

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7,$$

determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Determine todos os valores de λ para os quais

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Mostre que se c é um número real e A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(cA) = c^n \det(A)$.

5. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$(a) |A^T|; \quad (b) |AB|; \quad (c) |A^4|; \quad (d) |B^{-1}|; \quad (e) |2A|; \quad (f) |2A^{-1}|; \quad (g) |(2A)^{-1}|; \quad (h) |AB^{-1}A^T|.$$

6. Seja A uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = 3$. Diga, justificando, qual é o valor de $\det(2(A^{-1})^T)$.

7. Sejam A e B matrizes 5×5 , com B invertível. Sabendo que $\det(AB) = 24$ e $\det(B^{-1}) = 4$, calcule $\det(A)$.

8. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

$$(a) \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & a_3 + 2b_3 \\ 3c_1 + b_1 & 3c_2 + b_2 & 3c_3 + b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 + b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10;$$

- (c) $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$;
- (d) $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_1 & 2a_3 + 5a_1 \\ b_1 + b_2 & b_1 & 2b_3 + 5b_1 \\ c_1 + c_2 & c_1 & 2c_3 + 5c_1 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$.

10. Calcule os determinantes seguintes usando o Teorema de Laplace:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine a matriz adjunta de A , $\text{adj } A$.
 (b) Calcule o determinante de A .
 (c) Mostre que $A(\text{adj } A) = \det(A)I_3$.
 (d) Calcule a matriz inversa de A .

12. Calcule a adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e efetue o produto $A(\text{adj } A)$. Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de A .

13. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \text{ } a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

14. Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e calcule o elemento $(1, 2)$ da inversa de A .

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule o determinante de A .
 (b) Calcule o elemento $(2, 3)$ da adjunta de A e o elemento $(2, 3)$ da inversa de A .

16. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule o elemento $(4, 1)$ da inversa de A , A^{-1} , sem determinar a matriz A^{-1} .

17. Determine todos os valores de α para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha - 4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha + 5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$$

é singular.

18. Se

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix},$$

determine todos os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ apenas admite a solução trivial.

19. Diga em que condições se pode usar a Regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

20. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a Regra de Cramer:

$$(a) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases}$$

21. Sejam A , B e C matrizes tais que $AB = AC$.

Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$. Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

22. Mostre que:

- (a) Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(AA^T) \geq 0$;
- (b) Se A e B são matrizes quadradas e $AB = I_n$, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$;
- (c) Sendo A e B matrizes $n \times n$, se A é singular, então AB também é uma matriz singular;
- (d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$;
- (e) Se $A = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;
- (f) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então $\det(\text{adj } A) = \det(A^2)$.

23. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.

- (a) $\det(AA^T) = \det(A^2)$;
- (b) $\det(-A) = -\det(A)$;
- (c) Se $A^T = A^{-1}$, então $\det(A) = 1$;
- (d) Se $\det(A) = 0$, então $A = O$;
- (e) Se $\det(A) = 7$, então o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
- (f) Se $A^4 = I_n$, então $\det(A) = 1$;
- (g) Se $A^2 = A$ e $A \neq I_n$, então $\det(A) = 0$;
- (h) Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$;
- (i) Se $AB \neq BA$ então $\det(AB) \neq \det(BA)$;
- (j) Se A , B e C são matrizes $n \times n$ tais que $AC = BC$ então $A = B$.

24. Seja A uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo. Mostre que $\det(\text{adj } A) = (\det(A))^{n-1}$.

1. (a) 1; (b) -3; (c) 1; (d) -43; (e) 3.

2. (a) 28; (b) -7; (c) -280.

3. $\lambda \in \{-4, -1, 0\}$.

5. (a) 3; (b) -15; (c) 81; (d) $-\frac{1}{5}$; (e) 96; (f) $\frac{32}{3}$; (g) $\frac{1}{96}$; (h) $-\frac{9}{5}$.

6. $\frac{16}{3}$.

7. 96.

9. (a) 3; (b) 5; (c) 16; (d) -2.

10. (a) -13; (b) 37; (c) 1496; (d) -8; (e) 0.

$$11. (a) \begin{bmatrix} -14 & -2 & -11 \\ -32 & 14 & 12 \\ -40 & 50 & 15 \end{bmatrix}; (b) -130; (d) \begin{bmatrix} \frac{7}{65} & \frac{1}{65} & \frac{11}{130} \\ \frac{16}{65} & -\frac{7}{65} & -\frac{6}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{3}{26} \end{bmatrix}.$$

$$12. \text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \det(A) = -2.$$

$$13. (a) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{11}{60} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 3 & -\frac{39}{17} & 2 & -\frac{16}{17} \\ 0 & \frac{2}{17} & 0 & \frac{3}{17} \\ -1 & \frac{21}{17} & -1 & \frac{6}{17} \\ 0 & \frac{5}{17} & 0 & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}.$$

14. O elemento (1, 2) de A^{-1} é 0.

15. (a) 2; (b) o elemento (2, 3) de $\text{adj } A$ é 2 e o elemento (2, 3) de A^{-1} é 1

16. O elemento (4, 1) de A^{-1} é -1.

17. $\alpha \in \{-5, 1, 8\}$.

18. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2 - \sqrt{10}, 0, -2 + \sqrt{10}\}$.

19. Se a matriz dos coeficiente do sistema é quadrada e tem determinante não nulo.

20. (a) $x = -2, y = 1, z = -3$; (b) $x = -\frac{28}{11}, y = -\frac{34}{11}, z = -\frac{30}{11}$; (c) $x = -2, y = -1, z = -8$; (d) $x = 1, y = -1, z = 0, w = 2$.

21. Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$.

23. (a) Verdadeira; (b) falsa; (c) falsa; (d) falsa; (e) verdadeira; (f) falsa; (g) verdadeira; (h) verdadeira; (i) falsa; (j) falsa.