Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas

Gabinete: 11.3.10

Atendimento de dúvidas: Terça, 15:00 – 17:00

Recorrência e Funções geradoras

Séries e funções geradoras

Séries formais de potências

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão de forma

$$\text{termo}_n = \text{o número de maneiras de fazer algo}^a \text{ com } n \text{ objetos.}$$

[a] ordenar, permutar, pintar, formar equipas de futebol, . . .

Introdução

Séries formais de potências

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão de forma

$$\text{termo}_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

Para este objetivo, é útil de imaginar estes termos como (as partes de) coeficientes de uma série.

Introdução

Séries formais de potências

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão de forma

$$\text{termo}_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

Para este objetivo, é útil de imaginar estes termos como (as partes de) coeficientes de uma série.

Uma série formal de potências é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais (ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Séries formais de potências

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão de forma

$$\text{termo}_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

Para este objetivo, é útil de imaginar estes termos como (as partes de) coeficientes de uma série.

Uma série formal de potências é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais (ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nota: O somatório na definição acima é apenas notação (não somamos nada).

Exemplos

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

Exemplos

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- A série "um": $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.

Exemplos

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- A série "um": $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- Um polinómio $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ podemos interpretar como a série formal

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots.$$

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- A série "um": $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- Um polinómio $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ podemos interpretar como a série formal

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots.$$

- Em geral, dada uma série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ com $a_n = 0$ para cada $n > k$, escrevemos

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k.$$

Exemplos

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- A série "um": $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- Um polinómio $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ podemos interpretar como a série formal

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots.$$

- Em geral, dada uma série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ com $a_n = 0$ para cada $n > k$, escrevemos

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k.$$

- A série "uniforme": $1 + 1x + 1x^2 + \dots$.

Exemplos

Exemplos

- A série nula: $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- A série "um": $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.
- Um polinómio $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ podemos interpretar como a série formal

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots.$$

- Em geral, dada uma série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ com $a_n = 0$ para cada $n > k$, escrevemos

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k.$$

- A série "uniforme": $1 + 1x + 1x^2 + \dots$.
- A série "exponencial": $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$.

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um “problema de contagem” e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de } \dots \text{ com } n \text{ objetos},$$

consideramos as seguintes séries.

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um "problema de contagem" e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de} \dots \text{ com } n \text{ objetos},$$

consideramos as seguintes séries.

- a série geradora ordinária de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

  Utilizamos esta série no caso de "objetos indistinguíveis": bolas iguais, votação secreta, ...

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um “problema de contagem” e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de } \dots \text{ com } n \text{ objetos},$$

consideramos as seguintes séries.

- a série geradora ordinária de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$
Utilizamos esta série no caso de “objetos indistinguíveis”: bolas iguais, votação secreta, ...
- a série geradora exponencial de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n.$$
Utilizamos esta série no caso de “objetos distinguíveis”: bolas enumeradas ou de cores diferentes, votação aberta, ...

Exemplos

- Contamos as maneiras de . . .

Exemplos

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária:

  A série geradora exponencial:

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots$.

  A série geradora exponencial:

Exemplos

Exemplos

- Contamos as maneiras de … “não fazer nada” (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$.

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$.
- "Não fazer nada" quando $n \leq k$ e, para $n > k$, é "impossível":

  A série geradora ordinária:

  A série geradora exponencial:

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... “não fazer nada” (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$.
- “Não fazer nada” quando $n \leq k$ e, para $n > k$, é “impossível”:

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + \cdots + 1x^k$.

  A série geradora exponencial:

Exemplos

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$.
- "Não fazer nada" quando $n \leq k$ e, para $n > k$, é "impossível":

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + \cdots + 1x^k$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$.

Exemplos

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$.
- "Não fazer nada" quando $n \leq k$ e, para $n > k$, é "impossível":

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + \cdots + 1x^k$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$.
- Ordenar n objetos totalmente.

  A série geradora exponencial:

Exemplos

Exemplos

- Contamos as maneiras de ... "não fazer nada" (com n objetos).

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$.
- "Não fazer nada" quando $n \leq k$ e, para $n > k$, é "impossível":

  A série geradora ordinária: $1 + 1x + 1x^2 + \cdots + 1x^k$.

  A série geradora exponencial: $1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$.
- Ordenar n objetos totalmente.

