Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Folha 7 Aulas - Números Combinatórios

1. Mostre que os coeficientes factoriais $(x)_n$ satisfazem a equação de tipo binomial

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (x)_k (y)_{n-k},$$

com $(x)_0 = 1$, por convenção.

2. Determine os números binomiais generalizados $\binom{1/2}{3}$ e $\binom{-2}{3}$.

3. Determine todos os números reais x para os quais o número binomial generalizado $\binom{x}{2}$ é 28.

4. (a) Mostre que, para $n, r \in \mathbb{N}$, $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$.

   (b) Mostre que $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$.

   [Sugestão: recorra ao desenvolvimento em série de $(1+x)^{\alpha}$.]

5. Considerando uma área reticular de dimensão $2 \times n$ e que dispõe de azulejos de dimensão 1×2, mostre que existem F_{n+1} maneiras de cobrir a área com os azulejos, onde F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci.

6. Indique quais são os números de Fibonacci pares.

7. Partindo da função geradora dos números de Fibonacci, mostre que os números de Fibonacci F_n, com $n \geq 1$, são determinados pela expressão

$$F_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1-j}{j}.$$

8. Considere os números de Lucas, $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, definidos para $n \geq 0$, com $L_0 = 2$, onde F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Mostre que se verificam as seguintes igualdades:

   (a) $L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1$;

   (b) $L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2$.

9. Mostre que o número de colocações de n pessoas em k mesas redondas (não numeradas) de modo que nenhuma mesa fique vazia é igual a $\left[{n \atop k} \right]$.

10. Determine $\left[{n-1 \atop 2} \right]$ e $\left[{n \atop n-2} \right]$.

11. Mostre que o número de colocações de n pessoas em k quartos (numerados) de tal modo que nenhum quarto fique vazio é igual a $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$.

12. Determine os números de Stirling de 2^a espécie $\left\{ {n \atop n-3} \right\}$ e $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

13. Mostre que o número de funções sobrejetivas definidas no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e com imagem no conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ é igual a $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$.

14. Mostre que $\left\{ {n \atop 3} \right\} = \frac{1}{6}(3^n - 3 \times 2^n + 3)$.

15. Uma determinada marca de produtos alimentares oferece um brinde em cada caixa de cereais. Sabendo que existem três tipos de brindes, responda às seguintes questões.

    (a) Determine de quantas maneiras é possível obter um exemplar de cada tipo de brinde num conjunto de 5 caixas de cereais.

    (b) Qual é a probabilidade de obter pelo menos um brinde de cada tipo depois de abrir as 5 caixas de cereais.

Soluções:

2. $\binom{1/2}{3} = \frac{1}{16}$; $\binom{-2}{3} = -4$.

3. $x \in \{8, -7\}$.

4. (b) Tenha em conta que $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Tenha em conta que pode partir o conjunto de colocações dos azulejos 1×2 em dois subconjuntos disjuntos, o subconjunto das colocações que começam com um único azulejo colocado na vertical e o subconjunto das colocações que começam com dois azulejos colocados na horizontal (um por cima do outro).

6. $F_{3n},\ n \in \mathbb{N}$.

10. Utilizando a fórmula de recorrência $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$, vem que $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix} = (n-2)! + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (uma vez que $\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = (n-2)!$) ou, do modo equivalente, $\frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(n-2)!}\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{n-1}$. Procedendo á substituição de variáveis, fazendo $a_n = \frac{1}{(n-1)!}\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$, para $n > 1$, e $a_1 = 0$, obtém-se a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n-1}$, com condição inicial $a_1 = 0$. A solução desta equação de recorrência vem dada por $a_n = H_{n-1}$, para $n > 1$, ou, de modo equivalente, $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!H_{n-1}$, para $n > 1$, onde $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.
    Procedendo como anteriormente, obtém-se
    $\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix} + (n-1)\binom{n-1}{2}$
    e esta equação de recorrência tem como solução $\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{i}{2} = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3}$.

