Matemática Discreta

Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana

Lic en Sistemas de Información - FCyT - UADER

2022

Unidad 1: Combinatoria. (Segunda parte)

¿Cuántas disposiciones (lineales) se pueden formar con las letras de la palabra $M\ I\ S\ S\ I\ S\ S\ I\ P\ P\ I$?.

Se tienen 11 lugares para ubicar 11 letras, pero la respuesta no es 11!, ya que tenemos símbolos repetidos.

Consideremos ubicar:
Dos letras P en esos 11 lugares: $C(11, 2)$
Cuatro letras S en los 9 lugares restantes: $C(9, 4)$
Cuatro letras I en los 5 lugares disponibles: $C(5, 4)$
Por último queda una letra M que se ubicará en el único lugar restante.
Haciendo uso de la regla del producto:

$$C(11, 2)C(9, 4)C(5, 4) = \frac{11!}{2!9!}\ \frac{9!}{4!5!}\ \frac{5!}{4!1!} = \frac{11!}{\underbrace{2!4!4!1!}_{Observa}} = 34650$$

Teorema

Suponga que una sucesión S de n artículos tiene n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, ..., n_t objetos idénticos del tipo t, donde $n_1 + n_2 + ... + n_t = n$. Entonces, el número de ordenamientos de S es

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_t!}$$

Ejemplo 1
Calcular el número de disposiciones de las letras de TALLAHASSEE.

Respuesta
Según el teorema anterior debemos considerar que hay: 1 T, 3 A, 2 L, 1 H, 2 S y 2 E, por lo que se pueden armar 831600 ordenamientos diferentes.

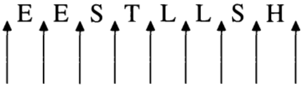
$$\frac{11!}{1!3!2!1!2!2!} = 831600$$

Ejemplo 2
De los 831600 ordenamientos anteriores, ¿cuántas no tienen letras A adyacentes?

Respuesta
Primero se ordenan las letras restantes:

$$\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040$$

Luego se consideran que las letras A se pueden ubicar en cualquiera de los nueve lugares disponibles al inicio de la palabra o entre las letras restantes:



ello se puede hacer de $C(9,3) = 84$ formas diferentes. Luego, utilizando la regla del producto, las letras de las palabra TALLAHASSEE se pueden ordenar de 423360 formas distintas:

$$5040 \cdot 84 = 423360$$

Al regresar a casa después de una práctica de carrera en pista, siete estudiantes de bachillerato se detienen en un restaurante de comida rápida, donde cada uno puede comer lo siguiente: una hamburguesa con queso, un hot dog, un taco o un sandwich de atún. ¿Cuántas compras diferentes son posibles?

1. c, c, h, h, t, t, f	1. x x | x x | x x | x
2. c, c, c, c, h, t, f	2. x x x x | x | x | x
3. c, c, c, c, c, c, f	3. x x x x x x | | | x
4. h, t, t, f, f, f, f	4. | x | x x | x x x x
5. t, t, t, t, t, f, f	5. | | x x x x x | x x
6. t, t, t, t, t, t, t	6. | | x x x x x x x |
7. f, f, f, f, f, f, f	7. | | | x x x x x x x

Al observar la segunda columna, es evidente que se puede interpretar el problemas como: ¿a dónde coloco la barra divisoria que me separa el tipo de comida? ¿o a dónde coloca cada pedido entre las barras divisorias?
Como son 7 estudiantes y 3 lineas — divisorias, se puede pensar como una selección de 7 lugares en un total de 10 $(7+3)$.
Así el pedido de estoy estudiantes se puede realizar de 120 formas diferentes

$$\binom{10}{7} = 120$$

En general, este tipo de problema, se lo conoce como un problema de *Combinaciones con Repetición.*

Combinaciones con repetición

Si X es un conjunto que contiene t elementos, el número de selecciones no ordenadas de k elementos de X, con repetición, es

$$\left(\begin{array}{c} k+t-1 \\ t-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} k+t-1 \\ k \end{array} \right)$$

Es decir, cuando queremos elegir, con repetición, k de t objetos distintos, vemos que (como en la tabla anterior) estamos considerando todas las disposiciones de k letras x y $(t-1)$ barras $|$, y que su número es $\binom{k+t-1}{k}$

Ejemplo 1
¿De cuántas formas podemos distribuir diez manzanas entre cuatro niños, de modo que cada uno reciba al menos una manzana?

