



# Trabajo Práctico 1

## Especificación y WP

27 de octubre de 2023

Algoritmos y Estructuras de Datos

### MonitorArbol25082023

Integrante	LU	Correo electrónico
Cruz, Brian	1832/21	bmcruzaz@gmail.com
Masucci, Bruno	1420/21	bruno.masucci@yahoo.com.ar
Rodriguez Nuesch, Christian	781/99	chnuesch@gmail.com
Romero, Tomas	564/21	tomas.a.romero0711@gmail.com



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

# 1. Especificación

## 1.1. hayBallotage

```
proc hayBallotage (in escrutinio : seq(Z)) : Bool
  requiere {|escrutinio| > 2 ∧ noHayEmpate(escrutinio) ∧ noNegativos(escrutinio)}
  asegura {res = True ⇔
    (∃maximo, subMax : Z) (0 ≤ maximo, subMax < |escrutinio| - 1 ∧L
    (sonMaxSubMax(escrutinio, maximo, subMax) ∧ esBalotage(escrutinio, maximo, subMax)))}

  pred esBalotage (escrutinio : seq(Z), maximo : Z, subMax : Z) {
    (∃n1, n2 : Z) (
      n1 = porcentaje(escrutinio, escrutinio[maximo]) ∧
      n2 = porcentaje(escrutinio, escrutinio[submax]) ∧
      ¬(n1 > 45 ∨ (n1 > 40 ∧ (n1 - n2) > 10))
    )
  }
}
```

## 1.2. HayFraude

```
proc hayFraude (in escrutinio_presidencial : seq(Z), in escrutinio_senadores : seq(Z), in escrutinio_diputados : seq(Z)) : Bool
  requiere {|escrutinio_presidencial| = |escrutinio_senadores| = |escrutinio_diputados| > 2) ∧
  noNegativos(escrutinio_presidencial) ∧ noNegativos(escrutinio_senadores) ∧
  noNegativos(escrutinio_diputados)}
  asegura {
    res = True ⇔ (totalVotos(escrutinio_presidencial) ≠ totalVotos(escrutinio_diputados)) ∨
    (totalVotos(escrutinio_diputados) ≠ totalVotos(escrutinio_senadores))}
}
```

## 1.3. obtenerSenadoresEnProvincia

```
proc obtenerSenadoresEnProvincia (in escrutinio : seq(Z)) : Z x Z
  requiere {|escrutinio| > 2 ∧ noHayEmpate(escrutinio) ∧ noNegativos(escrutinio)}
  asegura {(∃Max1, Max2 : Z) (0 ≤ Max1, Max2 < |escrutinio| - 1 ∧L
    (sonMaxSubMax(escrutinio, Max1, Max2) ∧ res = < Max1, Max2 >))}
```

## 1.4. calcularDHondtEnProvincia

```
proc calcularDHondtEnProvincia (in cant_bancas : Z, in escrutinio : seq(Z)) : seq(seq(Z))
  requiere {(cant_bancas > 0) ∧ (|escrutinio| > 1) ∧
  noExisteEmpate(cant_bancas, escrutinio) ∧ noNegativos(escrutinio)}
  asegura {(∃m : seq(seq(Z))) (
    (|m| = |escrutinio| - 1 ∧ |m[0]| = cant_bancas ∧ esMatriz(m)) ∧L
    ((∀i, j : Z) ((0 ≤ i < |escrutinio| ∧ 0 ≤ j < cant_bancas ∧ porcentaje(escrutinio, escrutinio[i]) > 3) →L
    m[i][j] = ⌊escrutinio[i]/j⌋) ∧
    (∀i : Z) ((0 ≤ i < |escrutinio| ∧ porcentaje(escrutinio, escrutinio[i]) ≤ 3) →L
    |m[i]| == 0) ∧ res = m)
  )}

  pred noExisteEmpate (cant_bancas : Z, escrutinio : seq(Z)) {
    ¬(∃i, j, m, k : Z) (((0 ≤ i, j < |escrutinio|) ∧ (1 ≤ m, k ≤ cant_bancas) ∧ (i ≠ j)) ∧L
    (escrutinio[i]/m = escrutinio[j]/k))
  }
}
```

## 1.5. obtenerDiputadosEnProvincia

```

proc obtenerDiputadosEnProvincia (in cant_bancas :  $\mathbb{Z}$ , in escrutinio :  $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ , in dHondt :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ ) :  $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ 
  requiere {unPartidoSuperaUmbral(escrutinio)  $\wedge$  cant_bancas > 0  $\wedge$  noNegativos(escrutinio)  $\wedge$  esMatriz(dHondt)  $\wedge$ 
    seCorrespondenEsctrdHont(escrutinio, dHondt)  $\wedge_L$  noHayEmpateDhont(dHont)}
  asegura {( $\exists$ maximos :  $seq\langle<\mathbb{Z}, \mathbb{Z}>\rangle$ ) (
    (estaOrdenado(dHondt, maximos)  $\wedge$  sonMaximosNCoc(cant_bancas, dHondt, maximos))  $\wedge_L$ 
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i < |res| \rightarrow_L$ 
    (porcentaje(escrutinio, escrutinio[i]) > 3  $\wedge$  res[i] = bancasGanadas(i, maximos, dHondt))  $\vee$ 
    (porcentaje(escrutinio, escrutinio[i])  $\leq$  3  $\wedge$  res[i] = 0))
  )}
  aux bancasGanadas ( partido :  $\mathbb{Z}$ , maximos :  $seq\langle<int, int>\rangle$ ) :  $\mathbb{Z}$  =
     $\sum_{i=0}^{|maximos|} Ifthenelsefi(maximos[i]_1 == partido, 1, 0)$ ;

  pred seCorrespondenEsctrdHont (escrutinio :  $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ , dHondt :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ ) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i < |escrutinio| - 1 \rightarrow_L$  escrutinio[i] == dHondt[0][i])
  }

  pred sonMaximosNCoc (cant :  $\mathbb{Z}$ , dHondt :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ , maximos :  $seq\langle<int, int>\rangle$ ) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i < |maximos| \rightarrow_L$  elementosMayores(maximos[i], dHondt) == i)
  }

  aux elementosMayores (coord :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , dHondt :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ ) :  $\mathbb{Z}$  =
     $\sum_{i=0}^{|dHondt[0]|} \sum_{j=0}^{|dHondt[0][0]|} Ifthenelsefi(dHondt[coord_1][coord_2] < dHondt[i][j], 1, 0)$ ;

  pred estaOrdenado (dHondt :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ , maximos :  $seq\langle<int, int>\rangle$ ) {
    ( $\forall i, j : \mathbb{Z}$ ) (( $0 \leq i < j < |maximos| \rightarrow_L$ 
    (dHont[maximos[i]_1][maximos[i]_2] > dHont[maximos[j]_1][maximos[j]_2]))
  }

  pred noHayEmpateDHont (dHont :  $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ ) {
    ( $\forall i, j, m, k : \mathbb{Z}$ ) (( $0 \leq i, j < |dHont|$ )  $\wedge$  ( $0 \leq m, k < |dHont[0]|$ )  $\rightarrow_L$  (dHont[i][m]  $\neq$  dHont[j][k]))
  }

