

Matemática Discreta

Relação de equipotência e teorema de Cantor

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://elearning.ua.pt>

Conjuntos equipotentes

Definição (de conjuntos equipotentes)

Dois conjuntos A e B dizem-se equipotentes (ou numericamente equivalentes) se existe uma bijecção $f : A \rightarrow B$.

- Quando A e B são equipotentes, dizemos que têm a mesma cardinalidade ou o mesmo número cardinal.

(Notação: $|A|$ denota a cardinalidade de A).

Exemplos de conjuntos

equipotentes:

- 1) \mathbb{N} e \mathbb{N}_0 , onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) \mathbb{N} e \mathbb{Z} ;

não equipotentes

- 3) $\{1, 2, 3\}$ e $\{a, b\}$;
- 4) \mathbb{N} e \mathbb{R} .

Cardinalidade

Cardinalidade finita e infinita

Um conjunto finito diz-se que tem cardinalidade finita. Um conjunto infinito diz-se que tem cardinalidade infinita.

Se o conjunto A é finito e $f : [n] \rightarrow A$ é uma bijecção, então $|A| = n$ e a cardinalidade de A é o número de elementos de A .

Nota: $|\emptyset| = 0$.

Observação: \mathbb{N} tem cardinalidade infinita.
 \aleph_0 denota a cardinalidade de \mathbb{N}
 e, conseqüentemente, também a de \mathbb{Z} e \mathbb{N}_0 ,
 ou seja, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0| = \aleph_0$.

Relações entre a cardinalidade de conjuntos distintos

- Dados dois conjuntos A e B , diz-se que a cardinalidade de A é não superior à cardinalidade de B (e escreve-se $|A| \leq |B|$) se existe uma função injectiva $f : A \rightarrow B$.
- Se $|A| \leq |B|$ e os conjuntos não são equipotentes, então diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B e escreve-se $|A| < |B|$.

Teorema (de Cantor)

Dado um conjunto X , verifica-se a desigualdade $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Logo,

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots$$

e, conseqüentemente, existe uma infinidade de números cardinais infinitos.

Conjuntos numeráveis

Definição (de conjunto numerável)

Um conjunto A diz-se **numerável** (ou **enumerável**, ou **contável**) se A é finito ou equipotente ao conjunto \mathbb{N} . Caso contrário, diz-se que A é **não numerável**.

Exemplos

de conjuntos numeráveis:

- 1) $\{a, b, c, d\}$;
- 2) \mathbb{N} ;
- 3) \mathbb{Z} ;
- 4) \mathbb{N}_0 ;

de conjunto não numerável:

- 5) \mathbb{R} .