

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Capítulo 3

Vetores, Retas e Planos

Dados os vetores $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

o **produto interno** (ou **produto escalar**) de X e Y é o escalar real

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} &= \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $\mathbf{X}|\mathbf{Y}$ ou $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$.

o **comprimento** ou **norma** de X é

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;

2. $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$;

3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;

4. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z;$$

5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;

6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$.

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

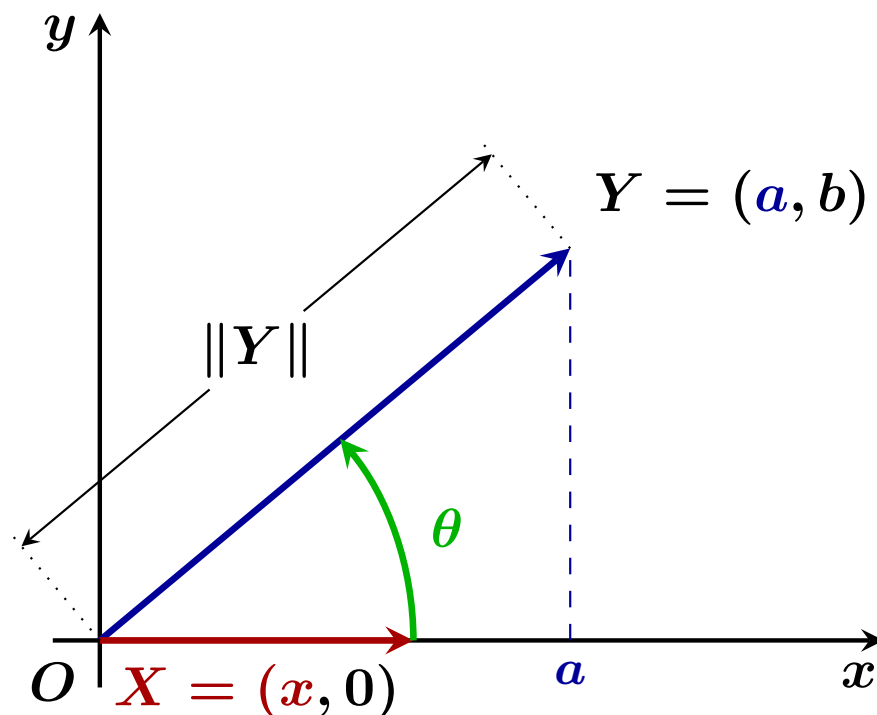
$$X = (\textcolor{red}{x}, 0), \textcolor{red}{x} > 0$$

$$Y = (\textcolor{blue}{a}, \textcolor{blue}{b}) \neq (0, 0)$$

$$X \cdot Y = \textcolor{red}{x}\textcolor{blue}{a} \quad \text{e} \quad \|X\| = \textcolor{red}{x}$$

$$\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = \textcolor{blue}{a} = \|Y\| \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$$



Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq \mathbf{0}$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = \arccos \left(\frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|} \right).$$

Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$

- X e Y são **ortogonais ou perpendiculares**, $X \perp Y$, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e. se $X \cdot Y = 0$.
- X e Y são **colineares ou paralelos ou têm a mesma direção**, se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, i.e. se $|X \cdot Y| = \|X\| \|Y\|$.
- X e Y **têm o mesmo sentido**, se $\theta = 0$, i.e. se $X \cdot Y = \|X\| \|Y\|$.
- X e Y **têm sentido oposto ou contrário**, se $\theta = \pi$, i.e. se $X \cdot Y = -\|X\| \|Y\|$.

Se $X = 0$ ou $Y = 0$, por convenção, X e Y são **colineares e ortogonais**.

Um vetor **unitário** é um vetor de norma igual a 1. O vetor $U = \frac{1}{\|X\|} X$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de X .