Respuesta
Si al menos uno recibe una manzana, de las diez disponibles, quedan 6 para repartir, entre 4. Considerando que no importa el orden en que se repartan y que son manzanas indistinguibles, la forma de repartirlas es:

$$C(6+(4-1),6) = C(9,6) = 84$$

Ejemplo 2
¿De cuántas formas es posible distribuir 10 monedas (idénticas) entre cinco niños si (a) no hay restricciones? (b) cada niño recibe al menos una moneda? (c) el niño mayor recibe al menos dos monedas?

Respuesta

- cada niño recibe al menos una moneda, no hay limitaciones:

$$\binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = 1001$$

- cada niño recibe al menos una, quedan 5 monedas por repartir:

$$\binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = 126$$

- el mayor decibe al menos dos, quedan 8 por repartir:

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$

Ejemplo 3
Una tienda de helados tiene disponibles 31 sabores de helado. ¿De cuántas formas de puede obtener una docena de conos de helado si (a) no queremos el mismo sabor más de una vez? (b) un sabor puede obtenerse hasta 12 veces? (c) un sabor no puede ordenarse más de un 11 veces?

Respuesta

- uno de cada gusto, solo debemos elegirlo:

$$\binom{31}{12} = 14120525$$

- selecciono 12 gustos, pudiendo repetir cualquiera de ellos:

$$\binom{12+31-1}{31} = \binom{42}{31} = 4280561376$$

- de todas las combinaciones posibles, la única que no deseo, es la elegir todos del mismo gusto:

$$\binom{42}{31} - 31 = 4280561345$$

Ejemplo 4
La presidenta Elena tiene cuatro vicepresidentas: (1) Beatriz, (2) Carmen, (3) María Luisa y (4) Mónica. Elena desea distribuir entre ellas 1000 pesos en cheques de gratificación en navidad; cada cheque será expedido por un múliplo de 100 pesos. Calcular el número de formas de distribuir esos cheques...

Respuesta

- ... si es posible que una o más de las vicepresidentas no obtenga nada.
- ... si cada vicepresidenta debe recibir al menos 100 pesos.
- ... si cada vicepresidenta debe recibir al menos 100 pesos y Mónica, su vicepresidenta ejecutiva, recibe al menos 500 pesos.

Respuesta

- Si se admite el caso de que una o más vicep. no obtenga nada, la presidenta Elena hace una selección de tamaño 10 (uno por cada unidad de \$ 100) de una colección de tamaño 4 (viceprec.), con repetición. Esto puede hacerse de $C(4 + 10 - 1, 10) = C(13, 10) = 286$ formas.
- Si desea qe no haya resentimientos, cada vicep. debe recibir al menos \$ 100. Con esta restricción, sólo quedan repartir \$ 600 (6 cheques). Ello se puede hacer de $C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$ formas.
- Si cada vicepresidenta debe recibir al menos \$ 100 y Mónica, vicep. ejecutiva, recibe al menos \$ 500, entonces quedan por repartir \$ 200 (2 cheques). El número de formas en que Elena puede hacer esto es:

$$C(4 + 2 - 1, 2) = 10$$

Ejemplo 5
Un mensaje está formado por 12 símbolos diferentes y se va a transmitir a través de un canal de comunicación. Además de los 12 símbolos, el transmisor también enviará un total de 45 espacios en blanco entre los símbolos, usando al menos tres espacios entre cada par de símbolos consecutivos. ¿De cuántas formas puede el transmisor enviar ese mensaje?

Respuesta

Hay 12! formas de colocar los 12 símbolos diferentes y para cualquiera de estas disposiciones hay 11 posiciones entre los 12 símbolos. Debido a que debe haber al menos tres espacios entre los símbolos consecutivos, utilizamos hasta 33 de los 45 espacios y distribuimos los 12 espacios restantes.
Ésta es una selección, con repetición, de tamaño 12 (los espacios) de una colección de tamaño 11 (las posiciones), y puede realizarse de $C(11+12-1,12) = C(22,12) = 646646$ formas.
En consecuencia, por la regla de la multiplicación, el transmisor puede enviar tales mensajes con el espacio necesario de $12!\binom{22}{12} = 3{,}097 \cdot 10^{17}$ formas.

Ejemplo 6
Determine todas las soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, para $x_i \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq 4$.

