Elementos de Física

2018 – 2019

Grupo IIIB Aulas: TP8 – TP9

Bibliografia:
Serway, caps. 16 e 17

Capítulo 4: Interferência de Ondas

Tópicos:

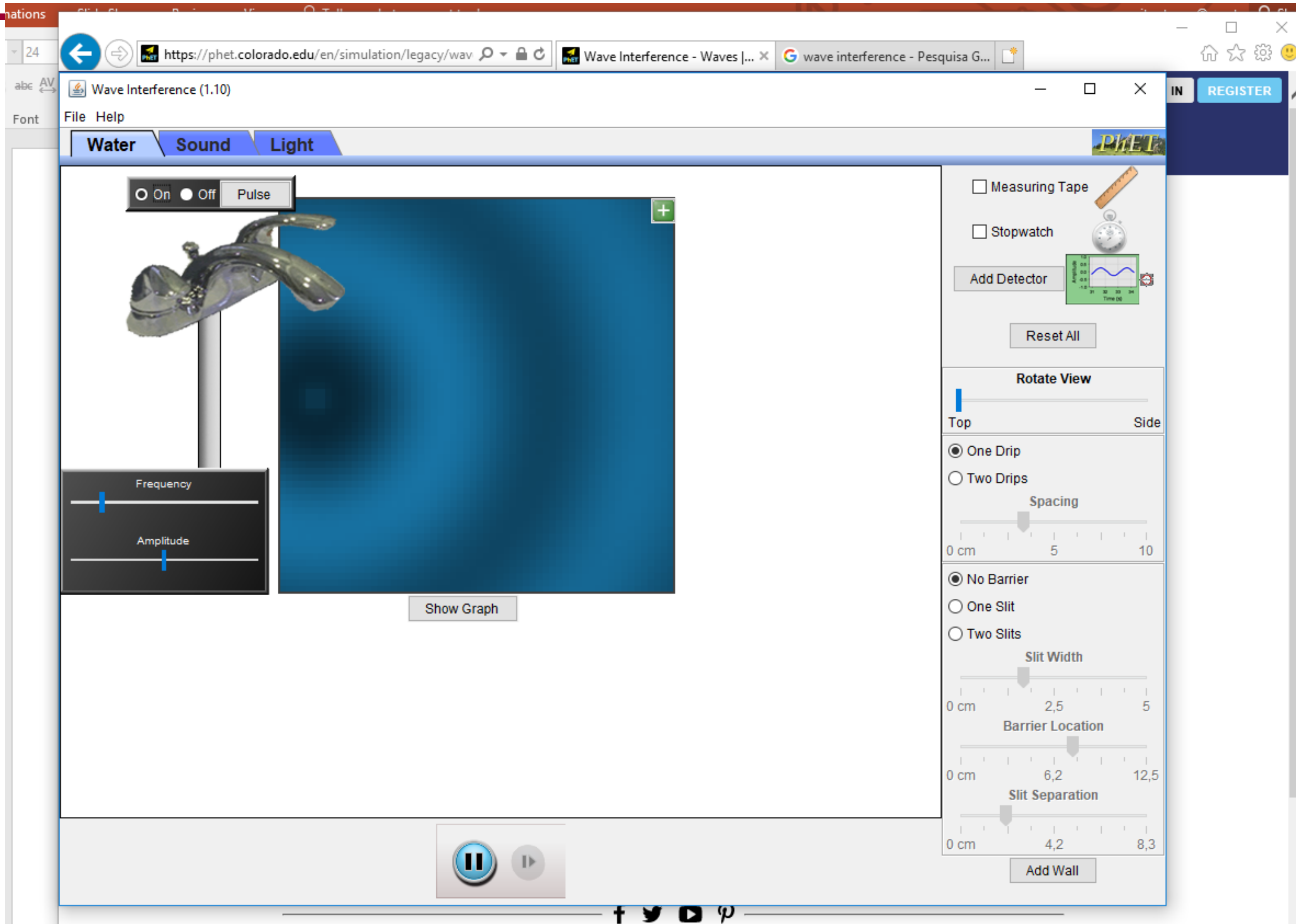
Sobreposição e interferência de ondas harmónicas

Ondas estacionárias

Batimentos (interferência no tempo)

Capítulo 4: Interferência de Ondas

Capítulo 4: Interferência de Ondas



https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/wave-interference

Sobreposição e interferência

Uma característica importante do movimento ondulatório ocorre quando duas ou mais ondas coincidem no espaço e no tempo, verificando-se então o fenómeno de interferência.

Princípio de sobreposição:

Se duas ou mais ondas passam na mesma região do espaço, no mesmo tempo, a função de onda resultante é, em qualquer ponto, a soma algébrica das funções de onda individuais .

Sobreposição e interferência

Considere-se duas ondas harmónicas progressivas, que se propagam da esquerda para a direita, tendo:

- a mesma amplitude, A,
- a mesma constante de propagação, k,
- a mesma frequência f,
- o mesmo comprimento de onda λ
- mas desfasadas entre si de φ

$$y_1(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx)$$

$$y_2(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx + \varphi)$$

Sobreposição e interferência

De acordo com o **princípio de sobreposição** a onda resultante na região do espaço e tempo onde coincidem as duas primeiras, será obtida pela sua adição algébrica:

$y\,(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$
$= A\,[\text{sen}\,(\omega t - kx) + \text{sen}\,(\omega t - kx + \varphi)\,]$

Como sen a + sen b = 2 cos (a-b)/2 sen (a+b)/2, tem-se:

$$y(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] sen\left[\omega t - kx + \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Sobreposição e interferência

Tal como as ondas iniciais a onda resultante

- é harmónica
- tem o mesmo comprimento de onda λ
- a mesma constante de propagação, k,
- a mesma frequência f,

Contudo, difere das ondas iniciais por apresentar

- uma diferença de fase de **$\varphi/2$**
- uma nova amplitude **$A' = 2A \cos \varphi/2$**

Sobreposição e interferência

Ocorre **interferência totalmente construtiva**

sempre que $$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$$

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right) = n\pi$$

$$\varphi = 0, 2\pi, \ldots, 2n\pi$$

Ocorre **interferência totalmente destrutiva**

sempre que $$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

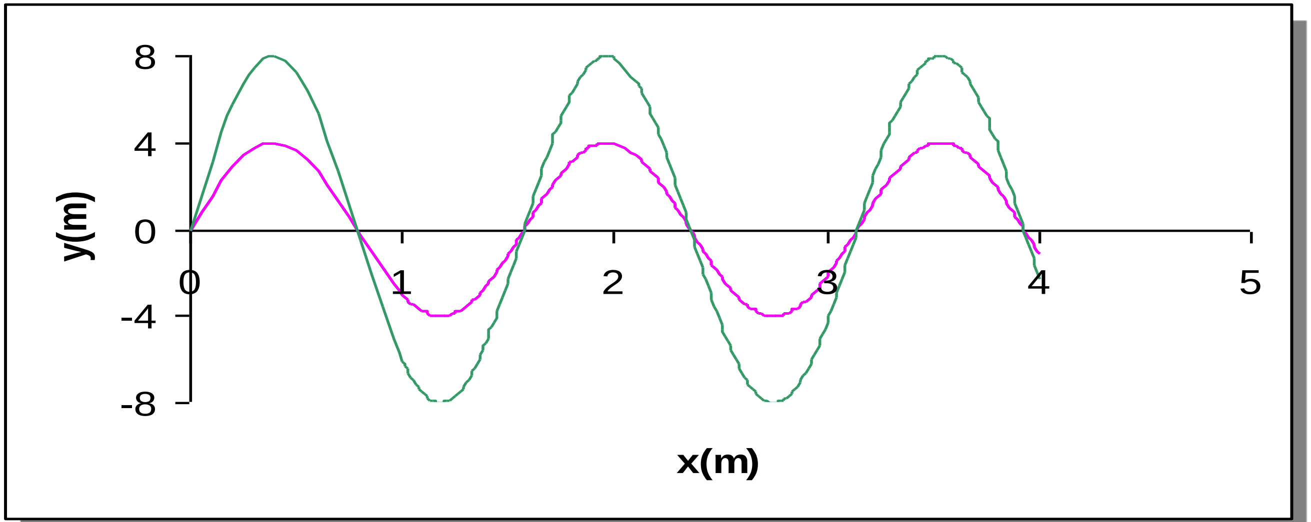
$$\varphi = \pi, 3\pi, \ldots, (2n+1)\pi$$