```

## 1.6. validarListasDiputadosEnProvincia

```

proc validarListasDiputadosEnProvincia (in cant_bancas :  $\mathbb{Z}$ , in listas :  $seq\langle seq\langle<dni : \mathbb{Z} \times genero : \mathbb{Z}>\rangle\rangle$ ) : Bool
  requiere {cant_bancas > 0  $\wedge$  |listas| > 0  $\wedge$  sonGenerosValidos(listas)}
  asegura {( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) (( $0 \leq i < |listas|$ )  $\rightarrow_L$  (|listas[i]| = cant_bancas  $\wedge$  estanAlternados(listas[i])))}

  pred estanAlternados (listaDiputados :  $seq\langle<dni : \mathbb{Z} \times genero : \mathbb{Z}>\rangle$ ) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) (( $0 \leq i < |listaDiputados| - 1 \rightarrow_L$  (listaDiputados[i]_2  $\neq$  listaDiputados[i + 1]_2))
  }

  pred sonGenerosValidos (lista :  $seq\langle seq\langle<dni : \mathbb{Z} \times genero : \mathbb{Z}>\rangle\rangle$ ) {
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) (( $0 \leq i < |listas|$ )  $\rightarrow_L$  ( $\forall j : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq j < |listas[i]| \rightarrow_L$  ( $1 \leq listas[i][j]_2 \leq 2$ ))
  }

```

## 1.7. Preds y Auxs auxiliares

```

pred noHayEmpate (escrutinio : seq⟨ℤ⟩) {
  (∀i, j : ℤ) ((0 ≤ i, j < |escrutinio| - 1 ∧ i ≠ j) →L escrutinio[i] ≠ escrutinio[j])
}

aux porcentaje (escr : seq⟨ℤ⟩, cantVotos : ℤ) : ℝ = ((cantVotos * 100) / totalVotos(escr));

pred sonMaxSubMax (escrutinio : seq⟨ℤ⟩, maximo : ℤ, subMax : ℤ) {
  (∀i : ℤ) ((0 ≤ i < |escrutinio| - 1 ∧ maximo ≠ i ∧ subMax ≠ i) →L
    (escrutinio[i] < escrutinio[subMax] < escrutinio[maximo]))
}

aux totalVotos (escr : seq⟨ℤ⟩) : ℤ =  $\sum_{i=0}^{|escr|-1} escr[i]$ ;

pred esMatriz ( m : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩ ) {
  (∀i : ℤ) (0 < i < |m| →L |m[i]| = |m[0]|)
}

pred noNegativos (s: seq<ℤ>) {
  (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |s| →L s[i] ≥ 0)
}

pred unPartidoSuperaUmbral (s: seq<ℤ>) {
  (∃i : ℤ) (0 ≤ i < |s| ∧L porcentaje(s, s[i]) > 3)
}

```

## 2. Implementaciones y demostraciones de correctitud

### 2.1. Algoritmos

```

1 | bool hayBallotage( in e : seq<int> ): bool
2 | int max1 := 0
3 | int max2 := 1
4 | int cantVotos := e[max1] + e[max2]
5 | if e[max1] < e[max2]
6 |   int k = max1
7 |   max1 = max2
8 |   max2 = k
9 | else
10 |   skip
11 | endif
12 | int i = 2;
13 | while i < |e|-1 do
14 |   if e[max1] < e[i]
15 |     max1 = i
16 |   else if e[max2] < e[i]
17 |     max2 = i
18 |   else
19 |     skip
20 |   cantVotos = cantVotos + e[i]
21 |   endif
22 |   i++
23 | endwhile
24 | int porcGan := (e[max1] / (cantVotos + e[|e|-1])) * 100
25 | int porcSub := (e[max2] / (cantVotos + e[|e|-1])) * 100
26 |
27 | res = porcGan > 45 || (porcGan > 40 && (porcGan - porcSub) > 10)

```

Código 1: Propuesta algoritmo hayBallotage

```

1 | < int , int> obtenerSenadoresEnProvincia(in e : seq<int> )
2 | int max1 := 0;
3 | int max2 := 1;
4 | int i = 2;
5 |
6 | if e[max1] < e[max2]
7 |     int k := max1
8 |     max1 := max2
9 |     max2 := k
10 | else
11 |     skip
12 | endif
13 | while i < |e|-1 do
14 |     if e[max1] < e[i]
15 |         max2 := max1
16 |         max1 := i
17 |     else if e[max2] < e[i]
18 |         max2 := i
19 |     endif
20 |     i := i + 1
21 | endwhile
22 | res := <max1, max2>

