Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas

Gabinete: 11.3.10

Atendimento de dúvidas: Terça, 15:00 – 17:00

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

Agrupamentos

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta:

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,

  "Marcaram Ronaldo e Quaresma" é diferente de "Marcaram Quaresma e Ronaldo".

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,
- e de combinações quando a ordem das escolhas não interessa.

  "Marcaram Ronaldo e Quaresma" é igual à "Marcaram Quaresma e Ronaldo".

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,
- e de combinações quando a ordem das escolhas não interessa.

Utilizamos o adjetivo simples para indicar que não permitimos repetições.

Arranjos com repetição

Definição

Um arranjo com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

$A_n^{(k)}$ denota o número de de arranjos com repetição de n elementos k a k.

Aqui

- $f(1) =$ a primeira escolha,
- $f(2) =$ a segunda escolha,
- ...
- $f(k) =$ a k-essima escolha.

Exemplo: Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$124 \neq 112 \neq 121.$$

Arranjos com repetição

Definição

Um arranjo com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

$A_n^{(k)}$ denota o número de de arranjos com repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$A_n^{(k)} = n^k$ (pelo princípio da multiplicação).

Arranjos com repetição

Definição

Um arranjo com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

$A_n^{(k)}$ denota o número de de arranjos com repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$A_n^{(k)} = n^k$ (pelo princípio da multiplicação).

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A_n^{(0)} = n^0 = 1$. Em particular, $A_0^{(0)} = 0^0 = 1$.

Exemplos

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta "Qual é o dia da semana do seu aniversário?". Qual é o número de possíveis respostas?

Exemplos

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta "Qual é o dia da semana do seu aniversário?". Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A_7^{(6)} = 7^6 = 117649$.

Exemplos

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta "Qual é o dia da semana do seu aniversário?". Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A_7^{(6)} = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Exemplos

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta "Qual é o dia da semana do seu aniversário?". Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A_7^{(6)} = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$.

Exemplos

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta "Qual é o dia da semana do seu aniversário?". Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A_7^{(6)} = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$.

Resposta: $A_3^{(5)} = 3^5 = 243$.

Arranjos sem repetição

Definição

Um arranjo sem repetição[a] de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre *n sem repetição* e dependente da ordem; ou seja, é uma função *injetiva* do tipo

$$f\colon \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}.$$

$A_{n,k}$ denota o número de de arranjos sem repetição de n elementos k a k.

[a] Outra designação: arranjo simples.

Exemplo: Escolher 3 elementos em $\{1,2,3,4\}$:

$$124 \neq 142 \qquad \text{(112 não é permitido).}$$

Arranjos sem repetição

Definição

Um arranjo sem repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n *sem repetição* e dependente da ordem; ou seja, é uma função *injetiva* do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

$A_{n,k}$ denota o número de de arranjos sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$A_{n,k} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Arranjos sem repetição

Definição

Um arranjo sem repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n *sem repetição* e dependente da ordem; ou seja, é uma função *injetiva* do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

$A_{n,k}$ denota o número de de arranjos sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$A_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A_{n,0} = 1$.

Arranjos sem repetição

Definição

Um arranjo sem repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n *sem repetição* e dependente da ordem; ou seja, é uma função *injetiva* do tipo

$$f\colon \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

$A_{n,k}$ denota o número de de arranjos sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$A_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n = k$)

$A_{n,n} =$ número de permutações de n elementos $= n!$.

Arranjos sem repetição

Definição

Um arranjo sem repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos entre n *sem repetição* e dependente da ordem; ou seja, é uma função *injetiva* do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

$A_{n,k}$ denota o número de de arranjos sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$A_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n < k$)

$A_{n,k} = 0$.

Exemplos

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas[a] de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

[a] Pelo menos uma pessoa tem um vizinho diferente

Exemplos

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

  Resposta: $A_{n,k}$.

Exemplos

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

  Resposta: $A_{n,k}$.

- numa mesa redonda.

Exemplos

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

  Resposta: $A_{n,k}$.

- numa mesa redonda.

  Aqui identificamos as maneiras que se obtém (uma a partir da outra) por *rotação*. Portanto, a resposta é

$$\frac{A_{n,k}}{k}.$$

Exemplos

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

  Resposta: $A_{n,k}$.

- numa mesa redonda.

