Matemática Discreta

Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana

Lic en Sistemas de Información - FCyT - UADER

2022

Anillos.

El anillo de los entero módulo n.

Definción

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a *es congruente con* b *módulo* n, y escribimos:

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

si $n|(a-b)$ o equivalentemente $a = b + kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

a) $10 \equiv 1 \ (mod\ 3)$ porque $3|(10-1)$, es decir $10 = 3(3) + 1$.
También serán equivalentes con $1 \ (mod\ 3)$ todo entero que al ser dividido por 3 da como resto 1.

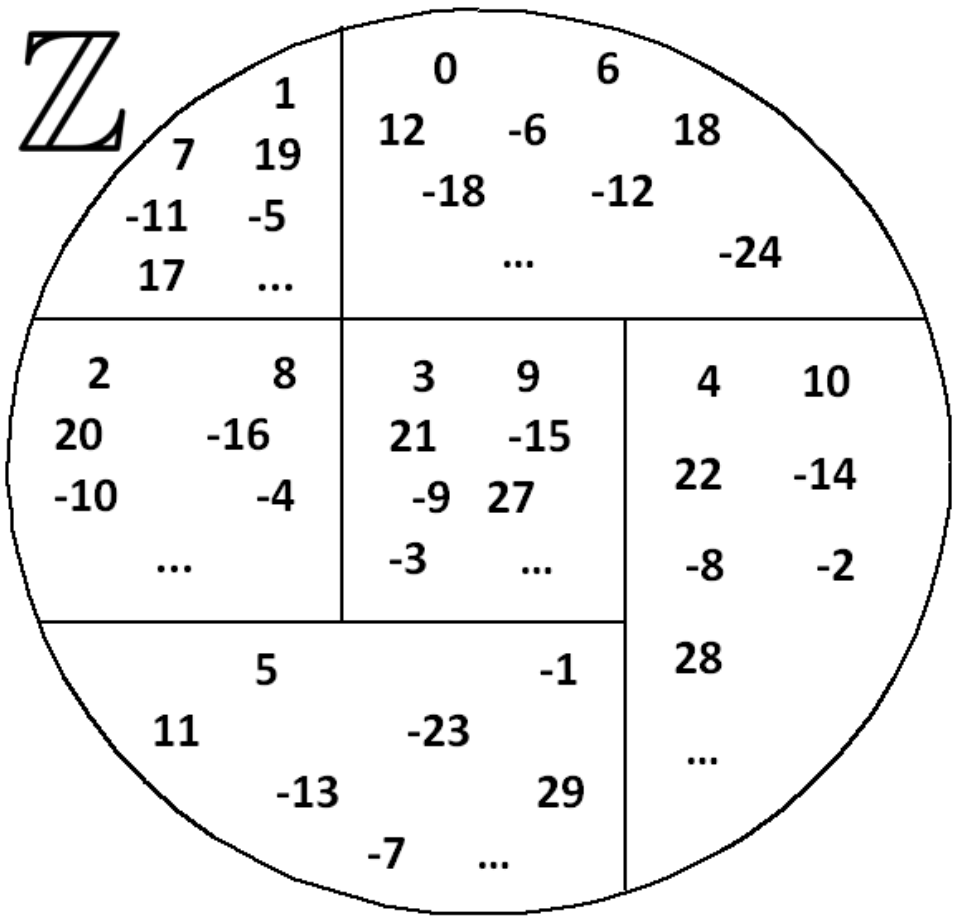
b) $30 \equiv 5 \ (mod\ 25)$ porque $25|(30-5)$, es decir $30 = 25(1) + 5$.
También serán equivalentes con $5 \ (mod\ 25)$ todo entero que al ser dividido por 25 da como resto 5.

c) $29 \equiv -1 \ (mod\ 5)$ porque $5|(29-(-1))$, es decir $29 = 5(6) + (-1)$.
¿Puedes concluir en términos del resto, de la misma forma que en los puntos anteriores?

Teorema

La congruencia módulo n es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$

Para $n \geq 2$ esta relación de equivalencia induce una partición sobre $\mathbb{Z}$.
La conguencia módulo n divide a $\mathbb{Z}$ en n clases de equivalencias.
Por ejemplo, si $n = 6$:



Teorema

La congruencia módulo n es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$

Para $n \geq 2$ esta relación de equivalencia induce una partición sobre $\mathbb{Z}$.
La conguencia módulo n divide a $\mathbb{Z}$ en n clases de equivalencias:

$$[0] = \{..., -2n, -n, 0, n, 2n, ...\} = \{nx + 0 / x \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{..., -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, ...\} = \{nx + 1 / x \in \mathbb{Z}\}$$

$$[2] = \{..., -2n + 2, -n + 2, 2, n + 2, 2n + 2, ...\} = \{nx + 2 / x \in \mathbb{Z}\}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$[n-1] = \{..., -2n+(n-1), -n+(n-1), n-1, n+(n-1), 2n+(n-1), ...\}$$
$$[n - 1] = \{nx + (n - 1) / x \in \mathbb{Z}\}$$

