Folha 5 Aulas - Princípios, Agrup. e Ident. Combinatórias

1. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

   (a) Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|$=3 e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

   (b) Quantas funções injectivas podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B?

2. Determine o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 e o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 com dígitos distintos.

3. Qual o número de números naturais não superiores a 1000 que não são divisíveis por 4, nem por 6, nem por 9?

4. Num grupo de 50 portugueses, 22 falam inglês, 23 falam espanhol, 17 falam francês, 10 falam inglês e espanhol, 5 falam francês e inglês, 7 falam francês e espanhol e 3 falam as três línguas estrangeiras. Quantas pessoas deste grupo não fala nenhuma língua estrangeira?

5. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

6. Considere as permutações $\rho = (7263145)$ e $\pi = (6325741)$.

   (a) Determine as composições $\pi \circ \rho$ e $\rho \circ \pi$.

   (b) Determine π^{-1} e ρ^{-1}.

   (c) Determine a partição cíclica de π e a partição cíclica de ρ.

   (d) Indique o tipo de permutação de π e o tipo de permutação de ρ.

   (e) Determine o tipo de paridade das permutações π e ρ.

   (f) Considere a permutação $\theta = (72618345)$, determine a partição cíclica de θ e indique o tipo de permutação de θ.

   (g) Dermine o número de permutações do tipo $2^1 3^2 4^1$.

7. Considere as permutações $\pi = (13265784)$ e $\rho = (73286415)$.

   (a) Determine a permutação θ tal $\pi \circ \theta = \rho$.

   (b) Determine o número de permutações com o mesmo tipo de π.

8. Qual é o número de palavras com k carateres que se podem formar considerando um alfabeto de n letras,

   (a) sem qualquer restrição.

   (b) não podendo existir duas letras consecutivas repetidas.

   (c) e que sejam palíndromos (i.e., palavras cujos elementos equidistantes dos extremos são iguais; por exemplo: ana, rever, ertutre).

9. Quantos números entre 1000 e 9999 se podem formar:
   (a) contendo o dígito 1.
   (b) com todos os dígitos distintos e contendo os dígitos 1 e 2 em posições adjacentes com o 1 a preceder o 2.
   (c) com dígitos ímpares a ocupar as posições ímpares (onde a primeira posição corresponde às unidades) e dígitos pares a ocupar posições pares.

10. A Assembleia da República é composta por 230 deputados dos quais 164 são homens e 66 são mulheres. Quantas comissões de 10 deputados se podem formar se incluirmos em cada uma delas 5 homens e 5 mulheres?

11. Considere uma grelha $n \times n$ onde A é o ponto $(0,0)$ e B é o ponto (n,n).
   (a) Determine o número de caminhos mais curto, sobre a grelha, entre A e B;

   [**Sugestão:** determine uma bijeção entre o conjunto dos caminhos mais curtos entre A e B e as sequências binárias com n zeros e n uns.]

   (b) Suponha que $n = 5$ e determine o número de caminhos mais curtos, sobre a grelha, entre A e B, que passam pelo ponto $(3,2)$.

12. Qual o número de possibilidades de se distribuírem 8 presentes por 5 crianças, em cada uma das seguintes condições:
   (a) os presentes são todos iguais,
   (b) os presentes são todos distintos.

13. Suponha que tem 20 cartas idênticas e 12 envelopes. De quantas maneiras pode colocar as cartas nos envelopes admitindo que deve haver pelo menos uma carta em cada envelope?

14. Uma empresa vai distribuir 6 bolas de basquetebol iguais e 7 bolas de futebol diferentes por 5 clubes. De quantas maneiras é possível fazer esta distribuição?

15. Considere um sistema computacional onde se usam endereços de 16 dígitos binários (zeros e uns). Determine o número de endereços que se podem formar com 11 zeros e 5 uns, e que comecem por 101 e terminem em 0001.

16. (a) Estabeleça uma bijecção entre as sequências binárias de r uns e $n-1$ zeros e o conjunto das soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \in \mathbb{N}$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Obtenha, em termos de combinações com repetição, o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, com $x_1,\ x_2,\ x_3 \ \in\ \mathbb{N}_0$. Qual o número de soluções se x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos tais que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$?

17. Qual o número de possibilidades de colocar 4 laranjas iguais e 6 maçãs diferentes em cinco caixas numeradas?

18. Um leitor de CD pode ser programado para tocar 20 canções de um total de 57 canções disponíveis. De quantas maneiras diferentes pode esta programação ser feita? Considere que uma canção pode ser tocada no máximo uma vez.

19. O Departamento de Codificação dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto 007. A mensagem que vai ser transmitida através de um dos seus canais de comunicação, é constituída por 12 símbolos diferentes e 45 espaços em branco iguais.

