Matemática Discreta

Relações de Recorrência 1

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Relações de recorrência

- Alguns problemas combinatórios admitem uma solução que pode ser obtida recursivamente através de uma relação de recorrência:

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}). \tag{1}$$

- A relação de recorrência (1) diz- de ordem k ou que tem profundidade k.
- A solução de um problema de ordem n é expressa em função das soluções de problemas idênticos de ordem inferior.

Exemplo (de factorial)

$$F_n = n \cdot F_{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

onde F_n denota o factorial de n ($n!$) e $F_1 = 1$.

Solução de uma equação de recorrência

- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ diz-se uma solução de uma relação de recorrência se os seus termos satisfazem a relação de recorrência.
- Resolver uma relação de recorrência consiste na determinação de uma fórmula não recursiva (ou fórmula fechada) para a_n. Em geral, é preferível calcular o valor de a_n com uma fórmula não recursiva (com uma fórmula recursiva são executadas n iterações).

Exemplo

$a_n = 3n$ é uma solução de $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, fazendo $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ e uma vez que

$$3n = 2(3(n-1)) - 3(n-2)$$

Dependências recursivas simples

- Determinação de uma solução (método ingénuo):
  1. Depois da observação de alguns termos, propor uma fórmula não recursiva.
  2. Provar que a fórmula proposta é válida recorrendo, por exemplo, ao princípio de indução.

Exemplo

Vamos determinar o número de permutações do conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

Solução. Seja a_n = número de permutações do conjunto $[n]$, $n \in \mathbb{N}$. Para determinar a_n calcula-se o número de possibilidades para a posição do número $n \longrightarrow n$ e o número de permutações dos restantes $n-1$ números $\longrightarrow a_{n-1}$. Assim, pelo princípio da multiplicação, $a_n = na_{n-1}, \quad n \geq 2.$

Solução da equação de recorrência

- Proposta de uma solução:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \times 1 \\ a_3 = 3 \times a_2 = 3 \times 2 \times 1 \end{array}\right\}$$

Será $a_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}$?

- Prova por indução:

$n = 1 \longrightarrow a_1 = 1$ (coincide com o n$^{\underline{o}}$ de permutações do conjunto $\{1\}$)

Hipótese de indução: suponha que para $n \in \mathbb{N}$ (fixo) $a_n = n!$.

- Então $a_{n+1} = (n+1)a_n \stackrel{\text{(H.I.)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$.
- Conclusão: $a_n = n!$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Equações de recorrência lineares homogéneas

- Uma equação de recorrência linear homogénea de ordem r é uma equação de recorrência do tipo:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r},$$

onde c_i é uma constante, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

- Para determinar uma solução são necessárias r condições iniciais.
- Equação característica: $x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$.
- Raízes características: raízes reais ou complexas da equação característica.

Equação característica e raiz característica

Lema 1

Sejam α e β as raízes (não nulas) da equação característica

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

que corresponde à equação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$. Se $\alpha \neq \beta$, então a solução geral vem dada por

$$a_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n,$$

caso contrário ($\alpha = \beta$),

$$a_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n.$$

Em ambos os casos, os coeficientes C_1 e C_2 são determinados pelas condições iniciais.

Resolução de uma equação linear homogénea

Exercício

Determinar a solução da equação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n = 2, 3 \ldots,$$

com $a_0 = 0$ e $a_1 = -2$.

Equação característica: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Raízes características: 1 e 2 (ambas com multiplicidade 1)

Solução geral: $a_n = C_1 + C_2 2^n,\ \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinação das constantes C_1 e C_2: $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = -c_2 \\ C_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{array}\right. .$$

Solução: $a_n = 2 - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Resolução de uma equação linear homogénea

Lema 2. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ as raízes da equação característica $x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$ da equação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}. \quad (1)$$

Supondo que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ α_i tem multiplicidade m_i, pelo que $m_1 + \cdots + m_k = r$, então $x^r - c_1 x^{r-1} - \cdots - c_r = (x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \ldots (x - \alpha_k)^{m_k}$ e

$$\begin{aligned} a_n \quad = \quad & (D_0 + D_1 n + \cdots + D_{m_1 - 1} n^{m_1 - 1})\alpha_1^n + \\ & + (E_0 + E_1 n + \cdots + E_{m_2 - 1} n^{m_2 - 1})\alpha_2^n + \qquad (2) \\ & + \cdots + (Z_0 + Z_1 n + \cdots + Z_{m_k - 1} n^{m_k - 1})\alpha_k^n \end{aligned}$$

é a solução da equação de recorrência, onde as constantes

$$D_0, \ldots, D_{m_1 - 1}, E_0, \ldots, E_{m_2 - 1}, \ldots, Z_0, \ldots, Z_{m_k - 1}$$

são determinadas pelas condições iniciais.

