universidade de aveiro departamento de matemática

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

## Capítulo 1

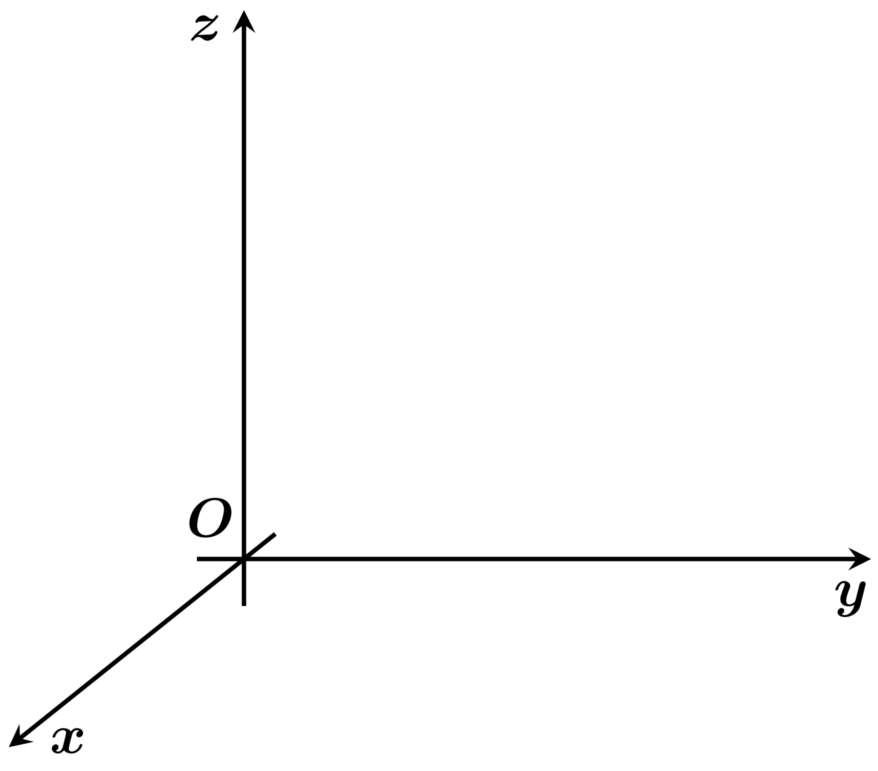
# Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

**Fixamos um sistema de coordenadas:**

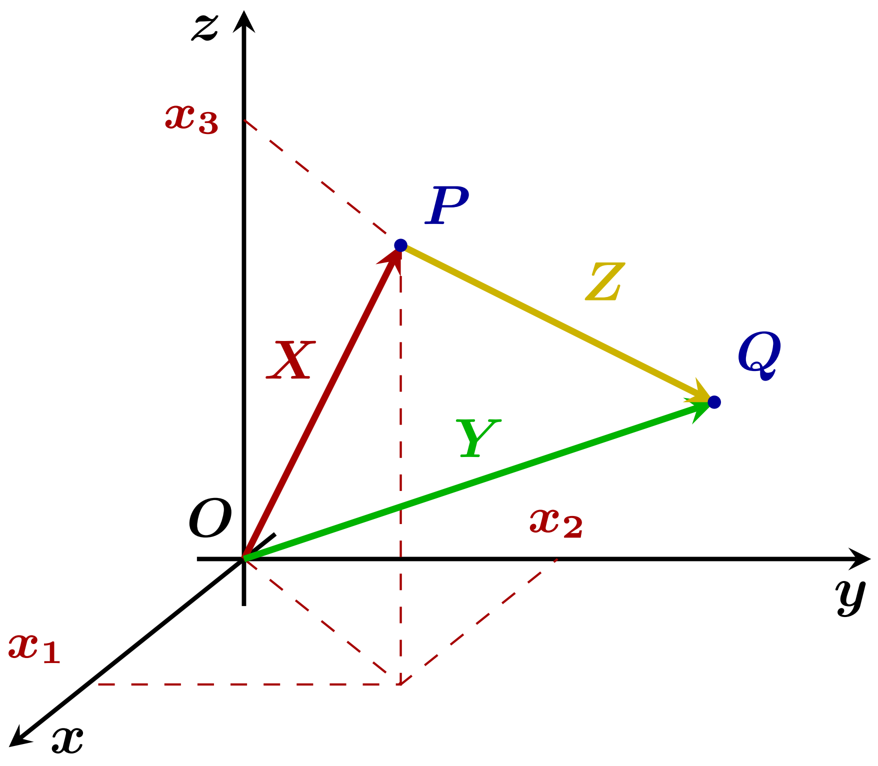
$O \quad \rightarrow$ **origem**

$\left.\begin{array}{l} Ox \\ Oy \\ Oz \end{array}\right\} \rightarrow$ **eixos coordenados**

