \lambda^3,$$

Como $2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2 - \lambda^2)$ vê-se facilmente que as suas raízes são $0, \sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Os valores próprios de A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{2}$, todos com multiplicidade algébrica 1.

- A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ tem polinómio característico $\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda + 6)$, pelo que os seus valores próprios são $\lambda_1 = 0$, com multiplicidade algébrica 2, e $\lambda_2 = 6$, com multiplicidade algébrica 1.

- Valores próprios da matriz identidade:** A matriz identidade I_n tem como matriz característica a matriz $I_n - \lambda I_n$, que é uma matriz escalar em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a $1 - \lambda$. O polinómio característico de I_n é $(1 - \lambda)^n$ e o único valor próprio de I_n é $\lambda = 1$, com multiplicidade algébrica n .

5. **Valores próprios de uma matriz diagonal:** Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz diagonal, a sua matriz característica é também diagonal, pelo que o polinómio característico é $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ e os valores próprios são $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.
6. **Valores próprios de uma matriz triangular:** Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior), a sua matriz característica é também triangular, pelo que o polinómio característico é $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ e os valores próprios são $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.
7. **Valores próprios da transposta de uma matriz A :**

$$\det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det[(A - \lambda I_n)^T] = \det(A - \lambda I_n).$$

Conclui-se que as matrizes A e A^T têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.

Determinação dos vectores próprios de uma matriz

Depois de determinados os valores próprios de A , para determinar os vectores próprios associados a um determinado valor próprio λ basta resolver o sistema homogéneo indeterminado $(A - \lambda I_n)X = 0$. As soluções **não nulas** deste sistema são os vectores próprios da matriz A associados a λ .

Nota: Para um valor próprio λ , o sistema $(A - \lambda I_n)X = 0$ tem garantidamente soluções não nulas, pois λ foi determinado de modo a que o sistema fosse indeterminado.

Exemplos:

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (exemplo 1 da página 66) tem valores próprios -1 e 3 . Vamos calcular a expressão geral dos vectores próprios associados a cada um dos valores próprios.

- $\boxed{\lambda = -1 :}$

Os vectores próprios de A associados a -1 são as soluções não nulas do sistema $(A - (-1)I_2)X = 0_{3 \times 1}$, ou seja, as soluções não nulas de do sistema homogéneo cuja matriz simples é

$$A - (-1)I_2 = \begin{bmatrix} 1 + 1 & 2 \\ 2 & 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e que tem por solução geral $X = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

Os vectores próprios associados a -1 são da forma $y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\lambda = 3 :$

Os vectores próprios de A associados a 3 são as soluções não nulas do sistema $(A - 3I_2)X = 0_{3 \times 1}$, ou seja, as soluções não nulas do sistema homogéneo cuja matriz é

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

que tem por solução geral $X = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$.

Os vectores próprios associados a 3 são da forma $y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (do exemplo 2 da página 66), os valores próprios associados a $\lambda_2 = \sqrt{2}$ são as soluções não nulas do sistema

$$(A - \sqrt{2}I_3)X = 0_{3 \times 1}$$

em que

$$A - \sqrt{2}I_3 = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 1 & -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A forma condensada desta matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que os vectores próprios

procurados têm a expressão geral $z \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Para a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, (exemplo 3 da página 66) os vectores próprios associados ao valor próprio 0 têm a expressão geral

$$y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $y, z \in \mathbb{R}$, **não simultaneamente nulos**.

Multiplicidade geométrica

Chama-se **multiplicidade geométrica** de um valor próprio λ ao grau de indeterminação do sistema $(A - \lambda I_n)X = 0$, ou seja à dimensão do núcleo da matriz $A - \lambda I_n$. Como é sabido, o grau de indeterminação dum sistema é o número de variáveis livres na solução geral do sistema e, portanto, a multiplicidade geométrica de um valor próprio λ é o número de parâmetros livres na expressão geral dos vectores próprios associados a λ .

Exemplos:

1. Todos os valores próprios calculados nos exemplos anteriores têm multiplicidade geométrica 1, excepto no exemplo 3 da página 66, em que o valor próprio 0 tem multiplicidade geométrica 2, como se pode verificar através do exemplo 3 da página 68.

2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, triangular superior, tem um único valor próprio, $\lambda = 5$, com multiplicidade algébrica 3.

Os vectores próprios associados a 5 são as soluções não nulas do sistema cuja matriz simples é

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz tem característica 2, o grau de indeterminação do sistema é 1 e, portanto, $\lambda = 5$ tem multiplicidade geométrica 1.