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

o **produto externo** (ou **produto vetorial**) de X e Y é o vetor de \mathbb{R}^3

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota: Para determinar o produto externo pode utilizar-se como auxiliar de cálculo o seguinte “determinante simbólico”:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{j} &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{k} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo \mathbb{R}^3

1. $X \times Y = -(Y \times X);$

2. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z,$
 $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z;$

3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y);$

4. $X \times X = O;$

5. $X \times O = O \times X = O;$

6. Fórmula de Lagrange

$$(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X)Y - (Z \cdot Y)X,$$
$$X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z.$$

7. Identidade de Jacobi

$$X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) = O.$$

Se $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(X \times Y) \cdot Z = X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

e este diz-se o **produto misto** de X , Y e Z .

Consequências das propriedades do produto interno em \mathbb{R}^3

1. Como $(X \times Y) \cdot X = (X \times Y) \cdot Y = 0$, então

$X \times Y$ é um vetor **ortogonal a X e a Y** .

2. $\|X \times Y\| = \|X\| \|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y .

Exercício: Mostre que $Y \cdot (Z \times X) = (X \times Y) \cdot Z$.

Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, então

a **área do paralelogramo** com lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\diamond} = \|X \times Y\|$$

a **área do triângulo** com dois dos seus lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\triangle} = \frac{\|X \times Y\|}{2}$$

o **volume do paralelepípedo** com arestas correspondentes aos vetores X, Y, Z é

$$V = |(X \times Y) \cdot Z|$$

Exercício: Verifique os exercícios 7 e 9 da Folha prática nº3.

Dada uma reta \mathcal{R} em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto P e tem vetor diretor v ,

$$X \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v.$$

Uma **equação vetorial** da reta \mathcal{R} é $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir da qual se obtêm as **equações paramétricas** de \mathcal{R} :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

sendo $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando o parâmetro α do anterior sistema, obtém-se um sistema de grau 1 com 3 incógnitas e 2 equações, ditas as **equações cartesianas** de \mathcal{R} .

Dado um plano \mathcal{P} em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto P e tem vetores diretores u e v (não colineares),

$$X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v.$$

Uma **equação vetorial** do plano \mathcal{P} é

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a partir da qual se obtêm as **equações paramétricas** de \mathcal{P} :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

com $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando os parâmetros α e β do anterior sistema, tem-se uma equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dita **equação (cartesiana) geral** do plano \mathcal{P} .

Verifica-se que $w = (a, b, c)$ é um **vetor não nulo ortogonal** a \mathcal{P} . De facto, dois pontos arbitrários deste plano, $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, satisfazem

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 0, 1,$$

donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

ou seja, para qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano \mathcal{P} , tem-se

$$w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0.$$

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 2×4 do sistema constituído pelas equações gerais dos planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' de \mathbb{R}^3 .

Então os planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' são:

- **coincidentes** se $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 1$;
- **estritamente paralelos** se $\text{car}([A|B]) > \text{car}(A) = 1$;
- **concorrentes**, isto é, intersectam-se numa reta se

$$\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 2.$$

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 3×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas da reta \mathcal{R} e pela equação geral do plano \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 .

Então a **reta** \mathcal{R} e o **plano** \mathcal{P} são:

- tais que $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ se $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 2$;
- **estritamente paralelos** se $\text{car}([A|B]) > \text{car}(A) = 2$;
- **concorrentes**, isto é, intersectam-se num ponto se

$$\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 3.$$

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 4×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas das retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' de \mathbb{R}^3 .

Então as retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' são:

- **coincidentes** se $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 2$;
- **estritamente paralelas** se $\text{car}([A|B]) = 3 > \text{car}(A) = 2$;
- **concorrentes**, isto é, intersectam-se num ponto se

$$\text{car}([A|B]) = \text{car}(A) = 3;$$

- **enviezadas**, isto é, não coplanares se

$$\text{car}([A|B]) = 4 > \text{car}(A) = 3.$$

A **distância entre dois pontos** P e Q de \mathbb{R}^n é

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Em particular, para $Q(x_1, \dots, x_n)$ e $P(y_1, \dots, y_n)$, tem-se