```

Código 2: Propuesta algoritmo obtenerSenadoresEnProvincia

```

1 | bool hayFraude( in ePresidencial : seq<int>, in eSenadores : seq<int>, in eDiputados : seq<int> )
2 | int presidente := 0
3 | int senadores := 0
4 | int diputados := 0
5 | int i := 0
6 | while (i < |ePresidencial|) do
7 |     presidente := presidente + ePresidencial[i]
8 |     senadores := senadores + eSenadores[i]
9 |     diputados := diputados + ediputados[i]
10 |    i := i + 1
11 | endwhile
12 | res = presidente != diputados or diputados != senadores

```

Código 3: Propuesta algoritmo hayFraude

```

1 | bool ValidarListasDiputadosEnProvincia(in cant_bancas : int, in listas : seq<seq<<dni : int, genero : int>>>)
2 | int i := 0
3 | bool res := True
4 | while(i < |listas|) do
5 |   if |listas[i]| != cant_bancas then
6 |     res := False
7 |   else
8 |     skip
9 |   endif;
10 | int j = 0
11 | while j < |listas[i]|-1 do
12 |   if listas[i][j] == listas[i][j+1] then
13 |     res := false
14 |   else
15 |     skip
16 |   endif
17 |   j := j + 1
18 | endwhile
19 | i := i + 1
20 | endwhile

```

Código 4: Algoritmo propuesta ValidarListasDiputadosEnProvincia

## 2.2. Demostraciones

### 2.2.1. ObtenerSenadoresEnProvincia

Parcialmente Correcto

1.  $Pc \longrightarrow I$
2.  $I \wedge B \longrightarrow Qc$
3.  $\{I \wedge B\}S\{I\}$

Termina

1.  $\{I \wedge B \wedge fv = v0\}S\{fv < v0\}$
2.  $I \wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B$

$P \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio)$

$S \equiv S1; S2; S3$

$S1 \equiv max1 := 0; max2 := 1; i := 2$

$S2 \equiv if B then S2,1 else skip fi$

$B \equiv e[max1] < e[max2]$

$S2,1 = k := max1; max1 := max2; max2 := k$

$S3 = whiledo...endwhile$

$wp(S, Q) \equiv wp(S1; S2; S3, Q) \equiv wp(S1, wp(S2, wp(S3, Q))) \equiv wp(S1, wp(S2, E1)) \equiv wp(S1, E2) \equiv E3$

$Pc \equiv 0 \leq max1, max2 \leq 1 \wedge max1 \neq max2 \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge e[max1] > e[max2] \wedge$

$i = 2 \wedge noNegativos(escrutinio)$

$Qc \equiv 0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2))$

$I \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge_L$

$(0 \leq i \leq |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i), max1, max2)))$

$fv \equiv |escrutinio| - 1 - i$

$B \equiv i < |escrutinio| - 1$

$Q \equiv (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L$

$(sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2) \wedge res = < max1, max2 >)$

-----  
1.  $Pre \longrightarrow_L wp(S1\&2, Pc)$

2.  $Pc \longrightarrow wp(ciclo, Qc)$

3.  $Qc \longrightarrow_L wp(res := < max1, max2 >, Post)$

1.  $\text{Pre} \longrightarrow_L wp(S1 \& 2, Pc)$   
 $S1 = \text{max1} := 0; \text{max2} := 1; i := 2$   
 $S2 = \text{if } B \text{ then } S2,1 \text{ else skip } fi$   
 $B = e[\text{max1}] < e[\text{max2}]$   
 $S2,1 = k := \text{max1}; \text{max1} := \text{max2}; \text{max2} := k$   
 $Pc = 0 \leq \text{max1}, \text{max2} \leq 1 \wedge \text{max1} \neq \text{max2} \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge e[\text{max1}] > e[\text{max2}] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* \text{wp}(S1, \text{wp}(S2, Pc)) \equiv \text{wp}(S1, E1) \equiv \text{wp}(\text{max1} := 0; \text{max2} := 1; i := 2, E1)$   
 $\equiv \text{wp}(\text{max1} := 0; \text{max2} := 1, \text{wp}(i := 2, E1))$   
 $\equiv \text{wp}(\text{max1} := 0; \text{wp}(\text{max2} := 1, 0 \leq \text{max1}, \text{max2} \leq 1 \wedge \text{max1} \neq \text{max2} \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge 2 = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})))$   
 $\equiv \text{wp}(\text{max1} := 0, 0 \leq \text{max1}, 1 \leq 1 \wedge \text{max1} \neq 1 \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge (\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}))$   
 $\equiv 0 \leq 0, 1 \leq 1 \wedge 0 \neq 1 \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* E1 \equiv \text{wp}(S2, Pc) \equiv \text{def}(B) \wedge_L$   
 $((B \wedge \text{wp}(S2,1, Pc)) \vee$   
 $(\neg B \wedge \text{wp}(\text{skip}, Pc)))$

$\equiv 0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| \wedge_L$   
 $((B \wedge \text{wp}(S2,1, Pc)) \vee$   
 $(\neg B \wedge Pc))$

$\equiv 0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| \wedge_L$   
 $((B \wedge E2) \vee$   
 $(\neg B \wedge Pc))$

