Matemática Discreta

Estratégias de Demonstração

Universidade de Aveiro 2017/2018

http://moodle.ua.pt

Estratégias de demonstração da implicação

- Prova direta
- Demonstração por contraposição
- Demonstração por redução ao absurdo

Estratégias de demonstração por indução

- Princípio de indução (simples ou fraca)
- Princípio de indução completa (ou forte)

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

- Teorema de Dirichlet
- Algumas aplicações do princípio da gaiola dos pombos

A implicação

- A implicação $p \Rightarrow q$ significa que se a proposição p é verdadeira então q também é uma proposição verdadeira.

- Usualmente, dada a implicação $p \Rightarrow q$, a proposição p designa-se por hipótese ou antecedente e a proposição q designa-se por tese ou consequente.

- Os teoremas escrevem-se, usualmente, na forma de implicações deste tipo, onde p denota a hipótese do teorema e q a tese do teorema.

Prova direta

Prova direta da implicação

A prova direta da implicação $p \Rightarrow q$, consiste em admitir a hipótese p como verdadeira e, considerando apenas esse facto como adquirido (para além dos axiomas e teoremas já conhecidos), mostrar que a tese q é verdadeira.

Exemplo. Vamos demonstrar a seguinte proposição:

> Proposição. Se m é um número inteiro par e n um número inteiro arbitrário, então mn é um número inteiro par.

Prova: Seja m um número inteiro par. Então

$\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$ (por definição de número inteiro par)

$\Rightarrow\ mn = (2k)n$ (dado que $a = b \Rightarrow ac = bc$)

$\Rightarrow\ mn = 2(kn)$ (associatividade da multiplicação)

Logo, mn é um número inteiro par (por definição).

Prova direta (cont.)

Prova direta da equivalência

A prova direta da equivalência consiste na prova direta das implicações nos dois sentidos.

Exemplo

Vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$.

Demonstração por contraposição

A a demonstração por contraposição baseia-se na tautologia do cálculo proposicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

- Esta técnica de demonstração consiste em provar $p \Rightarrow q$ com recurso à demonstração da implicação $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A prova direta da implicação $\neg q \Rightarrow \neg p$ garante que se $\neg q$ é verdadeira então $\neg p$ é verdadeira, ou seja, se a tese é falsa a hipótese também é falsa.

Demonstração por contraposição (cont.)

Exemplo

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição. Se m^2 é um número inteiro ímpar então m é um número inteiro ímpar.

Trata-se da implicação $p \Rightarrow q$, onde a hipótese é p: "m^2 é um número inteiro ímpar" e a tese é q: "m é um número inteiro ímpar". Esta implicação é equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$, ou seja, se m não é um número inteiro ímpar então m^2 não é um número inteiro ímpar".

Prova: m número inteiro par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$
$\Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
$\Rightarrow m^2$ é número inteiro par.

Demonstração por contraposição (cont.)

Exercício

Demonstre o seguinte teorema:

Teorema. Seja $\sim$ uma relação de equivalência definida no conjunto X e $x, y \in X$. Se $[x] \neq [y]$, então $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demonstração por redução ao absurdo

A a demonstração por redução ao absurdo baseia-se na tautologia do cálculo proposicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

a partir da qual, por aplicação da leis de De Morgan, se obtém a tautologia

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

ou a tautologia

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

- Para se provar a implicação $p \Rightarrow q$, admite-se p verdadeiro e q falso (ou seja, nega-se a implicação) e procura-se obter uma contradição.

Exemplo

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

> Proposição. Se n^2 é um número inteiro par, então n é um número inteiro par.

Prova: n^2 é par e n é ímpar $\Rightarrow n^2 + n$ é ímpar e $n(n+1)$ é par
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : m$ é ímpar e m é par
o que é uma contradição.

