Ejercicio 1

1- $X \sim Geo(p)$

Su función de cuantía: $(1-p)^{K-1} \cdot p = P(x=K)$

$$E(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} K \cdot (1-p)^{K-1} \cdot p = p \cdot \sum_{K=1}^{+\infty} K \cdot (1-p)^{K-1}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (r)^i = \frac{1}{1-r} \qquad (|r|<1)$$

$$\Big\downarrow d/dr$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot r^{i-1} \,, \quad (|r|<1)$$

$$E(x) = p \cdot \frac{1}{(1-[1-p])^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Ejercicio 2:

1- Rojo => pierde lo apostado (18 números) } 19/37
0 => pierde lo apostado (1 número)

Negro => dobla lo apostado (18 números) 18/37

X = "ganancia de la persona"

$R_X = \{-1, 1\}$

$P(X=1) = 18/37$ (probabilidad que duplique lo apostado)

$P(X=-1) = 19/37$ (probabilidad que pierda lo apostado)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{18}{37} + (-1) \cdot \frac{19}{37} = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = \frac{-1}{37}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \left(1^2 \cdot \frac{18}{37} + (-1)^2 \cdot \frac{19}{37}\right) - \left(\frac{-1}{37}\right)^2$$

$$= \left(\frac{18}{37} + \frac{19}{37}\right) - \frac{1}{1369} = 1 - \frac{1}{1369} = \frac{1368}{1369} \simeq 0,9992$$

2- La ganancia total se puede modelar como la suma de la ganancia de cada jugada ya que cada una de las jugadas es independiente de las otras.

3- Por el Teorema Central del Límite se tiene que $Y = \sum_{i=1}^{n}$, entonces $E(Y) = n \cdot \mu$ siendo $\mu = E(X_i)$

$$\Rightarrow E(Y) = \frac{-1}{37} \cdot n$$

4- Dado que $E(Y) = \frac{-1}{37} \cdot n$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{37} \cdot n = -\infty$

La probabilidad de perder es mayor a la de ganar y a medida que $n \to +\infty$, $E(Y)$ tiende a $-\infty$ ya que se van sumando.

6- A partir de lo anteriormente mencionado se puede deducir que el casino siempre gana, ya que la probabilidad de que el jugador duplique el monto es menor a la probabilidad de que lo pierda y a medida que $n \to +\infty$, es decir, el número de jugadas es mayor, $E(Y) \to -\infty$, lo cual le es favorable al casino frente al apostador.

Ejercicio 3

Se lanza una moneda equilibrada

Sea $X \sim Ber(1/2)$

$\{X_1, X_2, \ldots, X_{100}\}$ V. A. i. i. d

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_{100}$, $S_n \sim Bin(100, 1/2)$

Estamos frente a un caso particular donde $S_n \sim Bin(n, p) \xrightarrow{d} N[np, np(1-p)]$

2. $N[100.(1/2), 100.(1/2).(1-1/2)] = N[\underbrace{50}_{\mu}, \underbrace{25}_{\sigma^2}]$

$$P(40 \leq S_n \leq 50) = P\left(\frac{40-50}{5} \leq \frac{S_n - 50}{5} \leq \frac{50-50}{5}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0{,}5 - 0{,}0228 = 0{,}4772$$

1. $P(40 \leq X \leq 50) = P(X=40) + P(X=41) + \ldots + P(X=49) + P(X=50)$

Cuantía de una binomial: $p_j = C_j^n \, p^j (1-p)^{n-j}$

En este caso: $p_j = C_j^{100} . (1/2)^j . (1-1/2)^{100-j}$

$$\sum_{i=40}^{i=50} \frac{100!}{i!(100-i)!\,2^{100}} = 0{,}0108 + 0{,}0159 + 0{,}0223 + 0{,}0301 + 0{,}0390$$
$$+ 0{,}0485 + 0{,}0579 + 0{,}0666 + 0{,}0735 + 0{,}0780$$
$$+ 0{,}0796 = 0{,}5222$$

Papiros