$* E2 \equiv \text{wp}(S2,1, Pc) \equiv \text{wp}(k := \text{max1}; \text{max1} := \text{max2}; \text{max2} := k, Pc)$   
 $\equiv \text{wp}(k := \text{max1}; \text{max1} := \text{max2}, E3)$   
 $\equiv \text{wp}(k := \text{max1}; E4)$   
 $\equiv \text{True} \wedge_L$   
 $|\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge e[\text{max2}] > e[\text{max1}] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge e[\text{max2}] > e[\text{max1}] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* E3 \equiv \text{wp}(\text{max2} := k, Pc) \equiv \text{True} \wedge_L$   
 $|\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge e[\text{max1}] > e[k] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* E4 \equiv \text{wp}(\text{max1} := \text{max2}, E3) \equiv \text{True} \wedge_L$   
 $|\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge e[\text{max2}] > e[k] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* B \wedge E2 \equiv e[\text{max1}] < e[\text{max2}] \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$* \neg B \wedge Pc \equiv e[\text{max1}] \geq e[\text{max2}] \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio})$   
 $\wedge e[\text{max1}] \geq e[\text{max2}] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $\equiv e[\text{max1}] \geq e[\text{max2}] \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

{Aplicamos:  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$ }

$E1 \equiv ((e[\text{max1}] < e[\text{max2}]) \vee (e[\text{max1}] \geq e[\text{max2}])) \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge$   
 $\text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$\text{Pre} \rightarrow_L \text{wp}(S1\&2, Pc) : \text{como}$   
 $* \text{wp}(S1\&2, Pc) \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $* \text{Pre} \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$   
 $* |\text{escrutinio}| > 2 \rightarrow |\text{escrutinio}| > 2, \text{True}$   
 $* \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \rightarrow \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}), \text{True}$   
 $* \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \rightarrow \text{noNegativos}(\text{escrutinio}), \text{True}$

Luego su implicación es tautología.

2.  $Pc \rightarrow \text{wp}(\text{ciclo}, Qc)$

Parcialmente Correcto

2.1.  $Pc \rightarrow I$

$Pc \equiv 0 \leq \text{max1}, \text{max2} \leq 1 \wedge \text{max1} \neq \text{max2} \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge$   
 $e[\text{max1}] > e[\text{max2}] \wedge i = 2 \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio})$

$I \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge$   
 $((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L$   
 $(0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \text{max1}, \text{max2}))))$

Asumimos el precedente verdadero, luego :

$((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq 2 \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L$   
 $(\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, 2), \text{max1}, \text{max2}))))$

$\{(0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) = \text{True}, \text{por } 0 \leq \text{max1}, \text{max2} \leq 1 \wedge |\text{escrutinio}| > 2\}$

$(0 \leq 2 \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, 2), \text{max1}, \text{max2})))$

$\{0 \leq 2 \leq |\text{escrutinio}| - 1 = \text{True} \text{ por } |\text{escrutinio}| > 2\}$

$\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, 2), \text{max1}, \text{max2})$

$\{\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, 2), \text{max1}, \text{max2}) = \text{True}, \text{por que vale}$   
 $0 \leq \text{max1}, \text{max2} \leq 1 \wedge \text{max1} \neq \text{max2} \wedge e[\text{max1}] > e[\text{max2}]\}$

por tomar el precedente como verdadero}

True

2.2.  $(I \wedge \neg B) \rightarrow Qc$

$I \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L$   
 $(0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \text{max1}, \text{max2}))))$

$\neg B \equiv i \geq |\text{escrutinio}| - 1$

$Qc \equiv (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{escrutinio}, \text{max1}, \text{max2})))$

$I \wedge \neg B \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L$   
 $(0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \text{max1}, \text{max2})))) \wedge i \geq |\text{escrutinio}| - 1$

$\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L$   
 $(i = |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, |\text{escrutinio}| - 1), \text{max1}, \text{max2}))))$

$\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L$   
 $(i = |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{escrutinio}, \text{max1}, \text{max2}))))$



$$\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L \text{sonMaxSubMax}(\text{escrutinio}, \text{max1}, \text{max2})$$

$$\{ (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{escrutinio}, \text{max1}, \text{max2})) \} \iff Qc$$

Asumiendo al precedente como verdadero, luego la implicación:  
 $(0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{escrutinio}, \text{max1}, \text{max2})))$   
 $\iff \text{true} \wedge_L \text{true}$

{ Luego, siempre que el precedente es verdadero, luego Qc también es verdadero }

{ Por lo tanto,  $(I \wedge \neg B) \longrightarrow Qc$ , es verdadera. }

### 2.3. $\{I \wedge B\}S\{I\}$

$B1 \equiv \text{escrutinio}[\text{max1}] < \text{escrutinio}[i]$

$S1 \equiv \text{max2} := \text{max1}; \text{max1} := i$

$S2 \equiv \text{if } B2 \text{ then } S2,1 \text{ else } S2,2 \text{ fi}$

$B2 \equiv \text{escrutinio}[\text{max2}] < \text{escrutinio}[i]$

$S2,1 \equiv \text{max2} := i$

$S2,2 \equiv \text{skip}$

$$I \wedge B \equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \text{max1}, \text{max2}))) \wedge i < |\text{escrutinio}| - 1$$

$$\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge (0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \text{max1}, \text{max2})))$$

$$\text{wp}(S, I) \equiv \text{wp}(\text{if } B1 \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi}; i := i + 1, I)$$

$$\equiv \text{wp}(\text{if } B1 \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi}, \text{wp}(i := i + 1, I))$$

$$\equiv \text{wp}(\text{if } B1 \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi}, |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((0 \leq \text{max1}, \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i + 1 < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), \text{max1}, \text{max2}))))$$

$$\equiv \text{def}(B1) \wedge_L (B1 \wedge \text{wp}(S1, I)) \vee (\neg B1 \wedge \text{wp}(S2, I))$$

