Electromagnetismo de Maxwell como una teoría gauge U(1)

Una visión moderna a la electrodinámica clásica

Tomas Alzate Lugo

Programa de Física

Universidad EIA

2024 - 1

1. Introducción

La invarianza gauge en los potenciales electrodinámicos Φ y $\vec{A}$ esconde un profundo significado sobre el cual se construyen todas las teorías fundamentales actuales.

La simetría gauge es en el fondo una redundancia en nuestra descripción de la naturaleza. Sin embargo, es una redundancia que tiene una enorme utilidad y aporta una riqueza a aquellas teorías que la disfrutan

Parece imposible exagerar la importancia que tiene la simetría gauge en la física teórica actual; sin embargo, muy poco énfasis se hace en el hecho de que el electromagnetismo de Maxwell puede ser entendido a partir de los principios de simetría y localidad que están en el corazón de las teorías gauge.

En este trabajo veremos como el electromagentismo de Maxwell se construye completamente a partir de la invarianza gauge bajo el grupo de simetrías $U(1)$. Como el grupo $U(1)$ es abeliano, el electromagnetismo se conoce también como la teoría abeliana.

Se comienza dando una breve contextualización de la teoría clásica de campos y se finaliza con la construcción axiomática de la toería de los campos eléctricos y magnéticos a partir de los principios de simetría local.

Para el lector que quiera profundizar en el tema lo remoto a los excelentes libros sobre la teoría de campos gauge [1], [2], [3], [4], [5].

2. Teoría clásica de campos

Una teoría gauge es una teoría de campos (ya sea a nivel clásico o cuántico) invariante bajo un grupo de transformaciones locales. Dicha invarianza es conocida como simetría gauge y puede ser entendida como una redundancia en nuestra descripción de la naturaleza.

El electromagnetismo de Maxwell se puede interpretar en este contexto como una teoría gauge cuyo grupo de simetría es $U(1)$. Dicha simetría trae

Para poder comprender el significado de la frase de arriba se necesitan ciertas herramientas propias de la teoría de campos, que es lo que desarrollaremos en esta sección.

2.1. Formulación lagrangiana para campos

2.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Un sistema mecánico con finitos grados de libertad es descrito por sus coordenadas generelazidas $q_k(t)$ y sus velocidades generalizadas $\dot{q}_k(t)$. Un campo (clásico) es un objeto que a cada punto espacio le asigna un objeto magnitud física, por tanto es un sistema con infinitos grados de libertad. La dinámica de un sistema mecánico queda determinada por su lagrangiano $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ y el principio de mínima acción. Para un campo clásico $\Phi^a(t, \mathbf{x}) = \Phi^a(x)$ su dinámica queda determinada por el lagrangiano de la teoría $\mathcal{L}(\Phi^a(x), \partial_\mu \Phi^a(x))$ a partir del cual se construye el objeto fundamental de la teoría: la acción S. La acción se define a partir del lagrangiano mediante

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^a(x), \partial_\mu \Phi^a(x))$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos $\Phi^a(x)$ se obtienen a partir del principio de variacional, según el cual la configuración de campo física es aquella en la cual la acción es estacionaria: $\delta S = 0$. Así, tomando una variación arbitraria en los campos $\Phi^a \to \Phi^a + \delta\Phi^a$ tal que $\delta\Phi^a|_{\partial M} = 0$ tenemos:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \delta \Phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \delta(\partial_\mu \Phi^a) \right)$$

Con $\delta(\partial_\mu \Phi^a) = \partial_\mu(\delta\Phi^a)$ y usando la condición de frontera para $\delta\Phi^a$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \delta \Phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \partial_\mu(\delta \Phi^a) \right)$$
$$= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \delta \Phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \delta \Phi^a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \right) \delta \Phi^a \right)$$

$$= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \right) \right) \delta \Phi^a$$

y como $\delta S = 0$ para $\delta\Phi^a$ arbitraria, por el lema fundamental del cálculo de variaciones, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \right) = 0 \tag{1}$$

2.1.2. Teorema de Noether en teoría de campos

Las simetrías y las leyes de conservación juegan un papel aún más fundamental en la teoría de campos. El resultado central que conecta simetrías con leyes de conservación es el teorema de Noether, que puede enunciarse como:

"Toda simetría continua en el Lagrangiano lleva consigo una ley de conservación (on-shell)"

Por simetría continua entendemos una transformación en los campos $\Phi^a(x) \to \Phi'^a_\alpha(x) = F(\alpha, \Phi^a(x))$, parametrizada continuamente por el parámetro continuo α , tal que $\mathcal{L}$ permanezca invariante, esto es, $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ [1]. Por otra parte, una ley de conservación está dada por una cuadricorriente $\jmath^\mu$ que satisface la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Dicha corriente trae consigo una carga Q definida mediante

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0$$

tal que $\frac{dQ}{dt} = 0$ (cantidad conservada).

