universidade de aveiro deti departamento de electrónica, telecomunicações e informática

Trabalho Prático 2

Álgebra de Boole

Objetivos

- Demonstração de teoremas. Simplificação analítica de expressões Booleanas
- Representação de funções

  Algébrica
  Tabular (Tabelas de Verdade)
  Formas Canónicas e Formas *Standard*.

- Implementação de funções (circuitos lógicos)

Introdução

A álgebra de Boole (1815-1864) constitui a base teórica que fundamenta, através de axiomas e teoremas, as operações binárias implementadas sob a forma de circuitos lógicos nos sistemas digitais. O conjunto de regras usadas na álgebra Booleana são semelhantes às da álgebra comum, sendo, na generalidade dos casos, mais simples, por manipular variáveis binárias as quais só assumem os valores de 'verdadeiro' e 'falso'.

Neste trabalho, para além da verificação de alguns teoremas, exemplificamos formas de obtenção da forma canónica de funções Booleanas através de *tabelas de verdade*. As *formas canónicas* assumem o aspecto quer duma soma-de-produtos de *minterms* ou dum produto-de-somas de *maxterms*. Todavia, a implementação direta da *forma canónica*, com *gates,* é ineficiente em termos do circuito lógico resultante. Com o objetivo de minimizar a complexidade do circuito lógico, estudaremos formas de a simplificar.

Guião

1. Teoremas da absorção e da simplificação

1.1 Demonstre por indução directa (através da tabela de verdade) os seguintes teoremas:

a) Absorção: $x + x.y = x$

b) Simplificação: $x + \overline{x}.y = x + y$

1.2 Demonstre algebricamente que:

$$x.y.z + x.y.\overline{z} + x.\overline{y}.z + x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.z = x + y.z$$

2. Funções Booleanas e respectiva implementação lógica (Circuitos)

2.1 Determine o resultado das expressões seguintes quando ***x*** = 1, ***y*** = 0 e ***z*** = 0.

a) $\overline{x.y.z + x.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}}$

b) $\overline{(x.y.z).(x + y + \overline{z}).(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})}$

c) $(x.y.z) \oplus (x.\overline{y}.\overline{z}) \oplus (\overline{x}.\overline{y}.\overline{z})$

d) $(x.y.z.w) \oplus (x.\overline{y}.\overline{z}.\overline{w}) \oplus (x.\overline{y}.\overline{z}.w)$

2.2 Esboce os circuitos respectivos usando portas lógicas NOT, AND, OR e XOR.

3. Tabela de Verdade, Forma Canónica e Forma Standard

3.1 Determine as formas canónicas, i.e., a soma-de-produtos de *minterms* e o produto-de-somas de *maxterms*, das funções Booleanas ***h*** e ***w*** (em função das variáveis independentes ***x***, ***y***, e ***z***), expressas na seguinte tabela de verdade:

x	*y*	*z*	*h*	*w*
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

3.2 Determine a forma canónica da seguinte função:

$$f(x, y, z) = \overline{x}.y + \overline{z} + x.\overline{y}.z$$

5. Implementação de funções Booleanas só com *gates* NAND e NOR

Para implementar uma expressão Booleana com *gates* **NAND** coloca-se a expressão na forma da soma-de-produtos (*minterms*) e em seguida aplica-se o teorema da Involução e as leis de DeMorgan.

Para implementar uma expressão Booleana com *gates* **NOR** coloca-se a expressão na forma da produto-de-somas (*maxterms*) e em seguida aplica-se o teorema da Involução e as leis de DeMorgan.

Simplifique a função ***y*** e esboce o circuito resultante : $y = x_1.(x_2 + \overline{x}_3.\, x_4) + x_2$

5.1 Usando só *gates* NAND.

5.2 Usando só *gates* NOR.

6. Exercícios Adicionais

Recorrendo aos teoremas da álgebra de Boole mostre que:

6.1 $x.y.z + x.y.\overline{z} + x.\overline{y}.z + x.\overline{y}.\overline{z} = x$

6.2 $\left(\overline{\overline{x.y} + x.\overline{y} + \overline{x}.y}\right) = x.y$

6.3 O operador "ou-exclusivo" (⊕ - XOR), definido por $x \oplus y = x.\overline{y} + \overline{x}.y$ é associativo.

Apêndice A - Axiomas e Teoremas da Álgebra de Boole

A.1 Axiomas

Nome	**Axioma**	**Dual** (OR)
1 - Campo binário: 0 e 1	se $x \neq 0$, $x = 1$	se $x \neq 1$, $x = 0$
2 - 0 e 1 são complementos	se $x = 0$, $\overline{x} = 1$	se $x = 1$, $\overline{x} = 0$
3 - AND / OR	$0 \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$
4 - AND / OR	$1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
5 - AND / OR	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

Tabela 1 - Axiomas da álgebra de Boole

Operadores: O traço por cima da variável *x* é o operador lógico inversor **NOT**, O '·' (ponto) é o operador de multiplicação lógica **AND**, e '+' é o operador de soma lógica **OR**.

Dualidade: As identidades (axiomas e teoremas) da álgebra de Boole, assumem duas formas: **AND** e **OR**. As formas são equivalentes e designam-se por **dual** uma da outra. Para obter a **dual** duma expressão lógica troca-se o operador **AND** pelo operador **OR**, os 0's (zeros) por 1's (uns) e os 1's por 0's.

A.2 Teoremas

Com base nos axiomas da tabela 1, é possível derivar uma série de teoremas agrupados nas tabelas 2 e 3.