$$\equiv (0 \leq i, \text{max1} < |\text{escrutinio}|) \wedge_L (B1 \wedge E1) \vee (\neg B1 \wedge E2)$$

$$\equiv (0 \leq i, \text{max1} < |\text{escrutinio}|) \wedge_L ((\text{escrutinio}[\text{max1}] < \text{escrutinio}[i] \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((0 \leq i, \text{max1} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i + 1 \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), i, \text{max1})))) \vee (\text{escrutinio}[\text{max1}] \geq \text{escrutinio}[i] \wedge 0 \leq \text{max2}, \text{max1} < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge 0 \leq i < |\text{escrutinio}| - 2 \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge_L ((\text{escrutinio}[\text{max2}] < \text{escrutinio}[i] \wedge \text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), \text{max1}, i)) \vee (\text{escrutinio}[\text{max2}] \geq \text{escrutinio}[i] \wedge \text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), \text{max1}, \text{max2}))))))$$

$$\equiv (0 \leq i < |\text{escrutinio}|) \wedge (0 \leq \text{max1} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge ((\text{escrutinio}[\text{max1}] < \text{escrutinio}[i] \wedge ((0 \leq \text{max1} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 2 \wedge_L (\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), i, \text{max1})))) \vee (\text{escrutinio}[\text{max1}] \geq \text{escrutinio}[i] \wedge (0 \leq \text{max2} < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge (0 \leq i < |\text{escrutinio}| - 2) \wedge_L ((\text{escrutinio}[\text{max2}] < \text{escrutinio}[i] \wedge \text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), \text{max1}, i)) \vee (\text{escrutinio}[\text{max2}] \geq \text{escrutinio}[i] \wedge \text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i + 1), \text{max1}, \text{max2}))))))$$

$$\begin{aligned} wp(S, I) \equiv & (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge (0 \leq i < |escrutinio| - 2) \wedge |escrutinio| > 2 \wedge \\ & noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge_L \\ & ((escrutinio[max1] < escrutinio[i] \wedge (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), i, max1)) \vee \\ & (escrutinio[max2] < escrutinio[i] \leq escrutinio[max1] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))) \end{aligned}$$

$$I \wedge B \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge_L (0 \leq i < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i), max1, max2)))$$

$$I \wedge B \longrightarrow wp(S, I) :$$

Asumimos el precedente como verdadero, luego :

$$\begin{aligned} & (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge (0 \leq i < |escrutinio| - 2) \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge \\ & noNegativos(escrutinio) \wedge_L ((escrutinio[max1] < escrutinio[i] \wedge (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), i, max1)) \vee \\ & (escrutinio[max2] < escrutinio[i] \leq escrutinio[max1] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))) \end{aligned}$$

{notamos que al achicar el rango de i en 1, vemos que pasa con el último elemento considerando los tres casos posibles.

\* Si este elemento en i es mayor que max1, i es el índice del partido más votado en la subsecuencia escrutinio[0,i] , luego max1 del segundo.

\* Si este elemento en i está entre e[max1] y e[max2], luego es el índice del segundo partido más votado en la subsecuencia escrutinio[0,i]

\* Si este elemento en i es menor que e[max2], luego no cambian los partidos más votados en la subsecuencia.

Luego la implicación es verdadera

$$\begin{aligned} \iff & 0 \leq i < |escrutinio| - 2 \wedge_L \\ & (((escrutinio[max1] < escrutinio[i] \wedge (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), i, max1))) \vee \\ & (escrutinio[max2] < escrutinio[i] \leq escrutinio[max1] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E1 \equiv & wp(S1, I) \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge \\ & ((0 \leq i, max1 < |escrutinio| - 1) \wedge_L \\ & (0 \leq i + 1 \leq |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), i, max1)))) \end{aligned}$$

$$E2 \equiv wp(S2, I) \equiv def(B2) \wedge_L (B2 \wedge wp(S2, 1, I)) \vee (\neg B2 \wedge wp(S2, 2, I))$$

$$\begin{aligned} \equiv & 0 \leq max2, i < |escrutinio| \wedge_L ((escrutinio[max2] < escrutinio[i] \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge \\ & noNegativos(escrutinio) \wedge \\ & ((0 \leq max1, i < |escrutinio|) \wedge_L (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)))) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \\ & \wedge ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio|) \wedge_L \\ & (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \equiv & 0 \leq max2, i < |escrutinio| \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge_L \\ & ((escrutinio[max2] < escrutinio[i] \wedge ((0 \leq max1 < |escrutinio| \wedge 0 \leq i < |escrutinio| - 2 \wedge_L \\ & (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)))) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio|) \wedge_L (-1 \leq i < |escrutinio| - 2 \wedge_L \\ & (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \equiv & 0 \leq max2, max1 < |escrutinio| - 1 \wedge (0 \leq i < |escrutinio| - 2) \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge \\ & noNegativos(escrutinio) \wedge_L ((escrutinio[max2] < escrutinio[i] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)) \vee \\ & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i] \wedge sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E2.1 \equiv & wp(S2,1,I) \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge \\ & ((0 \leq max1, i < |escrutinio| - 1) \wedge_L \\ & (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E2.2 \equiv & wp(S2,2,I) \equiv |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge noNegativos(escrutinio) \wedge \\ & ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge_L \\ & (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B2 \wedge E2,1 \equiv & (escrutinio[max2] < escrutinio[i]) \wedge (|escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge \\ & noNegativos(escrutinio) \wedge ((0 \leq max1, i < |escrutinio| - 1) \wedge_L (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L \\ & (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, i)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg B2 \wedge wp(S2,2,I) \equiv & (escrutinio[max2] \geq escrutinio[i]) \wedge |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge \\ & noNegativos(escrutinio) \wedge \\ & ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge_L (0 \leq i + 1 < |escrutinio| - 1 \wedge_L \\ & (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i + 1), max1, max2)))) \end{aligned}$$

