Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2017/18**

Folha 3: *Extremos de funções reais de várias variáveis reais*

Parte 1: ***Domínios; conjuntos de nível; derivadas parciais; gradientes.***

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$;
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$;
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
   (d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 < z \leq x + y\}$;
   (e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$;
   (f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

   Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$).

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$;
   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$;
   (c) $f(x,y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x,y) = \ln(xy)$;
   (e) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{|x| - |y|}$;
   (f) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;
   (g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
   (h) $f(x,y,z) = \operatorname{arcsen} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

   (a) $f(x,y) = x - 4y$; (d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$; (g) $f(x,y,z) = x + y + 3z$;
   (b) $f(x,y) = x^2 - 4y$; (e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$; (h) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$;
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$; (f) $f(x,y) = e^{xy}$; (i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio.
   Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por

$$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} x + \cos(z - 3y).$$

6. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ $\qquad [P = (2,2)]$;

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}\,, & \text{se} \quad x^2+2y^2 \neq 4 \\ 0\,, & \text{se} \quad x^2+2y^2 = 4 \end{cases}$ $\qquad [P = (2,0)]$;

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}\,, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ $\qquad [P = (0,0)]$.

7. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função

$$f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y).$$

8. Uma fábrica produz dois tipos de máquinas de lavar loiça: o modelo A (independente) e o modelo B (de encastrar). O custo de produção de x unidades de máquinas do modelo A e de y unidades de máquinas do modelo B é dado por

$$\mathcal{C}(x,y) = 210\sqrt{xy} + 125x + 130y + 1025.$$

   Calcule os custos marginais quando se produzem 80 máquinas do modelo A e 20 do modelo B.

9. Sendo $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

10. Mostre que a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (\textit{equação de Laplace}).$$

11. Considere a função $f(x,y) = \ln x + xy^2$.

    (a) Indique o domínio de f.

    (b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1,2,4)$.

12. Seja $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$.

    (a) Determine o gradiente de f.

    (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,3,0)$ segundo o vetor unitário $\vec{u}$ com a direção e sentido de $v = (1,2,-1)$.

13. Considere a função f definida por $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

    (a) Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.

    (b) Descreva as curvas de nível da função f.

    (c) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(1,0)$.

14. Determine a reta normal e o plano tangente à superfície cónica

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 - z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

no ponto $(3, 4, -2)$.

15. Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 3xy + z^2$.
    (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.
    (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f, no ponto $(1, 1, 1)$.

Parte 2: ***Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados.***

16. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
    (a) Esboce graficamente o domínio D.
    (b) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f e determine-os.
    [Sug.: relacione o valor de f em cada ponto (x, y) com a norma desse ponto].
17. Sejam $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x, y, z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em $\mathcal{S}$? Porquê?
18. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = -x^2$. Justifique que f possui uma infinidade de maximizantes.
19. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
    (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f? Justifique.
    (b) Justifique, usando diretamente a definição, que $(0, 0, 0)$ é minimizante de f.
20. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
    (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.
    (b) Justifique que $(0, 0)$ é maximizante absoluto de f.
21. Considere a função $g(x, y) = y$ e os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
    (a) Justifique que g possui extremos globais em B.
    (b) Identifique os extremantes globais de g em B.
    (c) A função g possui extremantes globais em A? Justifique.
22. Mostre que a função $h(x, y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ não atinge o seu máximo global na origem.
23. Determine os pontos críticos das seguintes funções:
    (a) $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;
    (b) $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$;
    (c) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

24. Mostre que a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1,2)$.

25. Considere a função $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4(x-2y)$ definida em $D = [0,1] \times [0,2]$.

    (a) Diga, justificando, se f possui pontos críticos no interior de D.

    (b) Prove a existência de extremos absolutos e determine-os.

26. Determine os extremos locais das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = xy\, e^{-x-y}$;

    (b) $g(x,y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$;

    (c) $h(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$;

    (d) $i(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

27. Verifique que $(-2,0)$ e $(0,0)$ são os pontos críticos da função $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + x^3$, mas que só o primeiro é extremante de f.

28. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-y^3)^2 - x^3$.

    (a) Verifique que $(0,0)$ é ponto crítico de f.

    (b) Mostre que $(0,0)$ não é extremante local de f.

29. Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

30. Calcule os extremos globais da função f definida por $f(x,y) = xy$ no semicírculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

31. Determine os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão à menor distância do ponto $(1,2)$ e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.

32. Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto $(0,0,0)$.

33. Determine a distância mais curta entre o ponto $(1,0,-2)$ e o plano de equação $x + 2y + z = 4$.

34. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3,1,-1)$.

35. Suponha que a temperatura num determinado ponto (x,y,z) da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é dada pela função $T(x,y,z) = 30 + 5(x+z)$. Calcule, justificando, os valores extremos da temperatura.