    (a) Quantas mensagens diferentes podem ser formadas a partir dos 12 símbolos e dos 45 espaços em branco?

    (b) Pretende-se que na mensagem a enviar existam pelo menos 3 espaços em branco entre cada dois símbolos consecutivos. Quantas mensagens com estas características podem ser enviadas?

20. (a) De quantas maneiras podemos dispôr as letras da palavra PARALELEPÍPEDO em sequências com ou sem significado?

    (b) Nas sequências anteriores, em quantas não aparecem os três P's seguidos ?

21. Recorrendo às fórmulas binomial e multinomial mostre que:

    (a) $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$;

    (b) $k^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ onde a soma se estende a todas as sequências de inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

22. (a) Determine o coeficiente de xy^3z no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{y}{x} + 2z)^6$.

    (b) Calcule o desenvolvimento de $(a + b)^4$ e determine $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{N}$ tais que $5^4 = c_0 4^0 + c_1 4^1 + c_2 4^2 + c_3 4^3 + c_4 4^4$.

    (c) Sabendo que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 32$, determine o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^3 + \sqrt{x})^n$.

23. No desenvolvimento de $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$ determine o coeficiente do termo em $x_1^2\, x_2^3\, x_3\, x_4^2$.

24. Sabendo que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$ é 256 calcule $(n/2)!$.

25. Sabendo que o coeficiente de a^2b^{n-2} no desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$ é igual a 28, determine o coeficiente de $a^{n-3}b^3$.

26. Determine uma fórmula para o coeficiente de x^k na expansão de $(x - \frac{1}{x})^{100}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

27. Prove as seguintes igualdades:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n + 1 - k) = \binom{n+2}{3}$.
    Sugestão: Conte, por dois modos distintos, o número de sequências binárias com $n + 2$ dígitos e com 3 uns, considerando numa dessas contagens, que o segundo 1 está na posição $k + 1$ (onde $k = 1, \ldots, n$) e contando o número de possibilidades para as posições do primeiro e do terceiro 1.

    (c) $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}2^k$.
    Sugestão: Conte, por dois modos distintos, o número de possibilidades de colorir k bolas escolhidas de um conjunto de n bolas, utilizando apenas duas cores e colorindo cada bola com uma única cor.

Soluções:

1. (a) 9; 8; princípio da multiplicação. (b) 6.
2. Existem 51 pares entre 0 e 100, destes 46 têm algarismos diferentes.
3. 611.
4. 7.
5. 23.
6. (a) $\pi \circ \rho = (1342657)$ e $\rho \circ \pi = (4621537)$;
   (b) $\pi^{-1} = (7326415)$ e $\rho^{-1} = (5246731)$;
   (c) partição cíclica de π é $\{\{1,4,5,6,7\},\{2,3\}\}$ e partição cíclica de ρ é $\{\{1,5,7\},\{2\},\{3,4,6\}\}$;
   (d) π é do tipo $2^1 5^1$ e ρ é do tipo $1^1 3^2$;
   (e) $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$ e $\mathrm{sgn}(\rho) = 1$.
   (f) $\{\{1,4,7\},\{2\},\{3,6\},\{5,8\}\}$; $1^1 2^2 3^1$;
   (g) $\frac{12!}{2^1 3^2 4^1 1!2!1!}$.
7. (a) $(6\,2\,3\,7\,4\,8\,1\,5)$. (b) 2520.
8. (a) n^k (b) $n(n-1)^{k-1}$ (c) $n^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$, onde $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a $\frac{k}{2}$.
9. (a) $10^4 - 9^4 - 3 \times 9^2 - 3 \times 9 - 1$ (b) $8 \times 7 + 2 \times 7^2$ (c) 500.
10. $\binom{164}{5}\binom{66}{5} = 8308054536477696$.
11. (a) $\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right)$ (b) 100.
12. (a) $\binom{12}{4} = 495$; (b) $5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^8 = 390625$.
13. $\binom{8+11}{8} = 75582$.
14. $\binom{6+4}{4}5^7 = 210 \times 5^7$.
15. 36.
16. (b) $\binom{13}{11}$; 45.
17. 1093750.
18. $\binom{57}{20}20!$
19. (a) $\binom{12+45}{1,\ldots,1,45}$;(b) $\binom{12+12}{1,\ldots,1,12}$.
20. (a) 605404800; (b)585446400.
22. (a) 120; (b) $c_0 = c_4 = 1$, $c_1 = c_3 = 4$, $c_2 = 6$;
    (c) Dado que $n = 5$, o coeficiente é $\binom{5}{2} = 10$.
23. -13440.
24. 24.
25. 56.
26. $\binom{100}{50+k/2}(-1)^{50-k/2}$, para $k \in \{-100, -98, \cdots, 98, 100\}$ e 0 para os restantes valores de k.