Termina

$$2.4. \{I \wedge B \wedge v0 = fv\} S \{fv < v0\}$$

$$\begin{aligned} I \wedge B \wedge v0 = fv \equiv & |escrutinio| > 2 \wedge noHayEmpate(escrutinio) \wedge ((0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1) \wedge_L \\ & (0 \leq i \leq |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(subseq(escrutinio, 0, i), max1, max2))) \wedge \\ & i < |escrutinio| - 1 \wedge v0 = |escrutinio| - 1 - i \end{aligned}$$

$$S \equiv \text{if } e[max1] > e[i] \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi, } fv < v0$$

$$S1 \equiv max2 := max1; max1 := i$$

$$S2 \equiv \text{if } e[max2] > e[i] \text{ then } max2 := i \text{ else skip fi}$$

$$\begin{aligned} wp(S, fv < v0) \equiv & wp(\text{if } e[max1] > e[i] \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi; } i := i + 1, fv < v0) \\ \equiv & wp(\text{if } e[max1] > e[i] \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi, } wp(i := i + 1, fv < v0)) \\ \equiv & wp(\text{if } e[max1] > e[i] \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ fi, } |escrutinio| - i - 2 < v0) \\ \equiv & def(e[max1] > e[i]) \wedge_L ((e[max1] > e[i] \wedge wp(S1, |escrutinio| - i - 2 < v0)) \vee \\ & (e[max1] \leq e[i] \wedge wp(S2, |escrutinio| - i - 2 < v0))) \\ \equiv & 0 \leq max1, i < |escrutinio| \wedge_L ((e[max1] > e[i] \wedge E1) \vee (e[max1] \leq e[i] \wedge E2)) \\ \equiv & 0 \leq max1, i < |escrutinio| \wedge_L ((e[max1] > e[i] \wedge |escrutinio| - i - 2 < v0) \vee \\ & (e[max1] \leq e[i] \wedge 0 \leq i, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L |escrutinio| - i - 2 < v0)) \\ \equiv & 0 \leq max1, i < |escrutinio| \wedge |escrutinio| - i - 2 < v0 \wedge_L \\ & ((e[max1] > e[i]) \vee (e[max1] \leq e[i] \wedge 0 \leq i, max2 < |escrutinio| - 1)) \end{aligned}$$

Asumimos el precedente  $(I \wedge B \wedge v0 = fv)$  como verdadero, luego :

$$\begin{aligned} &\equiv 0 \leq \max1, i < |\text{escrutinio}| \wedge |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0 \wedge_L \\ &((e[\max1] > e[i]) \vee (e[\max1] \leq e[i] \wedge 0 \leq i, \max2 < |\text{escrutinio}| - 1)) \end{aligned}$$

$$\{\text{por } 0 \leq \max1, \max2 < |\text{escrutinio}| - 1 \text{ y } 0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1\}$$

$$\begin{aligned} &\iff \text{True} \wedge |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0 \wedge_L ((e[\max1] > e[i]) \vee \\ &\neg(e[\max1] \leq e[i] \wedge \text{True})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{ (a \vee \neg a) = \text{True} \} \\ &\iff |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0 \end{aligned}$$

$$\{ v0 \equiv |\text{escrutinio}| - i - 1 \}$$

$$\iff |\text{escrutinio}| - i - 2 < |\text{escrutinio}| - i - 1$$

$$\iff \text{True}$$

$$E1 \equiv wp(\max2 := \max1; \max1 := i; |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0) \equiv |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0$$

$$E2 \equiv wp(\text{if } e[\max2] > e[i] \text{ then } \max2 := i \text{ else skip fi}, |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \text{def}(e[\max2] > e[i]) \wedge_L ((e[\max2] > e[i] \wedge wp(\max2 := i, |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0)) \vee \\ &(e[\max2] \leq e[i] \wedge wp(\text{skip}, |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv 0 \leq i, \max2 < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L ((e[\max2] > e[i] \wedge |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0) \vee \\ &(e[\max2] \leq e[i] \wedge |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0)) \end{aligned}$$

$$\{ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) = q \}$$

$$\equiv 0 \leq i, \max2 < |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L |\text{escrutinio}| - i - 2 < v0$$

$$2.5. (I \wedge fv \leq 0) \longrightarrow \neg B$$

$$\begin{aligned} I \wedge fv \leq 0 &\equiv |\text{escrutinio}| > 2 \wedge \text{noHayEmpate}(\text{escrutinio}) \wedge \text{noNegativos}(\text{escrutinio}) \wedge \\ &((0 \leq \max1, \max2 < |\text{escrutinio}| - 1) \wedge_L (0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1 \wedge_L \\ &(\text{sonMaxSubMax}(\text{subseq}(\text{escrutinio}, 0, i), \max1, \max2))) \wedge |\text{escrutinio}| - 1 - i \leq 0 \end{aligned}$$

$$\iff (|\text{escrutinio}| - 1 - i \leq 0) \wedge (0 \leq i \leq |\text{escrutinio}| - 1)$$

$$\iff i = |\text{escrutinio}| - 1$$

Luego,

$$i = |\text{escrutinio}| - 1 \longrightarrow i \geq |\text{escrutinio}| - 1.$$

$$\begin{aligned}
& 3. Qc \longrightarrow_L wp(res := \langle max1, max2 \rangle, Post) \\
& * Qc \equiv (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2))) \\
& * Post \equiv Q \equiv (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) ( \\
& \quad 0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2) \wedge res = \langle max1, max2 \rangle) ) \\
& ) \\
& * wp(res := \langle max1, max2 \rangle, Q) \equiv (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) ( \\
& \quad 0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2) \wedge \\
& \quad \langle max1, max2 \rangle = \langle max1, max2 \rangle) ) \\
& ) \\
& \equiv (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) ( \\
& \quad 0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2)) ) \\
& ) \\
& * Qc \longrightarrow_L wp(res := \langle max1, max2 \rangle, Post) \equiv (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L \\
& (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2))) \longrightarrow_L (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L \\
& (sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2)))
\end{aligned}$$

