

Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, <http://sweet.ua.pt/dirk/aulas>

Gabinete: 11.3.10

Atendimento de dúvidas: Terça, 15:00 – 17:00

Números Combinatórios

Recordamos

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número fatorial $n!$ é igual ao

Recordamos

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número fatorial $n!$ é igual ao
 - ao número de permutações de um conjunto de n elementos, e

Recordamos

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número fatorial $n!$ é igual ao
 - ao número de permutações de um conjunto de n elementos, e
 - ao número de ordens totais de um conjunto de n elementos.

Recordamos

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número fatorial $n!$ é igual ao
 - ao número de permutações de um conjunto de n elementos, e
 - ao número de ordens totais de um conjunto de n elementos.
- Em particular, $0! = 1$; e em geral, para $n \geq 1$ tem-se

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\dots 1.$$

Recordamos

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número fatorial $n!$ é igual ao
 - ao número de permutações de um conjunto de n elementos, e
 - ao número de ordens totais de um conjunto de n elementos.
- Em particular, $0! = 1$; e em geral, para $n \geq 1$ tem-se

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\dots 1.$$

Teorema (a fórmula de Stirling)

Para cada $n \geq 1$ tem-se

$$\sqrt{2\pi n} \, n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n} \, n^n e^{-n + \frac{1}{12n}}.$$

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$.

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$. De facto, com $n = 2k$:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2) \cdot n \\ &= \end{aligned}$$

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$. De facto, com $n = 2k$:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \dots (2(k-1)) \cdot (2k) \end{aligned}$$

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$. De facto, com $n = 2k$:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \dots (2(k-1)) \cdot (2k) = 2^k k! \end{aligned}$$

Fatorial duplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n .
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$. De facto, com $n = 2k$:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \dots (2(k-1)) \cdot (2k) = 2^k k! \end{aligned}$$

TPC: E se n é ímpar? Como $n!! = \frac{n!}{(n-1)!!} \dots$

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e
- número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e
- número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e
- número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Nota

Já aprendemos as fórmulas recursivas:

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e
- número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Nota

Já aprendemos as fórmulas recursivas:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$);

Recordamos

Para todos os $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o

- número de combinações sem repetição de n elementos k a k , e
- número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Nota

Já aprendemos as fórmulas recursivas:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$);
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (o triângulo de Pascal, capítulo 5).

Binomiais generalizados

Coeficiente binomial generalizado

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Binomiais generalizados

Coeficiente binomial generalizado

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Exemplo

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3) \dots (-n)}{n!}$$

Binomiais generalizados

Coeficiente binomial generalizado

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Exemplo

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3) \dots (-n)}{n!} = (-1)^n.$$

Binomiais generalizados

Coeficiente binomial generalizado

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Exemplo

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n.$$

Exemplo

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \dots \text{TPC} \dots$$

Os números de Fibonacci

Recordamos

que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Os números de Fibonacci

Recordamos

que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Esta equação de recorrência já resolvemos anteriormente:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Os números de Fibonacci

Recordamos

que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Esta equação de recorrência já resolvemos anteriormente:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Aqui

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894 \dots$$

é o **número de ouro**,

Os números de Fibonacci

Recordamos

que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Esta equação de recorrência já resolvemos anteriormente:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Aqui

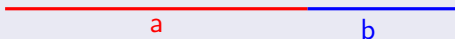
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894 \dots$$

é o **número de ouro**, e

$$\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = \frac{-1}{\Phi} = -0.618033988749894 \dots$$

Ainda sobre o número de ouro

Dividimos uma reta

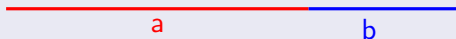


em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Ainda sobre o número de ouro

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

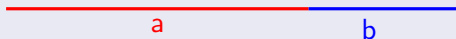
Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por Φ , então temos

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi};$$

Os números de Fibonacci

Ainda sobre o número de ouro

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por Φ , então temos

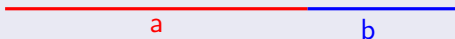
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi};$$

ou seja, $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$,

Os números de Fibonacci

Ainda sobre o número de ouro

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por Φ , então temos

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi};$$

ou seja, $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, o que implica $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a única raiz positiva).

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

Os números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Exercício

Determinar a soma dos n primeiros números de Fibonacci com índice par e com índice ímpar.

Os números de Fibonacci

Uma variação

Dependendo do contexto, considera-se por vezes a mesma sucessão aumentada pelo termo inicial 0, ou seja, os números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots;$$

Uma variação

Dependendo do contexto, considera-se por vezes a mesma sucessão aumentada pelo termo inicial 0, ou seja, os números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots;$$

isto é, a sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida pelas equações

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{para } n \geq 2).$$

Os números de Fibonacci

Uma variação

Dependendo do contexto, considera-se por vezes a mesma sucessão aumentada pelo termo inicial 0, ou seja, os números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots;$$

isto é, a sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida pelas equações

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{para } n \geq 2).$$

Resolvendo estas equações, obtém-se a fórmula fechada

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas^a definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

^aFrançois Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), matemático francês.