Respuesta
Este problema es equivalente al problema de los 4 tipos de comidas que 7 estudiantes deben seleccionar para pedir. Cada x_i representa el número de pedidos de la comida i. Así, una solución posible es $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, por ejemplo.
De esta manera, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación dada es:

$$C(7 + 4 - 1, 7) = C(10, 7) = 120$$

La siguiente tabla resume las fórmulas más importantes que hemos visto:

-	Sin repetición	Con repetición
Selecciones ordenadas	$n!$	$n!/(n_1! \cdots n_t!)$
Selecciones no ordenadas	$C(n, r)$	$C(k + t - 1, k)$

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.6 (Página 265) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

1. 3-4-5
2. 8-9
3. 12-13
4. 24
5. 26

Supongamos que se tiene una suma de números (o expresiones) que cumplen con cierto patrón, por ejemplo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 533 + 535$$

existe una notación abreviada de la misma. La idea consiste en encontrar un patrón que cumple cada término, en este caso es la suma de todos los impares desde 1 hasta 535. Por lo que cada término tendrá la forma de un impar.

Sumatoria o Notación Sigma

La operación sumatoria se expresa con la letra griega sigma mayúscula Σ, y se representa así:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

x_i es un función que depende de i, y que tiene la propiedad de definir unívocamente cada término de la suma.

i es la variable (puede ser otra letra). En este caso comienda en 1 (límite inferior) y culmina en n (límite superior). Aunque ambos pueden cambiar siempre que el límite inferior sea menor o igual al límite superior.

Volviendo a nuestro ejemplo, utilizando la notación sigma tenemos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 533 + 535 = \sum_{i=1}^{268} (2i - 1)$$

o también

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 533 + 535 = \sum_{k=0}^{267} (2k + 1)$$

(Si no estas covencido, sustituye los valores de i (o k) en la función.)

Otros ejemplos:

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + ... + 998 + 999 = \sum_{k=8}^{999} k$$

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \sum_{i=0}^{4} \binom{7}{i}$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ... + 256 - 512 + 1024 = \sum_{i=0}^{10} (-2)^i$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i}$$

Observando el desarrollo del cubo de un binomio:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(aa+ab+ba+bb)$$

$$(a+b)^3 = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

Generalizando esta idea

Teorema Binomial

Si a e b son variables y n es un entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^nb^0$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

Ejemplo 1
Del teorema del binomio se sigue que el coeficiente de x^5y^2 en el desarrollo de $(x+y)^7$ es

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

Ejemplo 2
El coeficiente de a^5b^2 en el desarrollo de $(2a-3b)^7$ es $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$

Ejemplo 3
Para cualquier entero $n > 0$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

Su demostración surge de aplicar el teorema del binomio para $a = b = 1$

Ejemplo 4
Para cualquier entero $n > 0$,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

Su demostración surge de aplicar el teorema del binomio para $a = -1$ y $b = 1$.

La generalización del teorema del binomio se conoce como el *teorema multinomial*.

Teorema multinomial

Para enteros positivos n, t, el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} ... x_t^{n_t}$ en el desarrollo de

$$(x_1 + x_2 + ... + x_t)^n \qquad \text{es} \qquad \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_t!}$$

donde cada n_i es un entero con $0 \leq n_t \leq n$, para todo $1 \leq i \leq t$ y además, $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_t = n$.
Este coeficiente se denomina *coeficiente multinomial*.
También se puede escribir como

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_t}$$

Ver ejemplo 6.7.5 del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh*

Ejemplo 1
El coeficiente del término que contiene a $x^2y^2z^3$ en el desarrollo de $(x+y+z)^7$ es

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!} = 210$$

Ejemplo 2
El coeficiente del término que contiene a a^3b^4 en el desarrollo de $(a+b+c)^7$ es

$$\binom{7}{3,4,0} = \frac{7!}{3!4!0!} = 35$$

Ejemplo 3
El término que contiene a a^4b^5 en el desarrollo de $(3a+2b-5)^{11}$ es

$$\binom{11}{4,5,2}(3a)^4(2b)^5(-5)^2 = (6930)(81)(32)(25)a^4b^5 = 449064000a^4b^5$$

Ejemplo 4
La cantidad de términos que tiene $(3v+2w+x+y+z)^8$ en su desarrollo puede verse como la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación $n_v+n_w+n_x+n_y+n_z$, donde cada n_i representa el exponente posible que puede tomar la variable i en el desarrollo.
Por lo tanto, la cantidad términos distintos en el desarrollo de la potencia dada es 495:

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.7 (Página 270) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

1. 1
2. 2
3. 4-5
4. 10-11