Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

EA1 - Lógica, Conjuntos e Relações

Estudo autónomo para resolver na aula de 15-03-2018

1. Sendo p e q proposições, justifique a validade das seguintes fórmulas conhecidas como leis da absorção:

   (a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$; (b) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.

2. Seja a fórmula $p\,|\,q$ envolvendo o operador $|$ e interpretada pela seguinte tabela de verdade:

p	q	$p\,\vert\,q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Utilizando apenas os operadores lógicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, encontre fórmulas envolvendo p e q que sejam logicamente equivalentes a

   (a) $p\,|\,(p\,|\,q)$; (b) $(p\,|\,q)\,|\,(p\,|\,q)$.

3. A fórmula seguinte é uma tautologia ou é inconsistente?

$$[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow [\neg(p \wedge q)]$$

   Justifique a sua resposta usando as leis da lógica, ou seja, sem recorrer a tabelas de verdade.

4. Numa rede de comunicações operam quatro servidores A, B, C e D. Traduza em linguagem formal em termos de proposições atómicas a, b, c e d as seguintes afirmações começando por dizer a que correspondem estas designações:

   (a) Se A está ligado então B e C também estão.

   (b) C está ligado só se A e B estão desligados.

   (c) D está ligado se e só se C está ligado e A não está.

   (d) C está ligado caso D não esteja, mas se D está ligado então B não está.

   (e) Uma condição necessária para que A esteja ligado é que B e C não estejam ligados quando D estiver.

5. Na caça a um tesouro foram encontradas três arcas, sendo que apenas uma delas contém o tesouro estando as outras duas vazias. Nas arcas estão impressas as seguintes pistas:

   Arca 1: "O tesouro não está aqui."
   Arca 2: "O tesouro não está aqui."
   Arca 3: "O tesouro está na Arca 2."

   Sabendo que apenas uma das pistas é verdadeira, sendo as outras duas falsas, qual das arcas contém o tesouro?

   Formalize o puzzle da caça ao tesouro usando a lógica proposicional e encontre a solução construindo uma tabela de verdade adequada.

6. Classifique a relação
$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 5\}$$
quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

7. Seja $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$, com
$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + r\},$$
uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Prove que $\mathcal{A}$ é uma partição de $\mathbb{R}^2$ e descreva-a geometricamente.
   (b) Defina a relação de equivalência induzida pela partição $\mathcal{A}$.

8. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h = g \circ f$. Mostre que:
   (a) Se f e g são injetivas, então h é injetiva.
   (b) Se h é injetiva, então f é injetiva.
   (c) Se f e g são sobrejetivas, então h é sobrejetiva.
   (d) Se h é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

9. Tome o conjunto $\mathbb{N}$ como domínio e considere os seguintes predicados:
   $P(m, n) \equiv$ "$m \mid n$ (m divide n)";
   $Q(m, n) \equiv$ "$m < n$ ".
   Diga, justificando, qual o valor lógico das seguintes fórmulas:
   (a) $P(2, 4) \Rightarrow P(4, 5)$;
   (b) $\exists m \forall n P(m, n)$;
   (c) $\exists n \forall m Q(m, n)$;
   (d) $(\forall n \exists m P(m, n)) \Rightarrow (\exists m \forall n Q(m, n))$;
   (e) $(\forall m \exists n Q(m, n)) \Rightarrow (\forall m \exists n P(m, n))$.

10. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ como domínio e definam-se os seguintes predicados:
    $P(n)$: "n é par ";
    $Primo(p)$: "p é primo".
    Usando a lógica de primeira ordem (LPO) com os predicados acima definidos, as operações $+$ (soma) como símbolo de função binária, $>$ (maior que) como predicado de aridade dois e *2* como constante, traduza os factos:
    (a) F: *Cada número primo é ímpar ou é igual a 2*;
    (b) G: *Todo o número par maior que 2 pode ser obtido como a soma de dois números primos.*
    (c) H: *Existe um número primo que é maior que todos os outros.*
    (d) Obtenha na LPO uma fórmula bem formada que exprima a negação de G.

Apoio ao estudo autónomo (bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Matemática Discreta: Comb., Teoria dos Grafos e Algoritmos, *D. Cardoso, J.S., M.R.*, 2011.
- Tópicos de Matemática Discreta, *José S. Pinto*, Universidade de Aveiro, 1999.
- Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa, *A.J.Neves, M.P.Carvalho*, MD 2016/2017.
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.