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n .

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n . Então,

$$F_{n+1} + F_{n-1} =$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n . Então,

$$F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} =$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n . Então,

$$F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} = L_{n-1} +$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n . Então,

$$F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} = L_{n-1} + L_{n-2} =$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Para cada $n \geq 1$: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

De facto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Seja agora $n \geq 3$ e suponha que a afirmação é verdadeira para cada índice menor do que n . Então,

$$F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} = L_{n-1} + L_{n-2} = L_n.$$

Os números de Lucas

Exemplo

Agora consideramos os números de Lucas definidos por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

e $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Assim:

Lucas:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
Fibonacci:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Nota

Resolvendo estas equações, obtém-se a fórmula fechada

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Os números de Stirling de 1ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de primeira espécie** é o número

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

de permutações de n elementos com exatamente k ciclos disjuntos.

James Stirling, 1692 – 1770, matemático escocês.

Os números de Stirling de 1ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de primeira espécie** é o número

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

de permutações de n elementos com exatamente k ciclos disjuntos.

Exemplos

- $\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$ e $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$ para $n > 0$.

Os números de Stirling de 1ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de primeira espécie** é o número

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

de permutações de n elementos com exatamente k ciclos disjuntos.

Exemplos

- $\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$ e $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$ para $n > 0$.
- $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ para $k > n$.

Os números de Stirling de 1ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de primeira espécie** é o número

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

de permutações de n elementos com exatamente k ciclos disjuntos.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ para $n > 0$.
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ para $k > n$.
- $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$[1] \circ [2] \circ \cdots \circ [n]$$

Os números de Stirling de 1ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de primeira espécie** é o número

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

de permutações de n elementos com exatamente k ciclos disjuntos.

Exemplos

- $\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$ e $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$ para $n > 0$.
- $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ para $k > n$.
- $\left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!$.

Os números de Stirling de 1ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

- Já observamos: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

- Já observamos: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

- Nota: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 0 + 2 + 3 + 1 = 6 = 3!$.

Os números de Stirling de 1ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

- Já observamos: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

- Nota: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 0 + 2 + 3 + 1 = 6 = 3!$.

Mais regras

Os números de Stirling de 1ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

- Já observamos: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

- Nota: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 0 + 2 + 3 + 1 = 6 = 3!$.

Mais regras

- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$, para cada $n \geq 1$.

(Fixar 1 e permutar os restantes números.)

Os números de Stirling de 1ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$.

$$[1, 2, 3], \quad [1, 3, 2].$$

- $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$.

$$[1] \circ [2, 3], \quad [2] \circ [1, 3], \quad [3] \circ [1, 2].$$

- Já observamos: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

- Nota: $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 0 + 2 + 3 + 1 = 6 = 3!$.

Mais regras

- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$, para cada $n \geq 1$.

(Fixar 1 e permutar os restantes números.)

- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2}$, para cada $n \geq 1$.

(Escolher os dois elementos do ciclo de comprimento 2.)

Os números de Stirling de 1ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Os números de Stirling de 1ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Ideia:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= |\{\pi \in S_n \mid \pi \text{ é produto de } k \text{ ciclos, um destes é } [n]\}| \\ &\quad + |\{\pi \in S_n \mid \pi \text{ é produto de } k \text{ ciclos, nenhum destes é } [n]\}| \\ &= |\{\pi \in S_{n-1} \mid \pi \text{ é produto de } k-1 \text{ ciclos}\}| \\ &\quad + \quad ??? \text{ TPC } ???. \end{aligned}$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de segunda espécie** é o número

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

de partições de um conjunto de n elementos em k classes de equivalência (subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos).

James Stirling, 1692 – 1770, matemático escocês.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de segunda espécie** é o número

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

de partições de um conjunto de n elementos em k classes de equivalência (subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos).

Exemplos

- $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ para $n > 0$.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de segunda espécie** é o número

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

de partições de um conjunto de n elementos em k classes de equivalência (subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos).

Exemplos

- $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ para $n > 0$.
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ para $k > n$.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Definição

Para $k, n \in \mathbb{N}$, o **número de Stirling de segunda espécie** é o número

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

de partições de um conjunto de n elementos em k classes de equivalência (subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos).

Exemplos

- $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ para $n > 0$.
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ para $k > n$.
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

A única partição com n elementos:

$$\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}.$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
- Já observamos: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
- Já observamos: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

Mais regras

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
- Já observamos: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

Mais regras

- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, para cada $n \geq 1$.
($\{\{1, 2, \dots, n\}\}$ é a única tal partição)

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
- Já observamos: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

Mais regras

- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, para cada $n \geq 1$.
($\{\{1, 2, \dots, n\}\}$ é a única tal partição)
- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$, para cada $n \geq 1$.
(Escolher os dois elementos da classe de equivalência de cardinalidade 2.)