$\left.\begin{array}{l} xOy \\ xOz \\ yOz \end{array}\right\} \rightarrow$ **planos coordenados**



$x_1, x_2, x_3 \to$ **coordenadas** do ponto $P$




Associamos ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{OP}$ o vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

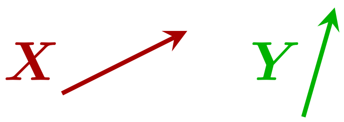
$y_1, y_2, y_3 \to$ **coordenadas** do ponto $Q$ e seja $Y$ o vetor associado a $\overrightarrow{OQ}$

Ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ fica associado o vetor $Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$

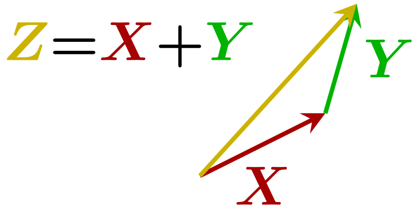
# Adição, multiplicação por escalar e combinação linear



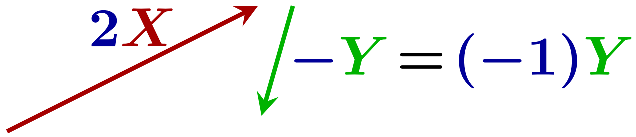
**Sejam $X$ e $Y$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares**



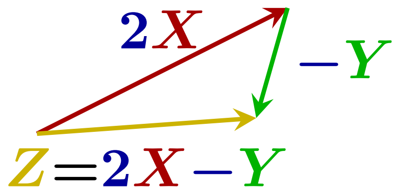

**Adição:** $Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$




**Multiplicação por escalar:** $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$




**Combinação linear:** $Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$



Os vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Chamam-se **componentes** do vetor $X$ aos números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**Operações em $\mathbb{R}^n$**

- adição de vetores: $X + Y + Z$
- multiplicação de um vetor por um escalar: $2X$, $-Y$, $\alpha Z$
- combinação linear de vetores: $2X - Y + \alpha Z$

**Os vetores em $\mathbb{R}^n$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a que chamamos**

**MATRIZES**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**$A$ é uma matriz com $m$ linhas e $n$ colunas, tem $m \times n$ elementos**

**diz-se matriz $m \times n$, de ordem $m \times n$, de dimensão $m \times n$**

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textbf{linha } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \textbf{coluna } j \end{array} & \end{array}$$

**$a_{ij}$ é o elemento ou entrada $(i, j)$ da matriz $A$**

**Notação abreviada:** $A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$

**Matriz nula** $(m \times n)$, cujas entradas são todas iguais a $0$, denota-se por

$$O \text{ (ou } O_{m\times n}\text{)}.$$

**Matriz linha** $(1 \times n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

**Matriz coluna** $(m \times 1)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

**matriz com o mesmo número de linhas e de colunas**

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

**diagonal principal**

**Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se diagonal se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, ou seja,**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Chama-se a matriz identidade de ordem n e denota-se por $I$ (ou $I_n$) a uma matriz diagonal $n \times n$ com**

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$$

# Matriz triangular

Uma matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ é

**triangular superior** se $a_{ij} = 0$, para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

**triangular inferior** se $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

# Transposta de uma matriz

A **transposta** da matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz A, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

**Propriedade:**

$$(A^T)^T = A.$$

Uma matriz $A$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$. (**Nota:** toda a matriz simétrica é quadrada.)

**Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.**

**As matrizes $A$ e $B$ são iguais, $A = B$, se**

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

**A soma de $A$ e $B$ é a matriz $m \times n$ $A + B = C = [c_{ij}]$ tal que**

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

**O produto de $A$ pelo escalar $\alpha$ é a matriz $m \times n$ $\alpha A = D = [d_{ij}]$ tal que**

$$d_{ij} = \alpha \, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

**A matriz $m \times n$ $A$ é uma combinação linear das matrizes $A_1, \ldots, A_k$ $m \times n$ se**

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

## Propriedades da adição de matrizes

- **comutativa:** $A + B = B + A$,
- **associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- **admite elemento neutro:** $A + O = O + A = A$,
- $A$ **possui simétrico aditivo:** $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, **para quaisquer matrizes** $m \times n$ $A, B, C$.