  A série geradora exponencial:

$$1 + 1x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \dots.$$

Operações com séries formais I

O produto

- Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Operações com séries formais I

O produto

- Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Nota

Para polinómios (vistos como séries formais), o produto definido acima coincide com o produto de polinómios.

Operações com séries formais I

O produto

- Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Nota

Para polinómios (vistos como séries formais), o produto definido acima coincide com o produto de polinómios.

Nota

A série formal $1 + 0x + 0x^2 + \ldots$ é o elemento neutro da multiplicação.

Operações com séries formais II

Mais operações

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

Operações com séries formais II

Mais operações

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- Multiplicação por um escalar:

$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$$

Operações com séries formais II

Mais operações

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- Multiplicação por um escalar:

$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$$

- A série nula

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$

  é o elemento neutro da adição.

Exemplos

Exemplos

- $$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$

Exemplos

Exemplos

- $$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots)$$

Exemplos

Exemplos

- $$\begin{aligned}(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &\qquad + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplos

- $$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$
$$+ (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots)$$
$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .$$
- $$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$
$$- (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$

Exemplos

Exemplos

- $$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)$$
$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)$$
$$+ (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots)$$
$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots.$$
- $$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$
$$- (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$
$$= 1;$$

Exemplos

Exemplos

- $$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$
$$+ (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots)$$
$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots.$$

- $$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$
$$- (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$
$$= 1;$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é a série inversa da série $(1-x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Exemplos

Do mesmo modo obtém-se:

- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$$

Exemplos

Do mesmo modo obtém-se:

- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$$
- Para cada $m \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^m}.$$

Exemplos

Exemplos

Do mesmo modo obtém-se:

- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$$
- Para cada $m \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^m}.$$

Exemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Vamos determinar a série geradora ordinária $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Vamos determinar a série geradora ordinária $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Vamos determinar a série geradora ordinária $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right)
\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Vamos determinar a série geradora ordinária $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) \\
&= 1 + x + x(\mathcal{F} - 1) + x^2\mathcal{F};
\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Vamos determinar a série geradora ordinária $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) \\
&= 1 + x + x(\mathcal{F} - 1) + x^2\mathcal{F};
\end{aligned}$$

portanto, $\mathcal{F} - x\mathcal{F} - x^2\mathcal{F} = 1$, logo $\mathcal{F} = (1 - x - x^2)^{-1}$.

Interpretação combinatorial

A questão

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

A questão

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes c_n de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

estão a contar?

Interpretação combinatorial

A questão

Para um *problema de contagem “A”* e um *problema de contagem “B”*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes c_n de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

A questão

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes c_n de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir um conjunto com n elementos em duas partes E_1 e E_2 disjuntas, e

Interpretação combinatorial

A questão

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes c_n de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir um conjunto com n elementos em duas partes E_1 e E_2 disjuntas, e
- equipar E_1 com uma estrutura do problema "A" e

Interpretação combinatorial

A questão

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes (ordinárias ou exponenciais)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes c_n de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir um conjunto com n elementos em duas partes E_1 e E_2 disjuntas, e
- equipar E_1 com uma estrutura do problema "A" e
- equipar E_2 com uma estrutura do problema "B".

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir este conjunto em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir este conjunto em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "não fazemos nada" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$ (o que é o nosso problema de contagem "A");

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir este conjunto em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "não fazemos nada" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$ (o que é o nosso problema de contagem "A");
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto não há nada mais a fazer (o nosso problema de contagem "B").

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir este conjunto em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "não fazemos nada" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$ (o que é o nosso problema de contagem "A");
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto não há nada mais a fazer (o nosso problema de contagem "B").

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir este conjunto em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "não fazemos nada" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$ (o que é o nosso problema de contagem "A");
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto não há nada mais a fazer (o nosso problema de contagem "B").

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

Em particular, $c_4 = 3$.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de . . . , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de . . . , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2).$$

[Um produto de 5 séries geradoras ordinárias]

$$= (1+x)^3(1+x+x^2)^2$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2).\\ &\qquad\text{[Um produto de 5 séries geradoras ordinárias]}\\ &= (1+x)^3(1+x+x^2)^2\\ &= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2).$$

[Um produto de 5 séries geradoras ordinárias]

$$= (1+x)^3(1+x+x^2)^2$$
$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$$
$$= 1+5x+12x^2+18x^3+18x^4+12x^5+5x^6+1x^7.$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2). \\ &\qquad \text{[Um produto de 5 séries geradoras ordinárias]} \\ &= (1+x)^3(1+x+x^2)^2 \\ &= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4) \\ &= 1+5x+12x^2+18x^3+18x^4+12x^5+5x^6+1x^7.\end{aligned}$$

Logo, há $c_4 = 18$ tais maneiras.

