Aspectos Homológicos de la Teoría Clásica de Campos en el formalismo de Batalin-Vilkovisky

Tomas Alzate Lugo
Director: PhD Cristhiam López Arcos

Universidad EIA
Trabajo de grado para obtar al Título de Físico

16 de septiembre de 2025

Contenido

Motivación

- Modelo estándar y Relatividad General **Teorías Gauge**.
- Simetría gauge $\Longrightarrow$ *redundancia* $\Longrightarrow$ grados de libertad no físicos.
- Esta *redundancia* induce dificultades al estudiar la dinámica, tanto clásica como cuántica, de estas teorías.
- El formalismo de Batalin-Vilkovisky (BV) es considerado el método más general y poderoso para tratar estos sistemas.

El formalismo BV *in a nutshell*

- Es homológico.
- Introduce fantasmas para resolver las redundancias gauge (BRST).
- Introduce anticampos para resolver las ecuaciones de movimiento.
- Data clásica $\Longrightarrow$ Q-variedad simpléctica.
- Teoría de campos $\Longleftrightarrow$ álgebra L_∞.
- Aplicaciones modernas
  [Macrelli et al., 2019, Jurčo et al., 2020, Lopez-Arcos and Vélez, 2019, Gomez et al., 2021, Borsten et al., 2021].

Objetivo

Estudiar los fundamentos matemáticos del formalismo de **Batalin-Vilkovisky** y las álgebras L_∞ que aparecen en la Teoría Clásica de Campos.

Teoría Clásica de Campos

1. Un espacio tiempo: una variedad d-dimensional M.
2. Un espacio de campos $\mathfrak{F} = \mathrm{Map}(M, V)$.
3. Un funcional de action $S : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$S[\phi] = \int_M \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{1}$$

4. El principio variacional:

$$\delta S[\phi] = 0 \tag{2}$$

$\mathrm{Crit}(S) = \{\phi \in \mathfrak{F} \mid \delta S[\phi] = 0\}$. $\phi \in \mathrm{Crit}(S)$ es un campo *on-shell*.

Estructura general de las teorías gauge

- Una **Teoría Gauge** es cierta teoría de campos en la que la dinámica es invariante bajo transformaciones locales.
- Una acción de $\mathcal{G} = \mathrm{Map}(M, G)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \triangleright \mathfrak{F} : \mathcal{G} \times \mathfrak{F} &\to \mathfrak{F} \\ (g, \phi) &\mapsto g \triangleright \phi, \end{aligned} \tag{3}$$

tal que $S[\phi] = S[g \triangleright \phi] \quad \forall\, g \in \mathcal{G}$ y $\forall\, \phi \in \mathfrak{F}$.

- Transformación generada por Lie($\mathcal{G}$)

$$\phi^a(x) \to \phi^a(x) + \delta\phi^a(x) := \phi^a(x) + (R_i^a(\phi)\varepsilon^i)(x) \tag{4}$$

- $\{\varepsilon^i : M \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$: parámetros de la transformación gauge.
- **Notación de De-Witt**
  - $a \to A = (a, x)$
  - Ahora suma sobre índices repetidos incluye integración sobre el espacio-tiempo

$$\delta\phi^A = R_I^A \varepsilon^I \Leftrightarrow \delta\phi^a(x) = \int_M d^d y R_i^a(x, y)\varepsilon^i(y). \tag{5}$$

Identidades de Noether

Dado que (4) es una simetría de la acción, implica las **identidades de Noether**

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \varepsilon^I} = \frac{\delta S}{\delta \phi^A}\frac{\delta \phi^A}{\delta \varepsilon^I} \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta \phi^A} R_I^A = 0 \tag{6}$$

Variando (6) respecto a ϕ^B y restringiendo ϕ a $\mathrm{Crit}(S)$, obtenemos las **segundas identidades de Noether**

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^B \delta \phi^A} R_I^A = 0 \tag{7}$$

$\Rightarrow$ El Hessiano de S es singular en cada punto de la superficie estacionaria.

Problemas

- Las ecuaciones de movimiento NO determinan por completo la dinámica de la teoría.
- No tenemos propagadores.
- No es posible aplicar teoría de pertubaciones.