Para ver la relación entre simetrías y cantidades conservadas, consideremos una variación infinitesimal de la configuración de campos que deja invariante al Lagrangiano: $\delta\Phi^a = \alpha X^a(\Phi)$ tal que $\delta\mathcal{L} = 0$. Con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi^a, \partial_\mu\Phi^a)$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^a}\delta\Phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}\partial_\mu(\delta\Phi^a) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}\right)\right)\delta\Phi^a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}\delta\Phi^a\right)$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}\delta\Phi^a\right) \text{(on-shell)}$$

Y como $\delta\mathcal{L} = 0$

$$\implies \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}\delta\Phi^a\right) = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$$

donde

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)}X^a(\Phi)$$

Como veremos más adelante, las simetrías y cantidades conservadas vínculadas por el teorema de Noether toman un papel central en el electromagnetismo de Maxwell.

[1] Realmente esto es una versión débil del verdadero teorema de Noether, pero será suficiente para lo que nos interesa en el contexto del electromagnetismo

3. Electrodinámica escalar

Una vez desarrolladas las herramientas teóricas necesarias procedemos a desarrollar la teoría general de los campos electromagnéticos

3.1. Campo de Klein-Gordon

La teoría de Klein-Gordon surge en los años 30 como un intento de descripción relativista del electrón. La ecuación de movimiento para el campo de Klein-Gordon ϕ surge al cuantizar la relación de dispersión relativista:

$$E^2 = m^2 + p^2 \tag{2}$$

Usando las relaciones $E \to \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$, obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para el campo ϕ

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2\right)\phi = 0$$

que en notación covariante

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0 \tag{3}$$

Dicha ecuación pretende ser una descripción cuántica-relativista de partículas libres con masa m. Podemos obtener la ecuación de Klein-Gordon a partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{KG} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{4}$$

Conocido como lagrangiano de Klein-Gordon. Nótese que dicho lagrangiano implica que el conjugado del campo de Klein-Gordon ϕ^* también satisface la ecuación de Klein-Gordon. Después de cuantización se interpreta este resultado como antimateria.

Por la forma funcional de $\mathcal{L}$ es fácil chequear que la teoría es invariante bajo las transformaciones globales

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi$$
$$\phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$$

pues

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\to -\partial_\mu(e^{-i\alpha}\phi^*)\partial^\mu(e^{i\alpha}\phi) - m^2 e^{-i\alpha}\phi^* e^{i\alpha}\phi \\
&= -e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - e^{i\alpha}e^{-i\alpha}m^2\phi^*\phi \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Tomando la versión infinitesimal de la transformación $\delta\phi = i\alpha\phi$, $\delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$ encontramos la corriente conservada asociada a esta simetría usando el teorema de Noether:

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \tag{5}$$

La componente temporal de la cuadricorriente puede interpretarse como la densidad de partículas y la componente espacial como el flujo de partículas.

3.1.1. Invarianza gauge

El ingrediente crucial para construir nuestra teoría completa es el principio de invarianza gauge. Nuestro lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi$$

. Queremos generalizar esta simetría a una simetría local tal que la transformación

$$\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$$

deje nuestro lagrnagiano invariante. Es fácil ver que nuestro lagrangiano no respeta esta simetría, ya que el término $-\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\phi^*)\partial^\mu(e^{i\alpha(x)}\phi)$ nos da términos adicionales por la derivada de $\alpha(x)$. En particular, tenemos que

$$\delta\mathcal{L} - \partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\phi^*)\partial^\mu(e^{i\alpha(x)}\phi) - m^2 e^{i\alpha(x)}\phi e^{-i\alpha(x)}\phi^* - \mathcal{L} \tag{6}$$

$$= -|\phi|^2\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha - i(\phi\partial^\mu\alpha\partial_\mu\phi^* - \phi^*\alpha\partial_\mu\phi) \neq 0. \tag{7}$$

