Matemática Discreta

RELACIONES DE RECURRENCIA

Introducción

Una relación de recurrencia utiliza valores anteriores de una sucesión para calcular el valor actual o valor deseado. En un algoritmo recursivo se utiliza instancias menores de la entrada actual para calcular ésta.

Los conjuntos tienen otra representación en las computadoras, además de vectores, tomados como una sucesión; es decir, como una lista con un orden particular. Basta con buscar la regla que deben cumplir sus elementos y que se llamará “función característica”.

La resolución de relaciones de recurrencia es un tema de vital importancia para abordar distintos tipos de problemas en matemática e informática. Tradicionalmente los textos de Estructuras Discretas proponen métodos de resolución de recursividades lineales, se basan en el planteamiento de ecuaciones polinómicas difícilmente programables. Hay que tener otros recursos para poder resolverlos. La recursividad es un tema actual y tiene muchas aplicaciones.

Introducción

En argumentos lógicos o en algoritmos, cuando hay que dilucidar o resolver una sucesión de casos, el matemático busca averiguar la estructura común y la conexión de cada caso con el anterior.

La técnica es astuta: si podemos reducir cada caso al anterior (con un argumento general), al final sólo nos quedará un primer caso por resolver, del que se deducirán todos.

Introducción

Definición 1: Una <u>sucesión de números reales</u> es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si $f(n) = a_n$, decimos que a_n es el término n-ésimo de la sucesión. Usualmente escribiremos $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n, n \geq 0\}, \{a_n\}_n$ o simplemente $\{a_n\}$, para denotar esta sucesión.

3, 6, 9, 12, 15, 18……, ……. es la sucesión de números múltiplos de 3

$$a_n = 3 + a_{n-1} \quad n \geq 1$$
$$a_0 = 3$$

Introducción

Progresión aritmética: es una sucesión en que cada término, menos el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija.

-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16,……….

$$a_n = a_{n-1} + 3 \quad n \geq 1$$
$$a_0 = -2$$

Observación: Si se cambia el valor de a_0 (conocido como condición inicial) cambia la sucesión de números, pero sigue siendo una progresión aritmética.

Progresión geométrica: es una sucesión de números en que cada término, menos el primero, se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija.

-1, -4, -16, -64,…….

$$a_n = 4a_{n-1} \quad n \geq 1$$
$$a_0 = -1$$

Ejemplo

$a_n = a_{n-1} - 2 \quad n \geq 1$

$a_0 = 1$

Obtenga los primeros 6 elementos de la sucesión.

Observar que para obtener el elemento a_{100} debemos obtener primero el elemento a_{99} .

Nos preguntamos ¿hay una forma diferente de obtener a_{100} sin tener que obtener la lista completa de todos los anteriores?

Ejemplo – Sucesiones periódicas

Consideramos la siguiente sucesión periódica:

$$(1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, \dots)$$

Una definición por recurrencia podría ser:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+3} = x_n \ \forall n \in \mathbf{N}_0$$

Ejemplo – Sucesiones periódicas

Consideramos la siguiente sucesión periódica:

$$(1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, \dots)$$

Una definición por recurrencia podría ser:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+3} = x_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Observación: No nos quedaremos con la sucesión de números, nos quedaremos con las definiciones recursivas que dan origen a una sucesión de números.

Definición

Definición: Una **relación de recurrencia para una sucesión** $\{a_n\} = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ es una expresión que relaciona a_n con uno o más términos precedentes $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, para cualquier n entero mayor o igual que un entero inicial m. Los valores de los primeros términos necesarios para empezar a calcular se llaman **condiciones iniciales**.

Resolver una ecuación recurrente es encontrar una función de n explícita $f(n)$ tal que $a_n = f(n)$ $\forall n \geq 0$ $a_n = f(n)$ $\forall n \geq 0$

Introducción

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES:

Definición 2: Una relación de recurrencia de orden k se llama relación de recurrencia lineal cuando la fórmula de recurrencia es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad para\ todo\ n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se llama homogénea.

Con $g(n) \not\equiv 0$ se le llamará relación de recurrencia lineal no homogénea.

Dada una relación de recurrencia lineal no homogénea, la relación de recurrencia lineal homogénea asociada a la anterior es

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad para\ todo\ n \geq k$$

Cuando se trata con la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, la relación no homogénea de la que procede se suele llamar relación completa.