Conclusión

Se deben imponer y resolver *ligaduras* adicionales. **Formalismos BRST-BV**.

Complejo

Un *complejo* (C, d)

$$\cdots \xrightarrow{d_{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C^k \xrightarrow{d_k} C^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots \tag{8}$$

tales que

$$d_{k+1} \circ d_k = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

- $Z^k := \ker(d_k) \subseteq C^k$ *k-cociclos.*
- $B^k := \operatorname{im}(d_{k-1}) \subseteq Z^k$ *k-cobordes.*
- $H_d^k(C) := Z^k / B^k$ cohomología de orden k.

Variedades graduadas

- En una variedad graduada tenemos coordenadas locales *impares*.

$$(\varphi_U, \varphi_U^*) : (U, C^\infty(M)|_U) \xrightarrow{\cong} (U', C^\infty(U') \otimes S^\bullet(\mathcal{V}_{U'}^*)) \tag{10}$$

- $C^\infty(M)$ es un álgebra graduada conmutativa.

$$f(x,\xi) = f_0(x) + f_\alpha(x)\xi^\alpha + f_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta + \cdots \tag{11}$$

- $\xi^\alpha\xi^\beta = (-1)^{|\xi^\alpha||\xi^\beta|}\xi^\beta\xi^\alpha$. $|\xi^\alpha| \in \mathbb{Z}$ **número fantasma**.
- Ejemplo: $T[1]M$:
  - Coordenadas x^μ en M de grado 0, las fibras $\xi^\mu \Leftrightarrow dx^\mu$ con grado $+1$.
  - $dx^\mu \wedge dx^\nu \Leftrightarrow \xi^\mu\xi^\nu$.
  - $C^\infty(M) = \Omega^\bullet(M)$

UNIVERSIDAD EIA

Campo Vectorial Homológico

- $\mathfrak{X}(M) = \mathrm{Der}(C^\infty(M))$.
- Si $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$X(fg) = X(f)g + (-1)^{|f||X|} fX(g). \tag{12}$$

- $\mathrm{Q} \in \boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$ tal que $|\mathrm{Q}| = 1,\ \mathrm{Q}^2 = 0$.
- El par (M, Q) se denomina Q-**variedad.**
- Ejemplo. En $T[1]M$ para, el diferencial de de Rham $Q = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ es un campo vectorial homológico.

Álgebras de Lie como Q-variedades

Ejemplo: $M = \mathfrak{g}[1]$, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie $[\tau_\alpha, \tau_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta}\tau_\gamma$:

- $\xi^\alpha \in \mathfrak{g}[1]^*$ coordenadas de grado 1: $\xi^\alpha\xi^\beta = -\xi^\beta\xi^\alpha$
- $C^\infty(\mathfrak{g}[1]) \cong \bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^*$: Polinomios en las funciones coordenadas $\{\xi^\alpha : \mathfrak{g}[1] \to \mathbb{R}\}$.
- Campo vectorial homológico:

$$Q = -\frac{1}{2} f^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \frac{\partial}{\partial\xi^\gamma}$$

$$Q^2 = 0 \iff f^\delta_{\alpha\beta}f^\epsilon_{\delta\gamma} + f^\delta_{\gamma\alpha}f^\epsilon_{\delta\beta} + f^\delta_{\beta\gamma}f^\epsilon_{\delta\alpha} = 0.$$

- $(C^\infty(\mathfrak{g}[1]), Q) \cong \mathrm{CE}(\mathfrak{g}) := (\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^*, \mathrm{d}_{\mathrm{CE}})$.

$$Q\xi^\gamma = -\frac{1}{2} f^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$$

Álgebras L_∞

- $M = L[1]$ para $L = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L_k$
- Campo vectorial homológico

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_i} \xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \tag{13}$$

- Las constantes $f^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}$ definen $\mu_i : \bigwedge^i L \to L$

$$\mu_i(\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_i}) := f^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}\tau_\beta \tag{14}$$