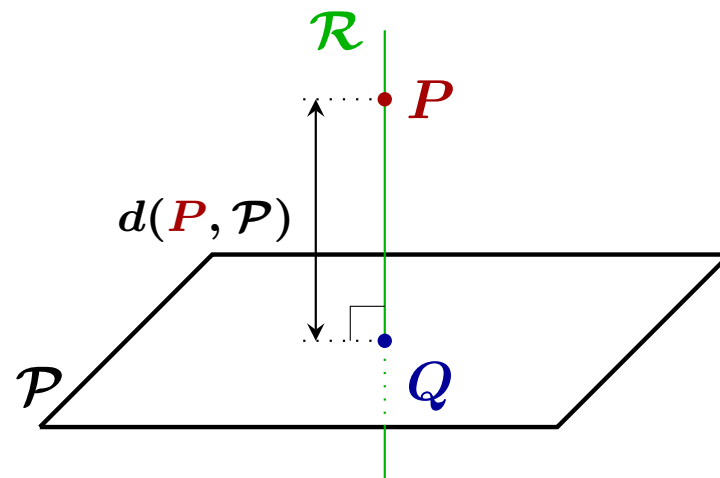
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dados um ponto, reta ou plano \mathcal{F} e um ponto, reta ou plano \mathcal{G} de \mathbb{R}^3 , a **distância entre \mathcal{F} e \mathcal{G}** é

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \min \{ d(P, Q) : P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G} \}.$$

Nota: Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$. De seguida, analisamos os casos em que \mathcal{F} e \mathcal{G} são disjuntos.

Dados um **plano** \mathcal{P} e um **ponto** $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única **reta** \mathcal{R} **perpendicular ao plano** \mathcal{P} **e contendo o ponto** P .

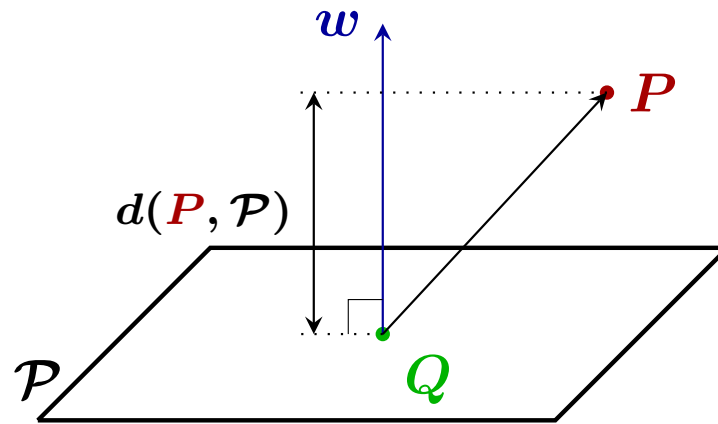


A **distância do ponto** P **ao plano** \mathcal{P} é

$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da **reta** \mathcal{R} com o plano \mathcal{P} .

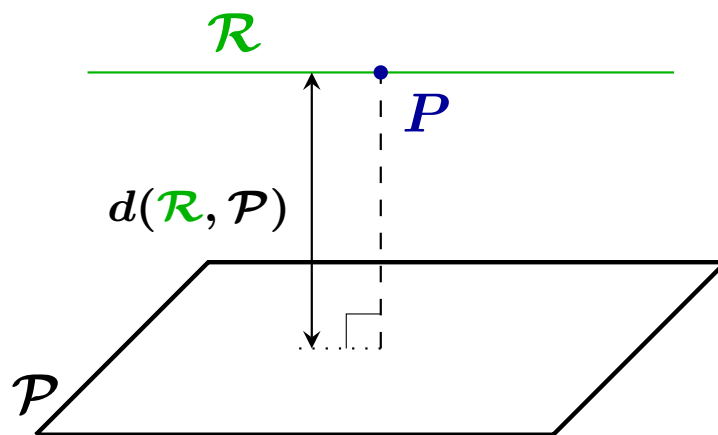
Dados um plano \mathcal{P} e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano \mathcal{P} . Então, $d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}$.



Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano \mathcal{P} , tem-se

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

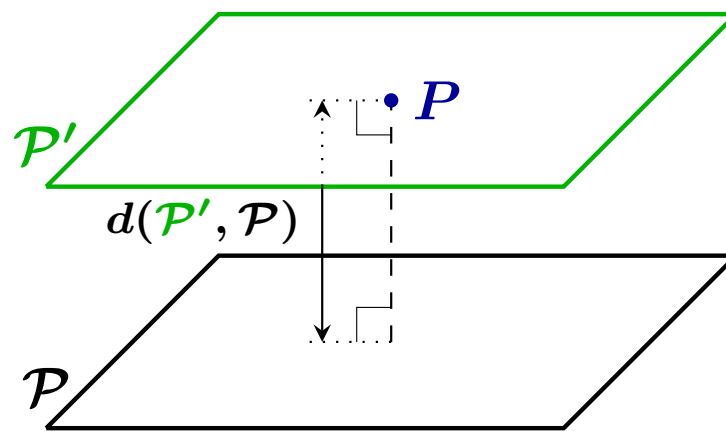
Uma **reta** \mathcal{R} e um plano \mathcal{P} disjuntos são estritamente paralelos.



Nesse caso, a **distância da reta \mathcal{R} ao plano \mathcal{P}** é

$$d(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$

Dois planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' disjuntos são estritamente paralelos.

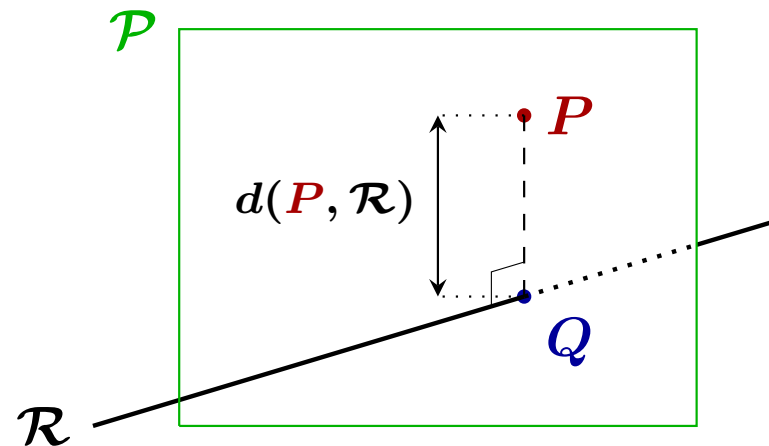


A distância entre os planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' é

$$d(\mathcal{P}', \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{P}'.$$

Nota: Nos dois casos antes descritos, distância reta/plano ou plano/plano, o estudo reduz-se ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

Dada uma **reta** \mathcal{R} e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, existe um único **plano** \mathcal{P} **perpendicular** a \mathcal{R} e **que contém** P .

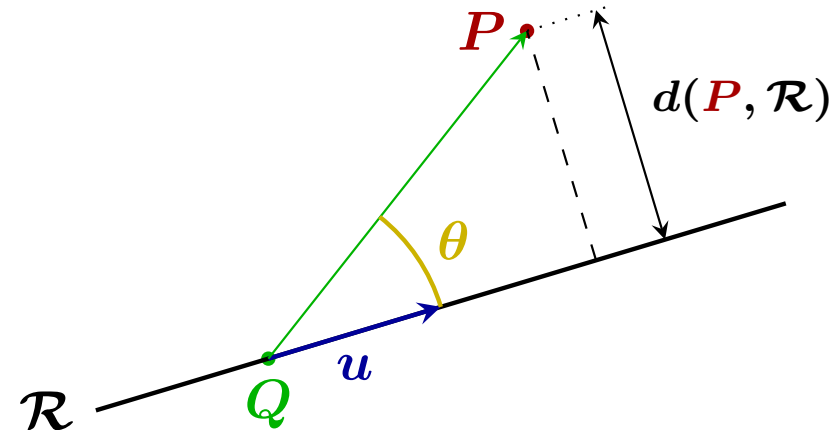


A **distância** do ponto P à reta \mathcal{R} é

$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta \mathcal{R} com o **plano** \mathcal{P} .