Sobreposição e interferência

Interferência totalmente construtiva:

$\varphi = 0$, logo $\cos(\varphi/2) = 1$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\text{sen}\left[kx - \omega t\right]$$

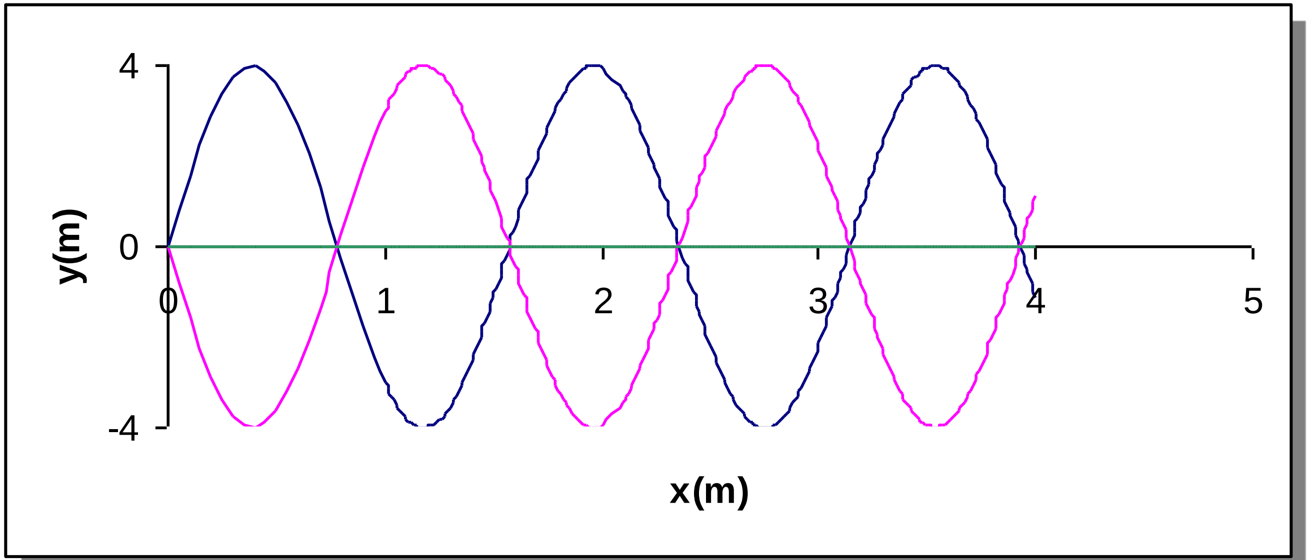


Sobreposição e interferência

Interferência totalmente destrutiva:

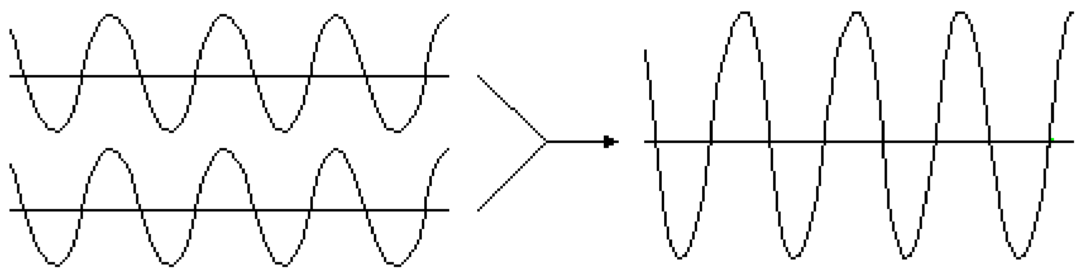
$\varphi = \pi$, logo $\cos(\varphi/2) = 0$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0$$

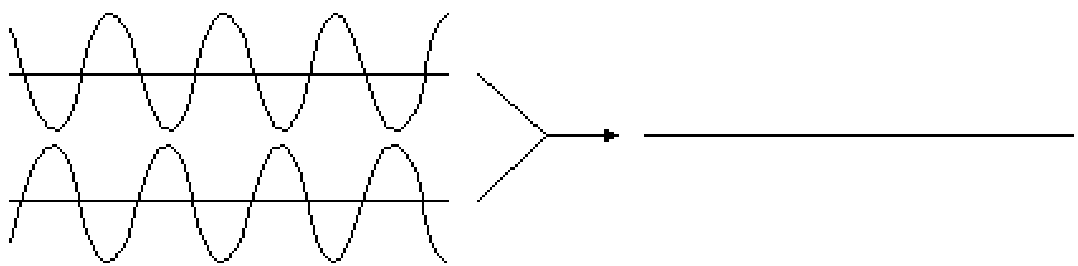


Sobreposição e interferência

Interferência Construtiva



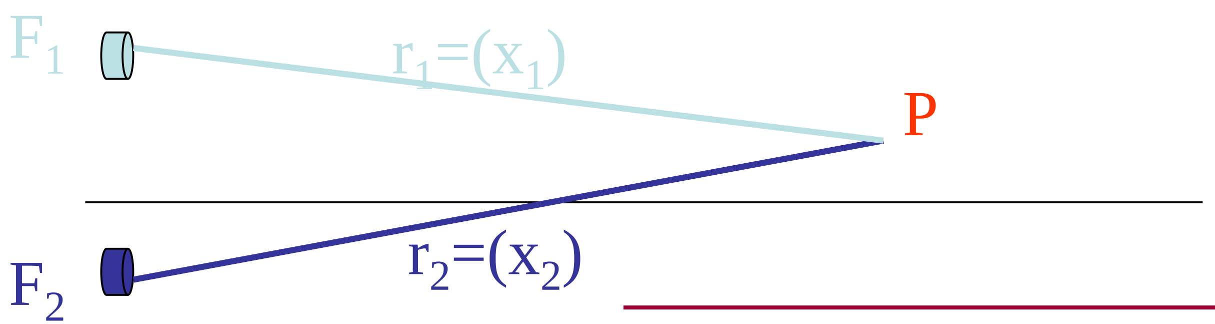
Interferência Destrutiva



Sobreposição e interferência

O desfasamento entre duas ondas é muitas vezes de **origem espacial**, ou seja, deriva do facto de as ondas terem diferentes percursos entre as fontes e o ponto de interferência.

Considere-se duas fontes F1 e F2 que mantêm uma diferença de fase constante (fontes coerentes), emitindo ondas harmónicas com a mesma amplitude e frequência.