- La condición $Q^2 = 0$ se traduce en

$$\sum_{k=i+j} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh(j,i)}} (-1)^k \chi(\sigma; l_1, \ldots, l_i)\mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(j)}), l_{\sigma(j+1)}, \ldots, l_{\sigma(i)}) = 0$$

Identidades de Jacobi generalizadas

- $k = 1$ Diferencial

$$\mu_1(\mu_1(l)) = 0$$

- $k = 2$ Regla de Leibniz:

$$\mu_1(\mu_2(l_1, l_2)) = \mu_2(\mu_1(l_1), l_2) + (-1)^{|l_1|}\mu_2(l_1, \mu_1(l_2))$$

- $k = 3$ Identidad de Jacobi salvo homotopía:

$$\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(l_1, l_2), l_3) + (-1)^{|l_1|(|l_2|+|l_3|)}\mu_2(\mu_2(l_2, l_3), l_1) + \\
&(-1)^{|l_3|(|l_1|+|l_2|)}\mu_2(\mu_2(l_3, l_1), l_2) \\
&= \mu_1(\mu_3(l_1, l_2, l_3)) + \mu_3(\mu_1(l_1), l_2, l_3) + (-1)^{|l_1|(|l_2|+|l_3|)}\mu_3(\mu_1(l_2), l_3, l_1) \\
&\quad + (-1)^{|l_3|(|l_1|+|l_2|)}\mu_3(\mu_1(l_3), l_1, l_2)
\end{aligned}$$

- $(L, \{\mu_i : \bigwedge^i L \to L\}_{i \in \mathbb{N}})$ **álgebra L_∞**.
- $\mathrm{CE}(L) := (C^\infty(L[1]), Q)$: **álgebra de Chevalley-Eilenberg.**
- Campo vectorial homológico y productos L_∞

$$Q\xi^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{1}{i!} f^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_i} \xi^{\beta_1} \cdots \xi^{\beta_i}$$

- Los coeficientes son las componentes L_∞.

$$\begin{aligned} Q\xi^\alpha = & -\mu_1(\tau_{\beta_1})^\alpha \xi^{\beta_1} - \frac{1}{2}\mu_2(\tau_{\beta_1}, \tau_{\beta_2})^\alpha \xi^{\beta_1} \xi^{\beta_2} \\ & -\frac{1}{3!}\mu_3(\tau_{\beta_1}, \tau_{\beta_2}, \tau_{\beta_3})^\alpha \xi^{\beta_1} \xi^{\beta_2} \xi^{\beta_3} + \cdots \end{aligned}$$

Formas simplécticas graduadas

- Una **forma simpléctica graduada** $\omega \in \Omega^2(M)$ tal que $d\omega = 0$ y $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$.
- **Ejemplo** En $T^*[1]M$:
- Coordenadas x^μ en M de grado 0 y coordenadas en las fibras p_μ de grado 1.
- $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ es una forma simpléctica de grado 1.

- Para toda $H \in C^\infty(M)$ existe $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $i_{X_H}\omega = dH$. X_H se conoce como campo vectorial hamiltoniano.
- **Estructura de Poisson graduada** en $C^\infty(M)$. Para $f, g \in C^\infty(M)$ definimos su anti-bracket:

$$\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = X_f(g) \tag{15}$$

Q-variedades simplécticas

- Una estructura simpléctica diferencial en una variedad graduada M es un par (Q, ω), donde:
    - ω es una forma simpléctica
    - Q es un c.v.h. simpléctico:

$$\mathcal{L}_Q \omega = 0 \quad Q^2 = 0.$$

- Cuando Q es Hamiltoniano, existe una función $S \in C^\infty(M)$ tal que

$$i_Q \omega = dS \quad \text{y} \quad \{S, S\} = 0.$$

- (M, Q, ω) se denomina Q-variedad simpléctica. Es la estructura matemática del formalismo de Batalin-Vilkovisky.

