MPEI 2018-2019

Informação e Probabilidade

Probabilidade e informação são conceitos relacionados

Exemplo

- Suponhamos que temos um conjunto de letras, que designamos por E
- E={a, b, c, d, e, f, g, h}
- Podemos codificar E por:
  - {000,001,010,011,100,101,110,111}

- Encontrar uma letra em E pode ser feito com 3 perguntas, tantas quantas os bits necessários para codificar cada elemento de E

…

- Por exemplo, encontrar “c”:
- Questão 1: Encontra-se na metade esquerda ?
  - Resposta: Sim (tinhamos a,b,c,d,e,f,g)
- Questão 2: Encontra-se na metade esquerda (do domínio anterior) ?
  - Resposta: Não (tinhamos a,b,c,d)
- Questão 3: Encontra-se na metade esquerda (do domínio anterior) ?
  - Resposta: Sim (tinhamos c,d)

Informação e probabilidade

- Probabilidade e informação são conceitos relacionados.
- Ao comunicar a ocorrência de um acontecimento transfere-se uma quantidade de informação que depende da probabilidade do acontecimento,
  - o que sugere que se escreva a informação como função da probabilidade, $I(p)$.
- Se o acontecimento for certo, não se comunica qualquer informação.
  - Logo, $I(p) = 0$
- Quanto mais improvável o acontecimento, maior a informação associada.
  - Logo $I(p)$ deve crescer à medida que p decresce.

Informação de 2 acontecimentos indep.

- A informação a associar a dois acontecimentos independentes deverá ser a soma da informação associada a cada acontecimento em separado.
- Como a probabilidade da ocorrência de dois eventos independentes, com probabilidades p e q, é o produto pq, a informação deverá satisfazer

$$I(pq) = I(p) + I(q)$$

logaritmo

- A função logaritmo satisfaz $\log pq = \log p + \log q$, o que sugere que se tome $I(p) = \log p$.
- Contudo, esta função decresce quando p diminui.
- Trocando-lhe o sinal obtém-se a função
  $$I(p) = \log\left(\frac{1}{p}\right)$$
- que satisfaz $I(1) = 0$ e cresce quando p diminui, qualquer que seja a base do logaritmo

Informação de 2 acontecimentos indep. (continuação)

- A informação associada a eventos independentes A e B, com probabilidade conjunta pq , é
- $I(pq) =$
- $= log\frac{1}{pq}$
- $= log\frac{1}{p} + log\frac{1}{q}$
- $= I(p) + I(q)$
  - Como se pretendia

- Quando se toma a base 2 exprime-se a informação em bits

Exemplo

- A quantidade de informação que se transfere ao comunicar o resultado de uma experiência que pode dar dois resultados equiprováveis (logo, de probabilidade ½) é, em bits,

- $I\left(\frac{1}{2}\right) = \log \frac{1}{1/2} = \log 2 = 1 \ bit$

- Para armazenar n bits de dados nem sempre é necessário utilizar n bits de memória.

Exemplo 2 – aplicando aos contadores

- No caso do contador inicial :
- Probabilidade de cada incremento igual a 1/2
- Informação:

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = 1\ bit$$

- Na variante :
- $I(X_i) = I\left(\frac{1}{64}\right) = \log\frac{1}{64} = 6\ bits$

Entropia

- A entropia é uma medida da imprevisibilidade do conteúdo de informação.
- É dada pela média da informação

$$\mathrm{H}(X) = E[I(X)] = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) \log\left(\frac{1}{p(x_k)}\right)$$

Entropia - exemplos

- Se considerarmos uma variável aleatória que toma um de dois dois valores equiprováveis, então:

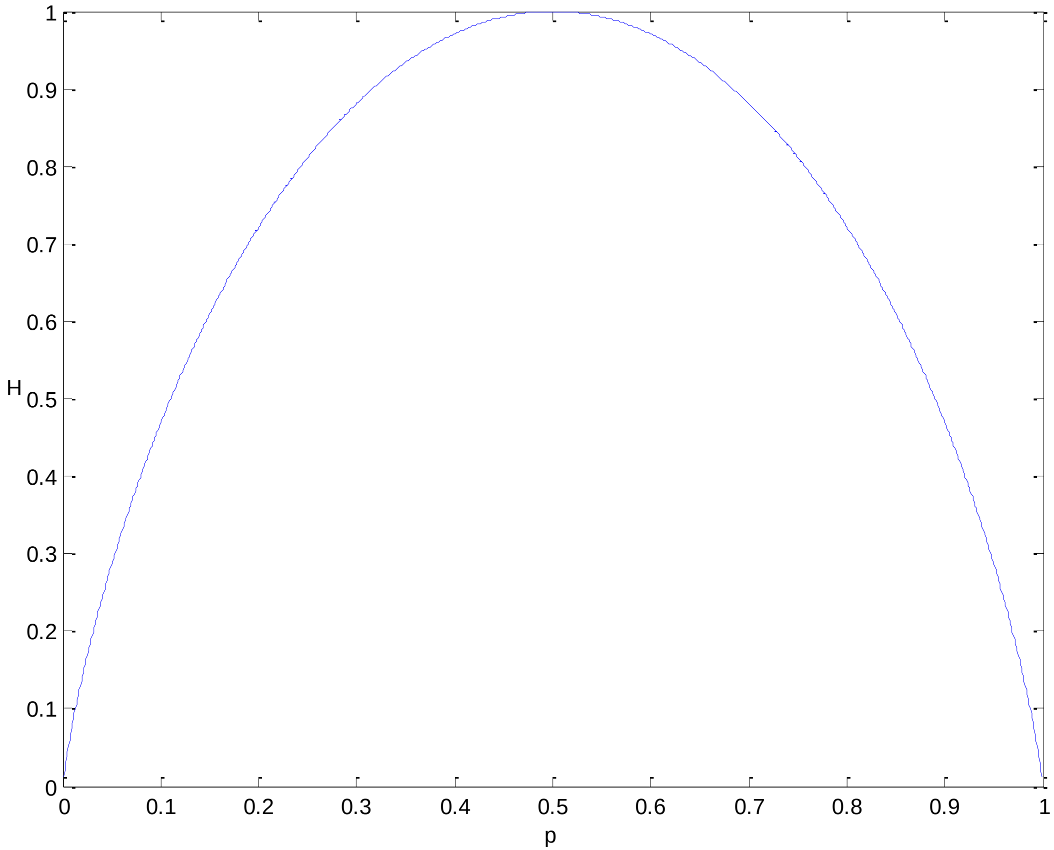
$$\mathrm{H}(X) = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{2}\log(2) = 1 \text{ bit}$$

- Por outro lado se as probabilidades dos dois acontecimentos forem p e 1-p então:

$$\mathrm{H}(X) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$$

Que varia entre 0 (p=0 ou p=1) e 1 (p= ½).

Entropia - exemplos



Entropia – exemplos

- Se a variável aleatória X tomar um de 2^n valores equiprováveis, então a entropia será:

$$\mathrm{H}(X) = \sum_1^{2^n} 2^{-n} \log(2^n) = 2^n \times 2^{-n} \times n$$
$$= n \text{ bits}$$