Matemática Discreta

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Número de arranjos com repetição de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n tipos de objectos) que dependem da ordem e podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo.

$$\text{Notação} \to A_n^{(k)} \,.$$

Pelo princípio da multiplicação tem-se que $A_n^{(k)} = n^k$ (verificar!).

Exemplo: Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e pretas e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de $k = 5$ bolas que é possível formar.

Resposta: $A_3^{(5)} = 3^5 = 243$.

Arranjos simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de configurações de k objectos (escolhidos de entre n tipos de objectos) que dependem da ordem.

$$\text{Notação} \rightarrow A_{n,k}\ .$$

Usando o princípio da multiplicação generalizada mostra-se que (prove!)

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Permutações (simples) de n elementos:

$$P_n = A_{n,n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Por convenção, $P_0 = 0! = 1$.

Arranjos simples:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Observação: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, o coeficiente factorial $(\alpha)_k$ é definido por

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1).$$

Consequentemente, $A_{n,k} = (n)_k$.

Exemplos:

Quantas sequências podemos formar com uma bola azul, uma bola vermelha e uma bola preta?
Resposta: $P_3 = 3! = 6$.

De quantas maneiras se podem sentar 5 pessoas em 3 cadeiras distintas (sentando-se uma pessoa em cada cadeira)?
Resposta: $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?
Resposta: $2! \times 11! = 79833600$ (o produto $\times$ vem do princípio da multiplicação).

Combinações simples (ou sem repetição) de n elementos k a k

Número de subconjuntos de k elementos (sem repetição) de um conjunto com n elementos distintos (sem que a ordem pela qual os elementos são enumerados seja considerada)

$$\text{Notação} \to \binom{n}{k}.$$

Algumas propriedades básicas

1. $\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$.

Exemplo

Com 20 jogadores de futebol quantas equipas de 11 jogadores é possível formar?

Resposta: $\binom{20}{11} = \frac{20!}{9!11!} = 167960$.

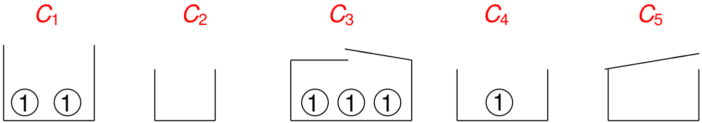
Exercício: Sabendo que num departamento trabalham 4 mulheres e 9 homens, determine:

(a) o número de comissões que se podem formar com 2 mulheres e 3 homens;

(b) o número de comissões de 5 elementos com, pelo menos, 2 mulheres e 2 homens.

Combinações com repetição

Num exemplo anterior verificou-se que existe uma bijecção entre os diferentes modos de colocar k bolas iguais em n caixas distintas e as sequências binárias com $n-1$ zeros e k uns.
Cada maneira de colocar k bolas iguais nas n caixas corresponde a uma das combinações com repetição de n elementos (caixas) k a k. Por exemplo



corresponde ao pseudoconjunto $\{C_1, C_1, C_3, C_3, C_3, C_4\}$.

Consequências

O número de combinações com repetição de n elementos k a k coincide com o número de combinações sem repetição de $n-1+k$ (comprimento de uma sequência binária) k a k (número de uns na sequência binária), isto é,

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Exemplo: Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas iguais em 5 caixas distintas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Resolução

Distribuindo 2 bolas por cada uma das 5 caixas, conclui-se que o número de possibilidades de colocação das restantes 10 bolas nas 5 caixas corresponde ao número de combinações com repetição de 5 caixas 10 a 10.

$$\binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{4!10!} = 1001.$$

Permutações com repetição

Exemplo: Quantos números de telefones da rede fixa (portuguesa) podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

nº de telefone: 2 _ _ _ _ _ _ _ _

O problema a resolver consiste em determinar o número de sequências com 8 algarismos onde o 2 surge uma vez, o 3 surge quatro vezes, o 6 surge duas vezes e o 9 uma vez. Se se tiver em conta as repetições dos algarismos então cada sequência de 8 algarismos referida atrás corresponde a $P_1\, P_4\, P_2\, P_1 = 1!4!2!1!$ das $P_8 = 8!$ sequências que existiriam se os dígitos fossem todos distintos. Conclui-se, assim, que é possível atribuir $\frac{8!}{1!1!2!4!} = 840$ números de telefone nas condições referidas.

Permutações com repetição

Considere-se um conjunto de n objectos distribuídos por k ($k \leq n$) classes que têm $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objectos ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$). Supondo que os objectos pertencentes à mesma classe são indistinguíveis, o número de sequências que se podem formar com esses n objectos é dado pelo número de permutações com repetição

$$\text{Notação} \longrightarrow \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Estes números designam-se por números multinomiais.

