Séries numéricas

Exercícios

Exercício 1

Considere a sucessão de prismas quadrangulares rectos em que cada prisma se obtém a partir do anterior por uma redução de factor $p = \frac{2}{3}$ em todas as suas dimensões (lado da base e altura). Se o primeiro prisma tem 3 m de altura e 4 m^2 de área da base, determine

1. A altura da torre que se obtém colocando o segundo sólido sobre o primeiro, o terceiro sobre o segundo e assim sucessivamente;
2. O volume do prisma de ordem n;
3. A soma dos volumes de todos os sólidos;
4. A soma da superfície lateral de todos os sólidos.

Resolução: Sejam h_n a altura e l_n o lado da base do prisma P_n. Do enunciado conclui-se que $h_n = \dfrac{2}{3}h_{n-1}$ e que $l_n = \dfrac{2}{3}l_{n-1}$. As duas sucessões são progressões geométricas de razão $\dfrac{2}{3}$, e portanto,

$$h_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} h_1 \quad \text{e} \quad l_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l_1$$

Como $h_1 = 3$ e $l_1 = 2$ vem

$$h_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{e} \quad l_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

1. A altura da torre que se obtém colocando o segundo sólido sobre o primeiro, o terceiro sobre o segundo e assim sucessivamente é dada pela soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Como a razão é inferior a 1 a série geométrica converge e a sua soma é

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = 9$$

   Podemos então afirmar que a altura da torre são 9 metros.

2. O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura. Neste caso, o volume de P_n é

   $$V_n = l_n^2 \times h_n = \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)^2 \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}$$

3. A soma dos volumes de todos os sólidos é a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} V_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}$.

   Temos de novo uma série geométrica de razão $r = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ e primeiro termo 12. Como a razão é menor do que 1, a série é convergente e a sua soma é dada por $\dfrac{V_1}{1-r}$. Assim,

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3} = \frac{12}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{324}{19}$$

   O volume total são $\dfrac{324}{19}$ m^3.

4. A superfície lateral de cada prisma é dada por $S_n = 4l_n h_n$, ou seja,

$$S_n = 4 \times 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 24 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$$

A soma das superfícies laterais é dada pela soma da série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} 24 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$. Como a razão da série geométrica é $r = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ e o primeiro termo é $S_1 = 24$, a soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 24 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} = \frac{24}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{216}{5}$$

Exercício 2

Considere a sucessão de cilindros tal que: o segundo cilindro tem $\frac{1}{2^2}$ do raio e o dobro da altura, do primeiro; o terceiro cilindro tem $\frac{1}{3^2}$ do raio e o triplo da altura, do primeiro e assim sucessivamente. Se o raio do primeiro cilindro é 3 m e altura é 5 m,

1. Determine uma expressão que permita calcular a altura da torre que se obtém colocando o segundo sólido sobre o primeiro, o terceiro sobre o segundo e assim sucessivamente. Essa altura é finita?

2. Diga, justificando, se a soma dos volumes de todos os sólidos é finita.

3. A soma da superfície lateral de todos os sólidos é finita? Porquê?

Resolução: Observe-se que

$$r_n = \frac{1}{n^2} r_1 \quad \text{e} \quad h_n = n h_1$$

Como $r_1 = 3$ e $h_1 = 5$ vem

$$r_n = \frac{3}{n^3} \quad \text{e} \quad h_n = 5n$$

1. A altura da torre é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5n = 5 \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

que é uma série de Dirichlet (multiplicada por uma constante), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha = -1$, logo divergente.

2. O volume do cilindro de ordem n, é dado por

$$V_n = \pi r_n^2 h_n = \pi \left(\frac{3}{n^2}\right)^2 (5n) = \frac{45\pi}{n^3}$$

A soma de todos os volumes é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{45\pi}{n^3} = 45\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

que é uma série de Dirichlet (a menos da constante 45π) convergente porque $\alpha = 3$. Logo o volume total é finito.

3. A superfície lateral cada cilindro é dada por

$$S_n = 2\pi r_n h_n = 2\pi \frac{3}{n^2}(5n) = \frac{30\pi}{n}$$

A soma de todas as superfícies laterais é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{30\pi}{n}$$

que é uma série de Dirichlet (a menos da constante 30π) divergente já que $\alpha = 1$. Portanto, esta soma é infinita.

Exercício 3

Considere a sucessão de prismas quadrangulares retos em que a altura de cada prisma é o quintuplo da altura do anterior e o seu comprimento é $\frac{1}{4}$ do comprimento do anterior. Se a altura do primeiro prisma é 3 m e o comprimento é 2 m,

1. Determine a superfície lateral de cada um dos sólidos e indique, justificando, se a soma das áreas laterais de todos os sólidos é finita ou infinita.
2. Indique uma expressão que permita calcular a altura da torre que se obtém colocando o segundo sólido sobre o primeiro, o terceiro sobre o segundo e assim sucessivamente. Essa altura é finita?
3. Diga, justificando, se a soma dos volumes de todos os sólidos é finita.

Resolução:

Seja h_n a altura do prisma de ordem n e c_n a medida do lado da base do prisma de ordem n. Então,$h_n = 5h_{n-1}$ e $c_n = \frac{1}{4}c_{n-1}$. São ambas progressões geométricas, no primeiro caso de razão 5 e primeiro termo 3 e no segundo de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo 2:

$$h_n = 3 \times 5^n \quad \text{e} \quad c_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \; n \geq 0$$

1. A superfície lateral de cada um dos sólidos é dada por $S_n = 4h_n c_n = 24 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$. Assim, a soma de todas as áreas laterais é dada pela série $\sum_{n=0}^{+\infty} 24 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$ que é uma série geométrica de razão positiva superior a 1, logo divergente. Podemos então dizer que a soma de todas as áreas laterais é infinita.

2. A altura da torre que se obtem por este processo é dada pela série $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n = 3\sum_{n=0}^{+\infty} 5^n$.

   Sendo uma série geométrica divergente (a razão é positiva e maior do que 1), a altura da torre é infinita.

3. O volume do sólido de ordem n é dado por $V_n = c_n^2 h^n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \times 3 \times 5^n = 12 \times \left(\frac{5}{16}\right)^n$.

   A soma de todos os volumes é a série $\sum_{n=0}^{+\infty} 12 \times \left(\frac{5}{16}\right)^n$. Temos novamente uma série geométrica de razão $\frac{5}{16}$, logo convergente. A sua soma é dada por

$$V = \frac{12}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{192}{11}$$