12. Aplicando a equação de recorrência dos números de Stirling de segunda espécie, para $k = n-2$, obtém-se $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \left\{ {n-1 \atop n-3} \right\} + (n-2)\left\{ {n-1 \atop n-2} \right\} = \left\{ {n-1 \atop n-3} \right\} + (n-2)\binom{n-1}{2}$. Logo, dado que $\left\{ {n-1 \atop n-3} \right\} = \left\{ {n-2 \atop n-4} \right\} + (n-3)\left\{ {n-2 \atop n-3} \right\} = \left\{ {n-2 \atop n-4} \right\} + (n-3)\binom{n-2}{2}$, e $\left\{ {n-2 \atop n-4} \right\} = \cdots$, vem que

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \sum_{i=1}^{n-1}(i-1)\binom{i}{2} = \frac{3n-5}{4}\binom{n}{3}.$$

    Por sua vez, aplicando novamente a equação de recorrência, mas desta vez para $k = n-3$, obtém-se $\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \left\{ {n-1 \atop n-4} \right\} + (n-3)\left\{ {n-1 \atop n-3} \right\} = (n-3)\frac{3n-8}{4}\binom{n-1}{3} + \left\{ {n-1 \atop n-4} \right\}$ (considerando a adaptação para $\left\{ {n-1 \atop n-3} \right\}$ da expressão anteriormente obtida para $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$).

Logo, vem que

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix} \right\} &= (n-3)\frac{3n-8}{4}\binom{n-1}{3} + (n-4)\left\{ \begin{matrix} n-2 \\ n-4 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ n-5 \end{matrix} \right\} \\
&= (n-3)\frac{3n-8}{4}\binom{n-1}{3} + (n-4)\frac{3n-11}{4}\binom{n-2}{3} + \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ n-5 \end{matrix} \right\} \\
&= (n-3)\frac{3n-5-8}{4}\binom{n-1}{3} + (n-4)\frac{3n-11}{4}\binom{n-2}{3} \\
&\qquad + (n-5)\left\{ \begin{matrix} n-3 \\ n-5 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ n-6 \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{3n-5-3i}{4}(n-2-i)\binom{n-i}{3} + \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ n-6 \end{matrix} \right\} \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=1}^{n-4} \frac{3n-5-3i}{4}(n-2-i)\binom{n-i}{3} + \left\{ \begin{matrix} n-3 \\ n-3-(n-4) \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n-3} \frac{3n-5-3i}{4}(n-2-i)\binom{n-i}{3}.
\end{aligned}$$

14. Seja $\mathcal{P}_1$ o conjunto de partições do conjunto $[n]$ tal que um elemento da partição é o conjunto singular $\{n\}$ e seja $\mathcal{P}_2$ o conjunto de todas as outras partições. Note-se que existe uma bijeção entre $\mathcal{P}_1$ e o conjunto das partições do conjunto $[n-1]$ em dois subconjuntos não vazios. Logo, por aplicação do princípio da bijecão, $|\mathcal{P}_1| = 2^{n-2} - 1$. Por sua vez, as partições pertencentes a $\mathcal{P}_2$, podem ser obtidas a partir das partições do conjunto $[n-1]$ em três subconjuntos não vazios, adicionando posteriormente o elemento n a cada um dos subconjuntos da partição. Logo, sendo a_n o número de partições de $[n]$ em 3 subconjuntos, vem que

$$a_n = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = 3a_{n-1} + 2^{n-2} - 1,$$

com $a_1 = a_2 = 0$. Esta equação de recorrência tem como solução precisamente a expressão que se pretende obter.

15. Para cada uma das alíneas, a resposta é a seguinte:

    (a) $3!\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 3! \times 65.$

    (b) Dado que o número de afetações dos três tipos de prémios às 5 caixas é $3^5 = 243$, a resposta é $\frac{65\times 3!}{243}$.