## Propriedades da multiplicação por escalar de matrizes

- **associativa:** $\alpha\,(\beta\,A) = (\alpha\,\beta)\,A$,
- **distributiva:** $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$,
- **distributiva:** $\alpha(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$,
- $(\alpha A)^T = \alpha\,A^T$, **para quaisquer matrizes** $m \times n$ $A, B$, **e** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna

**Dadas** $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

**o produto da matriz linha $A$ pela matriz coluna $B$ é**

$$A\,B = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

**Operação bem definida só se $A$ e $B$ possuem igual número de elementos!**

**Caso geral**: multiplicação de $A$ matriz $m \times n$ e $B$ matriz $n \times p$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

o **produto de $A$ por $B$** é a matriz $m \times p$ $AB = [c_{ij}]$ cuja entrada $(i, j)$ resulta da multiplicação da **linha $i$** de $A$ pela **coluna $j$** de $B$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, p.$$

- **associativa:** $(AB)C = A(BC)$,
- **distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:**

$$(A+\widetilde{A})B = AB + \widetilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B+\widetilde{B}) = AB + A\widetilde{B},$$

- **admite elemento neutro à esquerda e à direita:** $I_m A = A = A I_n$,
- $(\alpha A)B = \alpha\,(AB) = A(\alpha B)$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

**para quaisquer matrizes** $A, \widetilde{A}$ $m \times n$, $B, \widetilde{B}$ $n \times p$, $C$ $p \times q$ **e** $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Nota importante: A multiplicação de matrizes não é comutativa!**

Sejam $A$ uma matriz $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}$.

A **potência** $p$ de $A$ é a matriz $n \times n$ dada por

$$A^p = A\, A^{p-1},$$

em que $A^0 = I_n$, por convenção.

## Propriedades da potência de matrizes

- $(A^p)^q = A^{pq}$
- $A^p A^q = A^{p+q}$

**Nota:** Em geral $(AB)^p \neq A^p B^p$.

# Sistema de $m$ equações lineares com $n$ incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

**matriz dos coeficientes** — **coluna das incógnitas** — **coluna dos termos independentes**

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad AX = B,$$

em que $A$ é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes do sistema,

$X$ é a coluna $(n \times 1)$ das incógnitas,

$B$ é a coluna $(m \times 1)$ dos termos independentes e

$$M = [\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

é dita a matriz ampliada, aumentada ou completa $m \times (n+1)$ do sistema.

**A primeira entrada não nula de cada linha é designada por pivot.**

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \cdots \neq 0$$

- **Abaixo de cada pivot só ocorrem zeros,**
- **Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o pivot da linha $i+1$ está numa coluna à direita da coluna que contém o pivot da linha $i$,**
- **As linhas nulas, caso existam, ocorrem só na parte inferior da matriz.**

# Matriz escalonada por linhas reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- **A matriz está na forma escalonada por linhas,**
- **Os pivots são todos iguais a** $\mathbf{1}$**,**
- **Acima de cada pivot só ocorrem zeros.**

1. **Troca da posição relativa de duas linhas, p.e. $i$ e $j$:** $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

2. **Multiplicação de uma linha, p.e. $i$, por um escalar $\alpha \neq 0$:** $L_i := \alpha\, L_i$

3. **Substituição de uma linha, p.e. $i$, pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, p.e. $j$, multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{R}$:** $L_i := L_i + \beta\, L_j$

## Matrizes equivalentes por linhas

**Duas matrizes $A$ e $C$ são equivalentes por linhas e escreve-se**

$$A \sim C$$

**se $C$ resulta de $A$ por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de $A$.**

**Teorema**

**Toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida).**

**Exemplo ilustrativo do teorema anterior**

**Passo 1: Encontrar, na 1.ª coluna não nula, o 1.º elemento não nulo pivot.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

**Passo 2:** **Trocar linhas** para colocar o **pivot como 1.º elemento da coluna**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$

**Passo 3:** **Operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_4 := L_4 - L_1$$

## Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 3



**Passo 4:** Considerar a **submatriz** que se obtém eliminando a 1.ª linha e aplicar os passos 1 a 4 até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

**Fim Passo 4:** Obtém-se uma **matriz escalonada por linhas** equivalente a $A$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Passo 5:** **Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivots de modo a obter pivots iguais a 1.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 := \tfrac{1}{2} L_1$$
$$L_2 := \tfrac{1}{2} L_2$$
$$L_3 := \tfrac{1}{2} L_3$$

**Passo 6:** Operar com as linhas de modo a obter **zeros acima dos pivots**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 := L_2 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_1 := L_1 + \frac{5}{2}L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 := L_1 - L_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada por linhas <u>reduzida</u> equivalente a $A$.

**Teorema**

Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são $[\,A\,|\,B\,]$ e $[\,C\,|\,D\,]$, tais que

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

então os dois sistemas têm o mesmo conjunto de soluções.