Dada uma **reta** \mathcal{R} que passa pelo **ponto** Q e que tem **vetor diretor** u ,

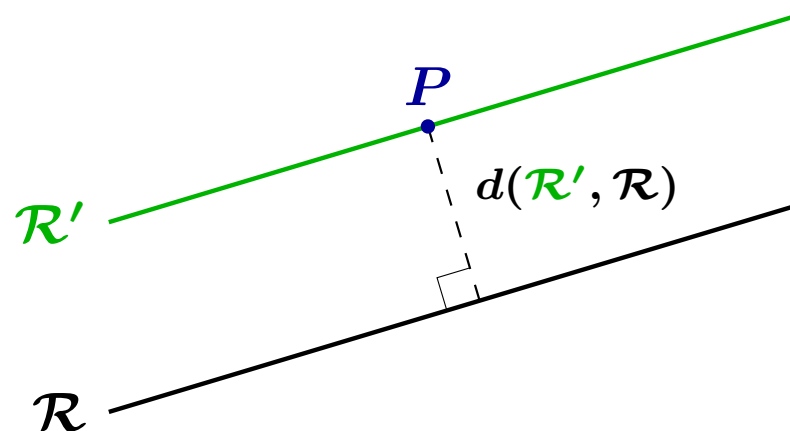


e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$d(P, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$

sendo θ o ângulo entre os vetores u e \overrightarrow{QP} .

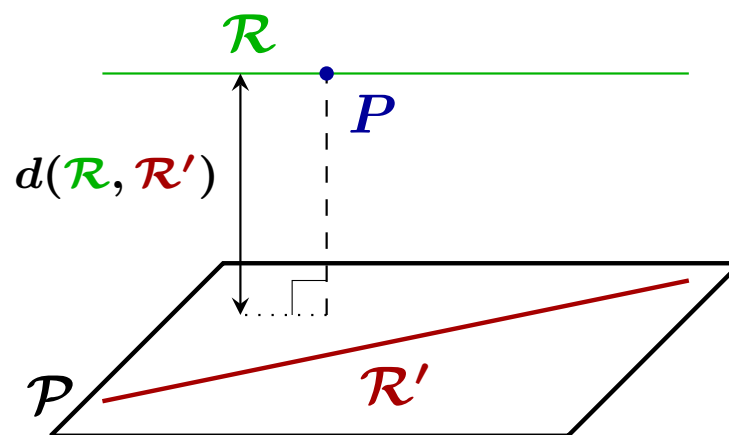
Duas retas disjuntas de \mathbb{R}^3 são estritamente paralelas ou enviezadas.



A distância entre retas estritamente paralelas \mathcal{R} e \mathcal{R}' é

$$d(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = d(P, \mathcal{R}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}'.$$

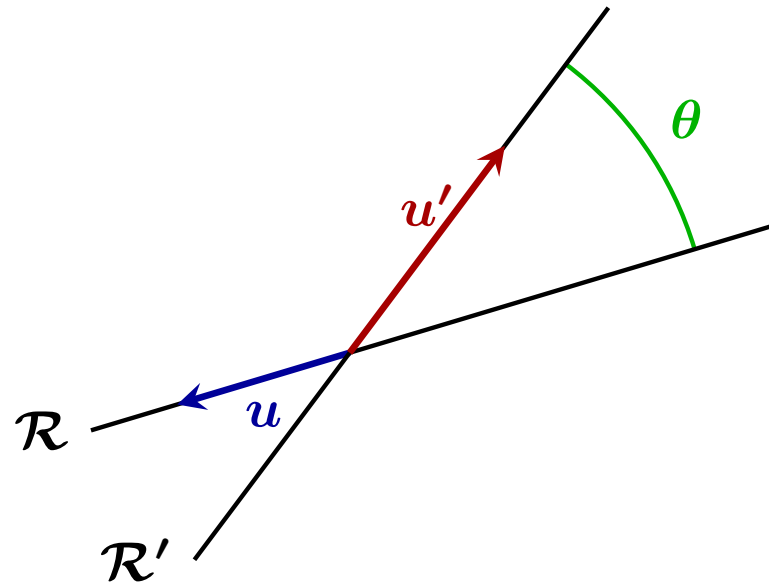
Dadas retas enviezadas \mathcal{R} e \mathcal{R}' , existe um único plano \mathcal{P} estritamente paralelo a \mathcal{R} e que contém \mathcal{R}' .