Intermezzo: séries vs. funções

Recordamos do Cálculo que,

interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$,

Intermezzo: séries vs. funções

Recordamos do Cálculo que,

interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um r com $0 \leq r \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é (absolutamente) convergente para cada $x \in \left]-r, r\right[$.

Intermezzo: séries vs. funções

Recordamos do Cálculo que,

interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um r com $0 \le r \le \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é (absolutamente) convergente para cada $x \in \left]-r, r\right[$. Portanto, podemos associar a função

$$\mathcal{A}\colon \left]-r, r\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

à série $\mathcal{A}$.

Intermezzo: séries vs. funções

Recordamos do Cálculo que,

interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um r com $0 \leq r \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é (absolutamente) convergente para cada $x \in]-r, r[$. Portanto, podemos associar a função

$$\mathcal{A}\colon]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

à série $\mathcal{A}$. Aqui,

- a soma de séries formais corresponde à soma das funções,

Intermezzo: séries vs. funções

Recordamos do Cálculo que,

interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um r com $0 \leq r \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é (absolutamente) convergente para cada $x \in \left]-r, r\right[$. Portanto, podemos associar a função

$$\mathcal{A} \colon \left]-r, r\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

à série $\mathcal{A}$. Aqui,

- a soma de séries formais corresponde à soma das funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto das funções,
- ....

Exemplos

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$
2. A série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ tem o raio de convergência $r = 0$.

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$
3. A série formal $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $r = \frac{1}{2}$; portanto, defina a função
$$\mathcal{A}\colon \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k.$$

3. A série formal $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $r = \frac{1}{2}$; portanto, defina a função
$$\mathcal{A} \colon \left] \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$

4. A série formal $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ tem o raio de convergência $r = \infty$; portanto, defina a função
$$\mathcal{A} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = e^t.$$

Funções geradoras

Funções geradoras ordinária e exponencial

Dada um "problema de contagem" e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de } \ldots \text{ com } n \text{ objetos,}$$

a função correspondente à série geradora ordinária

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

diz-se função geradora ordinária, e a função correspondente à série geradora exponencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n$$

diz-se função geradora exponencial.

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja,

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$.

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja,

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = \binom{n}{k}$.

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = \binom{n}{k}$. Então, a função geradora ordinária correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Definição

Seja $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências formal. Então,

Operações com séries formais III

Definição

Seja $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Operações com séries formais III

Definição

Seja $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal
$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$
- o integral de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal
$$\int \mathcal{A} = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Operações com séries formais III

Definição

Seja $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal
$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$
- o integral de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal
$$\int \mathcal{A} = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Nota

As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.

Calcular com a derivada e o integral

Nota

Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries. Mais concretamente,

Calcular com a derivada e o integral

Nota

Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries. Mais concretamente,

- a função definida pela série formal $\mathcal{A}'$ é a derivada da função definida pela série $\mathcal{A}$;

Calcular com a derivada e o integral

Nota

Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries. Mais concretamente,

- a função definida pela série formal $\mathcal{A}'$ é a derivada da função definida pela série $\mathcal{A}$;
- para cada elemento x do intervalo de convergência,

$$\left(\int \mathcal{A}\right)(x) = \int_0^x \mathcal{A}(t)dt.$$

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =$$

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exemplos

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =$$

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) = \left(\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$

$$\int (1-x)^{-1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x).$$

Algumas igualdades úteis

Algumas igualdades úteis

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$.

Algumas igualdades úteis

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$.
- Mais geral: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.

Algumas igualdades úteis

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$.
- Mais geral: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

Algumas igualdades úteis

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$.
- Mais geral: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.
- Mais geral, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$ onde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n \geq 1}$ é uma solução de $(*)$;

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n \geq 1}$ é uma solução de $(*)$; assim, a solução geral de $(*)$ é dada por

$$(c \cdot 2^n - 1)_{n \geq 1}.$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n \geq 1}$ é uma solução de $(*)$; assim, a solução geral de $(*)$ é dada por

$$(c \cdot 2^n - 1)_{n \geq 1}.$$

Finalmente, tendo em conta a condição inicial $a_1 = 1$, obtemos $1 = 2c - 1$, ou seja, $c = 1$.