Nome	**Teorema**	**Dual**
Absorvência	$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
Identidade	$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
Complementaridade	$x.\overline{x} = 0$	$x + \overline{x} = 1$
Idempotência	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
Involução	$\overline{\overline{x}} = x$	

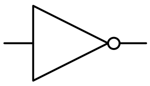
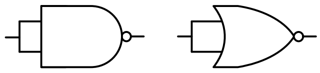
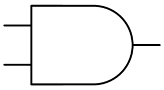
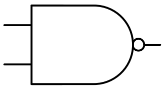
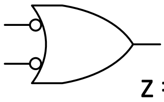
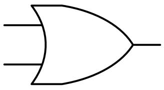
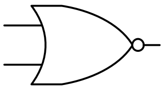
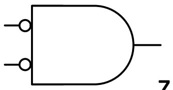
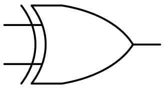
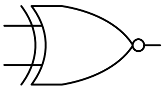
Tabela 2. Teoremas da álgebra de Boole - I - Uma só variável

Nome	**Teorema**	**Dual**
Comutatividade	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
Associatividade	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Distributividade	$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$	$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$
Absorção (*Covering*)	$x \cdot (x + y) = x$	$x + x \cdot y = x$
Adjacência (*Combining*)	$(x+y).(x+\overline{y}) = x$	$x.y + x.\overline{y} = x$
Simplificação	$(x+\overline{y}).y = x.y$	$x.\overline{y} + y = x + y$
DeMorgan	$\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{(x+y)} = \overline{x}.\overline{y}$

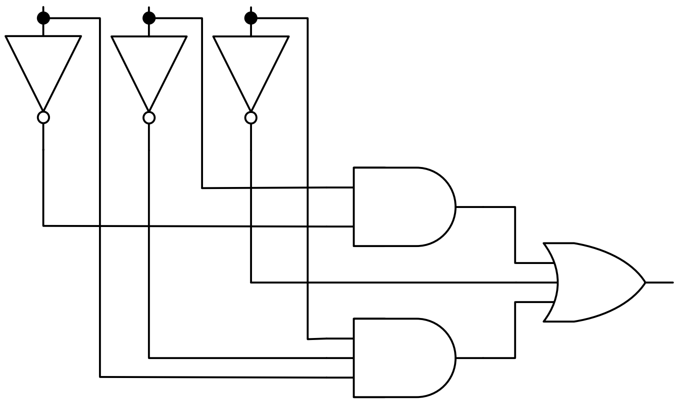
Tabela 3. Teoremas da álgebra de Boole - II - Duas ou mais variáveis

Apêndice B - Símbolos Lógicos

B.1 *Gates* básicas

Nome	Função	Simbolo	Simbolo (Alt)
NOT	$y = \overline{x}$		 $y = \overline{x.x}$ $y = \overline{x+x}$
AND	$z = x.\ y$		
NAND	$z = \overline{x.y}$		 $z = \overline{x} + \overline{y}$
OR	$z = x + y$		
NOR	$z = \overline{x+y}$		 $z = \overline{x}.\overline{y}$
XOR	$z = x \oplus y = x.\overline{y} + \overline{x}.y$		
XNOR	$z = \overline{x \oplus y} = x.y + \overline{x}.\overline{y}$		

B.1 Circuito duma função Booleana



$$f(x,y,z) = \overline{x}.y + \overline{z} + x.\overline{y}.z$$

Apêndice C - Formas Canónicas e Formas Standard

C.1 Formas Canónicas

Para a *tabela de verdade* da direita:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1. A forma canónica soma-de-produtos (*SOP*) é:

$$f(x,y,z) = m_1 + m_2 + m_4 + m_6$$
$$= \overline{x}.\overline{y}.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z} + x.y.\overline{z}$$

onde m_j = *minterm*$_j$, assinalado a vermelho

ou, em notação compacta : $f(x,y,z) = \sum m(1,2,4,6)$

2. A forma canónica produto-de-somas (*POS*) é:

$$f(x,y,z) = M_0.M_3.M_5.M_7$$
$$= (x+y+z).(x+\overline{y}+\overline{z}).(\overline{x}+y+\overline{z}).(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

onde M_j = *Maxterm*$_j$, assinalado a azul

ou em notação compacta : $f(x,y,z) = \prod M(0,3,5,7)$

Isto é: $f(x,y,z) = \sum m(1,2,4,6) = \prod M(0,3,5,7)$

C.2 Formas Standard

As formas *standard* são "como" as formas canónicas, com a diferença de que nem todas as variáveis estão presentes nos termos individuais da SOP (*minterm*) ou da POS (*maxterm*).

Exemplos (SOP e POS):

$f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.z + y.\overline{z} + x.\overline{z}$ - é uma soma-de-produtos na forma *standard*

$f(x,y,z) = (x+y+z).(\overline{y}+\overline{z}).(\overline{x}+\overline{z})$ - é um produto-de-somas na forma *standard*

Obtenção da forma canónica a partir da forma *standard* (SOP). Como?

a) Expandimos cada termo não-canónico inserindo o equivalente a '1' $(x+\overline{x}=1)$.

b) Eliminanos os termos duplicados.

Exemplo:

Obtenha a forma canónica de: $f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.z + y.\overline{z} + x.\overline{z}$

Resposta: $f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.z + y.\overline{z} + x.\overline{z}$ (standard)

$$= \overline{x}.\overline{y}.z + (x+\overline{x}).y.\overline{z} + x.(y+\overline{y}).\overline{z}$$
$$= \overline{x}.\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + \overline{x}.y.\overline{z} + x.y.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z}$$
$$= \overline{x}.\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + \overline{x}.y.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z} \quad \text{(canónica)}$$

Para converter da forma *standard* POS para a forma canónica, o processo é em tudo semelhante, sendo que a expansão do termo não-canónico é feita através da inserção de '0' por cada variável ausente, uma vez que $x.\overline{x}=0$. Em seguida, eliminam-se os duplicados.