Recordemos una definición vista al inicio de la unidad...

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES:

Definición 2: Una relación de recurrencia de orden k se llama relación de recurrencia lineal cuando la fórmula de recurrencia es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad para\ todo\ n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se llama homogénea.

Con $g(n) \not\equiv 0$ se le llamará relación de recurrencia lineal no homogénea.

Dada una relación de recurrencia lineal no homogénea, la relación de recurrencia lineal homogénea asociada a la anterior es

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad para\ todo\ n \geq k$$

Cuando se trata con la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, la relación no homogénea de la que procede se suele llamar relación completa.

El método que utilizaremos para resolver dichas RR No Homogéneas recibe el nombre de MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Consiste en descomponer la solución general como suma de la solución general de la RR Homogénea asociada (es decir para f(n)=0) y una solución particular de la RR No Homogénea dada. Es decir:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

La solución general de la RR Homogénea la hallaremos como se hizo en las secciones anteriores de esta unidad.

La solución particular de la RR No Homogénea dependerá de la familia de funciones a la que pertenece f(n) dada.

En particular trabajaremos en esta sección con RR No Homogéneas de ...

1er Orden: $a_n + c_1 a_{n-1} = f(n), \quad n \geq 1$

Por ejemplo $\boxed{a_n - 4a_{n-1} = 2^n, \quad a_0 = 3, \quad n \geq 1}$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

2do Orden: $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = f(n), \quad n \geq 2$

Por ejemplo $\boxed{a_{n+2} - 4a_{n+1} + 5a_n = n^2 - 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \ n \geq 0}$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

El método que utilizaremos para resolver dichas RR No Homogéneas recibe el nombre de MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Consiste en descomponer la solución general como suma de la solución general de la RR Homogénea asociada (es decir para f(n)=0) y una solución particular de la RR No Homogénea dada. Es decir:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

La solución general de la RR Homogénea la hallaremos como se hizo en las secciones anteriores de esta unidad.

La solución particular de la RR No Homogénea dependerá de la familia de funciones a la que pertenece f(n) dada.

La siguiente tabla muestra que cuando f(n) sea de la familia de funciones que indica la primera columna, la solución particular que se debe tomar es la asociada en la segunda columna.

	$a_n^{(p)}$
c, a constant	A, a constant
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t,\ t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n,\ r \in \mathbf{R}$	$A r^n$
$\sin \theta n$	$A \sin \theta n + B \cos \theta n$
$\cos \theta n$	$A \sin \theta n + B \cos \theta n$
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \theta n$	$A r^n \sin \theta n + B r^n \cos \theta n$
$r^n \cos \theta n$	$A r^n \sin \theta n + B r^n \cos \theta n$

Veamos unos ejemplos: $a_{n+2} - 10a_{n+1} + 21a_n = \boxed{f(n)}, \quad n \geq 0$

Hallamos la solución general de la RR No Homogénea asociada

$$a_n^{(h)} = C_1(3^n) + C_2(7^n), \qquad C_1, C_2 \text{ constantes}$$

las constantes C_1 y C_2 no pueden ser calculadas en este momento porque las condiciones iniciales son para la RR No Homogénea. Se calculan luego de hallar $a_n^{(p)}$

A modo de ejemplo, en la primera columna se presentan algunas funciones y sus respectivas soluciones particulares asociadas.

$\boxed{f(n)}$	$a_n^{(p)}$
5	A_0
$3n^2 - 2$	$A_3n^2 + A_2n + A_1$
$7(11^n)$	$A_4(11^n)$
$31(r^n), r \neq 3, 7$	$A_5(r^n)$
$6(3^n)$	A_6n3^n
$2(3^n) - 8(9^n)$	$A_7n3^n + A_8(9^n)$
$4(3^n) + 3(7^n)$	$A_9n3^n + A_{10}n7^n$

Resolvamos ahora algunos ejercicios …

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n), \quad n \geq 1, \; a_0 = 2$$

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n), \quad n \geq 1, \; a_0 = 2$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -200, \quad n \geq 0, \; a_0 = 3000, \; a_1 = 3300$$

$$a_{n+1} = a_n + n, \quad n \geq 2, \ a_2 = 1$$

$$a_{n-1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geq 1, \ a_0 = 3$$

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3.2^n + 7.3^n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1, \; a_1 = 4$$