La invarianza gauge se obtiene a partir de dos sencillos pasos. Para lograr invarianza local debemos introducir un campo adicional en la teoría, denominado campo gauge. Por esto, el primer paso es reparametrizar la transformación introduciendo una constante e, que servirá como constante de acople que nos dicte que tan fuerte es la interacción entre nuestro campo de Klein-Gordon y el nuevo campo gauge. Por esto reformulamos nuestro problema imponiendo invarianza bajo transformaciones

$$\phi \to e^{ie\alpha(x)}\phi$$

El siguiente paso es reemplazar la derivada ordinaria ∂_μ en 4 por derivada covariante D_μ, definida mediante

$$D_\mu\phi = \partial_\mu - ieA_\mu\phi \tag{8}$$

donde A_μ es un campo vectorial denominado campo gauge [2].

[2] el procedimiento seguido se conoce como acople mínimo

La derivada covariante se construye de tal manera que transforme covariantemente (según el grupo de simetría), esto es, queremos que se cumpla que

$$D_\mu\phi \to e^{ie\alpha(x)}D_\mu\phi$$

bajo

$$\phi \to e^{ie\alpha(x)}\phi$$

Con esto, encontramos la regla de transformación para el campo gauge A_μ:

$$D_\mu(e^{ie\alpha(x)}\phi) = e^{ie\alpha(x)}(\partial_\mu - ie(A'_\mu - \partial_\mu\alpha)\phi) \stackrel{!}{=} e^{ie\alpha(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu\phi)$$

$$\implies A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \tag{9}$$

Y así, obtenemos finalmente el lagrangiano invariante gauge

$$\mathcal{L} = -D_\mu\phi^* D^\mu\phi - m^2\phi\phi^*$$

3.1.2. Electrodinámica escalar

Para completar la teoría nos falta añadir un término invariante gauge para el campo gauge A_μ. De 9 se sigue que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{10}$$

es invariante gauge. Construyendo el escalar de Lorentz a partir de 10, obtenemos finalmente el lagrangiano invariante gauge que nos da la dinámica de los campos ϕ y A_μ

$$\mathcal{L}_{SED} = -(D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{11}$$

donde el $-\frac{1}{4}$ es un factor de normalización. A partir de las ecuaciones de movimiento para este lagrangiano identificamos el campo gauge A_μ como el potencial electromagnético: $(A_\mu) = (\Phi, \vec{A})$ y el tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ como el tensor de campo electromagnético:

$$E_i = F_{0i} \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_i{}^{jk}F_{jk}.$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a 11 obtenemos las ecuaciones que describen los campos electromagnéticos y su interacción con la materia:

$$((\partial_\mu - ieA_\mu)^2 - m^2)\phi = 0 \tag{12}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{13}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \tag{14}$$

donde

$$j^\nu = i(\phi^* D^\nu \phi - \phi(D^\nu \phi)^*) \tag{15}$$

es la cuadricorriente conservada asociada a la simetría. Las ecuaciones de arriba nos dan una descripción completa de los campos electromagnéticos y la materia. La ecuacipon (12) nos dice como se comporta la materia en presencia de campos electromagnéticos y las ecuaciones (13) y (14) nos dan la dinámica de los campos electromagnéticos y su relación con las fuentes.

Mirando la carga conservada asociada a (15), encontramos que esta es corresponde precisamente a la carga eléctrica:

$$Q = \int d^3x(i(\phi^* D^0 \phi - \phi(D^0 \phi)^*))$$

4. Conclusión

En esste trabajo mostramos como el electromagnetismo de Maxwell se puede interpretar como una teoría gauge con simetría local U(1). Dicha teoría requiere de la existencia de un campo vectorial A_μ que interpretamos como el campo electromagnético. Esta simetría da lugar a una ley de conservación local: la ley de conservación de la carga eléctrica. Vimos como los principios de simetría y localidad nos guiaron a la existencia del campo electromagnético y su interacción con la materia, al igual que la existencia de la carga eléctrica y su conservación.

Referencias

[1] D. Tong, "Quantum field theory," university of Cambridge Part III Mathematical Tripos.

[2] F. Scheck, *Classical Field Theory.* Springer Berlin, Heidelberg, 2018.

[3] D. Bailina and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory.* Routledge, 1993.

[4] H. Năstase, *Classical Field Theory.* Cambridge University Press, 2019.

[5] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields.* Princeton University Press, 2002.