  Aqui identificamos as maneiras que se obtém (uma a partir da outra) por *rotação*. Portanto, a resposta é

$$\frac{A_{n,k}}{k}.$$

Nota

Mais geral, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, define-se o coeficiente factorial

$$(\alpha)_k = \underbrace{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}_{k \text{ fatores}}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Mais um exemplo

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

$$2 \cdot 11! = 79833600.$$

Definição

Uma combinação sem repetição[a] de n elementos k a k é um subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações sem repetição de n elementos k a k.

[a]Outra designação: combinações simples.

Exemplo: Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$124 = 142 \neq 143. \qquad (112 \text{ não é permitido}).$$

Combinações sem repetição

Definição

Uma combinação sem repetição de n elementos k a k é um subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{}$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Combinações sem repetição

Definição

Uma combinação sem repetição de n elementos k a k é um subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Combinações sem repetição

Definição

Uma combinação sem repetição de n elementos k a k é um subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Combinações sem repetição

Definição

Uma combinação sem repetição de n elementos k a k é um subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações sem repetição de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Exemplos

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k + m$ elementos.

Exemplos

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos.

Com $X = \{1, \dots, n\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos. Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Com $X = \{1, \dots, n\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Exemplos

Exemplo (Recordamos de “Enumeração Combinatória”)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos. Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Exemplos

Exemplo (Recordamos de “Enumeração Combinatória”)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos. Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Exemplos

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos. Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$.

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Exemplos

Exemplo (Recordamos de “Enumeração Combinatória”)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos. Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$.

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

$$\text{Resposta:} \quad \binom{15}{3}\cdot\binom{16}{2}+\binom{15}{4}\cdot\binom{16}{1}+\binom{15}{5}\cdot\binom{16}{0}$$
$$= 54600 + 21840 + 3003 = 79443.$$

Algumas propriedades

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ *com* $k \leq n$*. Então:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Sejam $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Sobre 1: A função

$$f \colon \{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{B \subseteq X \mid |B| = n-k\}$$
$$A \longmapsto A^{\complement}$$

é invertível e por isso bijetiva.

Algumas propriedades

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ *com* $k \leq n$. *Então:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(suponhamos* $n > 0$ *e* $k > 0$*).*

Sejam $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Sobre 2: Temos:

$$\begin{aligned}
&\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \\
&\qquad = \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \notin A\} \cup \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \in A\} \\
&\qquad = \{A \subseteq Y \mid |A| = k\} \cup \{B \cup \{n\} \mid B \subseteq Y, |B| = k-1\}
\end{aligned}$$

Algumas propriedades

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ *com* $k \leq n$. *Então:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(suponhamos* $n > 0$ *e* $k > 0$*).*
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Sejam $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sobre 3: Temos:

$$\begin{aligned} PX &= \bigcup_{i=0}^{n} \{A \subseteq X \mid |A| = i\} \\ &= \{\varnothing\} \cup \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \cup \dots \{X\} \end{aligned}$$

(dois a dois disjunta).

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \color{red}{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \color{red}{\binom{2}{1}} & & \color{red}{\binom{2}{2}} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \color{red}{2} & & \color{red}{1} & & \\
 & 1 & & 3 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \color{red}{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

A fórmula binomial de Newton

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}}\\ &= 1 \cdot 1 \dots 1\\ &\quad +\\ \\ &\quad +\\ &\quad +\\ &\quad + \qquad .\end{aligned}$$

A fórmula binomial de Newton

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
&\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
&\quad + \\
&\quad + \\
&\quad + \qquad .
\end{aligned}$$

A fórmula binomial de Newton

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1\cdot 1\dots 1 \\
&\quad + \underbrace{x\cdot 1\dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1\cdot x\cdot 1\dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1\dots 1x \\
&\quad + x\cdot x\cdot 1\dots 1 + x\cdot 1\cdot x\cdot 1\dots 1 + \dots + 1\dots 1\cdot x\cdot x \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \qquad .
\end{aligned}$$

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
&\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
&\quad + x \cdot x \cdot 1 \dots 1 + x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \dots 1 + \dots + 1 \dots 1 \cdot x \cdot x \\
&\quad + \dots \\
&\quad + x \dots x.
\end{aligned}$$

A fórmula binomial de Newton

Teorema

1. *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. *Em particular, com* $x = 1$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

A fórmula binomial de Newton

Teorema

1. *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. *Em particular, com* $x = 1$*:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

3. *Em geral, para todos os* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

A fórmula binomial de Newton.