Neste último exemplo constata-se que as multiplicidades algébrica e geométrica de um valor próprio podem ser diferentes. Pode-se, no entanto, provar a seguinte relação entre as multiplicidades:

Teorema A multiplicidade geométrica de um valor próprio de uma matriz é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica. [ou: se λ é valor próprio de uma matriz A , $m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$]

Considerando que a multiplicidade geométrica de um valor próprio é no mínimo 1, conclui-se facilmente, a partir deste teorema, o seguinte corolário:

Corolário: Se um valor próprio tem multiplicidade algébrica 1, a sua multiplicidade geométrica é também 1.

Subespaços próprios

Se λ é um valor próprio da matriz A , chama-se **subespaço próprio** associado a λ ao conjunto U_λ formado pela matriz coluna nula e por todos os vectores próprios associados ao valor próprio λ , isto é:

$$U_\lambda = \{X_{n \times 1} : AX = \lambda X\}.$$

O subespaço próprio de um valor próprio λ é constituído pela solução geral do sistema $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$ e a multiplicidade geométrica de λ é o número de parâmetros livres nessa solução.

Verifica-se facilmente que U_λ é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^n :

1. Se $X_1, X_2 \in U_\lambda$ então $X_1 + X_2 \in U_\lambda$.

$$\begin{aligned} X_1, X_2 \in U_\lambda \implies AX_1 = \lambda X_1 \wedge AX_2 = \lambda X_2 \implies AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 \implies \\ A(X_1 + X_2) = \lambda(X_1 + X_2) \implies X_1 + X_2 \in U_\lambda \end{aligned}$$

2. Se $X \in U_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha X \in U_\lambda$.

$$X \in U_\lambda \implies AX = \lambda X \implies \alpha AX = \alpha \lambda X \implies A(\alpha X) = \lambda(\alpha X) \implies \alpha X \in U_\lambda$$

Exemplos:

1. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $U_{-1} = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$ e $U_3 = \left\{ y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ tem-se $U_{\sqrt{2}} = \left\{ z \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ tem-se $U_0 = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Nota: A dimensão de um subespaço próprio U_λ é exactamente a multiplicidade geométrica do valor próprio λ

Valores próprios e invertibilidade

Se uma matriz A admite o valor próprio 0, então 0 é raiz do polinómio característico de A , isto é, $\det(A - 0I_n) = 0$ e a matriz tem determinante nulo, pelo que não é invertível.

Por outro lado se A não é invertível, $\text{car}(A) < n$ e o sistema $AX = 0_{n \times 1}$ tem soluções não nulas, ou seja, existe $X \neq 0$ tal que $AX = 0_{n \times 1}$ e, portanto, 0 é valor próprio de A . Acabámos de mostrar que:

Teorema: Uma matriz A não é invertível se e só tem 0 como valor próprio.

ou

Teorema: Uma matriz A é invertível se e só se não tem 0 como valor próprio.

Pode-se então enunciar o seguinte resultado:

Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n . São equivalentes as afirmações:

- (a) $\text{car}(A) < n$.
- (b) A matriz A não é invertível.
- (c) $\det A = 0$.
- (d) O sistema $AX = 0$ é indeterminado.
- (e) A matriz A admite o valor próprio 0.

Diagonalização de matrizes

Uma matriz A diz-se **semelhante** a uma matriz B se existir uma matriz P , invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Note-se que se A é semelhante a B , então também B é semelhante a A .

$$B = P^{-1}AP \implies PBP^{-1} = A$$

Proposição: Se uma matriz A é semelhante a uma matriz B , então A e B têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.

Demonstração: Se A é semelhante a B , existe P , invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Então:

$$\begin{aligned} \det(B - xI_n) &= \det(P^{-1}AP - xI_n) = \\ &= \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) = \\ &= \det[P^{-1}(A - xI_n)P] = \\ &= \det(P^{-1})\det(A - xI_n)\det P = \\ &= (\det P)^{-1}\det(A - xI_n)\det P = \\ &= \det(A - xI_n). \end{aligned}$$

Uma matriz A diz-se **diagonalizável** se é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existirem matrizes D , diagonal, e P , invertível, tais que $D = P^{-1}AP$. À matriz P chama-se matriz **diagonalizante**.

Exemplos:

1. Qualquer matriz diagonal é diagonalizável, pois qualquer matriz é semelhante a si própria. De facto $A = I_n^{-1}AI_n$.