Sobreposição e interferência

Após diferentes percursos r_1 (= x_1) e r_2 (=x_2), as ondas no ponto P são:

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx_1)$$

$$y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx_2)$$

De acordo com o princípio de sobreposição, a onda resultante é:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) &= A[sen(\omega t - kx_1) + sen(\omega t - kx_2)] \\ &= 2A\cos\left(\frac{k(x_1 - x_2)}{2}\right) sen[\omega t - kx] \end{aligned}}$$

com $x \approx (x_1+x_2)/2$

Sobreposição e interferência

A diferença de fase φ entre as duas ondas é então

$$\varphi = (kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t) = k\,(x_1 - x_2) = k\,\Delta x$$

Verifica-se que a diferença de fase é proporcional à diferença de percurso.

Como $k = 2\pi / \lambda$, tem-se:

$$\boxed{\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Sobreposição e interferência

A interferência totalmente construtiva é dada pela condição:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = n\pi$$

$$\Delta x = \lambda, 2\lambda, \ldots n\lambda$$

ou seja, verifica-se se a diferença de percurso for igual a um <u>número inteiro de comprimentos de onda</u>

Sobreposição e interferência

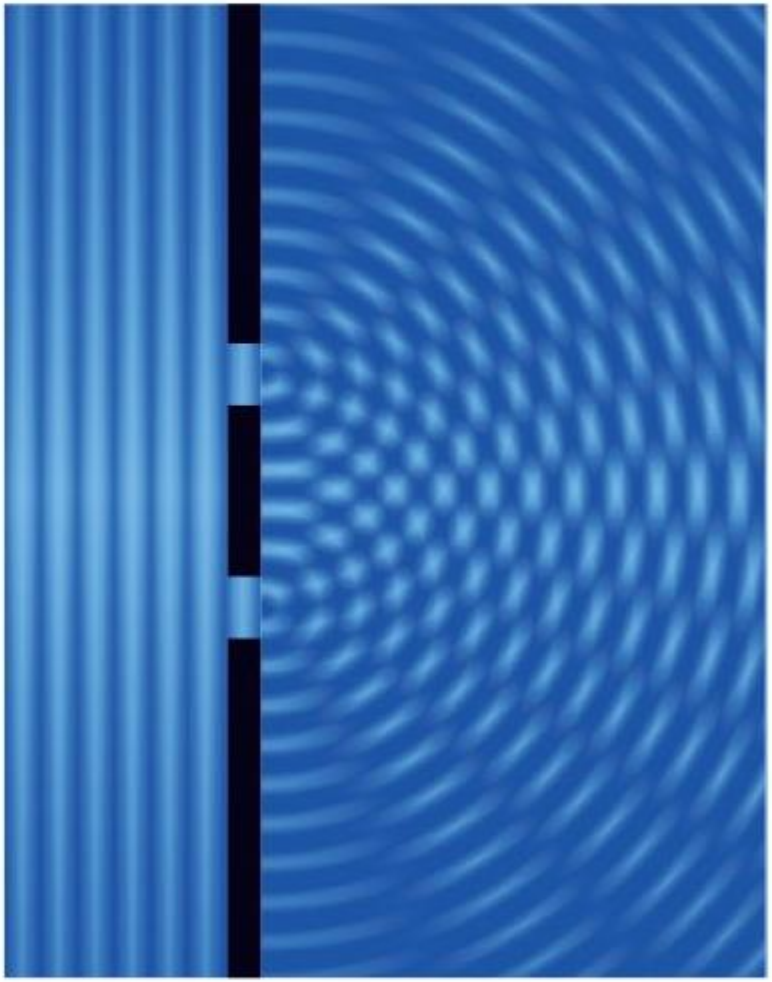
A interferência totalmente destrutiva é dada pela condição:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

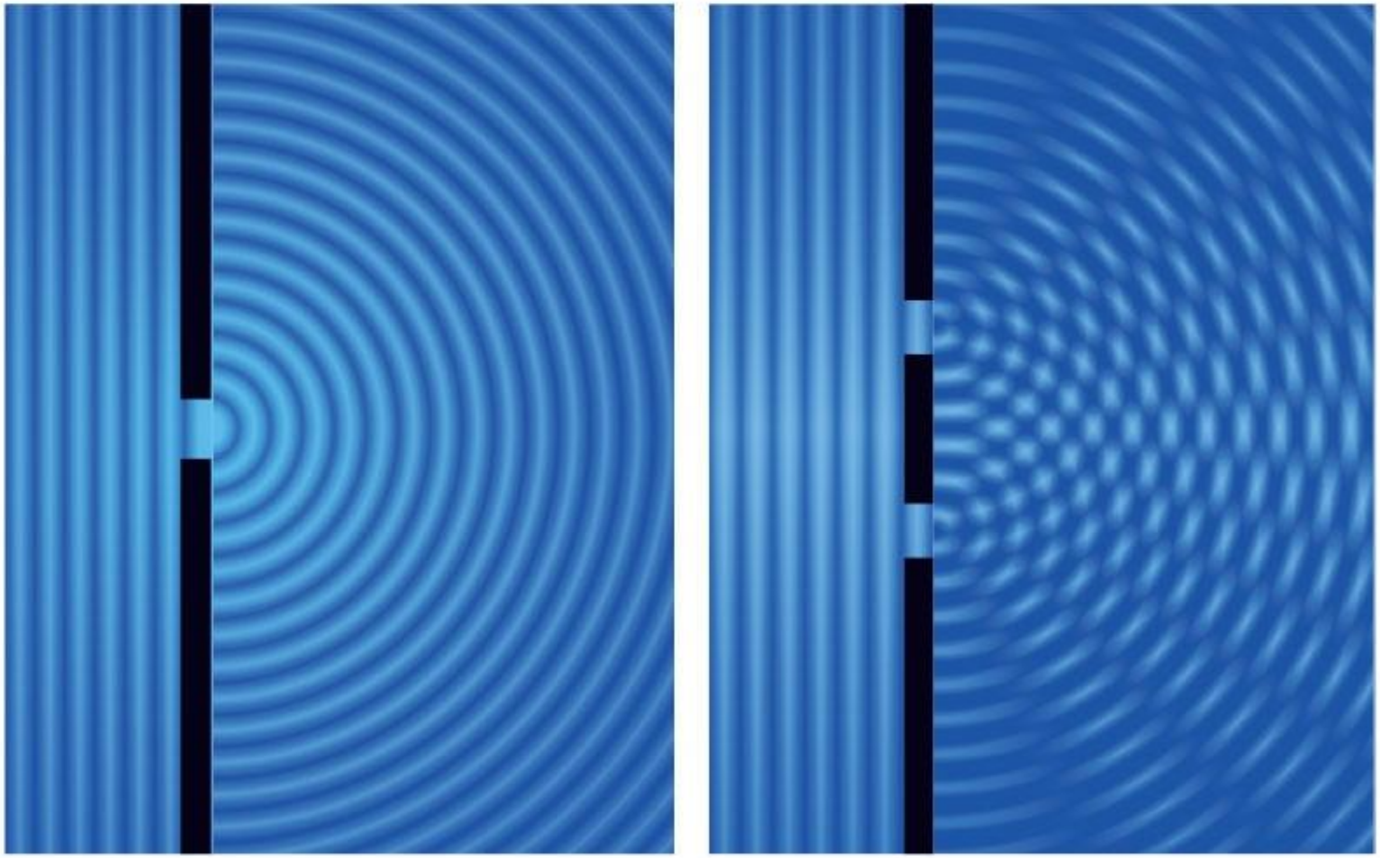
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots, (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