UNIVERSIDAD EIA

Hacia el formalismo de Batalin-Vilkovisky

- Teoría gauge general $(\mathfrak{F}, G, \mathcal{G} \triangleright \mathfrak{F})$. El *verdadero* espacio de configuraciones está dado por el *cociente*

$$\mathcal{C} = \mathfrak{F}/\mathcal{G}. \tag{16}$$

- En escencia, el formalismo BRST-BV busca interpretar este cociente con álgebra homológica.

$$\mathfrak{F}/\mathcal{G} \longrightarrow [\mathfrak{F}/\mathcal{G}]$$

- Codificando $C^\infty(\mathfrak{F}/\mathcal{G})$ en un complejo.

Formalismo BRST

En lugar de tratar de definir $C^\infty(\mathfrak{F}/\mathcal{G})$, consideramos $\mathsf{CE}(\mathfrak{g}, \mathfrak{F})$

$$\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^0 \mathsf{Lie}(\mathcal{G}), C^\infty(\mathfrak{F})\right) \xrightarrow{d_{CE}} \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^1 \mathsf{Lie}(\mathcal{G}), C^\infty(\mathfrak{F})\right) \xrightarrow{d_{CE}} \cdots$$

y definimos

$$[\mathfrak{F}/\mathcal{G}] = \mathsf{Lie}(\mathcal{G})[1] \times \mathfrak{F} := \mathfrak{F}_{\mathsf{BRST}} \tag{17}$$

La acción del álgebra de Lie se codifica en un campo vectorial homológico Q_{BRST} en $\mathfrak{F}_{\mathsf{BRST}}$:

$$Q_{\mathsf{BRST}}\Phi^A = \delta_c \Phi^A, \quad Q_{\mathsf{BRST}} c^a = -\frac{1}{2} f^a_{bc} c^b c^c. \tag{18}$$

UNIVERSIDAD EIA

- La identidad de Jacobi y la representación se traducen $Q_{\mathrm{BRST}}^2 = 0$.
- $(C^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}), Q_{\mathrm{BRST}})$ es un complejo:

$$0 \to C_0^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BRST}}} C_1^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BRST}}} C_2^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BRST}}} \cdots$$

  donde $C_i^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}})$ son funciones de número fantasma i.
- $F \in C^\infty(\mathfrak{F}/\mathcal{G})$ satisface $Q_{\mathrm{BRST}} F[\Phi] = 0$ y $|F| = 0$. Por tanto, concluimos

$$C^\infty(\mathfrak{F}/\mathcal{G}) \cong H^0_{Q_{\mathrm{BRST}}}(\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}). \tag{19}$$

UNIVERSIDAD EIA

Extensión *Off-shell* de BRST

- En algunos casos, incluyendo *simetrías abiertas* o *sistemas reducibles*, se encuentra que $Q^2_{\text{BRST}} \propto \text{EoM}$.
- El formalismo BV provee la extensión *off-shell* para tratar estos casos más generales.
- Por cada campo Φ^A introduce una variable conjugada Φ^*_A llamada *anticampo.*

$$\mathfrak{F}_{\text{BV}} := T^*[-1]\mathfrak{F}_{\text{BRST}} \tag{20}$$

- De manera que se pueda construir $Q_{\text{BV}} \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}_{\text{BV}})$ tal que $Q^2_{\text{BV}} = 0$.

Estructura del espacio extendido y la acción maestra

- En $\mathfrak{F}_{\text{BV}}$ tenemos $\omega_{BV} = (-1)^{|\Phi^A|}\delta\Phi^A \wedge \delta\Phi^*_A$ y una estructura de Poisson
$$\{F, G\}_{\text{BV}} = (-1)^{|\Phi^A|(|F|+1)} \left(\frac{\delta F}{\delta\Phi^A}\frac{\delta G}{\delta\Phi^*_A} + (-1)^{|F|}\frac{\delta F}{\delta\Phi^*_A}\frac{\delta G}{\delta\Phi^A} \right)$$

- Queremos extender Q_{BRST} a un campo vectorial Hamiltoniano $Q_{\text{BV}} := \{S_{\text{BV}}, -\}_{\text{BV}} \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}_{\text{BV}})$ tal que
$$Q^2_{\text{BV}} = 0, \quad Q_{\text{BV}}|_{\mathfrak{F}_{\text{BRST}}} = Q_{\text{BRST}}$$