36. Seja f a função definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ por $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

    (a) Represente geometricamente o domínio D e o gráfico de f.

    (b) Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.

    (c) Determine os extremos globais da função f em D.

37. Seja f a função definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1\}$ por $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$.

    (a) Represente geometricamente o domínio D.

    (b) Determine o interior de D e diga, justificando, se f possui aí pontos críticos.

    (c) Determine os extremos globais da função f em D.

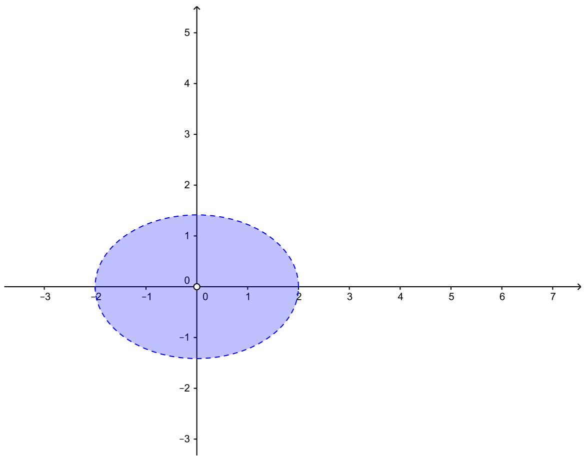
38. O lucro anual de uma empresa é calculado através da expressão

$$L(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

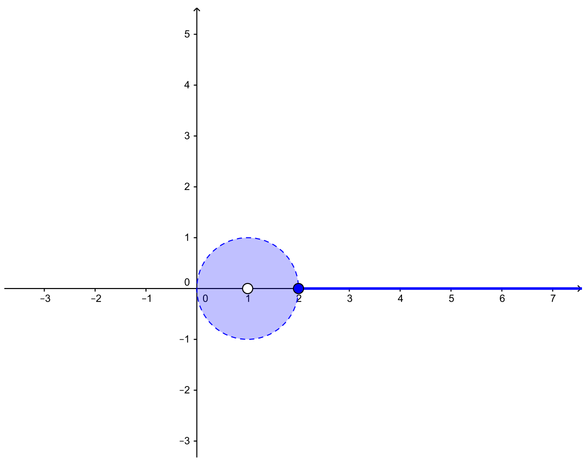
onde x representa o montante gasto em investigação e y o montante gasto em publicidade (L, x e y expressos em unidades de milhões de euros).
Determine o lucro máximo da empresa e os valores de x e y que o realizam.

Soluções

1. (a) É aberto.



   (b) Não é aberto, nem é fechado.



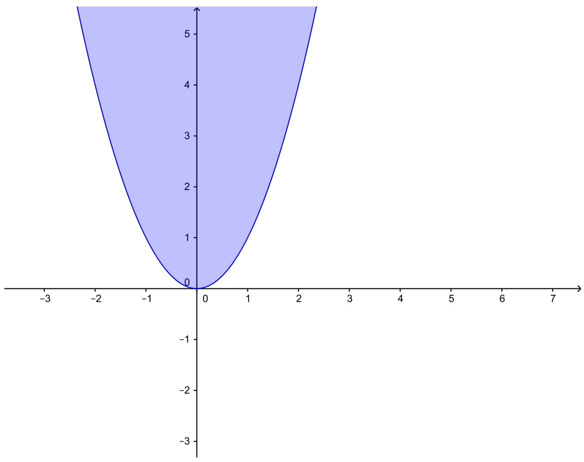
   (c) É fechado.

(d) Não é aberto, nem é fechado.

(e) É fechado.

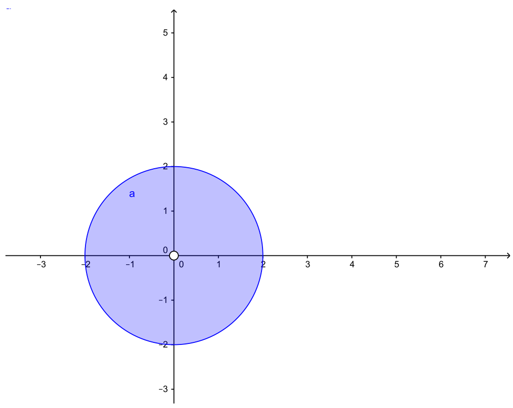
(f) É fechado.

2. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

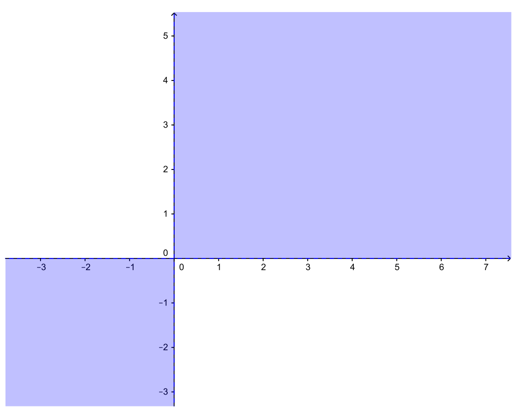


(b) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$.

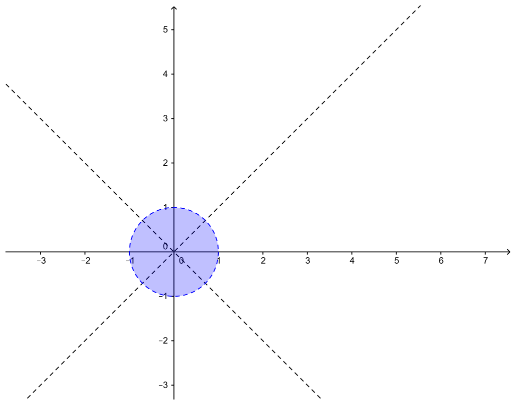
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.

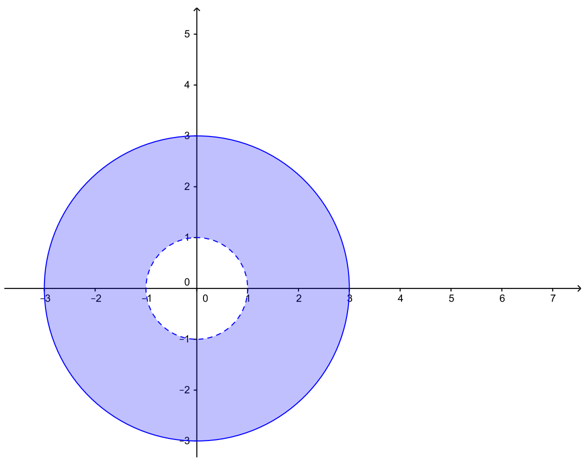


(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y \neq x \wedge y \neq -x\}$.



(f) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



(h) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$.

3. (a) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{4} - \frac{k}{4}\}$ é uma reta de declive $\frac{1}{4}$ e com ordenada na origem $\frac{k}{4}$.

(b) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{4} - \frac{k}{4}\}$ é uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice $\left(0, -\frac{k}{4}\right)$.

(c) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ é uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{k}$.

(d) $\mathcal{N}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\frac{x}{2}\}$ são duas retas que passam na origem e com delives $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$ são hipérboles cujos vértices se encontram no eixo Ox. Para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$ são hipérboles cujos vértices se encontram no eixo Oy.

(e) $\mathcal{N}_1 = \{(0,0)\}$ é um ponto. Para cada $k \in]1, +\infty[$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{k^2-1}{k^2}\}$ é uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$.

(f) $\mathcal{N}_1 = Ox \cup Oy$ é a união de duas retas concorrentes (cónica degenerada). Para $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(k)\}$ é uma hipérbole.

(g) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = k\}$ é o plano ortogonal ao vetor (1,1,3) que contém o ponto $(k,0,0)$.

(h) $\mathcal{N}_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$ é uma superfície cónica;
para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de duas folhas;
para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de uma folha.

(i) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0,0)\}$ é um ponto (quádrica degenerada). Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ é uma superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{k}$.

4. $\{(x,y) : T(x,y) = T(3,2)\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 13\}$
(circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\sqrt{13}$).

5. Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3\operatorname{sen}(z - 3y)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(z - 3y)$.

6. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \frac{1}{2}$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)$ não existe.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

7. Para $y > -x$ e $x > y$, temos
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{y^2 - x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2 - y^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}$.

8. $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(80,20) = 177,5$; $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}(80,20) = 340$.

9. –

10. –

11. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

(b) Plano tangente: $5x + 4y - z - 9 = 0$.
Reta normal:
$(x,y,z) = (1,2,4) + \alpha(5,4,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (equação vetorial) ou
$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4 - z$ (equações cartesianas).

12. (a) $\nabla f(x,y,z) = (\operatorname{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$.

(b) $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)} f(1,3,0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

13. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
(é aberto e não é fechado).

(b) As curvas de nível $k \in \mathbb{R}$ de f são $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^k\}$ (circunferências de centro $(0,0)$).

(c) $D_{(u,v)} f(1,0) = 2u$.

14. Reta normal: $(x, y, z) = (3, 4, -2) + \alpha(3, 4, 5),\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Plano tangente: $3x + 4y + 5z - 15 = 0$.

15. (a) $\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$.

    (b) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.