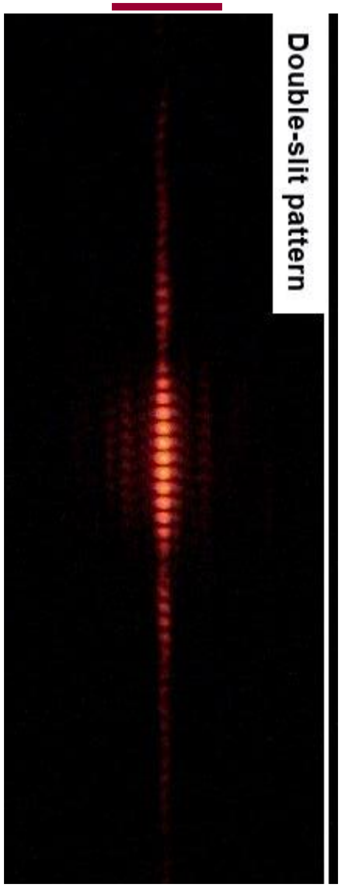
ou seja, verifica-se se a diferença de percurso for igual a um <u>número inteiro ímpar de metade do comprimento de onda</u>

Experiência de Young:
Sobreposição e interferência

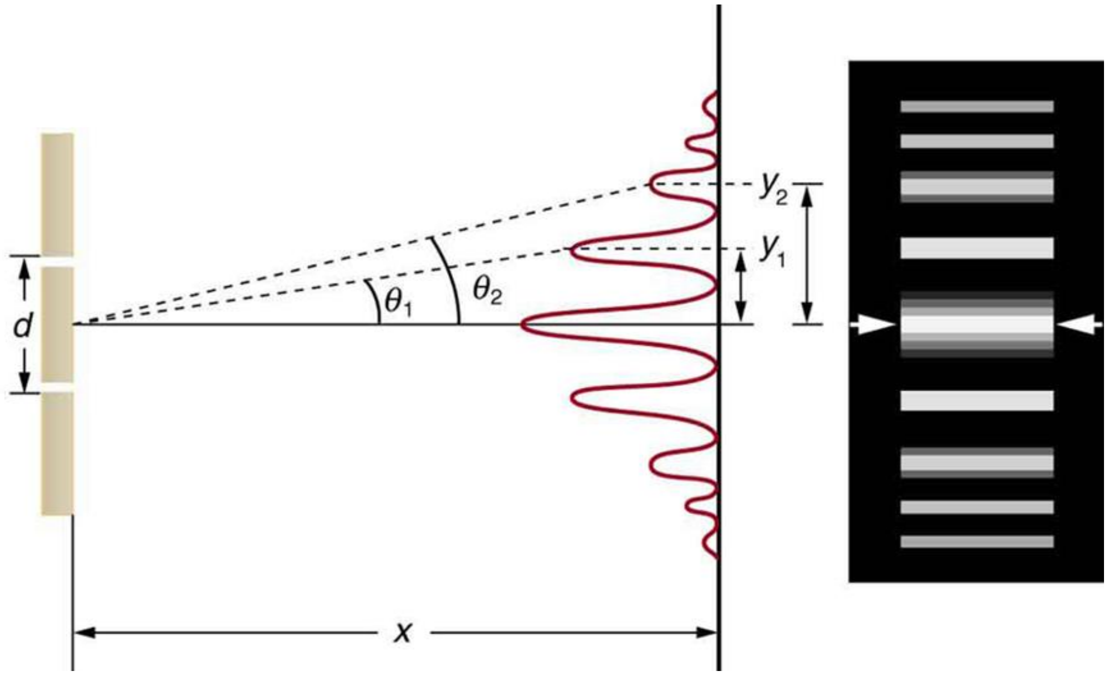


Experiência de Young:
Sobreposição e interferência



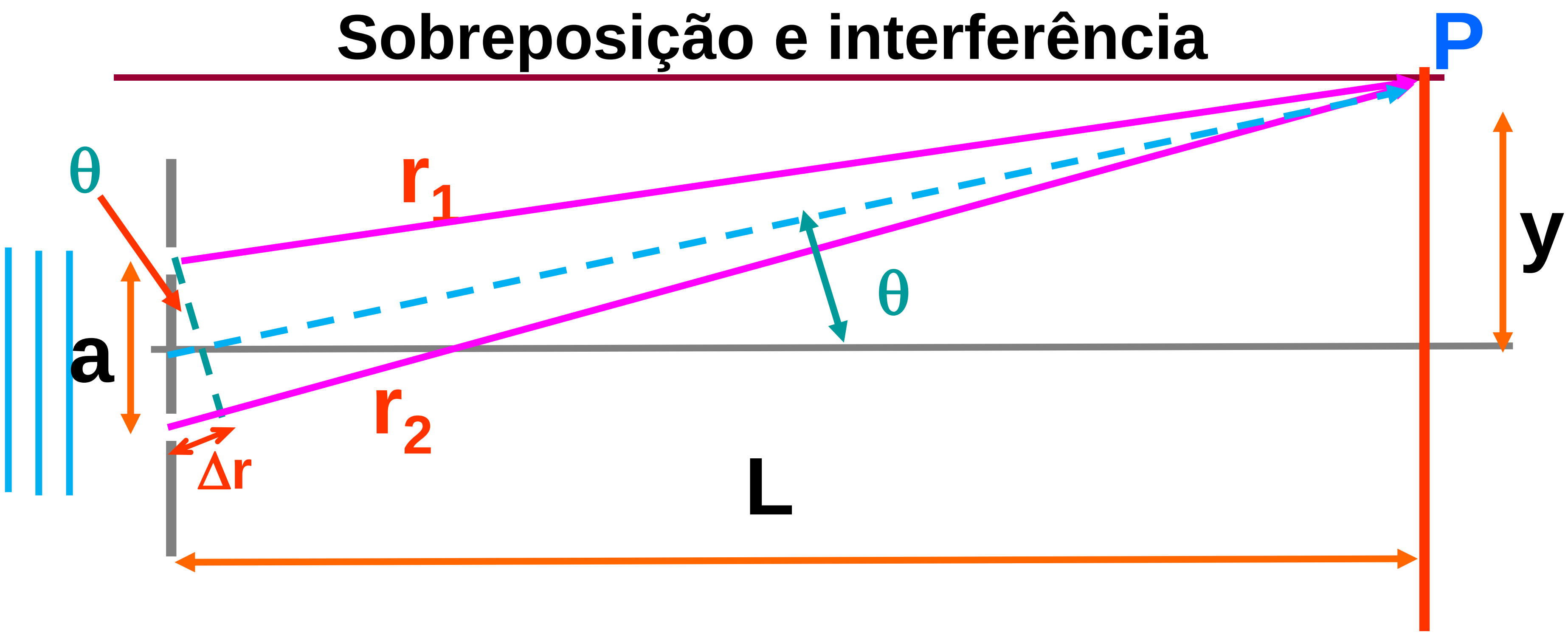


Experiência de Young:
Sobreposição e interferência



Experiência de Young:

Sobreposição e interferência



Sobreposição e interferência

Após diferentes percursos r_1 (= x_1) e r_2 (=x_2), as ondas no ponto P são:

$$y_1(r,t) = A \text{ sen } (\omega t - kr_1)$$

$$y_2(r,t) = A \text{ sen } (\omega t - kr_2)$$

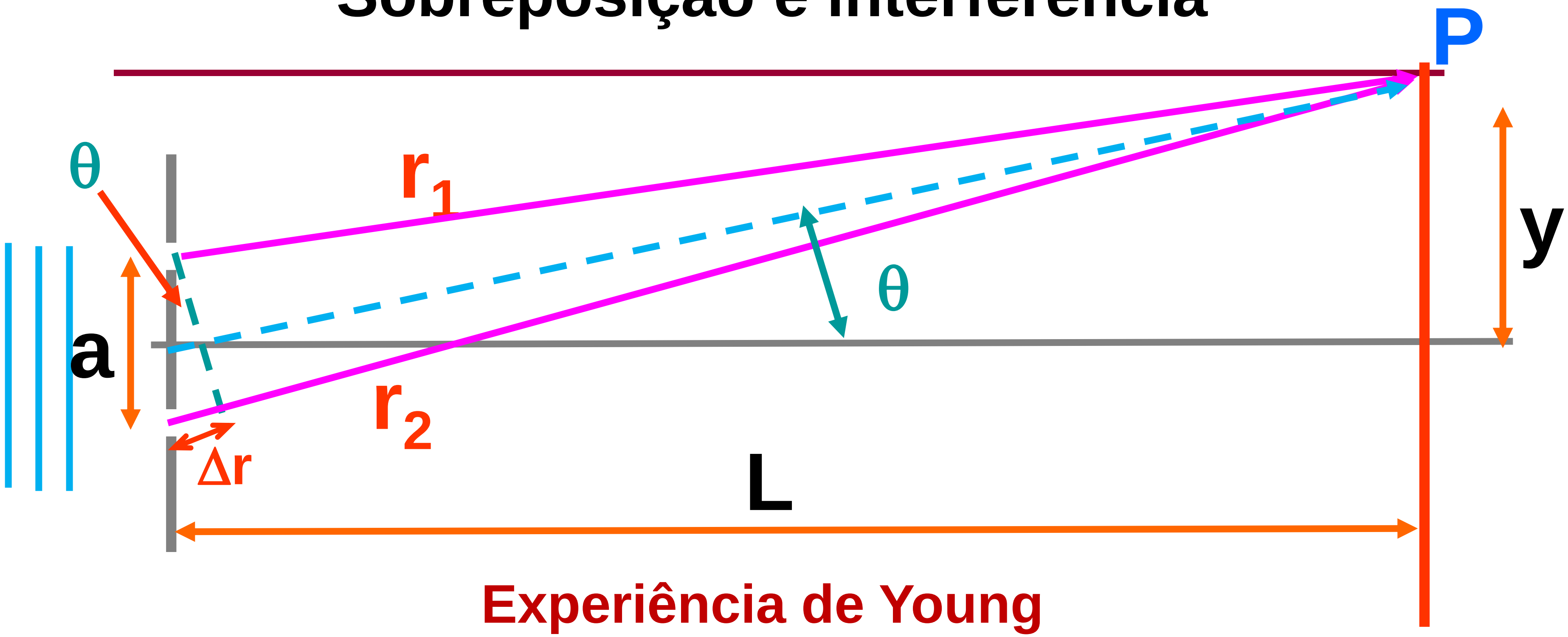
De acordo com o princípio de sobreposição, a onda resultante é:

$$y(r,t) = y_1(r,t) + y_2(r,t) = 2\,A\,\cos\frac{\varphi}{2}\,\text{sen}\left(kr - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{k(r_1 - r_2)}{2} = \frac{k\,\Delta r}{2} \qquad \Delta r = r_1 - r_2$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Sobreposição e interferência



Experiência de Young

$\Delta r = r_2 - r_1$; L>> a; $\Delta r \cong a \sin\theta$; $\sin\theta \cong y/L$

$$\Delta r \cong \mathrm{a}\frac{y}{L} \qquad \frac{\varphi}{2} = \frac{k\,\Delta r}{2} = \frac{k}{2}a\frac{y}{L} = \frac{1}{2}a\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{L}$$

Sobreposição e interferência

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{L}$$

Interferência construtiva: $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1$

$$\frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{L} = n\pi \quad \Rightarrow y = \frac{n\,\lambda\,L}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$$

Interferência destrutiva: $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$

$$\frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{L} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow y = \frac{(2n+1)\,\lambda\,L}{2a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$$

Sobreposição e interferência

Interferência construtiva:

$$\frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{L} = n\pi \quad \Rightarrow y = \frac{n\,\lambda\,L}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$$

n	0	1	2	3	…
y	0	$\frac{\lambda\,L}{a}$	$2\frac{\lambda\,L}{a}$	$3\frac{\lambda\,L}{a}$	…

Interferência destrutiva:

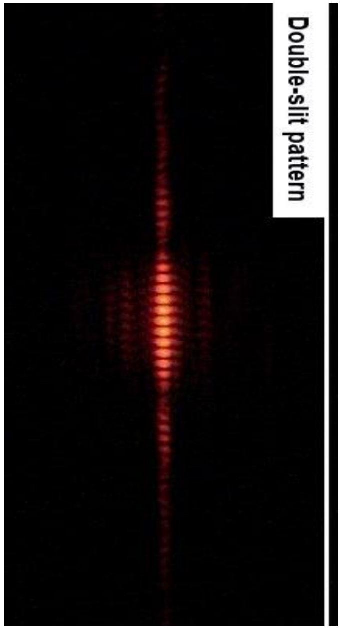
$$\frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{L} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow y = \frac{(2n+1)\,\lambda\,L}{2a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$$

n	0	1	2	3	…
y	$\frac{1}{2}\frac{\lambda\,L}{a}$	$\frac{3}{2}\frac{\lambda\,L}{a}$	$\frac{5}{2}\frac{\lambda\,L}{a}$	$\frac{7}{2}\frac{\lambda\,L}{a}$	…

Sobreposição e interferência

Interferência construtiva: $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1$

$$\frac{1}{2} a \frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{L} = n\pi \quad \Rightarrow y = \frac{n\,\lambda\,L}{a} \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$$



Problema:
Numa experiência de Young realizada com luz,
a separação entre as duas fendas é de 0.20mm e
o ecrã de observação está a uma distância de 1.0m.
A terceira franja brilhante (*n*=3) está a uma distância de 7.5mm da franja central.
Determine o comprimento de onda da luz utilizada.

Sobreposição e interferência

Problema

Numa experiência de Young realizada com luz, a separação entre as duas fendas é de 0.20 mm e o ecrã de observação está a uma distância de 1.0 m. A terceira franja brilhante (n=3) está a uma distância de 7.5 mm da franja central. Determine o comprimento de onda da luz utilizada.

Solução:

A posição da n-ésima franja brilhante é dada por $y = \frac{n\,\lambda\,L}{a}$

Com n = 3, L = 1.0m, y = 7.5mm e a = 0.20mm, obtém-se então λ = 500nm.

Problema 1:

Duas fontes sonoras excitadas em fase por um mesmo amplificador estão sobre o eixo dos *yy*, separadas por 2 m. Num ponto a grande distância das fontes percebe-se uma interferência construtiva sob o ângulo θ_1 = 8º e a seguinte sob o ângulo θ_2 =16º10’ em relação ao eixo dos *xx*. Considerando a velocidade do som igual a 340 m/s:

a) Qual é o comprimento de onda das ondas acústicas proveniente das duas fontes?

b) Qual é a frequência das fontes?

c) Sob que outros ângulos se percebe interferência construtiva?

d) Qual é o menor ângulo para o qual as ondas se cancelam mutuamente?