- El funcional $S_{\text{BV}} \in C^\infty_0(\mathfrak{F}_{\text{BV}})$ se denomina **acción maestra clásica**

La ecuación maestra clásica

- La condición $Q_{\mathrm{BV}}^2 = 0$ implica que S_{BV} satisface la **ecuación maestra**

$$\{S_{\mathrm{BV}}, S_{\mathrm{BV}}\}_{\mathrm{BV}} = 0. \tag{21}$$

- Condiciones de frontera:
  - La acción clásica de la teoría.
  - Anticampos como fuentes de las transformaciones BRST.
- Expandimos S_{BV} en series de potencias de los anticampos:

$$S_{\mathrm{BV}}[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi] + \Phi_A^* Q_{\mathrm{BRST}} \Phi^A + \mathcal{O}((\Phi^*)^2)$$

.

$$S_{\text{BV}}[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi] + \Phi^*_A Q_{\text{BRST}} \Phi^A \tag{22}$$

- La acción maestra ahora es la *generadora* de las transformaciones tipo BRST.
- En las coordenadas su acción toma la forma:

$$Q_{\text{BV}}\Phi^A = (-1)^{|\Phi^A|} \frac{\delta S_{\text{BV}}}{\delta \Phi^*_A}$$
$$Q_{\text{BV}}\Phi^*_A = (-1)^{|\Phi^A|} \frac{\delta S_{\text{BV}}}{\delta \Phi^A}$$

tales que

$$Q^2_{\text{BV}} = 0 \quad (\textit{off-shell})$$

- Los **observables clásicos** estan dados por

$$C^\infty(\mathfrak{F}/\mathcal{G})/\mathfrak{I}$$

donde $\mathfrak{I}$ es el ideal de funcionales que se anulan en la superficie crítica de S. [Gomis et al., 1995]

$$G^A(\Phi)\frac{\delta S_{\mathrm{BV}}}{\delta \Phi^A} \in \mathfrak{I} \tag{23}$$

- El formalismo BV codifica este cociente en el álgebra diferencial graduada:

$$(C^\infty(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}), Q_{\mathrm{BV}}), \quad Q_{\mathrm{BV}} = \{S_{\mathrm{BV}}, -\}$$

Observables clásicos y la resolución de Koszul-Tate

- Tenemos el complejo de funciones en $\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}} = T^*[-1]\mathfrak{F}_{\mathrm{BRST}}$:

$$\cdots \xrightarrow{Q_{\mathrm{BV}}} C^\infty_{-1}(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BV}}} C^\infty_0(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BV}}} C^\infty_1(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}) \xrightarrow{Q_{\mathrm{BV}}} \cdots$$

- Como $C^\infty_{-1}(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}})$ son funcionales lineales en los anticampos y $Q_{\mathrm{BV}}\Phi^*_A = (-1)^{|\Phi^A|}\frac{\delta S_{\mathrm{BV}}}{\delta \Phi^A}$,

$$\mathfrak{I} = Q_{\mathrm{BV}}(C^\infty_{-1}(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}})) \tag{24}$$

- Y como el kernel de Q_{BV} en $C^\infty_0(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}})$ son funcionales *invariantes gauge*, concluimos

$$H^0_{Q_{\mathrm{BV}}} = \{\text{funcionales invariantes gauge } \textit{on-shell}\} \tag{25}$$

UNIVERSIDAD EIA

Álgebras L_∞ de las teorías clásicas de campos

- La Q-variedad $(\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}, Q_{\mathrm{BV}})$ induce una estructura L_∞ sobre $\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}[-1]$.
- Esta álgebra L_∞ codifica toda la información clásica de la teoría en el complejo:

$$\cdots \xrightarrow{\mu_1} \underbrace{\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{-1}}_{L_0} \xrightarrow{\mu_1} \underbrace{\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{0}}_{L_1} \xrightarrow{\mu_1} \underbrace{\mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{1}}_{L_2} \xrightarrow{\mu_1} \cdots$$

  - $L_0 = \mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{-1}$: fantasmas (parámetros gauge)
  - $L_1 = \mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{0}$: campos clásicos
  - $L_2 = \mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{1}$: Ecuaciones de Movimiento
  - $L_3 = \mathfrak{F}_{\mathrm{BV}}^{2}$: Identidades de Noether