A distância entre retas enviezadas \mathcal{R} e \mathcal{R}' é

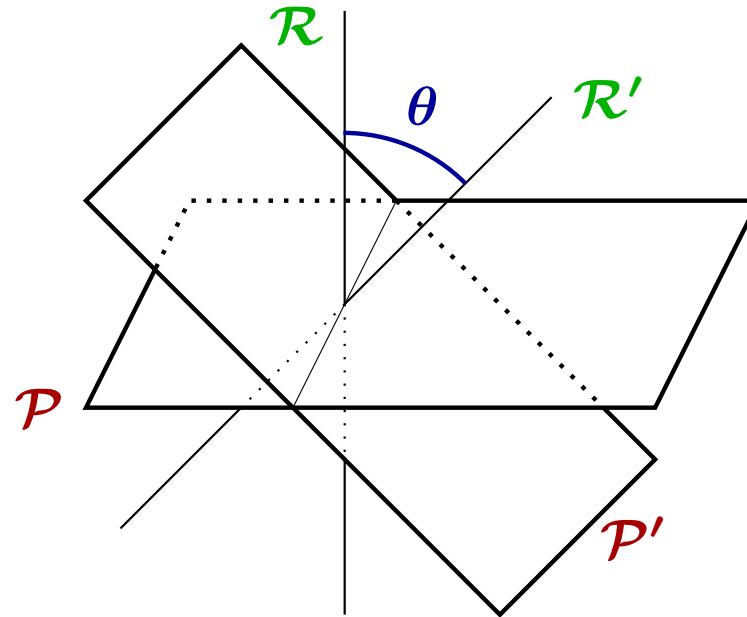
$$d(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = d(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$

Dadas duas retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' de vetores diretores u e u' , respetivamente,



o ângulo entre as retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' é

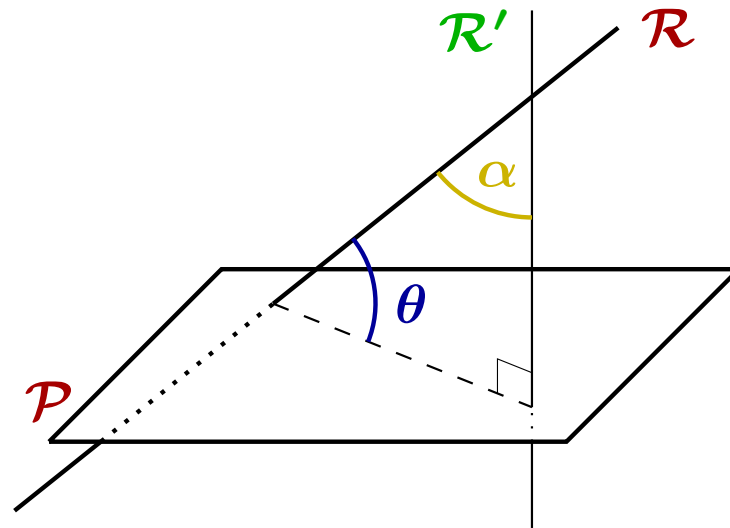
$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \theta = \arccos \frac{|u \cdot u'|}{\|u\| \|u'\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



O ângulo entre os planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' é

$$\angle(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}'),$$

sendo \mathcal{R} e \mathcal{R}' retas perpendiculares aos planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' , respetivamente.



$$\theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{P})$$

$$\alpha = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$$

são ângulos
complementares

$$(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha)$$

O ângulo entre uma reta \mathcal{R} e um plano \mathcal{P} é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \theta = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \arcsin \frac{|u \cdot w|}{\|u\| \|w\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

onde \mathcal{R}' é uma reta ortogonal ao plano \mathcal{P} , u um vetor diretor da reta \mathcal{R} e w um vetor ortogonal ao plano \mathcal{P} .