

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Capítulo 5

Valores Próprios e Vetores Próprios

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ é um **valor próprio** de A se existe um vetor **não nulo** $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX = \lambda X.$$

Todo o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ **não nulo** que satisfaz $AX = \lambda X$ é designado por **vetor próprio** de A associado ao **valor próprio** λ .

λ é um **valor próprio** de A



o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ possui uma solução **não trivial**



$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Seja A uma matriz $n \times n$.

O **polinómio caraterístico** de A é um polinómio de grau n em λ dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

A equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ diz-se a **equação caraterística** de A .

Teorema: Os valores próprios de A são as raízes **reais** do polinómio caraterístico de A .

Observação: Os valores próprios de uma matriz **triangular** são as entradas da sua diagonal principal.

Teorema: Seja λ um valor próprio da matriz A $n \times n$. Então,

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : X \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{0\}$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

U_λ diz-se o subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ e

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n).$$

Teorema: Seja A $n \times n$ com k valores próprios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}.$$

Então $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Determinar valores os próprios e os subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

O polinómio característico de A é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

A equação característica de A é

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\textcolor{red}{2} - \lambda)^{\textcolor{blue}{1}}(\textcolor{red}{3} - \lambda)^{\textcolor{blue}{1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \textcolor{red}{2} \vee \lambda = \textcolor{red}{3} \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são $\textcolor{red}{2}$ e $\textcolor{red}{3}$, com $n_2 = n_3 = 1$. A dimensão dos subespaços associados é igual a 1, pois $1 \leq \dim \textcolor{green}{U}_2 \leq 1$ e $1 \leq \dim \textcolor{green}{U}_3 \leq 1$.

$$(A - \mathbf{2}I)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{X}_1 \rangle, \quad \text{com } \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - \mathbf{3}I)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{U}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{X}_2 \rangle, \quad \text{com } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar valores e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

O polinómio característico de A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

possui uma única raiz real $\lambda = 0$ (e um par de raízes complexas conjugadas).

O espaço próprio de A é $U_0 = \mathcal{N}(A) = \langle \mathbf{X} \rangle$, com $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\dim U_0 = 1$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar valores e subespaços próprios.

A é triangular $\Rightarrow p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \Rightarrow$ possui valores próprios 1 e 2.

$$X \in U_1 \Leftrightarrow (A - 1I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X \in U_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

A e B são matrizes **semelhantes** se existir uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Observação: Com P invertível, $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$.

Teorema: Matrizes **semelhantes** possuem o mesmo polinómio caraterístico e, portanto, os mesmo valores próprios.

Uma matriz diz-se **diagonalizável** se é semelhante a uma **matriz diagonal**.

Sendo A **diagonalizável**, uma **matriz diagonalizante** de A é uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = D$$

é uma **matriz diagonal**.

Sejam A , P e D matrizes $n \times n$, sendo X_1, \dots, X_n as colunas de P e D diagonal com $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ na diagonal principal. Então (verifique que)

- $AP = A \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{bmatrix}$
- $PD = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$
- $AP = PD \Leftrightarrow X_i$ é vetor próprio de A associado a λ_i , $i = 1, \dots, n$.

Teorema: A $n \times n$ é diagonalizável $\Leftrightarrow A$ possui n vetores próprios l.i.

Nestas condições, A é semelhante à matriz diagonal $P^{-1}AP = D$ e

- as colunas da matriz diagonalizante P são n vetores próprios l.i. de A ,
- a matriz D contém os valores próprios de A na diagonal principal e
- a ordem dos vetores próprios determina a ordem dos valores próprios.

Lema: Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.

Demonstração: Sejam X_1 e X_2 vetores próprios de A associados a dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 e suponha-se que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$. Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade por $A - \lambda_1 I$, obtém-se

$$\underbrace{\alpha_1 (A - \lambda_1 I) X_1}_{0} + \underbrace{\alpha_2 (A - \lambda_1 I) X_2}_{AX_2 - \lambda_1 X_2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{X_2}_{\neq 0} = 0,$$

onde $\alpha_2 = 0$. Logo, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 X_1 = 0$ e, como $X_1 \neq 0$, também $\alpha_1 = 0$. Conclui-se que o conjunto $\{X_1, X_2\}$ é l.i.

Teorema: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de A . Então A possui $\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k}$ vetores próprios l.i.