Permutações com repetição

Exemplo

Vamos mostrar que o número de possibilidades de partir um conjunto A de cardinalidade n em k subconjuntos, $A_1, \ldots, A_k$, de cardinalidade $n_1, \ldots, n_k$ $(n_1 + \cdots + n_k = n)$, respectivamente, é igual a $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Resolução: Começamos pela escolha dos elementos de A_1, para os quais existem $\binom{n}{n_1}$ possibilidades. Depois escolhemos os elementos de A_2, de entre os $n - n_1$ elementos de A que restam, para os quais existem $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibilidades, etc. Como consequência, o número pretendido é

$$\binom{n}{n_1, \ldots n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots n_{k-1}}{n_k}.$$

Binómio de Newton

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\ \dots\ (1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= \overbrace{1\dots1}^{n \text{ factores}} + x\overbrace{1\dots1}^{n-1 \text{ factores}} + 1x\overbrace{1\dots1}^{n-2 \text{ factores}} + \cdots + \overbrace{x\dots x}^{n-1 \text{ factores}}1 + \overbrace{x\dots x}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 + nx + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}
$$

que é um polinómio em x de grau n. Note-se que o número de parcelas da forma $x^k 1^{n-k}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) é igual ao número de possibilidades de escolher x em k dos n factores e este número é $\binom{n}{k}$.

- Consequentemente, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Fórmula do binómio de Newton ou fórmula binomial de Newton

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Como consequência, $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercício

Mostre que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é dado por 2^n.

Exercício

Mostre que $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Método recursivo para a determinação de números binomiais

Tendo em conta que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{n+k} = 0, \quad \text{e} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

convencionando que $\binom{0}{0} = 1$, então a igualdade

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

estabelece um método recursivo para a determinação dos números binomiais.

para $n > 2$ e $0 < k < n$ fazer: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

- Note-se que a n-ésima linha do triângulo de Pascal, contém os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.
- Para $n = 3$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Fórmula multinomial

Teorema (fórmula multinomial)

Se $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + ... + a_r)^n \quad = \quad \sum_{t_1+\cdots+t_r=n} \binom{n}{t_1, \ldots, t_r} a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$$

onde $t_1,\ t_2,\ ,t_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Com efeito, desenvolvendo o produto de n factores

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)\ldots(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)$$

obtêm-se termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$, com $t_1 + \cdots + t_r = n$, que correspondem à escolha de a_1 em t_1 dos factores, a_2 em t_2 dos restantes factores, etc. Logo, existem $\binom{n}{t_1,\ldots,t_r}$ termos da forma $a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r}$.

Identidades combinatórias diversas

Exemplo

Vamos mostrar que para cada inteiro positivo n se verifica a igualdade

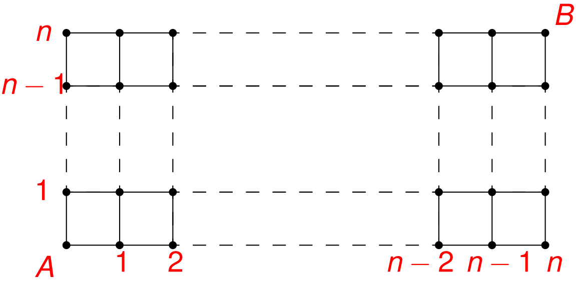
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Considerando a grelha $n \times n$, sabemos que existem

$$\binom{n+n}{n}$$

caminhos mais curtos entre A e B.

Identidades combinatórias diversas (cont.)



Podemos partir o conjunto de todos os caminhos mais curtos entre A e B nos $n+1$ subconjuntos disjuntos $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_n$, onde $\mathcal{A}_k$ (para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) é o conjunto de todos caminhos mais curtos entre A e B que passam no ponto $(k, n-k)$.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Por aplicação do princípio da adição,

$$|\mathcal{A}_0| + \cdots + |\mathcal{A}_k| + \cdots + |\mathcal{A}_n| = \binom{2n}{n}.$$

Basta provar a igualdade $|\mathcal{A}_k| = \binom{n}{k}^2$.
Esta igualdade é consequência do facto de cada caminho de $\mathcal{A}_k$ ser a concatenação de um caminho mais curto entre A e $(k, n-k)$ na grelha $k \times (n-k)$, cujo número é

$$\binom{n-k+k}{k}$$

com um caminho mais curto entre $(k, n-k)$ e B na grelha $(n-k) \times k$, cujo número é

$$\binom{k+n-k}{n-k}.$$

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Exemplo

Vamos mostrar a igualdade

$$\binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{t_1, \ldots, t_i - 1, \ldots, t_r},$$

que é uma generalização da igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, uma vez que $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$.

A parte esquerda da igualdade é o número multinomial que corresponde ao número de partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos subconjuntos $A_1, \ldots, A_r$, com cardinalidade $t_1, \ldots, t_r$, respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Podemos dividir estas partições nos seguinte r tipos de partições distintas:

(1) aquelas em que $n \in A_1$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1 - 1, t_2, \ldots, t_r$, respectivamente;

(2) aquelas em que $n \in A_2$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2 - 1, \ldots, t_r$, respectivamente;

($\cdot$) etc;

(r) aquelas em que $n \in A_r$, cuja cardinalidade corresponde ao número de partições de $n-1$ elementos em r subconjuntos, com cardinalidades $t_1, t_2, \ldots, t_r - 1$, respectivamente.

Identidades combinatórias diversas (cont.)

Logo, para $i = 1, \ldots, r$, o número de partições do tipo i é igual a

$$\binom{n-1}{t_1, \ldots, t_i - 1, \ldots, t_r}$$

e, aplicando o princípio da adição, obtém-s a identidade pretendida.