Por el algoritmo de la división: $\forall t \in \mathbb{Z}\ \ t = qn + r$ con $0 \leq r < n$

Por lo que t pertenece a la clase $[r]$ o la clase de t es la misma que la clase de r ($[t] = [r]$)

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], ..., [n-1]\}$$

si consideramos que a es un elemento de $\mathbb{Z}_n$, y no hay ambigüedad en la notación, podemos escribir:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, ..., (n-1)\}$$

En este conjunto se definen las operaciones binarias cerradas, adición y multiplicación:
$\forall [a], [b] \in Z$:

$$[a] + [b] = [a + b] \qquad [a] \cdot [b] = [a][b] = [ab]$$

$$[a] + [b] = [a + b] \qquad [a] \cdot [b] = [a][b] = [ab]$$

Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_7$:

$$[2] + [6] = [2 + 6] = [8] = [1] \text{ y } [2][6] = [2(6)] = [12] = [5]$$

En términos de módulo diremos que:

Si $a \equiv b \,(mod\, n)$ y $c \equiv d \,(mod\, n)$, entonces

$$a + c \equiv b + d \,(mod\, n) \qquad \text{y} \qquad ac \equiv bd \,(mod\, n)$$

Teorema

Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$:
$\mathbb{Z}_n$ es un anillo conmutativo con elemento unidad igual a [1] en las operaciones binarias cerradas definidas antes.

Al ser $\mathbb{Z}_n$ un anillo finito, podemos expresar las operaciones entre los elementos por medio de dos tablas. Por ejemplo:

$\mathbf{Z}_5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Para $\mathbb{Z}_5$:

Identificar las unidades, sus respectivos inversos multiplicativos. ¿Tiene divisores propios de cero? ¿Cuáles son?

$\mathbf{Z}_5$	+	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	0
	2	2	3	4	0	1
	3	3	4	0	1	2
	4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Para $\mathbb{Z}_6$:

Identificar las unidades, sus respectivos inversos multiplicativos. ¿Tiene divisores propios de cero? ¿Cuáles son?

$\mathbf{Z}_6$	+	0	1	2	3	4	5
	0	0	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	4	5	0
	2	2	3	4	5	0	1
	3	3	4	5	0	1	2
	4	4	5	0	1	2	3
	5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Teorema

$\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

$\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\cdots$ son cuerpo; y $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{200}$, por ejemplo, no lo son.

Teorema

En $\mathbb{Z}_n$, $[a]$ es una unidad si y sólo si $mcd(a, n) = 1$

En $\mathbb{Z}_{15}$:
$[1], [2], [4], [7], [8], [11], [13], [14]$ son unidades.

$[3], [5]$ son divisores propios de cero porque $[3][5] = [15] = [0]$

$[6], [10]$ son divisores propios de cero porque $[6][10] = [60] = [0]$

$[9], [10]$ son divisores propios de cero porque $[9][10] = [90] = [0]$

$[12], [5]$ son divisores propios de cero porque $[12][5] = [60] = [0]$

Hallar el inverso multiplicativo de $[25]$ en $\mathbb{Z}_{72}$

$[25]^{-1}$ es tal que $[25]^{-1}[25] \equiv 1 \ (mod\ 72)$

Si $[25]^{-1} = x$, buscamos que $25x = 72y + 1$, con $y \in \mathbb{Z}$

De esta manera debemos resolver la ecuación diofántica: $25x - 72y = 1$.

Resolvermos aplicando el algorítmo de Euclides:

72 | 25	$22 = 72 + (-2)25$	
22 | 2		
25 | 22	$3 = 25 + (-1)22$	
3 | 1		
22 | 3	$1 = 22 + (-7)3$	
1 | 7		

Mediante una sustitución hacia atrás se obtiene que

$1 = (-23)25 + (8)72$ entonces $1 \equiv (-23)25 \ (\text{mod}\ 72)$

Como [-23]=[-23+72]=[49]

$[25]^{-1} = [49]$ en $\mathbb{Z}_{72}$

Ya sabemos cómo identificar si un elemento es, o no, una unidad.
Ahora nos preguntamos:

¿Cuántas unidades tiene el anillo $\mathbb{Z}_n$?

Para calcular dicho número utilizamos la función $\varphi(n)$
Sea la factorización de n como producto de primos distintos:

$$n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \dots {p_r}^{e_r}$$

$$\varphi(n) = n \left(\frac{p_1 - 1}{p_1}\right) \left(\frac{p_2 - 1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{p_r - 1}{p_r}\right)$$

En $\mathbb{Z}_n$, existen $\varphi(n)$ unidades y $n - 1 - \varphi(n)$ divisores propios de cero.

Por ejemplo para $n = 7875 = 3^2 5^3 7$, $\mathbb{Z}_{7875}$ tiene:

$\varphi(7875) = 7875 \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} = 3600$ unidades, y 4274 divisores propios de cero.

C.Aux: $7875 - 1 - 3600 = 4274$