Os números de Stirling de 2ª espécie

Exemplo

Consideramos $n = 3$. Portanto:

- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$: $\{\{1, 2, 3\}\}$.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
- Já observamos: $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

Mais regras

- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, para cada $n \geq 1$.
($\{\{1, 2, \dots, n\}\}$ é a única tal partição)
- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$, para cada $n \geq 1$.
(Escolher os dois elementos da classe de equivalência de cardinalidade 2.)
- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$, para cada $n \geq 1$.
(O número de subconjuntos não-vazios de $\{1, 2, \dots, n-1\}$.)

Os números de Stirling de 2ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ideia:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ideia:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \in \mathcal{P}\}| \\ + |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \notin \mathcal{P}\}|$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ideia:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \in \mathcal{P}\}| \\ &\quad + |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \notin \mathcal{P}\}| \\ &= |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n-1\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k-1\}| \\ &\quad + k |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n-1\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k\}| \end{aligned}$$

Os números de Stirling de 2ª espécie

Uma equação de recorrência

Para todos os $n, k \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ideia:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \in \mathcal{P}\}| \\ &\quad + |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k \text{ e } \{n\} \notin \mathcal{P}\}| \\ &= |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n-1\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k-1\}| \\ &\quad + k |\{\text{partições } \mathcal{P} \text{ de } \{1, \dots, n-1\} \text{ com } |\mathcal{P}| = k\}| \\ &= \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Exemplo

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k.$$

Aqui: $(z)_n = z(z-1) \cdots (z-n+1)$, em particular $(z)_0 = 1$.

Exemplo

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k.$$

Aqui: $(z)_n = z(z-1) \cdots (z-n+1)$, em particular $(z)_0 = 1$.

Caso 1: $(x \in \mathbb{N})$. Recordamos que x^n é o número de funções

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, x\}.$$

Exemplo

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k.$$

Aqui: $(z)_n = z(z-1) \cdots (z-n+1)$, em particular $(z)_0 = 1$.

Caso 1: ($x \in \mathbb{N}$). Recordamos que x^n é o número de funções

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, x\}.$$

Portanto:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \{\text{tais funções } f \text{ com } |\text{im}(f)| = k\}.$$

Exemplo

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k.$$

Aqui: $(z)_n = z(z-1) \cdots (z-n+1)$, em particular $(z)_0 = 1$.

Caso 1: ($x \in \mathbb{N}$). Recordamos que x^n é o número de funções

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, x\}.$$

Portanto:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \{\text{tais funções } f \text{ com } |\text{im}(f)| = k\}.$$

Quantas funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ existem?

Exemplo

As funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ correspondem a seguinte:

Exemplo

As funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ correspondem a seguinte:

- Identificar os elementos com a mesma imagem; ou seja, “dividir $\{1, 2, \dots, n\}$ em k partes disjuntas e não-vazias” (por definição, temos $\binom{n}{k}$ possibilidades).

Exemplo

As funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ correspondem a seguinte:

- Identificar os elementos com a mesma imagem; ou seja, “dividir $\{1, 2, \dots, n\}$ em k partes disjuntas e não-vazias” (por definição, temos $\binom{n}{k}$ possibilidades).
- Escolher, para cada parte, a imagem em $\{1, \dots, x\}$ (temos $(x)_k$ possibilidades).

Exemplo

As funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ correspondem a seguinte:

- Identificar os elementos com a mesma imagem; ou seja, “dividir $\{1, 2, \dots, n\}$ em k partes disjuntas e não-vazias” (por definição, temos $\binom{n}{k}$ possibilidades).
- Escolher, para cada parte, a imagem em $\{1, \dots, x\}$ (temos $(x)_k$ possibilidades).

Portanto, há $\binom{n}{k}(x)_k$ funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$,

Exemplo

As funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$ correspondem a seguinte:

- Identificar os elementos com a mesma imagem; ou seja, “dividir $\{1, 2, \dots, n\}$ em k partes disjuntas e não-vazias” (por definição, temos $\binom{n}{k}$ possibilidades).
- Escolher, para cada parte, a imagem em $\{1, \dots, x\}$ (temos $(x)_k$ possibilidades).

Portanto, há $\binom{n}{k}(x)_k$ funções $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ com $|\text{im}(f)| = k$, e por isso

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k$$

para cada $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Caso 2: $(x \in \mathbb{R})$. O polinómio

$$p = x^n - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$$

tem um número de raízes;

Exemplo

Caso 2: $(x \in \mathbb{R})$. O polinómio

$$p = x^n - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$$

tem um número infinito de raízes;

Exemplo

Caso 2: $(x \in \mathbb{R})$. O polinómio

$$p = x^n - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$$

tem um número infinito de raízes; portanto, $p = 0$.

Exemplo

Caso 2: $(x \in \mathbb{R})$. O polinómio

$$p = x^n - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$$

tem um número infinito de raízes; portanto, $p = 0$. Logo,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.