

Matemática Discreta

Funções

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://moodle.ua.pt>

Função, conjunto de partida e conjunto de chegada

Definição (de função)

Sejam A e B dois conjuntos e $f \subseteq A \times B$ uma relação entre A e B . Se, para todo $x \in A$ existe um e um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, diz-se que f é uma **função** definida em A e imagem em B . Nestas condições A designa-se **conjunto de partida** e B **conjunto de chegada**.

- Usualmente escreve-se: $f(x) = y$, em vez de $(x, y) \in f$.
- Também se escreve $f : A \rightarrow B$ ou

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

para significar que f é uma função definida em A e com imagem em B .

Exemplo

Exemplo: De entre as relações binárias entre $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ a seguir indicadas, vamos determinar as que são funções.

- 1) $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$.
- 2) $g = \{(1, a), (2, c), (3, d), (2, b)\}$.
- 3) $h = \{(1, a), (2, b)\}$.

Funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Uma função $f : A \rightarrow B$ diz-se

injectiva se

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \text{ quaisquer que sejam } x, y \in A;$$

sobrejectiva se

para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;

bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

Exemplos

Vamos classificar as funções a seguir indicadas quanto à injectividade e sobrejectividade.

$$1) \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n$$

$$2) \quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ n \mapsto n^2$$

$$3) \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3$$

$$4) \quad i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \text{ definido por } i(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } n \geq 0 \\ -2n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Funções iguais

Definição (de igualdade de funções)

Duas funções f e g dizem-se **iguais** (e escreve-se $f = g$) se

- 1) $\text{dom}(f) = \text{dom}(g) = D$;
- 2) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

Exercício

De entre as funções a seguir indicadas, quais as que são iguais?

- 1) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad x \in \mathbb{Z}$;
- 2) $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$;
- 3) $h(x) = (x^2 - 1)(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$.

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca)

Considere a função $f : A \rightarrow B$ e os subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- Designa-se **imagem** de X por f , o conjunto

$$f(X) = \{b \in B : f(x) = b, \text{ para algum } x \in X\}.$$

Por sua vez, $\text{img}(f) = f(A)$.

- Designa-se **imagem recíproca** de Y por f , o conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Nota: quando $Y = \{y\}$, escreve-se $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$.

Imagem e imagem recíproca

Exercício

Considerando a função

$$\begin{array}{ccc} g : & \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & n & \mapsto n^2 \end{array}$$

e os conjuntos $X_1 = \{-4, -3, -2, -1\}$ e $X_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, determine:

- $g(X_1)$;
- $g(X_2)$;
- $g^{-1}(X_2)$.

Sequências

Definição (de sequência finita)

Uma sequência finita de um conjunto A é uma função

$$\begin{aligned} a: [k] &\rightarrow A \\ n &\mapsto a(n) \end{aligned}$$

onde $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. Neste caso, a diz-se uma sequência de comprimento k .

Notação:

- Escrevemos a_n em vez de $a(n)$;
- Uma sequência a de k elementos de um conjunto A denota-se por

$$a = (a_1, \dots, a_k), \quad a_i \in A, \quad i = 1, \dots, k$$

Exemplo

- Considerando a função

$$\begin{aligned} a: [3] &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

podemos denota-la por $a = (2, 4, 6)$.

- Deve observar-se que se trata de uma sequência de comprimento 3.

Sucessão

Definição (de sucessão)

Uma **sucessão** de elementos de um conjunto A é uma sequência com uma infinidade de elementos do conjunto A (que se designam por **termos**), ou seja, é uma função

$$a : \mathbb{N} \rightarrow A.$$

Notação: a sucessão (a_1, a_2, \dots) denota-se por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplo: $(2n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

A composição de funções é um caso particular da composição de relações

Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemplo: considerando as funções

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{e} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 & \quad x \mapsto 3x \end{array}$$

vamos determinar as funções $g \circ f$ e $f \circ g$.

Mais geralmente

Dada a família de funções $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$, $i = 1, \dots, p$, define-se a função composta

$$\begin{aligned} f_p \circ f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 : A_1 &\rightarrow A_{p+1} \\ x &\mapsto f_p(f_{p-1}(\dots(f_1(x)))) \end{aligned}$$

Exemplo: considerando a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

escolhendo $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos definir sequência

$$n_{k+1} = f(n_k), k = 1, 2, \dots$$

ou seja, $n_{k+1} = f^k(n_1)$, $k = 1, 2, \dots$. Assim, n_{k+1} é a imagem de n_1 pela composição k vezes da função f com ela própria.

O problema de Collatz

Relativamente à função f anteriormente definida, compondo f com ela própria, obtêm-se sucessivamente os valores:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4, & f(4) &= 2, & f(2) &= 1. \\ f(2) &= 1. \\ f(3) &= 10, & f(10) &= 5, & f(5) &= 16, & f(16) &= 8, & f(8) &= 4, & f(4) &= 2. \\ f(4) &= 2. \\ f(5) &= 16, & f(16) &= 8, & f(8) &= 4. \\ f(6) &= 3. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note-se que a partir do momento que se obtém **1**, a sequência passa a ser **1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...**. Aparentemente, qualquer que seja o número inicial, a sequência obtida passa por **1**.

Conjectura de Collatz. $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : f^k(n) = 1$.

Restrições e extensões de funções

Definição

Dada uma função $f : A \rightarrow B$ e $X \subseteq A$, designa-se por **restrição** de f a X (e escreve-se $f|_X$), a função $f|_X : X \rightarrow B$ definida por $f|_X(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Por sua vez, diz-se que f é uma **extensão** de $f|_X$ a A .

Exemplo: considerando a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$. A restrição de f a X é a função $f|_X = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.

Função identidade e função inversa

Definição (de função identidade)

A função

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

designa-se por **função identidade** sobre A .

Nota: a função identidade é uma bijecção (a notação id_A é utilizada para indicar que se trata da função identidade definida em A).

Função invertível

Definição (de função invertível)

Uma função $f : A \rightarrow B$ diz-se **invertível** se existe uma função $g : B \rightarrow A$ tal que

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

A função g designa-se por **função inversa** de f e denota-se f^{-1} .

Nota: observe-se que se f é invertível, então f^{-1} também é e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Teorema

Uma função é invertível se e só se é uma bijecção.

Exemplo

Vamos determinar, caso existam, as inversas das seguintes funções:

- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;
- 2) $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, tal que $g(x) = e^x$;
- 3) $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $h(n) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{para } n \geq 0 \\ -2n & \text{para } n < 0 \end{cases}$.