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}
$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1}+1)x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
&= (\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n + 1) - (\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)x^n.
\end{aligned}
$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}\ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A} \\
&= (6x^2 + x)\mathcal{A} + x + 3;
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A} \\
&= (6x^2 + x)\mathcal{A} + x + 3;
\end{aligned}$$

logo, $\mathcal{A} = \frac{x+3}{-6x^2-x+1} = \frac{x+3}{(1-3x)(1+2x)}$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

com $x = \frac{1}{3}$ obtemos $A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

com $x = \frac{1}{3}$ obtemos $A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$. De forma semelhante obtém-se $B = \frac{2}{5}$, por isso

$$\mathcal{A} = \frac{3}{5}\frac{x+3}{1-3x} + \frac{2}{5}\frac{x+3}{1+2x}.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\mathcal{A} = (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\end{aligned}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n =$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\ &= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\ &= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}
$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$
a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5}
$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5} \\
&= 2 \cdot 3^n + (-2)^n
\end{aligned}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5} \\
&= 2 \cdot 3^n + (-2)^n
\end{aligned}$$

(e também para $n = 0$: $a_0 = 2 + 1 = 3$).

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = \dots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots$$

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = \dots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots$$

- Recordar (e utilizar) que

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \lambda^n x^n.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x}, \\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x}; \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.
Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.
Assim, temos

$$\begin{aligned} (1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x}, \\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x}; \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x}, \\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x}; \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Agora precisamos paciência ...

Sistemas de equações de recorrência

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

Sistemas de equações de recorrência

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x} \end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x} \end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Portanto:

$$\mathcal{A} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)}, \qquad \mathcal{B} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\mathcal{B} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}\\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\ &= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}3^n x^n.
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\mathcal{A} = \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x}
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n.
\end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+1}{n} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n.
\end{aligned}
$$

Conclusão:

$$
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 2^n + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.
$$

Séries geradoras de duas variáveis

Generalizando

Para um “sucessão” $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ de números, designa-se por série geradora (ordinária) bidimensional desta sucessão a série formal de potências

$$\mathcal{A} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} a_{n,k}x^n y^k,$$

onde x e y são símbolos diferentes.

Séries geradoras de duas variáveis

Generalizando

Para um "sucessão" $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ de números, designa-se por série geradora (ordinária) bidimensional desta sucessão a série formal de potências

$$\mathcal{A} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} a_{n,k}x^n y^k,$$

onde x e y são símbolos diferentes.

No domínio de convergência, a expressão acima defina uma função (de duas variáveis) que se designa por função geradora (ordinária).

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Tendo em conta que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, temos

$$\mathcal{B} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} b_{n,k} x^n y^k$$

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Tendo em conta que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, temos

$$\mathcal{B} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} b_{n,k}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k \right) x^n$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Tendo em conta que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} b_{n,k}x^n y^k &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+y)^n x^n\end{aligned}$$

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Tendo em conta que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} b_{n,k}x^n y^k &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(1+y)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}((1+y)x)^n
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ para a sucessão de números binomiais $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Tendo em conta que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} b_{n,k}x^n y^k &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+y)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((1+y)x)^n \\ &= \frac{1}{1-x-xy}.\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ da sucessão $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$ (recordamos que $0^0 = 1$).

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ da sucessão $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$ (recordamos que $0^0 = 1$).

Temos:

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}y^k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\right)x^n;$$

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ da sucessão $\left(b_{n,k}\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$ (recordamos que $0^0 = 1$).

Temos:

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}y^k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\right)x^n;$$

utilizando a série exponencial, podemos escrever

Exemplo

Exemplo

Vamos determinar a série geradora $\mathcal{B}$ da sucessão $\left(b_{n,k}\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$, onde $b_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$ (recordamos que $0^0 = 1$).

Temos:

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^n y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}y^k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ny)^k}{k!}\right)x^n;$$

utilizando a série exponencial, podemos escrever

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty}e^{ny}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(e^y x)^n = \frac{1}{1-xe^y}.$$