O número $\binom{n}{k}$ *diz-se também coeficiente binomial.*

Combinações com repetição

Definição

Uma combinação com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos em $\{1, \ldots, n\}$ com repetição mas sem considerar a ordem; ou seja, é uma sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de números $s_i \in \{1, \ldots, n\}$ com $s_1 + \cdots + s_n = k$.

Exemplo: Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$114 = 141 \neq 143.$$

Intuição: $s_i =$ número de vezes i é escolhido.

Por exemplo, 114 corresponde a $(2, 0, 0, 1)$ (tal como 141).

Combinações com repetição

Definição

Uma combinação com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos em $\{1, \dots, n\}$ com repetição mas sem considerar a ordem; ou seja, é uma sequência $(s_1, \dots, s_n)$ de números $s_i \in \{1, \dots, n\}$ com $s_1 + \cdots + s_n = k$.

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$) coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros.

A uma tal solução $(s_1, \dots, s_n)$ corresponde à sequência

$$\underbrace{1 \dots 1}_{s_1 \text{ vezes}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_2 \text{ vezes}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_n \text{ vezes}}.$$

Exemplo: $(2, 3, 0) \longmapsto 1101110.$

Combinações com repetição

Definição

Uma combinação com repetição de n elementos k a k é uma maneira de escolher k elementos em $\{1, \ldots, n\}$ com repetição mas sem considerar a ordem; ou seja, é uma sequência $(s_1, \ldots, s_n)$ de números $s_i \in \{1, \ldots, n\}$ com $s_1 + \cdots + s_n = k$.

Exemplo (Recordamos de "Enumeração Combinatória")

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$) coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros.

Teorema

O número de combinações com repetição de n elementos k a k é igual ao número de sequências binárias com $n - 1$ zeros e k uns:

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa.

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$(\text{por exemplo: } 13353\dots 2)$$

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$\text{(por exemplo: } 13353\ldots 2)$$

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Um exemplo

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$\text{(por exemplo: } 13353\dots2)$$

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa). Portanto, temos uma combinação com repetição de 5 elementos 10 a 10:

$$\binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 13\cdot 11 = 1001.$$

Resumo

Escolher k elementos entre n elementos.

	com repetição	sem repetição (simples)
dependente da ordem (arranjos)	$A_n^{(k)} = n^k$	$A_{n,k} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ fatores}}$
independente da ordem (combinações)	$\binom{n+k-1}{k}$	coeficiente binomial: $\binom{n}{k} = \dfrac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - --$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3, *dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} =$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8}{1!\qquad\qquad}$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3, *dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1! \cdot 4! \qquad\qquad}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - --$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1! \cdot 4! \cdot 2!}$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3, *dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*

Os números tem a forma $2 - - - - - --$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos "permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição". Para obter o número de tais "permutações", aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{1!{\cdot}4!{\cdot}2!{\cdot}1!} = \frac{8!}{1!{\cdot}4!{\cdot}2!{\cdot}1!} = 840.$$

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Então, o número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i = 1, \dots, k)$ é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{\text{(escolher } A_1)} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{\text{(escolher } A_2)} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}=n_k}{n_k}}_{\text{(escolher } A_k)}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-n_1+1)\dots 1}{n_1!\dots n_k!}$$

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Então, o número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i = 1, \dots, k)$ é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Este número designa-se por coeficiente multinomial (ou número de permutações com repetição) e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}.$$

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{(\text{escolher } A_1)} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{(\text{escolher } A_2)} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}=n_k}{n_k}}_{(\text{escolher } A_k)}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-n_1+1)\dots 1}{n_1!\dots n_k!}$$

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Então, o número de sequências $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Este número designa-se por coeficiente multinomial (ou número de permutações com repetição) e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}.$$

Nota

- Se $n_1 = \cdots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} =$.

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Então, o número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i = 1, \dots, k)$ é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Este número designa-se por coeficiente multinomial (ou número de permutações com repetição) e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}.$$

Nota

- Se $n_1 = \dots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} = n!$.

Permutações com repetição

Teorema

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Então, o número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i = 1, \dots, k)$ é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Este número designa-se por coeficiente multinomial (ou número de permutações com repetição) e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \; n_2 \; \dots \; n_k}.$$

Nota

- Se $n_1 = \dots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1 \; n_2 \; \dots \; n_k} = n!$.
- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m} = \binom{n}{m \;\; (n-m)}$.