Problema 4:

É executada uma experiência de dupla fenda com luz de λ=589 nm. A distância entre a dupla fenda e o écran é de 2 m. Se o décimo mínimo de interferência se observar a uma distância de 7.26 mm do máximo central, determine o espaçamento entre as duas fendas.

Problema 5:

Uma dupla fenda é iluminada com luz laser de λ=600 nm. A separação entre fendas é de $a = 0.85$ mm e o écran dista 2.8 m das fendas.

a) Determine a diferença de fase entre as ondas que provêm de cada fenda, num ponto que dista 2.5 mm do pico de máxima intensidade.

b) Calcule a razão entre as intensidades observadas nesse ponto e o ponto de máxima intensidade

Ondas estacionárias

Quando se confina o movimento ondulatório a uma **região limitada do espaço**, como uma corda em que as extremidades estão fixas, um líquido num canal ou uma onda electromagnética numa cavidade, a interferência produz **ondas estacionárias**.

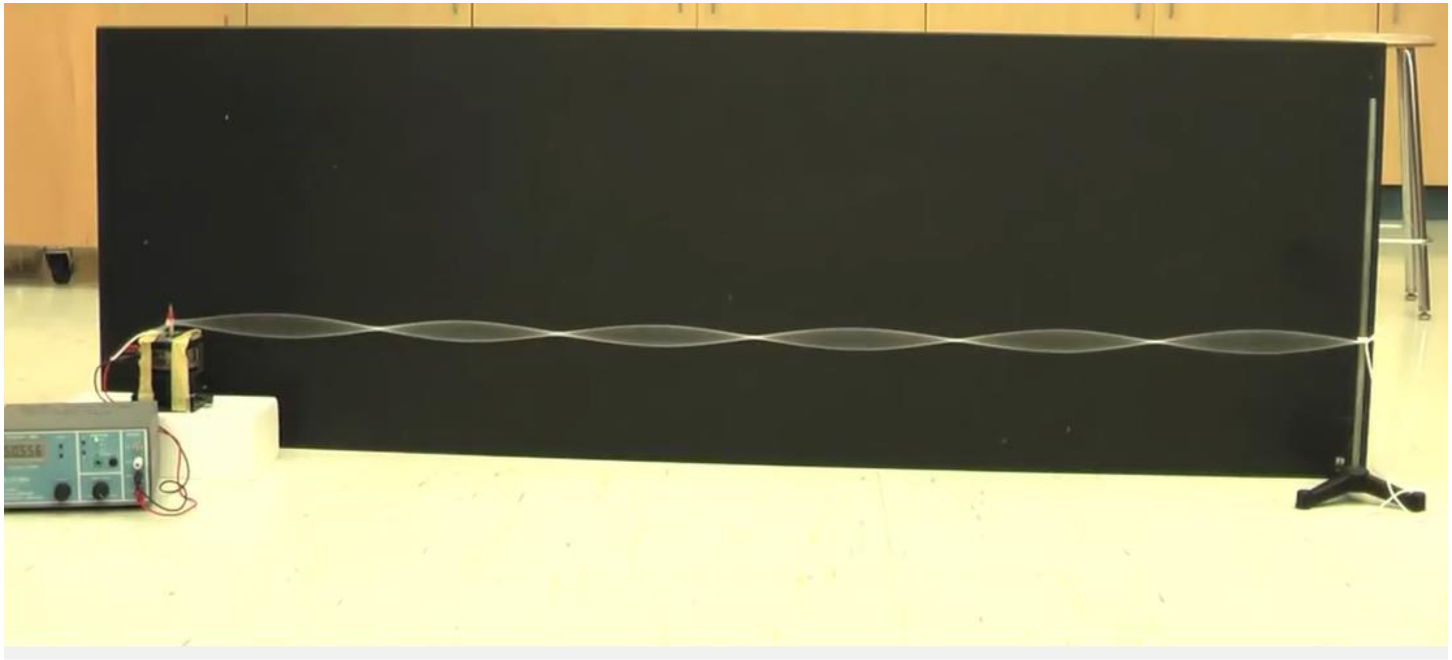
Este tipo de interferência é de grande interesse prático, ex.

-- Física atómica - quantificação dos níveis de energia;

-- Emissão laser;

-- Desenho de pontes, prédios, instrumentos musicais

Ondas estacionárias



https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0

Ondas estacionárias

Quando se confina o movimento ondulatório a uma **região limitada do espaço**, como uma corda em que as extremidades estão fixas, um líquido num canal ou uma onda electromagnética numa cavidade, a interferência produz **ondas estacionárias**.

Este tipo de interferência é de grande interesse prático, ex.

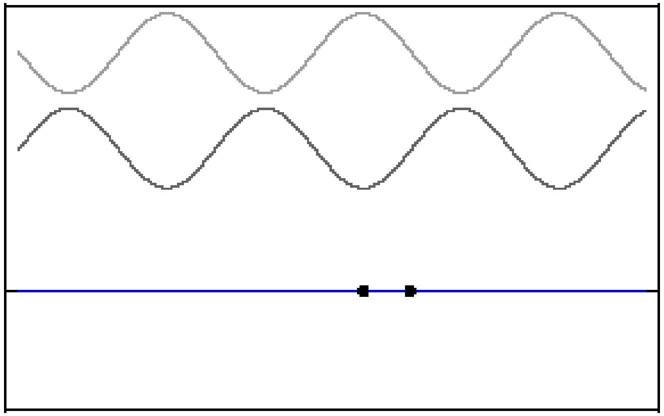
-- Física atómica - quantificação dos níveis de energia;

-- Emissão laser;

-- Desenho de pontes, prédios, instrumentos musicais

Ondas estacionárias

Duas ondas harmónicas que se propagam em sentidos opostos interferem de tal modo que há pontos que não se desviam da posição de equilíbrio - nodos - e outros que vibram com amplitude máxima – anti-nodos ou ventres.



A onda resultante não se propaga e chama-se onda estacionária

Ondas estacionárias

Ondas estacionárias numa corda

Considere-se a corda OX que tem a extremidade O fixa. Uma onda harmónica transversal incidente que se propaga para a esquerda, expressa por $y_1(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$, será reflectida em O, produzindo uma nova onda harmónica que se propaga para a direita e é expressa por $y_2(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$.

Ondas estacionárias

O deslocamento em qualquer ponto da corda é o resultado da sobreposição das duas ondas:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left[sen\left(kx + \omega t\right) + sen\left(kx - \omega t\right)\right]$$

$$y(x,t) = 2A sen(kx)\cos(\omega t)$$

As expressões ($kx \pm \omega t$) não aparecem na onda resultante e como tal ela não representa uma onda progressiva, mas sim uma onda estacionária. A amplitude varia com a posição e é dada por:

A’ = 2 A sen (kx)

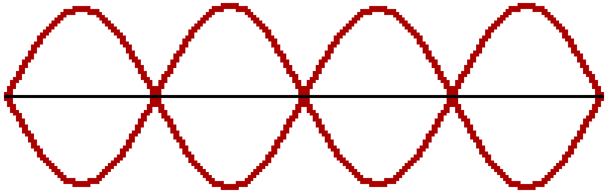
Ondas estacionárias

A amplitude $A' = 2A \text{ sen } (kx)$ é nula para $kx = n\pi$, onde n é inteiro. Como $k = 2\pi/\lambda$, tem-se:

$$\boxed{x = \frac{n\lambda}{2}}$$

Estes pontos designam-se por *nodos.*

Os nodos consecutivos estão separados de $\lambda/2$.