Teoría de Yang–Mills

- Surge como una generalización del electromagnetismo de Maxwell a simetrías gauge **no abelianas** [Yang and Mills, 1954].
- Base teórica del SM
- Estructura matemática: haz principal sobre el espacio-tiempo M con grupo de estructura G.
- $\mathfrak{F}_{\mathsf{YM}} = \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$

- (M, η) el espacio tiempo d-dimensional de Minkowski,
- G un grupo de Lie compacto y $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$,
- $\langle -, - \rangle_{\mathfrak{g}}$ un producto escalar definido positivo Ad-invariante en $\mathfrak{g}$,
- $\{\tau_a\}_{a=1,\ldots r}$ una base ortonormal tal que $[\tau_a, \tau_b] = f_{ab}{}^{c}\tau_c$,
- $\Omega^\bullet(M, \mathfrak{g}) := \Omega^\bullet(M) \otimes \mathfrak{g}$

- **Campo gauge** $A = A^a_\mu dx^\mu \otimes \tau_a \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$, y su **curvatura**:

$$F = dA + \tfrac{1}{2}[A, A] = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \tau_a$$

- tal que $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$
- Acción de Yang–Mills:

$$S_{\mathrm{YM}}[A] = -\frac{1}{4} \int_M d^d x F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a$$

- Transformaciones infinitesimales:

$$\delta A^a_\mu(x) = \partial_\mu c^a(x) + f^a{}_{bc} A^b_\mu(x) c^c(x). \tag{26}$$

- $c(x) = c^a(x)\tau_a \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$ **parámetros gauge**.

Formalismo BV en Yang–Mills

- Promovemos los parámetros de gauge a **campos fantasmas** $c \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})[1]$
- El complejo BRST toma la forma:

$$\mathfrak{F}_{\text{YM-BRST}} = \Omega^0(M, \mathfrak{g})[1] \oplus \Omega^1(M, \mathfrak{g})$$

- Añadimos:
  - **Anticampos** $A^* \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})[-1]$
  - **Antifantasmas** $c^* \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})[-2]$
- El espacio de campos BV queda:

$$\mathfrak{F}_{\text{YM-BV}} = \Omega^0(M, \mathfrak{g})[1] \oplus \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^1(M, \mathfrak{g})[-1] \oplus \Omega^0(M, \mathfrak{g})[-2]$$

UNIVERSIDAD EIA

- La **acción maestra clásica** de Yang-Mills:

$$S_{\text{YM-BV}} = \int_M d^4x \left(-\tfrac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} + A_a^{*\mu}(\partial_\mu c^a + f^a{}_{bc} A^b_\mu c^c) + \tfrac{1}{2} c^*_a f^a{}_{bc} c^b c^c\right)$$

- de la cual extraemos las transformaciones BV y la estructura L_∞:

$$Q_{\text{BV}} A^a_\mu = \underbrace{\partial_\mu c^a}_{\mu_1(c)^a_\mu} + \underbrace{f^a_{bc} A^b_\mu c^c}_{\mu_2(A,c)^a_\mu}$$

$$Q_{\text{BV}} c^a = \underbrace{-\frac{1}{2} f^a_{bc} c^b c^c}_{\mu_2(c,c)^a}$$

$$Q_{\text{BV}} A^{*\mu}_a = \underbrace{\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a)}_{\mu_1(A)^\mu_a} + \underbrace{\partial_\nu(f_a{}^{bc} A^\mu_b A^\nu_c) + f_a{}^{bc} A_{b\nu} \partial^\mu A^\nu_c - f_a{}^{bc} A^b_\nu \partial^\mu A^\nu_c}_{\mu_2(A,A)^\mu_a}$$
$$+ \underbrace{f_a{}^{bc} A_{b\nu} f_c{}^{de} A^\mu_d A^\nu_e}_{\mu_3(A,A,A)^\mu_a} + \underbrace{f_{ab}{}^c A^{*\mu}_c c^b}_{\mu_2(A^*,c)^\mu_a}$$

$$Q_{\text{BV}} c^*_a = \underbrace{-\partial_\mu A^{*\mu}_a}_{\mu_1(A^*)_a} + \underbrace{f_{ab}{}^c A^b_\mu A^{*\mu}_c}_{\mu_2(A,A^*)_a} + \underbrace{f_{ab}{}^c c^*_c c^b}_{\mu_2(c^*,c)_a}.$$