**Nota:** Se $B = D = 0$, basta que $A \sim C$ para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

## Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A \mid B\,]$.
2. Transformar $[\,A \mid B\,]$ numa forma escalonada por linhas $[\,C \mid D\,]$.
3. Escrever o sistema $CX = D$, ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

## Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A \mid B\,]$.
2. Transformar $[\,A \mid B\,]$ numa forma escalonada por linhas <u>reduzida</u> $[\,E \mid F\,]$.
3. Escrever o sistema $EX = F$, ignorando as linhas nulas, e resolver.

Um sistema linear representado matricialmente por $AX = B$, tal que

$$[\,A \mid B\,] \sim [\,C \mid D\,],$$

com a matriz $[\,C \mid D\,]$ escalonada por linhas, classifica-se em

- **impossível** se **não** possui solução;
- **possível e determinado** se possui uma **única** solução (todas as colunas de $C$ têm pivot e não há pivot na coluna $D$);
- **possível e indeterminado** se possui uma **infinidade** de soluções (sendo o grau de indeterminação do sistema = n.º de incógnitas livres = n.º de colunas de $C$ sem pivot).

A **caraterística** da matriz $A$, $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivots de uma matriz $C$ escalonada por linhas equivalente, por linhas, a $A$.

O sistema linear $AX = B$ com $A$ $m \times n$ e $B$ $m \times 1$ é

1. **impossível** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) < \mathrm{car}([A|B])$;
2. **possível e determinado** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) = n$;
3. **possível e indeterminado de grau $n - \mathrm{car}(A)$** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) < n$.

O **espaço das colunas** de uma matriz $A$ $m \times n$, $\mathcal{C}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $C_1, \ldots, C_n$ de $A$,

$$\mathcal{C}(A) = \{\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Se $X = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, então $AX = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n$, logo

$$\mathcal{C}(A) = \{AX \in \mathbb{R}^m : \; X \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Teorema**

Dada $A$ $m \times n$ e $B$ $m \times 1$, temos

$$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B \text{ é um sistema possível.}$$

O **espaço das linhas** de uma matriz $A$ $m \times n$, $\mathcal{L}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $L_1^T, \ldots, L_m^T$ que resultam da transposta das linhas $L_1, \ldots, L_m$ de $A$,

$$\mathcal{L}(A) = \{ \alpha_1 L_1^T + \cdots + \alpha_m L_m^T, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \}.$$

**Proposição** Se $A \sim C$, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C)$.

Como $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^T)$, temos

$$B \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow A^T X = B \text{ é um sistema possível.}$$

Um sistema diz-se **homogéneo** se os termos independentes são todos nulos:

$$A\,X = 0.$$

Todo o sistema homogéneo é possível pois possui pelo menos a solução nula, dita solução trivial.

Se $A$ é $m \times n$ e $m < n$, então $AX = 0$ admite uma solução não trivial.

A **nulidade** de $A$, $\mathrm{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres do sistema $AX = 0$,

$$\mathrm{nul}(A) = n - \mathrm{car}(A).$$

O **espaço nulo** de $A$, $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogéneo associado a $A$ $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \; AX = \mathbf{0}\}.$$

O **espaço nulo** de $A$, $\mathcal{N}(A)$, pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $n - car(A)$ colunas obtidas usando colunas da forma escalonada reduzida de $A$.

**Teorema** Dada $A$ $m \times n$ e $B$ $m \times 1$, se o sistema $AX = B$ é possível e se $\overline{X}$ é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é

$$\{\overline{X} + Y : Y \in \mathcal{N}(A)\}.$$

**Uma matriz $A$ $n \times n$ diz-se invertível se existe $B$ $n \times n$ tal que**

$$A\,B = B\,A = I_n$$

**À única matriz $B$ satisfazendo a relação anterior chama-se inversa de $A$ e denota-se por $A^{-1}$.**

**Caso contrário (não existe $B$), $A$ diz-se singular ou não invertível.**

**Teorema**

**Se $A$ $n \times n$ é invertível, então a inversa de $A$ é única.**

**Teorema**

**Se $A, B$ $n \times n$ e $B\,A = I_n$, então $A\,B = I_n$.**

## Propriedades

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; para quaisquer $A, B$ $n \times n$ invertíveis.

## Método prático para determinar a inversa

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

$$\uparrow$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

**Teorema** Uma matriz $A$ $n \times n$ é invertível se e só se $A$ é equivalente por linhas a $I_n$.

# Critérios de invertibilidade de uma matriz

**Teorema** Dada $A$ $n \times n$, são equivalentes as afirmações

1. $A$ é **invertível**
2. $A \sim I_n$
3. $\mathrm{car}(A) = n$
4. $\mathrm{nul}(A) = 0$
5. $AX = B$ tem uma **única** solução $X = A^{-1}B$ para cada $B$ $n \times 1$
6. $AX = 0$ possui **apenas** a **solução trivial**
7. $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$
8. $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^n$
9. $\mathcal{N}(A) = \{0\}$