2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, pois $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Observações:

- Se uma matriz A é diagonalizável os seus valores próprios são as entradas diagonais da matriz D a que A é semelhante, pois, pela proposição acima, os seus valores próprios são os mesmos da matriz D , ou seja, as suas entradas diagonais.
- Quando uma matriz é diagonalizável, torna-se fácil o cálculo de potências de qualquer ordem da matriz:

Para uma matriz D diagonal, $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ tem-se, $D^k = \text{diag}\{d_1^k, \dots, d_n^k\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sendo A diagonalizável, existem D , diagonal, e P , invertível, tais que $D = P^{-1}AP$ e, portanto, $A = PDP^{-1}$. Para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{k \text{ vezes}} = \\ &= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_n} D\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_n} \dots \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_n} DP^{-1} = PD^k P^{-1} \end{aligned}$$

Teorema Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz A é diagonalizável se e só se existe uma matriz invertível P cujas colunas são vectores próprios de A .

Demonstração: Mostrar uma afirmação envolvendo "se e só se" é provar uma equivalência entre duas condições, ou seja, provar duas implicações, uma em cada "sentido".



Suponhamos que A é diagonalizável. Então existem matrizes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \text{ invertível}$$

tais que $P^{-1}AP = D$. Daqui sai que $AP = PD$. Temos então:

$$AP = PD = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por outro lado, designando as colunas de P por P_1, \dots, P_n , verifica-se que

$$AP = [AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n] \quad (3)$$

Igualando (2) e (3) obtém-se:

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, \ AP_2 = \lambda_2 P_2, \ \dots, \ AP_n = \lambda_n P_n$$

Como P é invertível, todas as suas colunas são não nulas e, portanto, cada P_i , para $i = 1, \dots, n$, é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ_i .



Suponhamos agora que existe uma matriz invertível P cujas colunas P_1, \dots, P_n são vectores próprios de A associados, respectivamente, a valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Tem-se:

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, \ AP_2 = \lambda_2 P_2, \ \dots, \ AP_n = \lambda_n P_n$$

Utilizando (3) obtém-se

$$\begin{aligned} AP &= [AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n] = [\lambda_1 P_1 \ \lambda_2 P_2 \ \dots \ \lambda_n P_n] = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD, \end{aligned}$$

em que D é uma matriz diagonal cujas entradas diagonais são os valores próprios de A . Como $AP = PD$ implica que $P^{-1}AP = D$, A é diagonalizável.

Coloca-se agora a questão de saber quando existe uma matriz invertível P cujas colunas são vectores próprios de A . A resposta é dada no seguinte teorema:

Teorema: Sendo A uma matriz quadrada de ordem n , existe uma matriz invertível P cujas colunas são vectores próprios de A se e só se a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios de A é n e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio de A coincidem.

Dos dois últimos teoremas conclui-se:

Corolário 1: Uma matriz quadrada A , de ordem n , é diagonalizável se e só se a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios de A é n e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio de A coincidem.

Corolário 2: Se uma matriz quadrada A , de ordem n , tem n valores próprios distintos, então é diagonalizável.

Nota: Este último corolário não é "se e só se". Há matrizes diagonalizáveis que **não** têm n valores próprios distintos.

Exemplos:

1. A matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem um único valor próprio real, -3 . As multiplicidades algébrica e geométrica de -3 coincidem (são ambas 1), mas a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios não é 3 e A **não** é diagonalizável.

2. A matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, tem dois valores próprios:

-3 com multiplicidade algébrica 1 e -2 com multiplicidade algébrica 2. A soma das multiplicidades algébricas é 3, mas, como o subespaço próprio de -2 é

$$U_{-2} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

a multiplicidade geométrica de -2 é 1. Como as multiplicidades algébrica e geométrica de -2 não coincidem, A **não** é diagonalizável.

3. A matriz $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ tem dois valores próprios:

-3 com multiplicidade **algébrica 1** e -2 com multiplicidade **algébrica 2**. A soma das multiplicidades algébricas é 3. Os subespaços próprios são

$$U_{-3} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

(-3 tem multiplicidade **geométrica 1**), e

$$U_{-2} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

(-2 tem multiplicidade **geométrica 2**), pelo que as multiplicidades algébrica e geométrica dos dois valores próprios coincidem.

Conclui-se que esta matriz é diagonalizável. Neste caso, para se construir a matriz diagonalizante P , escolhem-se três vectores próprios de A , um associado a -3 e dois associados a -2 . Para garantir a invertibilidade de P , escolhe-se, na expressão geral

dos vectores próprios, um ligado a cada um dos diferentes parâmetros que aí figuram. A matriz diagonal D tem na diagonal os valores próprios de A , pela ordem em que figuram, nas colunas de P , os vectores próprios a eles associados.

A matriz P pode, então, ser $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, neste caso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. A matriz $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ tem três valores próprios distintos, por isso é diagonalizável.