A fórmula multinomial

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \ldots \ n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}$$

Recordamos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

A fórmula multinomial

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \ldots \ n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}$$

Recordamos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1 \ n_2} a^{n_1} b^{n_2}$$

A fórmula multinomial

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \; n_2 \; \ldots \; n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}$$

Recordamos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1 \; n_2} a^{n_1} b^{n_2}$$

Exemplo:

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) = \binom{3}{3\;0\;0} a^3 + \binom{3}{0\;3\;0} b^3 + \binom{3}{0\;0\;3} c^3 + \binom{3}{2\;1\;0} a^2 b + \binom{3}{2\;0\;1} a^2 c + \binom{3}{1\;1\;1} abc + \ldots$$

A fórmula multinomial

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \; n_2 \; \ldots \; n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}$$

Demonstração.

Ideia: Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

obtêm-se termos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$, com $n_1 + \cdots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores, ... Logo, existem $\binom{n}{n_1 \; n_2 \; \ldots \; n_k}$ termos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$. $\square$

Identidades Combinatórias

Recordamos

Já aprendemos:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

No caso das últimas duas identidades, na prova conta-se o mesmo conjunto de *duas maneiras diferentes*.

Subconjuntos de uma soma

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Subconjuntos de uma soma

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Consideramos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$. Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.

Subconjuntos de uma soma

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Consideramos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$. Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.

Por outro lado, estes subconjuntos podemos obter escolhendo k elementos em X e $l - k$ elementos em Y, para cada número k entre 0 e l.

Subconjuntos de uma soma

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Consideramos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$. Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.

Por outro lado, estes subconjuntos podemos obter escolhendo k elementos em X e $l-k$ elementos em Y, para cada número k entre 0 e l.

Nota. Em particular, para $m = m = k$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$*,*

$$\binom{n}{n_1 \ \ldots \ n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \ \ldots \ (n_i - 1) \ \ldots \ n_k}.$$

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \dots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \ \dots \ (n_i - 1) \ \dots \ n_k}.$$

No que se segue, chamamos uma sequência $(A_1, \dots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$ partição de X do tipo $(n_1, \dots, n_k)$.

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \ \ldots \ n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \ \ldots \ (n_i - 1) \ \ldots \ n_k}.$$

No que se segue, chamamos uma sequência $(A_1, \ldots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ partição de X do tipo $(n_1, \ldots, n_k)$.

Por definição, $\binom{n}{n_1 \ \ldots \ n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$$\{\text{partições } (A_1, \ldots, A_k) \text{ de } X = [n] \text{ do tipo } (n_1, \ldots, n_k)\}.$$

Recordamos: $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \dots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \ \dots \ (n_i - 1) \ \dots \ n_k}.$$

No que se segue, chamamos uma sequência $(A_1, \dots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$ partição de X do tipo $(n_1, \dots, n_k)$.

Por definição, $\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$$\{\text{partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X = [n] \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k)\}.$$

Este conjunto podemos representar como a união (dois a dois disjunto) dos seguintes conjuntos.

Recordamos: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;

Logo:

$$= \binom{n}{n_1 \; \ldots \; n_k}.$$

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;

Logo:

$$\binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \ldots\ n_k} \qquad = \binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k}.$$

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\} \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1, n_2 - 1, \ldots, n_k)$;

Logo:

$$\binom{n-1}{n_1-1 \; n_2 \; \ldots \; n_k} + \binom{n-1}{n_1 \; n_2-1 \; \ldots \; n_k} \qquad = \binom{n}{n_1 \; \ldots \; n_k}.$$

Recursão para coeficiente multinomiais

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \dots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \dots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k)$;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\} \dots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \dots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1, n_2 - 1, \dots, n_k)$;
- ...
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \dots, B_k \cup \{n\})$ onde $(B_1, B_2 \dots, B_k)$ é uma partição de $[n-1]$ do tipo $(n_1, n_2, \dots, n_k - 1)$.

Logo:

$$\binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \dots\ n_k} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \dots\ n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k-1} = \binom{n}{n_1\ \dots\ n_k}.$$

Mais um ...

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ *(*$n \leq m$*),*

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

Mais um . . .

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ $(n \leq m)$*,*

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq [m+1] \mid |A| = n+1\}.$$

Mais um ...

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ *(*$n \leq m$*),*

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq [m+1] \mid |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideramos

$$Y_k = \{A \subseteq [m+1] \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots \cup Y_m$ (dois a dois disjunto).

Mais um ...

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ $(n \leq m)$,

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq [m+1] \mid |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideramos

$$Y_k = \{A \subseteq [m+1] \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \cdots \cup Y_m$ (dois a dois disjunto). Portanto,

$$|Y| = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n+1}.$$