A standing wave pattern for a string

Ondas estacionárias

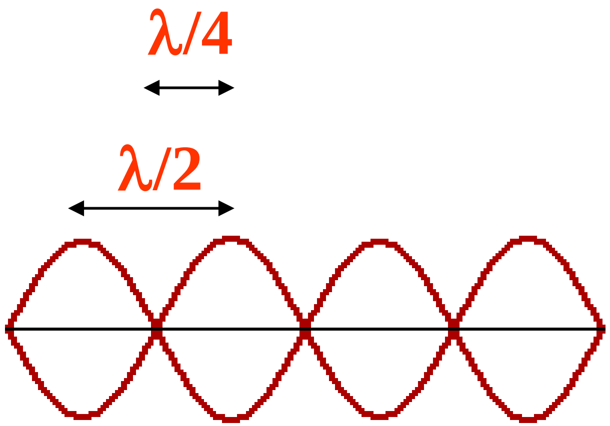
Os pontos de amplitude máxima – *anti-nodos* ou ventres - ocorrem quando |sen (kx)|=1; ou seja, para

kx = (2n+1) π/2

Como k = 2π/ λ, tem-se: $$\boxed{x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}}$$

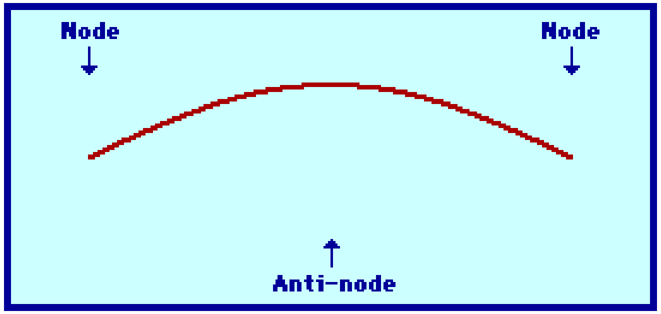
Ondas estacionárias

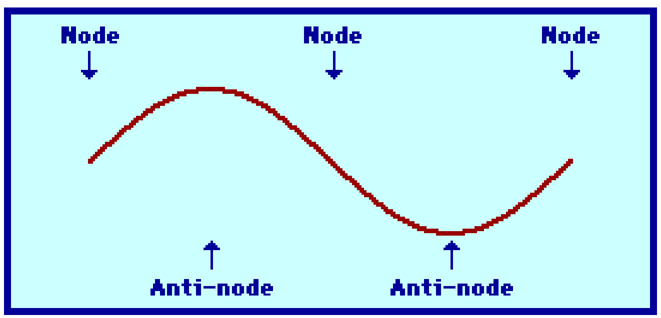
Note-se que anti-nodos (nodos) adjacentes estão separados de **λ/2** e que a distância entre um nodo e um antinodo é de **λ/4.**

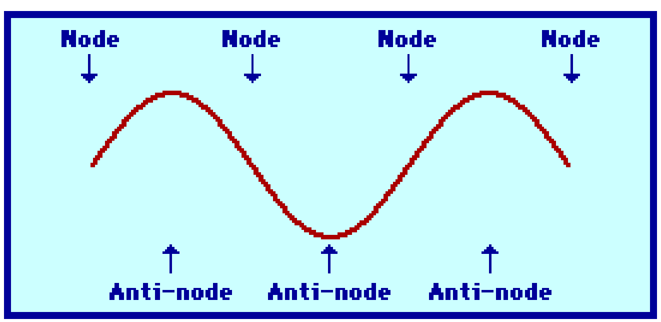


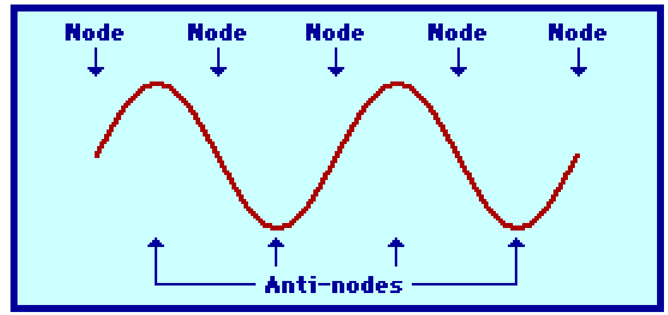
A standing wave pattern for a string

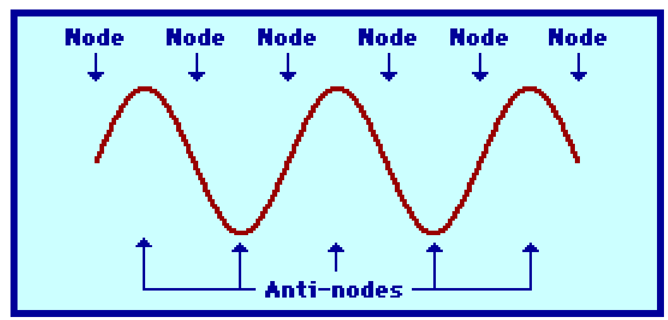
Ondas estacionárias











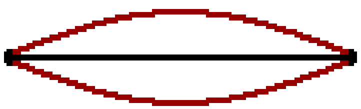
Ondas estacionárias

Exemplo 1: corda presa nas duas extremidades

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$ (L= comprimento da corda)

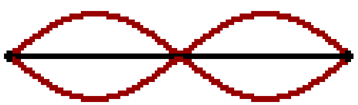
$$\lambda_n = 2L/n \qquad f_n = \frac{nv}{2L}$$

1st Harmonic



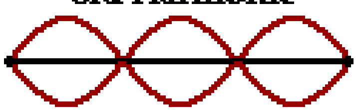
$$\longrightarrow \lambda_1 = 2L \longrightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$$

2nd Harmonic



$$\longrightarrow \lambda_2 = L \longrightarrow f_2 = \frac{v}{L}$$

3rd Harmonic



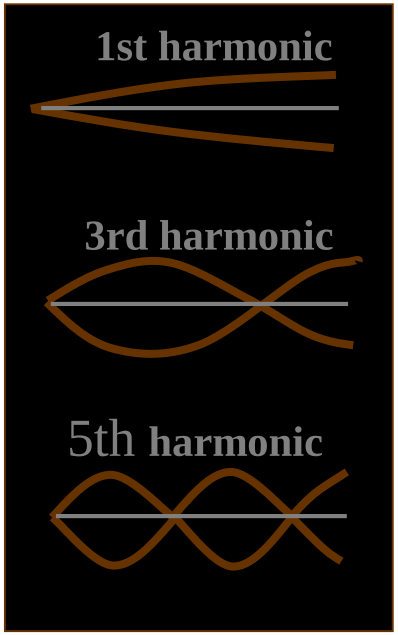
$$\longrightarrow \lambda_3 = 2L/3 \longrightarrow f_3 = \frac{3v}{2L}$$