Resolver una Relación de Recurrencia

Para *"resolver"* una sucesión de recurrencia hay que obtener, a partir de la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales, una fórmula $a_n = F(n), n \geq 0$, que proporcione los términos de la sucesión en función de la posición que ocupan.

$F(n)$ depende de n pero no de otros elementos de la sucesión.

Caso orden uno:

Resultado 1: La solución de las sucesiones recurrentes lineales de primer orden se realiza por inducción:

$$\begin{cases} a_n = c\ a_{n-1} + g(n), & n \geq 1 \\ a_0 = b_0 \end{cases} \Rightarrow a_n = c^n b_0 + \sum_{i=1}^{n} g(i)\ c^{n-i}$$

Caso 1. RR Lineal (coeficientes constantes) de Primer Orden Homogénea

$a_n = da_{n-1} \quad n \geq 1$

$a_0 = A$ (dado)

Solución general: $\boldsymbol{a_n = A.d^n \ \ para\ n \geq 0}$

Ejemplo. Resolver

$a_n = -a_{n-1} \quad n \geq 1$

$a_0 = 3$

$\boldsymbol{a_n = 3.(-1)^n \ \ para\ n \geq 0}$

Caso 1. RR Lineal (coeficientes constantes) de Primer Orden Homogénea - Grimaldi

La solución general de la relación de recurrencia

$$a_{n+1} = da_n, \qquad \text{donde } n \geq 0, \qquad d \text{ es una constante} \qquad \text{y } a_0 = A$$

es única y está dada por

$$a_n = Ad^n, \qquad n \geq 0.$$

Así, la solución $a_n = Ad^n$, $n \geq 0$ define una función discreta cuyo dominio es el conjunto **N** de los enteros no negativos.

Ejemplos.

1. Sea $0! = 1$ y para todo n natural $n! = n.(n-1)!$ De esta forma se define por recurrencia el factorial de los números naturales.
2. La sucesión $a_{n+1} = \lambda a_n$ para $n \geq 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$ está definida recursivamente y son soluciones de dicha relación:

a) Si $\lambda = 2$; $a_0 = 1$, entonces $(a_n) = (1, 2, 4, \dots .)$
b) Si $\lambda = 2$; $a_0 = 3$, entonces $(a_n) = (3, 6, 12, \dots .)$
c) Si $\lambda = 2$; $a_0 = 5$, entonces $(a_n) = (5, 10, 20, \dots .)$
d) Si $\lambda = 3$; $a_0 = 5$, entonces $(a_n) = (5, 15, 45 \dots .)$

El conocimiento del valor de $\lambda\ y\ a_0$ determina completamente la sucesión de números.

Ejemplo.

Resolver $x_{n+1} = 2x_n$ con la condición $x_3 = -2$. Escribir los primeros 7 elementos de la sucesión $x_n\ , n \geq 0$.

Ejemplos/Aplicaciones – Sección 10.1

EJERCICIOS 10.1

1. Encuentre una relación de recurrencia, con una condición inicial, que determine de manera única cada una de las siguientes progresiones geométricas.

   a) $2, 10, 50, 250, \ldots$ **b)** $6, -18, 54, -162, \ldots$

   c) $1, 1/3, 1/9, 1/27, \ldots$ **d)** $7, 14/5, 28/25, 56/125, \ldots$

2. Encuentre la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas.

   a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0, n \geq 0$ **b)** $4a_n - 5a_{n-1} = 0, n \geq 1$

   c) $3a_{n+1} - 4a_n = 0, n \geq 0, a_1 = 5$ **d)** $2a_n - 3a_{n-1} = 0, n \geq 1, a_4 = 81$

3. Si a_n, $n \geq 0$, es una solución de la relación de recurrencia $a_{n+1} - da_n = 0$ y $a_3 = 153/49$, $a_5 = 1377/2401$, ¿cuánto vale d?

4. El número de bacterias en un cultivo es de 1000 (aproximadamente) y este número aumenta un 250% cada dos horas. Use una relación de recurrencia para determinar el número de bacterias presentes después de un día.

5. Si Laura invierte \$100 con un interés compuesto trimestral de 6%, ¿cuántos meses debe esperar para que su dinero se duplique? (Ella no puede retirar el dinero antes que se cumpla el trimestre.)

6. Hace 15 años Pablo invirtió sus ganancias de la bolsa, en una cuenta que pagaba un 8% de interés trimestral compuesto. Si ahora tiene \$7218.27 en su cuenta, ¿cuál fue la inversión inicial?