16. (a) D é um losango centrado na origem com os vértices situados nos eixos coordenados.

    (b) A função é do tipo polinomial, logo contínua no seu domínio de definição $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, também é contínua em D. Por outro lado, este conjunto é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que são, respetivamente, o menor e o maior valor que f atinge.
    Observar que $f(x, y)$ expressa o quadrado da distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem. Assim, o máximo absoluto é 1, atingido nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, e o mínimo absoluto é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.

17. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathcal{S}$ não é fechado.

18. Como $f(x, y) = -x^2 \leq 0 = f(0, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então todos os pontos da forma $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são maximizantes da função.

19. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathbb{R}^3$ não é limitado.

    (b) Como $f(0, 0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $(0, 0, 0)$ é (o único) minimizante global de f.

20. (a) f não é diferenciável em $(0, 0)$, porque não existe $f'_x(0, 0)$.

    (b) Tem-se $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 = f(0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $(0, 0)$ é (o único) maximizante absoluto de f.

21. (a) Como g é contínua e o conjunto B é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de g em B.

    (b) g é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de B, logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente $(0, -1)$ é minimizante global e $(0, 1)$ é maximizante global.

    (c) Não, pois g é diferenciável no aberto A e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que $\nabla g(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$). Portanto, g não tem extremantes globais em A (nem em $\mathbb{R}^2$).

22. Na origem a função h vale $\frac{1}{2}$, enquanto que, por exemplo, em $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$ que é um valor maior.

23. (a) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$;

    (b) $(2, 3)$ e todos os pontos situados nos eixos coordenados;

    (c) $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$.

24. Como $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ então $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 \geq -1$. Ora $f(1, 2) = -1$ e para todo $(x, y) \neq (1, 2)$ tem-se $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$.

25. (a) O gradiente de f, se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em $(-4, 6)$. No entanto, $(-4, 6) \notin int(D)$. Consequentemente, f não possui pontos críticos em $int(D) =]0, 1[\times]0, 2[$.

(b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que D é fechado e limitado e f é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).
O máximo absoluto de f em D é 17 e é atingido no ponto $(1,2)$; o mínimo absoluto de f em D é -3 e é atingido no ponto $(1,0)$.

26. (a) Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A função f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.
Como $det(H_f(0,0)) = -1 < 0$, então $(0,0)$ não é extremante (é ponto de sela).
Como $det(H_f(1,1)) = e^{-4} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -e^{-2} < 0$, então $f(1,1) = e^{-2}$ é máximo local.
(b) Os pontos críticos de g são $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,1/4)$. Aplicando o teste das segundas derivadas, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro ponto é minimizante local.
(c) O ponto crítico de h é $(2,-4)$ e é um ponto de sela.
(d) O ponto crítico de i é $(1,1)$ e é um minimizante local.

27. –

28. –

29. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D. $(0,0)$ é o único ponto crítico no interior de D, mas não é extremante (o hessiano é negativo neste ponto). Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$. Calculando o valor de f nestes pontos, conclui-se que o máximo global de f é 2 (atingido nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$) e o mínimo global de f é -2 (atingido nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$).

30. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D. Não existem pontos críticos no interior de D (ambas as derivadas parciais anulam-se $(0,0)$, mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira $fr(D)$ é constituída pela semicircunferência D_1 e pelo segmento de reta D_2:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}\,; \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}.$$

Como f é constante em D_2 (pois $f(x,0) = 0$) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em D_1 são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x,0) = 0\,,$$

o máximo global de f é $1/2$ e o mínimo global é $-1/2$.

31. $(4,8)$ é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e $(-4,-8)$ é o que se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$).

32. $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

33. A distância entre um qualquer ponto (x,y,z) e o ponto $(1,0,-2)$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$. Para pontos (x,y,z) do plano dado temos

$z = 4 - x - 2y$. Assim, podemos minimizar $d(x,y,z)$, ou mais simplesmente $d(x,y,z)^2$, tendo em conta esta última relação. Considerando

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

vemos que o único ponto crítico de f é $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ e que este é um minimizante local (atendendo ao teste das segundas derivadas). A distância mais curta pretendida é $f(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

34. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

35. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é minimizante absoluto e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é maximizante absoluto. Assim, a temperatura mínima é de $T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 22{,}93$ e a temperatura máxima é de $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 37{,}07$.

36. (a) –
    (b) $(0,1)$.
    (c) $f(0,1) = 0$ é mínimo global e $f(0,4) = 9$ é máximo global.

37. (a) –
    (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 1 - x < y < 1\}$; f não possui pontos críticos em $int(D)$.
    (c) $f(1/2, 1/2) = 1$ é mínimo global e $f(1,1) = 4$ é máximo global.

38. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo realizado (ou atingido) com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.