Yang-Mills álgebra L_∞

- El complejo de Yang-Mills

$$\underbrace{\Omega^0(M,\mathfrak{g})}_{L^0_{\mathrm{YM}}} \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^1(M,\mathfrak{g})[-1]}_{L^1_{\mathrm{YM}}} \xrightarrow{\delta d} \underbrace{\Omega^1(M,\mathfrak{g})[-2]}_{L^2_{\mathrm{YM}}} \xrightarrow{\delta} \underbrace{\Omega^0(M,\mathfrak{g})[-3]}_{L^3_{\mathrm{YM}}}$$

- Y la versión libre de coordenadas de los productos en el álgebra L_∞

$$\mu_1(c_1) = dc_1, \quad \mu_1(A_1) = \delta dA_1, \quad \mu_1(A_1^*) = \delta A_1^*,$$
$$\mu_2(c_1,c_2) = [c_1,c_2], \quad \mu_2(c_1,A_1) = [c_1,A_1], \quad \mu_2(c_1,A_1^*) = [c_1,A_1^*],$$
$$\mu_2(c_1,c_2^*) = [c_1,c_2^*], \quad \mu_2(A_1,A_2^*) = \star[A_1,A_2^*],$$
$$\mu_2(A_1,A_2) = \delta[A_1,A_2] + \star[A_1,\star dA_2] + \star[A_2,\star dA_1],$$
$$\mu_3(A_1,A_2,A_3) = \star[A_1,\star[A_2,A_3]] + \star[A_2,\star[A_3,A_1]] + \star[A_3,\star[A_1,A_2]];$$

UNIVERSIDAD EIA

Conclusiones y Perspectivas

- **Formalismo BV:** $(\mathfrak{F}, S, \mathcal{G} \triangleright \mathfrak{F}) \longrightarrow (T^*[-1](\mathfrak{g}[1] \times \mathfrak{F}), \omega_{\mathsf{BV}}, Q_{\mathsf{BV}})$
- Modelo del espacio de configuraciones reducido
- Los observables clásicos están determinados por $H^0_{Q_{\mathsf{BV}}}$.
- Esta variedad es dual a una estructura L_∞ en $\mathfrak{F}_{\mathsf{BV}}[-1]$.
- Los productos μ_i son extraídos sistemáticamente de la acción maestra clásica.
- Teoría Cuántica de Campos:
    - *Amplitudes de dispersión a nivel de árbol* $\Longleftrightarrow$ teorema del modelo minimal.
    - *Loop-level*?

Referencias I

Borsten, L., Kim, H., Jurčo, B., Macrelli, T., Saemann, C., and Wolf, M. (2021).
Double copy from homotopy algebras.
Fortschritte der Physik, 69(8–9).

Gomez, H., Jusinskas, R. L., Lopez-Arcos, C., and Velez, A. Q. (2021).
The L_∞ structure of gauge theories with matter.
JHEP, 02:093.

Gomis, J., París, J., and Samuel, S. (1995).
Antibracket, antifields and gauge-theory quantization.
Physics Reports, 259(1–2):1–145.

Jurčo, B., Macrelli, T., Sämann, C., and Wolf, M. (2020).
Loop Amplitudes and Quantum Homotopy Algebras.
JHEP, 07:003.

Referencias II

Lopez-Arcos, C. and Vélez, A. Q. (2019).
L_∞-algebras and the perturbiner expansion.
JHEP, 11:010.

Macrelli, T., Sämann, C., and Wolf, M. (2019).
Scattering amplitude recursion relations in batalin-vilkovisky–quantizable theories.
Physical Review D, 100(4).

Yang, C. N. and Mills, R. L. (1954).
Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance.
Phys. Rev., 96:191–195.

Muchas Gracias!