Matemática Discreta

Funções Geradoras 2

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

O problema das torres de Hanoi

Equações de recorrência e funções geradoras

Exemplos de aplicação do método da função geradora na resolução de equações de recorrência

Torres de Hanoi

Exemplo (Torres de Hanoi)

São dados n discos com diâmetros distintos que se podem colocar em 3 pilhas. No início, todos os discos estão numa única pilha, por ordem decrescente dos respectivos diâmetros desde a base até ao topo. Pretende-se mudar os n discos da pilha inicial para outra pilha no número mínimo de passos, respeitando as seguintes regras:

- em cada passo podemos deslocar um único disco de um pino para qualquer outro;
- não pode haver discos com diâmetro superior colocados em cima de discos com diâmetro inferior.

Determinação do número mínimo de passos

- Seja a_n o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da pilha inicial para outra pilha. Note-se que antes de transportar o n-ésimo disco (cujo diâmetro é máximo) é necessário transportar o disco de ordem $n-1$.
- Assim, são necessários os seguintes passos:

1. Resolver o problema de ordem $n-1$ (para o que são necessários a_{n-1} passos);
2. Seguidamente, transportar o disco com diâmetro máximo (o n-ésimo) para a pilha vazia (executando 1 passo);
3. Transportar os $n-1$ discos da pilha onde se encontram para cima do disco com diâmetro máximo (executando a_{n-1} passos).

Como consequência, obtém-se a relação de recorrência:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \text{ para } n \geq 2, \text{ com } a_1 = 1.$$

Resolução da equação de recorrência com recurso à função geradora

- Sendo $f(x)$ a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_1 x + 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \\ &= x + 2x\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} \\ &= x + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x + 2xf(x) + \frac{x^2}{1-x} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

- Logo, $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$.

Resolução da equação de recorrência com recurso à função geradora (cont.)

- Uma vez que

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2^n-1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(2^n-1)x^n
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que $a_n = 2^n - 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1

Exemplo

Vamos utilizar o método da função geradora para resolver a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ cujas condições iniciais são $a_0 = 3$ e $a_1 = 4$.

Solução. Considerando a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \\ &= 3 + 4x + x(f(x) - 3) + 6x^2 f(x) = (6x^2 + x)f(x) + x + 3 \\ &= \frac{x+3}{-6x^2 - x + 1} = \frac{x+3}{(1-3x)(1+2x)}. \end{aligned}$$

Exemplo 1 (cont.)

- A representação desta função como soma de fracções simples, pode obter-se fazendo

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x},$$

donde se obtém a igualdade $1 = A + 2xA + B - 3xB$ a qual equivale ao sistema de equações

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - 3B &= 0. \end{aligned}$$

- Resolvendo este sistema, obtém-se a solução $A = 3/5$ e $B = 2/5$ e, consequentemente,

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{1-3x} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{1+2x}.$$

Exemplo 1 (cont.)

- Logo, a função geradora $f(x)$ toma a forma

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{5}\,\frac{x+3}{1-3x} + \frac{2}{5}\,\frac{x+3}{1+2x} \\
&= \frac{3}{5}x\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k + \frac{9}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k + \frac{2}{5}x\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k + \frac{6}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{3}{5}3^k + \frac{2}{5}(-2)^k)x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{9}{5}3^k + \frac{6}{5}(-2)^k)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{5}3^k - \frac{1}{5}(-2)^k)x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{9}{5}3^k + \frac{6}{5}(-2)^k)x^k.
\end{aligned}
$$

- Finalmente, o coeficiente de x^n em $f(x)$, vem dado por

$$a_n = 2\cdot 3^n + (-2)^n.$$

Exemplo 2

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{cases}$$

para o qual $a_0 = b_0 = 0$.

Solução.

- Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a função geradora de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ a função geradora de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2 (cont.)

- Utilizando estas funções geradoras obtém-se:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} x^n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \end{cases}$$

Exemplo 2 (cont.)

$$\begin{cases} f(x) = 2xf(x) + xg(x) + \frac{x}{x-1} \\ g(x) = xf(x) + 2xg(x) + \frac{x}{1-2x} \end{cases} \quad (1)$$

Da 1ª equação em (1) vem

$$f(x) = \frac{x}{1-2x} g(x) + \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \quad (2)$$

e substituindo $f(x)$ na 2ª equação em (1) obtém-se

$$g(x) = \frac{x^2}{1-2x} g(x) + \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} + 2xg(x) + \frac{x}{1-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x)\left(1 - \frac{x^2}{1-2x} - 2x\right) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} + \frac{x}{1-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) = \frac{x}{(1-x)(1-4x+3x^2)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \quad \Leftrightarrow$$

Exemplo 2 (cont.)

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ g(x) &= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}3^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n\right)x^n
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n \\
&= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}3^n.
\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

Substituindo $g(x)$ em (2) vem

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)} + \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \\
&= \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 2^n + \frac{3}{4}3^n\right)x^n.
\end{aligned}$$

Donde se conclui $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n - 2^n + \frac{3}{4}3^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$.