Prova do Lema 2

Sendo α_1 uma raiz de multiplicidade m_1 da equação característica, então α_1 é raiz dos seguintes polinómios:

- $p(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \cdots - c_r x^{n-r}$, pelo que α_1^n verifica (1) e
$$D_0 \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_0 \alpha_1^{n-i};$$
- $xp'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - \cdots - c_r(n-r)x^{n-r}$, pelo que $n\alpha_1^n$ verifica (1) e
$$D_1 n\alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_1 (n-i)\alpha_1^{n-i};$$
- $x(xp'(x))' = n^2 x^n - c_1(n-1)^2 x^{n-1} - \cdots - c_r(n-r)^2 x^{n-r}$, pelo que $n^2\alpha_1^n$ verifica (1) e
$$D_2 n^2 \alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_2 (n-i)^2 \alpha_1^{n-i};$$

$\vdots$

- $x(\ldots(xp'(x))'\ldots)' = n^{m_1-1}x^n - \cdots - c_r(n-r)^{m_1-1}x^{n-r}$, pelo que $n^{m_1-1}\alpha_1^n$ verifica (1) e
$$D_{m_1-1} n^{m_1-1}\alpha_1^n = \sum_{i=1}^r c_i D_2 (n-i)^{m_1-1}\alpha_1^{n-i}.$$

Prova do Lema 2 (cont)

Logo, $D_0\alpha_1^n + D_1 n\alpha_1^n + D_2 n^2\alpha_1^n + \cdots + D_{m_1-1} n^{m_1-1}\alpha_1^n =$

$$\begin{array}{lccccl}
c_1 D_0\alpha_1^{n-1} & + & \ldots & + & c_r D_0\alpha_1^{n-r} + \\
c_1 D_1(n-1)\alpha_1^{n-1} & + & \ldots & + & c_r D_1(n-r)\alpha_1^{n-r} + \\
c_1 D_2(n-1)^2\alpha_1^{n-1} & + & \ldots & + & c_r D_2(n-r)^2\alpha_1^{n-r} + \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_1 D_{m_1-1}(n-1)^{m_1-1}\alpha_1^{n-1} & + & \ldots & + & c_r D_{m_1-1}(n-r)^{m_1-1}\alpha_1^{n-r} \\
\hline
c_1\left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j(n-1)^j\right)\alpha_1^{n-1} & + & \ldots & + & c_r\left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j(n-r)^j\right)\alpha_1^{n-r}
\end{array}$$

Consequentemente,

$$a_n = D_0\alpha_1^n + D_1 n\alpha_1^n + \cdots + D_{m_1-1} n^{m_1-1}\alpha_1^n = \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j n^j\right)\alpha_1^n$$

é solução de (1) e o mesmo se aplica para $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, pelo que

$$a_n = \left(\sum_{j=0}^{m_1-1} D_j n^j\right)\alpha_1^n + \left(\sum_{j=0}^{m_2-1} E_j n^j\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{m_k-1} Z_j n^j\right)\alpha_k^n.$$

Observação

De acordo com o Lema 2, quando as raízes da equação característica são todas distintas, ou seja, $k = r$ e

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 1,$$

podemos concluir que

$$a_n = C_1\alpha_1^n + \cdots + C_r\alpha_r^n,$$

com $C_1 = D_0, C_2 = E_0, \ldots, C_r = Z_0$, de acordo com a expressão (2).

Exercício 1

Vamos resolver a equação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2} + 4a_{n-3} - 20a_{n-4}, \; n \geq 4,$$

com condições iniciais $a_0 = 6$, $a_1 = 3$, $a_2 = 71$ e $a_3 = 203$.
Resolução. Equação característica:
$x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-1)(x-5) = 0$.
Raízes características:

- -2 (com multiplicidade 2),
- 1 e 5 (ambas com multiplicidade 1).

Solução geral: $a_n = (C_1 + C_2 n)(-2)^n + C_3 + C_4 5^n, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinação das constantes

- Determinação das constantes c_1, c_2, c_3 e c_4:
$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 71 \\ a_3 = 203 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 6 \\ -2(C_1 + C_2) + C_3 + 5C_4 = 3 \\ 4(C_1 + 2C_2) + C_3 + 25C_4 = 71 \\ -8(C_1 + 3C_2) + C_3 + 125C_4 = 203 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \\ C_4 = 2 \end{cases}$$

Solução final: $a_n = (3 + n)(-2)^n + 1 + 2 \cdot 5^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exercício 2

- Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2},$$

com condições iniciais: $a_0 = 1$, $a_1 = -9$.

Resolução.

- Equação característica: $x^2 + 6x + 9 = 0$.
- Raízes características: -3 com multiplicidade 2.
- Solução geral: $a_n = (C_1 + C_2 n)(-3)^n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Determinação das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -3(C_1 + C_2) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

- Solução: $a_n = (1 + 2n)(-3)^n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.