Teorema: Seja $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ o polinómio característico de A , sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os **valores próprios distintos**. Então,

A é **diagonalizável** se e só se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Observações: Seja A uma matriz $n \times n$.

- Se A possui **n valores próprios distintos**, é **diagonalizável**.
- O **recíproco** da afirmação anterior é **falso!** Vide o **exemplo 4**.
- Para descobrir se A , com **$k < n$ valores próprios distintos**, é **diagonalizável**, é preciso verificar se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ só para $n_{\lambda_i} > 1$.
- $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(A - \lambda_i I) = n - \text{car}(A - \lambda_i I)$.

Exemplo 1: A 2×2 é **diagonalizável**, pois tem **2** valores próprios distintos.

Exemplo 2: A 3×3 não é **diagonálizável**, tendo apenas **1** vetor próprio l.i.

Exemplo 3: A não é **diagonálizável**, pois $\dim U_1 = 1 < n_1 = 2$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem valores próprios $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$ e $p_A(\lambda) = (\mathbf{1} - \lambda)^{\mathbf{2}}(\mathbf{2} - \lambda)^{\mathbf{1}}$.

$1 \leq \dim U_2 \leq 1 \Rightarrow \dim U_2 = 1$, mas $1 \leq \dim U_1 \leq 2 \Rightarrow \dim U_1 \in \{1, 2\}$.

Contudo, $A - \mathbf{1}I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 1.

Logo, $\dim U_1 = \text{nul}(A - \mathbf{1}I) = 3 - \text{car}(A - \mathbf{1}I) = 2$ e A é diagonalizável.

Assim, $U_1 = \mathcal{N}(A - \mathbf{1}I) = \langle X_1, X_2 \rangle$. Verifique que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\textcolor{red}{U}_2 = \langle \textcolor{green}{X}_3 \rangle$ com $\textcolor{green}{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então, uma **matriz diagonalizante** de A é

$$\textcolor{green}{P} = [\textcolor{green}{X}_1 \quad \textcolor{green}{X}_2 \quad \textcolor{green}{X}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } \textcolor{green}{P}^{-1}A\textcolor{green}{P} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \end{bmatrix}.$$

Outra **matriz diagonalizante** de A , por exemplo, é

$$Q = [\textcolor{green}{X}_2 \quad \textcolor{green}{X}_3 \quad \textcolor{green}{X}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \textcolor{green}{Q}^{-1}A\textcolor{green}{Q} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix}.$$

Se A é diagonalizável, então existe P invertível tal que $A = PDP^{-1}$.

Para $k \in \mathbb{N}$,

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Se A é invertível, $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ é semelhante a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Então, $A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}$.

Recorde que A é **simétrica** se $A^T = A$.

Teorema: Uma matriz **simétrica** $n \times n$ possui n valores próprios (reais).

Teorema: Vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Demonstração: Se A $n \times n$ é **simétrica** e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, tem-se que

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1 \cdot (AX_2).$$

Se X_1 e X_2 são vetores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios λ_1 e λ_2 , $(AX_1) \cdot X_2 = \lambda_1 X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2) = \lambda_2 X_1 \cdot X_2$, donde $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $X_1 \cdot X_2 = 0$.

A matriz quadrada P é **ortogonal** se $P^T P = I \Leftrightarrow$ é invertível e $P^{-1} = P^T$.

Teorema: Dada uma matriz $P = [P_1 \dots P_n]$ de colunas P_1, \dots, P_n ,
 P é **ortogonal** $\Leftrightarrow \{P_1, \dots, P_n\}$ é uma **base o.n.** de \mathbb{R}^n .

A é **ortogonalmente diagonalizável** se A é diagonalizável e possui uma matriz **diagonalizante ortogonal** (cujas colunas são uma **base o.n.** de A formada por **vetores próprios**).

Teorema: Toda a matriz **simétrica** é **ortogonalmente diagonalizável**.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica $\Rightarrow A$ é ortogonalmente diagonalizável

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda^2) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = -1$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, & X_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & P_1 &= \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ U_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, & X_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, & P_2 &= \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma matriz diagonalizante ortogonal de A é

$$P = [P_1 \quad P_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo} \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6

[5–18]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \Rightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_2 = 0$$

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad P_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Então $\{P_1, P_2, P_3\}$ é uma base o.n. de vetores próprios de A e

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante ortogonal de A tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$