Asumimos el precedente como verdadero, luego:

$$\iff (\exists max1, max2 : \mathbb{Z}) (0 \leq max1, max2 < |escrutinio| - 1 \wedge_L sonMaxSubMax(escrutinio, max1, max2))$$

{ Como el precedente es verdadero, luego podemos afirmar que sí existen dos variables en ese rango que cumplan sonMaxSubMax(), en particular, max1, max2 del precedente. }

Al probar estas tres cosas, por corolario de monotonía sabemos que  $Pre \longrightarrow wp(\text{programa completo}, Post)$  y, por lo tanto, el programa es correcto con respecto a la especificación.

### 2.2.2. HayFraude

1.  $Pre \longrightarrow_L wp(S1, Pc)$
2.  $Pc \longrightarrow wp(ciclo, Qc)$
3.  $Qc \longrightarrow_L wp(res := presidente \neq senadores \vee diputados \neq senadores, Post)$

$$Pre \equiv |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2 \wedge noNegativos(escrutinio\_presidencial) \wedge noNegativos(escrutinio\_senadores) \wedge noNegativos(escrutinio\_diputados)$$

$$Pc \equiv presidente = 0 \wedge senadores = 0 \wedge diputados = 0 \wedge i = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$I \equiv 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (presidente = totalVotos(subseq(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ diputados = totalVotos(subseq(eDiputados, 0, i)) \wedge senadores = totalVotos(subseq(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$Q \equiv res = True \iff totalVotos(ePresidencial) \neq totalVotos(eDiputados) \vee \\ totalVotos(eDiputados) \neq totalVotos(eSenadores)$$

$$Qc \equiv (presidente = totalVotos(ePresidencial) \wedge diputados = totalVotos(eDiputados) \wedge \\ senadores = totalVotos(eSenadores) \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

S = S1; S2; S3  
S1  $\equiv$  *presidente* := 0; *senadores* := 0; *diputados* := 0

S2  $\equiv B = i < |ePresidencial|$

S2.1 = *presidente* := *presidente* + ePresidencial[i];  
*senadores* := *senadores* + eSenadores[i];  
*diputados* := *diputados* + ediputados[i];  
i := i + 1;

S3  $\equiv res = presidente \neq diputados \vee diputados \neq senadores$

$fv \equiv |ePresidencial| - i$

---

1. Pre  $\longrightarrow_L wp(S1, Pc)$

\* wp(S1, Pc)  $\equiv wp(presidente := 0; senadores := 0; diputados := 0; i := 0, Pc)$

$\equiv wp(presidente := 0; senadores := 0; diputados := 0; presidente = 0 \wedge senadores = 0 \wedge diputados = 0 \wedge 0 = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2)$

$\equiv wp(presidente := 0; senadores := 0; presidente = 0 \wedge senadores = 0 \wedge 0 = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2)$

$\equiv wp(presidente := 0; presidente = 0 \wedge 0 = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2)$

$\equiv 0 = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$

$\equiv |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$

{ Pre  $\longrightarrow wp(S1, Pc)$  : asumimos al precedente como verdadero, luego la implicacion es verdadera }

2. Pc  $\longrightarrow wp(ciclo, Qc)$ .

Parcialmente correcto :

2.1. Pc  $\longrightarrow I$  ;

2.2.  $(I \wedge \neg B) \longrightarrow Qc$

2,3.  $\{I \wedge B\} S \{I\}$

Termina:

2.4.  $\{ I \wedge B \wedge fv = v0 \} S \{ fv < v0 \}$

2,5.  $(I \wedge fv \leq 0) \longrightarrow \neg B$

2.1. Pc  $\longrightarrow I$  ;

Pc  $\equiv presidente = 0 \wedge senadores = 0 \wedge diputados = 0 \wedge i = 0 \wedge |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$

$I \equiv 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (presidente = totalVotos(subseq(ePresidencial, 0, i)) \wedge$   
*diputados* = totalVotos(subseq(eDiputados, 0, i))  $\wedge$  *senadores* = totalVotos(Subseq(eSenadores, 0, i)))  $\wedge$   
 $|eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$

Asumimos al precedente Pc como verdadero, luego:

$$0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$\iff 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \text{True}$$

$$\iff 0 \leq 0 \leq |ePresidencial| \wedge_L (0 = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, 0)) \wedge \\ 0 = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, 0)) \wedge 0 = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, 0)))$$

{ Las sumatorias quedan en 0, porque van de 0 a -1. }

$$\iff \text{True} \wedge_L (0 = 0 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0)$$

$$\iff \text{True}$$

## 2.2. $(I \wedge \neg B) \longrightarrow Qc$

$$I \wedge \neg B \equiv i \geq |ePresidencial| \wedge 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$\equiv i = |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$\equiv (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, |ePresidencial|))) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, |ePresidencial|)) \wedge \\ \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, |ePresidencial|))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$\equiv (\text{presidente} = \text{totalVotos}(ePresidencial) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(eDiputados) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(eSenadores) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