Ondas estacionárias

Exemplo 2: corda com uma extremidade livre

L- comprimento da corda
Ponto x=L é um ventre

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1} \qquad f_{2n+1} = (2n+1)\frac{v}{4L}$$



$$\longrightarrow \lambda_1 = 4L \qquad \longrightarrow f_1 = \frac{v}{4L}$$

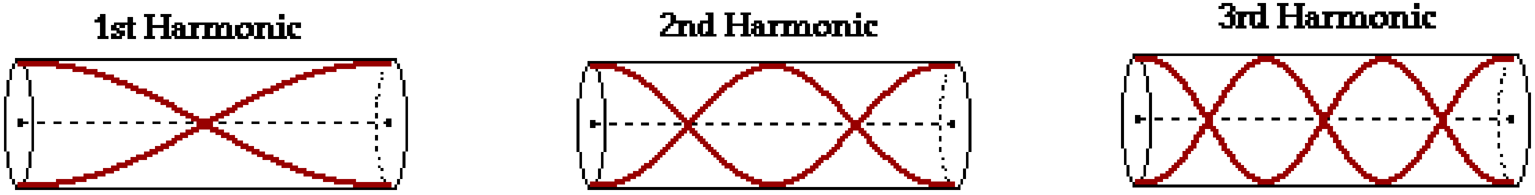
$$\longrightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{3} \qquad \longrightarrow f_3 = 3\frac{v}{4L}$$

$$\longrightarrow \lambda_5 = \frac{4L}{5} \qquad \longrightarrow f_5 = 5\frac{v}{4L}$$

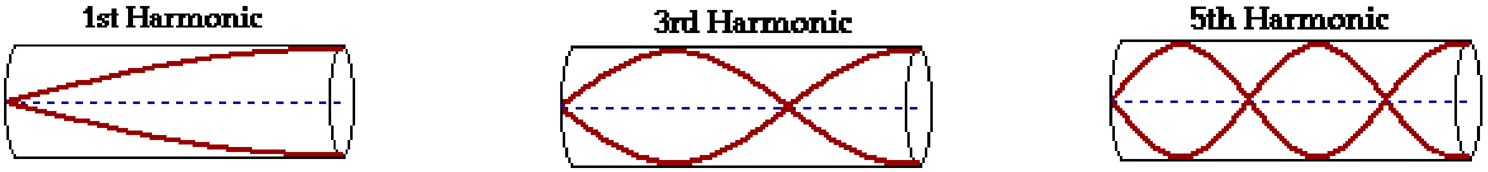
Ondas estacionárias

Exemplo 3: ondas sonoras estacionárias

Tubo aberto nas duas extremidades:



Tubo aberto em uma extremidade:



Ondas estacionárias

Exemplo

Num esforço para ter o nome no Guiness Book of World Records, alguém construiu uma viola em que as cordas apresentam um comprimento de 5.0m. Uma corda tem uma densidade linear de massa de 40.0 g/m e uma frequência fundamental de 20.0 Hz. Calcule a) a tensão desta corda e b) a frequência e o comprimento de onda do segundo harmónico.

Solução:

Tem-se $f_1 = \frac{v}{2L}$ e $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

a) Considerando ρ = 40.0 g/m, f_1 = 20.0 Hz e L = 5.0 m, obtém-se T = 1600 N

b) Tem-se $f_2 = \frac{v}{L} = 2 f_1 = 40.0 Hz$ $\lambda_2 = L = 5.00 m$

Problema 8:

Uma corda de 3,0 m de comprimento está fixa pelas duas extremidades. A corda ressoa no segundo harmónico com a frequência de 60 Hz. Qual é a velocidade das ondas transversais na corda?

Problema 10:

A função de onda estacionária numa corda fixa nas duas extremidade é dada por

$$y(x,t) = 0{,}5\ \mathrm{sen}(0{,}025\ x)\ \cos(500\ t),$$

onde y e x estão em cm e t em s.

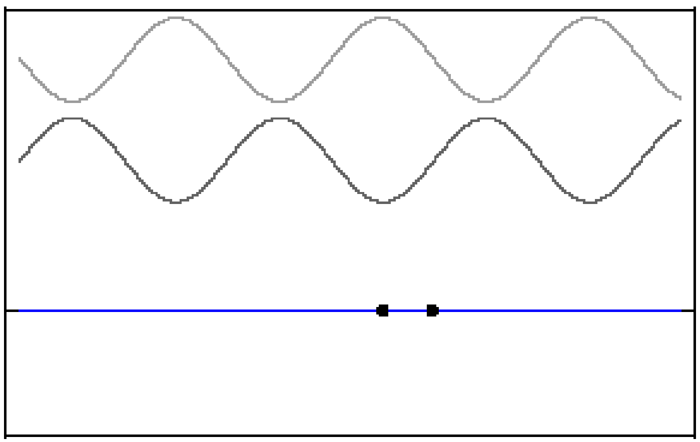
a) Calcule a velocidade e a amplitude das duas ondas progressivas que provocam a onda estacionária.

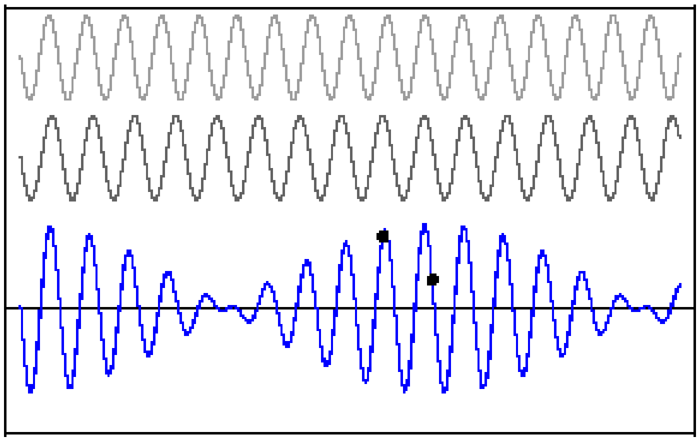
b) Qual a distância entre nodos sucessivos na corda?

c) Qual é o menor comprimento possível da corda para observar esta onda estacionária?

Batimentos

Neste caso, consideramos duas ondas que se propagam no mesmo sentido, apresentando a mesma amplitude, mas com frequências e comprimentos de onda diferentes.





Batimentos

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left[sen\left(\omega_1 t - k_1 x\right) + sen\left(\omega_2 t - k_2 x\right)\right]$$

$$= 2A\cos\left\{\frac{\left[\left(\omega_1 - \omega_2\right)t - \left(k_1 - k_2\right)x\right]}{2}\right\} sen\left\{\frac{\left[\left(\omega_1 + \omega_2\right)t - \left(k_1 + k_2\right)x\right]}{2}\right\}$$

Fazendo:

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad e \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad e \quad \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

podemos escrever:

$$y(x,t) = 2A\cos\left\{\omega_m\, t - k_m x\right\} sen\left\{\omega\, t - kx\right\}$$

Batimentos

Em geral, ω_m e k_m são muito mais pequenos que ω e k. Podemos escrever:

$$y(x,t) = A' \, sen\{\omega \, t - kx\}$$

Esta expressão descreve uma onda progressiva com frequência $f = \omega/2\pi$ e comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, mas com uma amplitude A' variável:

$$A' = 2A\cos\{\omega_m \, t - k_m x\}$$

Temos uma ***Modulação da Amplitude*** com uma frequência f_m e ***Batimentos*** com uma frequência $f_b = 2f_m$:

$$f_b = 2\,f_m = \frac{\omega_m}{\pi}$$