La sucesión de **los números de Fibonacci**

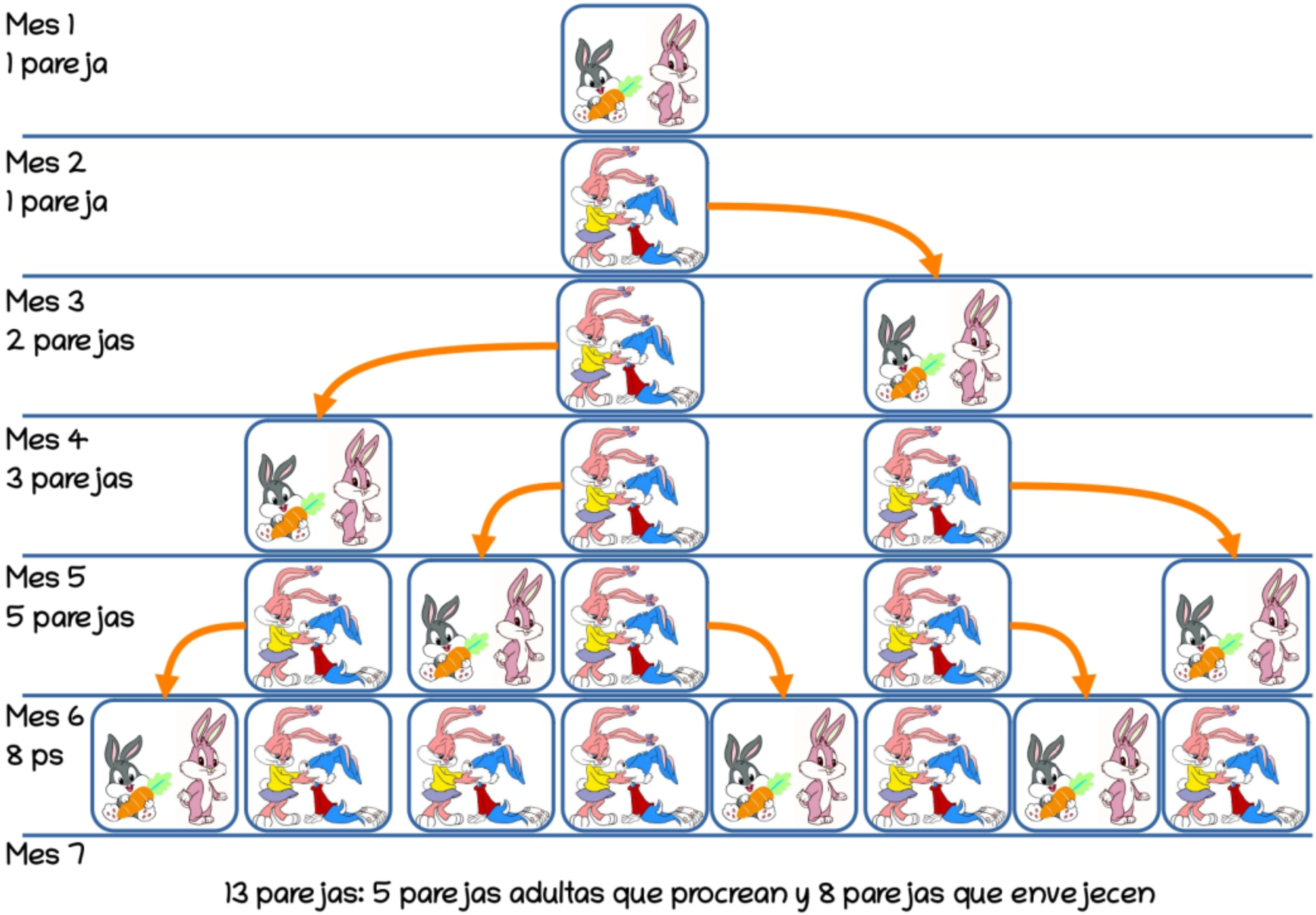
Esta sucesión hace referencia a la secuencia ordenada de números descrita por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Esta sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de cría de conejos: "Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja" (Laurence Sigler, Fibonacci's Liber Abaci)
La respuesta a esta pregunta es la que sigue:

- Partimos de una pareja de conejos el primer mes. ($F_1 = 1$)
- Durante el segundo mes la pareja envejece pero no procrea. ($F_2 = 1$)
- El tercer mes la pareja procrea otra pareja (es decir, ya tenemos dos parejas). ($F_3 = 2$)
- El cuarto mes, la primera pareja vuelve a procrear y la pareja nueva envejece sin procrear (luego tenemos tres parejas). ($F_4 = 3$)
- El quinto mes, las dos parejas más viejas vuelven a procrear mientras que la nueva pareja no procrea (cinco parejas en total). ($F_5 = 5$)
- ...

Esquemáticamente sería:



Los ***números de Fibonacci*** pueden definirse recursivamente:

1. $F_0 = 0,\ F_1 = 1$; y
2. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

Vamos a hallar ahora la solución general para esta relación de recurrencia

Una sucesión estrechamente relacionada con los números de Fibonacci es la de los ***números de Lucas***, la cual se define:

1. $L_0 = 2$, $L_1 = 1$; y
2. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199, \ldots$$

Otra sucesión de números que tiene nombre propio, es la de los **números armónicos**:

1. $H_1 = 1$; y
2. $H_{n+1} = H_n + \left(\dfrac{1}{n+1}\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$$

$$1, \quad \frac{3}{2}, \qquad \frac{11}{6}, \qquad \frac{25}{12}, \qquad \ldots$$

De la primera puedemos hallar la solución general pero de la segunda no por la forma de f(n)

Ejercicio propuestos

Del libro Matemática Discreta (3ra Ed.) de R. Grimaldi que se encuentra en el campus virtual realizar las actividades prácticas correspondientes a los apartados

Sección 10.1

1, 2, 3, 4, 5, 6

Sección 10.2

1(a,b,c,f), 3, 4, 6(a), 8(a), 9, 11 y 13.

Sección 10.3

1(a,b,c,d), 5(a,b), 3(a), 4, 6 y 9.