Caso 2. RR Lineal de Segundo Orden Homogénea

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}; n \geq 2$

$a_0 = A\ (dado)\ ; a_1 = B\ (dado)$

Resultado 2: Una sucesión recurrente lineal homogénea de segundo orden es

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_0 = b_0\,, a_1 = b_1 \end{cases}$$

Se llama <u>ecuación característica</u> de la recurrencia a la ecuación $x^2 = c_1 x + c_2$, y a sus soluciones se les llama <u>raíces características</u>.

$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$

Ecuación característica – Solución de la RR

Como toda ecuación cuadrática con coeficientes reales. Está estudiado la naturaleza de las raíces y según cada situación la solución de la relación de recurrencia de segundo orden será diferente.

CASO 1. Raíces reales y distintas: $x_1 = r_1$; $x_2 = r_2$ la solución general es

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \quad n \geq 0} \qquad (1)$$

CASO 2. Raíces reales e iguales: $x_1 = r_1 = x_2 = r_2$ la solución general es

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n, \quad n \geq 0} \qquad (2)$$

CASO 3. Raíces complejas: $x_1 = r_1 = \alpha + i\beta$; $x_2 = r_2 = \alpha - i\beta$ la solución general es

$$a_n = C_1 (\alpha + i\beta)^n + C_2 (\alpha - i\beta)^n, \quad n \geq 0$$

Ecuación característica – Solución de la RR

Las constantes C_1 y C_2 se determinan cuando se dan condiciones iniciales.

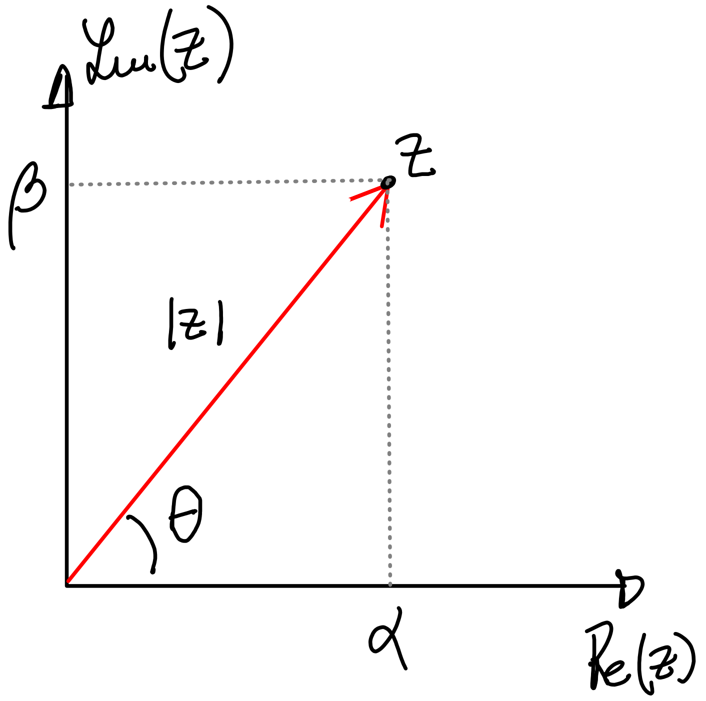
Observación CASO 3. Raíces complejas: $x_1 = r_1 = \alpha + i\beta$; $x_2 = r_2 = \alpha - i\beta$ la solución general es

(3) $a_n = C_1(\alpha + i\beta)^n + C_2(\alpha - i\beta)^n, \quad n \geq 0$ pero no queremos que quede la unidad imaginaria en la solución, entonces utilizaremos una forma equivalente de escribir la solución utilizando la Fórmula de DeMoivre:

$$z^n = (\alpha + i\beta)^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big); \quad con \ \tan(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} \ ; \ |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\boxed{a_n = k_1|z|^n \cos(n\theta) + k_2|z|^n sen(n\theta) \ , \ n \geq 0}$$

Repaso de nº complejos:



F. Binomica: $z = \alpha + \beta i$

F. Polar: $z = (|z|; \theta)$ ángulo o argumento

módulo $|z|$

F. Trigonométrica: $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Fórmula de De Moivre

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right)$$

Hallar la solución de

$$\boxed{a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0}, \quad \forall n \geq 2, \; a_0 = 1, \; a_1 = 2$$

