

# Matemática Discreta

## LPO2

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://moodle.ua.pt>

**Fórmulas válidas, não válidas, inconsistentes e consistentes**

**Consequência lógica**

**Fórmulas equivalentes**

**Forma normal prenex da lógica de primeira ordem**

## Fórmulas válidas e não válidas

### Definição de fórmula válida (e não válida)

Uma fórmula  $F$  diz-se **válida** (ou uma tautologia) se é verdadeira para qualquer das suas possíveis interpretações e diz-se **não válida** (ou inválida) se não é válida.

### Exemplo

A fórmula  $(\forall x) (P(x) \Rightarrow P(x))$  é válida.

## Fórmulas inconsistentes e consistentes

### Definição de fórmula inconsistente (e consistente)

Uma fórmula  $F$  diz-se **inconsistente** (ou uma contradição) se é falsa qualquer que seja a sua interpretação e diz-se **consistente** se não é inconsistente.

### Exemplo

A fórmula  $(\exists x) (P(x) \wedge \neg(P(x)))$  é inconsistente.

Se uma fórmula toma o valor 1 ( $V$ ) numa interpretação  $I$  dizemos que  $I$  é um modelo de  $F$  e que  $I$  satisfaz  $F$ .

**Exemplo:** Vamos verificar a consistência das fórmulas

1.  $(\forall x) (P(x, a))$ ,
2.  $(\exists x) (P(x, a))$ .

Para isso vamos determinar uma interpretação que seja um modelo para as duas fórmulas.

## Consequência lógica

### Definição (de consequência lógica)

Uma fórmula  $G$  é consequência lógica das fórmulas

$F_1, F_2, \dots, F_n$  se para toda a interpretação  $I$ , se a fórmula  $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n$  é verdadeira para  $I$  então  $G$  também é verdadeira para  $I$ .

### Teorema

Dadas as fórmulas  $F_1, F_2, \dots, F_n$  e uma fórmula  $G$ ,  $G$  é consequência lógica de  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sse

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \cdots \wedge F_n) \Rightarrow G$$

é uma fórmula válida.

## Fórmulas equivalentes

### Definição (de fórmulas equivalentes)

Duas fórmulas  $F$  e  $G$  são equivalentes (e escreve-se  $F \equiv G$ ) sse  $F \Leftrightarrow G$  é um teorema (ou seja, uma tautologia).

Exemplos de fórmulas equivalentes:

1.  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$  e  $\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))$ ;
2.  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$  e  $\forall y (\neg P(y) \vee Q(y))$ ;
3.  $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$  e  $\forall x (P(x) \Rightarrow \forall y Q(x, y))$ ;
4.  $\neg(\forall x (P(x)))$  e  $\exists x \neg(P(x))$ .

Exemplos de fórmulas não equivalentes:

1.  $\forall x (P(x))$  e  $\exists x (P(x))$ ;
2.  $\forall x (P(x, a))$  e  $\forall x (P(x, b))$  onde  $a$  e  $b$  são constantes.

## Forma normal prenex

### Definição (de forma normal prenex)

Uma fórmula  $F$  da lógica de primeira ordem diz-se na forma normal prenex se  $F$  está na forma

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n) M,$$

onde  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), é um quantificador (universal ou existencial) e  $M$  é uma fórmula sem quantificadores.

## Exemplos

Exemplos de fórmulas na forma normal prenex:

- 1)  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y));$
- 2)  $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(y));$
- 3)  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x, y) \vee R(z));$
- 4)  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x, y) \Rightarrow R(z)).$