Como  $I \wedge \neg B \equiv Qc$ , luego la implicacion es verdadera

## 2.3. $\{ I \wedge B \} S \{ I \}$

$$* \text{ wp}(S, I) \equiv \text{wp}(\text{presidente} := \text{presidente} + ePresidencial[i]; \text{senadores} := \text{senadores} + eSenadores[i]; \\ \text{diputados} := \text{diputados} + eDiputados[i]; i := i + 1, I)$$

$$E1 \equiv \text{wp}(i := i + 1, I) \equiv 0 \leq i + 1 \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i + 1)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i + 1)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i + 1))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

$$E2 \equiv \text{wp}(\text{presidente} := \text{presidente} + ePresidencial[i]; \text{senadores} := \text{senadores} + eSenadores[i]; \\ \text{diputados} := \text{diputados} + eDiputados[i], E1)$$

$$\equiv 0 \leq i < |ePresidencial| \wedge_L (0 \leq i + 1 \leq |ePresidencial| \wedge_L \\ (\text{presidente} + ePresidencial[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i + 1)) \wedge \\ \text{diputados} + eDiputados[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i + 1)) \wedge \\ \text{senadores} + eSenadores[i] = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i + 1))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2)$$

$$\begin{aligned} &\equiv 0 \leq i \leq |ePresidencial| - 1 \wedge_L (\text{presidente} + ePresidencial[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i + 1)) \wedge \\ &\text{diputados} + eDeputados[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i + 1)) \wedge \\ &\text{senadores} + eSenadores[i] = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i + 1))) \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \wedge B &\equiv 0 \leq i < |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ &\text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \end{aligned}$$

Asumimos al precedente como verdadero, luego

$$\begin{aligned} \text{wp}(S, I) &\equiv 0 \leq i \leq |ePresidencial| - 1 \wedge_L (\text{presidente} + ePresidencial[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i + 1)) \wedge \\ &\text{diputados} + eDeputados[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i + 1)) \wedge \\ &\text{senadores} + eSenadores[i] = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i + 1))) \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \text{True} \wedge_L (\text{presidente} + ePresidencial[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) + ePresidencial[i] \wedge \\ &\text{diputados} + eDeputados[i] = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i)) + eDeputados[i] \wedge \\ &\text{senadores} + eSenadores[i] = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i)) + eSenadores[i] \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ &\text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i)) \wedge \\ &\text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge |eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \end{aligned}$$

$$\iff \text{True}$$

{ Vale por Precedente }

2.4.  $\{ I \wedge B \wedge fv = v0 \} S \{ fv < v0 \}$

$$\begin{aligned} * \text{wp}(S, fv < v0) &\equiv \text{wp}(\text{presidente} := \text{presidente} + ePresidencial[i]; \\ &\text{senadores} := \text{senadores} + eSenadores[i]; \\ &\text{diputados} := \text{diputados} + eDeputados[i]; i := i + 1, fv < v0) \end{aligned}$$

$$\equiv |ePresidencial| - i - 1 < v0$$

Asumimos al precedente como verdadero, luego :

$$|ePresidencial| - i - 1 < v0 \iff |ePresidencial| - i - 1 < |ePresidencial| - i$$

$$\iff \text{True}.$$

2.5.  $(I \wedge fv \leq 0) \longrightarrow \neg B$

$$\begin{aligned} I \wedge fv \leq 0 &\equiv 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ &\text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \wedge (|ePresidencial| - i) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff 0 \leq i \leq |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ &\text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDeputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ &|eSenadores| = |eDeputados| = |ePresidencial| > 2 \wedge |ePresidencial| \leq i \end{aligned}$$



Como  $i \leq |ePresidencial| \wedge |ePresidencial| \leq i \longrightarrow i = |ePresidencial|$ , luego :

$$i = |ePresidencial| \wedge_L (\text{presidente} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(ePresidencial, 0, i)) \wedge \\ \text{diputados} = \text{totalVotos}(\text{subseq}(eDiputados, 0, i)) \wedge \text{senadores} = \text{totalVotos}(\text{Subseq}(eSenadores, 0, i))) \wedge \\ |eSenadores| = |eDiputados| = |ePresidencial| > 2$$

Asumimos al precedente como verdadero, luego:

$$i = |ePresidencial| \longrightarrow i \geq |ePresidencial|$$

$$\Longleftrightarrow \text{True}$$

$$\{\text{Por } i = |ePresidencial| \text{ del precedente}\}$$

$$3. Qc \longrightarrow_L wp(\text{res} := \text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores}, \text{Post})$$

$$* wp(\text{res} := \text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores}, \text{Post})$$

$$\equiv (\text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores}) = \text{True} \\ \Longleftrightarrow \text{totalVotos}(ePresidencial) \neq \text{totalVotos}(eDiputados) \vee \text{totalVotos}(eDiputados) \neq \text{totalVotos}(eSenadores) \\ \equiv (\text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores}) \\ \Longleftrightarrow \text{totalVotos}(ePresidencial) \neq \text{totalVotos}(eDiputados) \vee \text{totalVotos}(eDiputados) \neq \text{totalVotos}(eSenadores)$$

Asumimos al precedente como verdadero, luego:

$$(\text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores}) \Longleftrightarrow (\text{presidente} \neq \text{diputados} \vee \text{diputados} \neq \text{senadores})$$

$$\{A \Longleftrightarrow A \equiv \text{True}, \text{ ya que en los valores de presidente, diputados y senadores,} \\ \text{esta la suma de los votos totales por escrutinio, tal como lo expresa en totalVotos(escrutinio).}\}$$

$$\{\text{Luego,} \\ Qc \longrightarrow_L \text{True} \equiv \text{True.}\}$$

Al probar estas tres cosas, por corolario de monotonía sabemos que  $\text{Pre} \longrightarrow wp(\text{programa completo}, \text{Post})$  y, por lo tanto, el programa completo es correcto con respecto a la especificación.