$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad a_{n-3}$

2 pasos hacia atrás $\Rightarrow$ RR de 2do Orden

Ecuación Característica: $\quad x^2 + x - 6 = 0$

Raíces características: $\quad r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$ raíces reales y distintas

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n \quad , \forall n \geq 0 \; ; \; a_0 = 1 \; ; \; a_1 = 2$$

reemplazo en (1)

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n \quad , \forall n \geq 0 \; ; \; a_0 = 1 \; ; \; a_1 = 2$$

Cálculo de C_1 y C_2

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot (-3)^0 \\ a_1 = 2 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-3)^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = 2C_1 - 3C_2 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 3 = 3C_1 + \cancel{3C_2} \\ 2 = 2C_1 - \cancel{3C_2} \end{cases}$$

sum: $5 = 5C_1 \Rightarrow C_1 = 1$

luego $1 = C_1 + C_2$

$C_2 = 1 - C_1$

$C_2 = 1 - 1 = 0$

$$a_n = 1 \cdot 2^n + 0 \cdot (-3)^n$$

Solución general

$$\boxed{a_n = 2^n \quad , \forall n \geq 0}$$

Hallar la solución de

$$\boxed{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n}, \quad \forall n \geq 0, \; a_0 = 1, \; a_1 = 3$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

Ec. Característica: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Raíces características: $r_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4.1.4}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 = r_1 = r_2$

Raíces reales e iguales

reemplazo en (2)

$$a_n = C_1 . 2^n + C_2 . n . 2^n, \quad \forall n \geq 0$$

Calculo de las constantes C_1 y C_2:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C_1 . 2^0 + C_2 . 0 . 2^0 \\ a_1 = 3 = C_1 . 2^1 + C_2 . 1 . 2^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = C_1 \\ 3 = 2C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow 3 = 2.1 + 2.C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a_n = 1 . 2^n + \frac{1}{2} . n . 2^n, \quad \forall n \geq 0}$$

Hallar la solución de

$$\boxed{a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2})}, \quad \forall n \geq 2, \; a_0 = 1, \; a_1 = 2$$

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

Ec. Característica: $x^2 - 2x + 2 = 0$

Raíces Características: $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.2}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2}{2} \pm \dfrac{2i}{2} = 1 \pm i \begin{cases} r_1 = 1+i \\ r_2 = 1-i \end{cases}$

Raíces Complejas

$$a_n = C_1 (1+i)^n + C_2 (1-i)^n ; \; \forall n \geq 0$$

Calculos auxiliares para hallar $|r_1|$ y $|r_2|$; θ

$r = 1+i$ pertenece al I cuadrante

$\operatorname{tg}\theta = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{1}{1}$; $\operatorname{tg}\theta = 1$; $\theta = \operatorname{arctg}(1) = 45° = \frac{\pi}{4} = \theta$

$|r| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(r))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = |z|$

$$\boxed{a_n = k_1|z|^n \cos(n\theta) + k_2|z|^n sen(n\theta)\ ,\ n \geq 0}$$

$$a_n = k_1 (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + k_2 (\sqrt{2})^n sen\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

Falta calcular k_1 y k_2

$$a_n = K_1 (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + K_2 (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

Cond iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$
(DADAS)

$$\begin{cases} a_0 = 1 = K_1 \overbrace{(\sqrt{2})^0}^{1} \cos\left(\overbrace{\frac{\pi}{4}\cdot 0}^{0}\right) + K_2 \overbrace{(\sqrt{2})^0}^{1} \operatorname{sen}\left(\overbrace{\frac{\pi}{4}\cdot 0}^{0}\right) \\ a_1 = 2 = K_1 (\sqrt{2})^1 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)}_{\sqrt{2}/2} + K_2 (\sqrt{2})^1 \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)}_{\sqrt{2}/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = K_1 \cdot \\ 2 = K_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + K_2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sustituyo $K_1 = 1$

$$2 = 1 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{4}}{2}}\, 1 + K_2 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{4}}{2}}\, 1 \iff 2 = 1 + K_2 \iff K_2 = 1$$

Recordar:

$\cos(0) = 1$

$\operatorname{sen}(0) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{a_n = 1 \cdot (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + 1 \cdot (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right) \; ; \; \forall n \geq 0}$$

Solución general