Regra de inferência do princípio de indução (simples ou fraca)

O Princípio de indução baseia-se na seguinte regra de inferência:

$$(P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geq n_0)P(n),$$

onde n é uma variável inteira e

$$(\forall n \geq n_0)\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

denota a conjunção das proposições $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ quando n percorre todos os valores inteiros não inferiores a n_0.

- Note-se que para cada valor particular de n,

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

é uma proposição.

Demonstração por indução

Princípio de indução

Para cada inteiro positivo n, seja $P(n)$ uma proposição. Para mostrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o inteiro $n \geq n_0$, basta mostrar que

a) a proposição $P(n_0)$ é verdadeira $\leftarrow$ Condição inicial.

b) para cada inteiro $k \geq n_0$, a implicação

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

é também verdadeira, ou seja, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é também verdadeira.

- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ constitui o passo de indução.

Exemplo

- Vamos demonstrar que para todo o número natural n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Condição inicial $P(1) : 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.
- Passo de indução

  Hipótese de indução ($P(k)$): $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

  Tese: $P(k+1) : 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)(\text{por H.I.}) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Princípio de indução completa (forte)

Variante do princípio de indução

Admita-se que a condição inicial $P(n_0)$ é verdadeira e que, para todo $k \geq n_0$, a implicação

$$((\forall n \in [n_0, k])P(n)) \Rightarrow P(k+1)$$

é verdadeira, onde $[n_0, k] = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \leq k\}$. Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \geq n_0$.

Exemplo

Vamos mostrar que se $\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 29$ e, para $n \geq 2$, a igualdade

$$\alpha_n = 5\alpha_{n-1} - 6\alpha_{n-2} \quad (1)$$

é verdadeira, então

$$\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n, \quad (2)$$

para todo o inteiro $n \geq 0$.

Solução

1. Para $n = 0$ e $n = 1$:

$$\alpha_0 = 12 = 5 \times 3^0 + 7 \times 2^0, \ \alpha_1 = 29 = 5 \times 3^1 + 7 \times 2^1$$

2. **hipótese de indução**: $\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n$, para todo o inteiro $n \in [0, k]$, $k \geq 1$ inteiro.
3. **tese**: $\alpha_{k+1} = 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= 5\alpha_k - 6\alpha_{k-1} && \text{(por (1))} \\ &= 5(5 \times 3^k + 7 \times 2^k) - 6(5 \times 3^{k-1} + 7 \times 2^{k-1}) && \text{(por (2))} \\ &= 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Princípio da gaiola dos pombos (ou de Dirichlet)

Princípio da gaiola dos pombos

O princípio da gaiola dos pombos consiste na conclusão de que, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > m$, pelo menos uma das caixas terá de conter duas ou mais bolas.

- Generalizando, dadas n bolas para serem introduzidas em m caixas, onde $n > km$, pelo menos uma das caixas terá de conter $k + 1$ ou mais bolas.

Teorema de Dirichlet

Teorema (de Dirichlet)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\exists q \in [n]$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2},$$

onde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Princípio da gaiola dos pombos (cont.)

O princípio da gaiola dos pombos pode ainda ser apresentado de dois modos distintos:

I - Seja X um conjunto finito tal que $|X| = n$,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m,$$

onde $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se $n > m$, então existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|X_i| > 1$.

II - Sejam X e Y conjuntos arbitrários tais que $|X| = n$ e $|Y| = m$.

Se $n > m$ então não existe uma função $f : X \to Y$ tal que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou seja, não existe nenhuma função injectiva de X em Y.

Exercícios

- Demonstre que, entre treze pessoas, pelo menos duas têm o seu aniversário no mesmo mês.
  - **a)** Aplicando o princípio da gaiola dos pombos.
  - **b)** Por redução ao absurdo.

- Sabendo que num torneio em que participam n equipas de futebol, todas as equipas jogam umas com as outras, demonstre que em cada jornada pelo menos duas equipas jogam o mesmo número de jogos.