Matemática Discreta

Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana

Lic en Sistemas de Información - FCyT - UADER

2022

Unidad 1: Combinatoria.

Principios fundamentales del conteo: principio de multiplicación y de la suma.

Permutaciones. Combinaciones. Combinaciones con repetición: distribuciones. Aplicaciones.

Principio de multiplicación

Si una actividad se puede construir en t pasos sucesivos y el paso 1 se puede hacer de n_1 maneras, el paso 2 se puede realizar de n_2 maneras, ..., y el paso t de n_t maneras, entonces el número de actividades posibles diferentes es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_t$.

Ejemplo 1

Un club de teatro realiza ensayos para una obra que se montará en primavera. Si siete hombres y seis mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), ¿de cuántas formas el director puede elegir a la pareja principal?

Respuesta

Como el papel femenino se puede ocupar por una de las seis mujeres y el papel masculino se puede ocupar por uno de los siete hombres, el director podrá realizar la selección de $(6 \cdot 7)$ 42 formas distintas.

Ejemplo 2
Bajo las siguientes condiciones, se desea saber cuántas placas patentes diferentes de automóviles se pueden fabricar que consten de dos letras seguidas por cuatro dígitos:

1. Si ninguna letra o dígito se puede repetir
2. Si se permite repetir las letras y los dígitos
3. Si se permiten las repeticiones, sólo usar vocales y los dígitos pares.

Respuesta
Las patentes definidas en este ejercicio tienen la estructura LLDDDD (2 letras y 4 dígitos)

1. Como ninguno de los símbolos se puede repetir, por cada selección que realice para un lugar determinado, dicho símbolo no estará disponible para la siguiente selección. Por lo que para el primer lugar tendremos disponible 26 letras, para el siguiente quedarán 25; respecto a los dígitos, para el primer lugar tendremos disponibles 10, luego 9, luego 8, y por último 7. Así, la cantidad de pantentes distintas que se pueden formar, bajo estas condiciones, es:
$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3276000$$
2. Si se permite repetir las letras y los dígitos tendremos disponible todos los símbolos en cualquier selección, por lo que la cantidad de pantentes distintas que se pueden formar, bajo estas condiciones, es:
$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 6760000$$
3. En este caso, tendremos disponible cinco letras (a,e,i,o,u) y cinco dígitos (0,2,4,6,8), por lo que la cantidad de pantentes distintas que se pueden formar, bajo estas condiciones, es: $5^2 \cdot 5^4 = 15625$

Principio de la suma

Suponga que $X_1, ..., X_t$ son conjuntos y que el i-ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{X_1, ..., X_t\}$ es una familia de conjuntos disjuntos por pares (es decir, si $i \neq j, X_i \cap X_j = \varnothing$), el número de elementos posibles que se pueden seleccionar de X_1 o X_2 o ... o X_t es

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

(De manera equivalente, la unión $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_t$ contiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ elementos)

Es decir, para el caso de X_1 y X_2, si una primera tarea puede realizarse de n_1 formas distintas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n_2 formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden realizarse cualquiera de $n_1 + n_2$ formas distintas. Esta idea es generalizable para t tareas.

Ejemplo 1
¿De cuántas formas se puede seleccionar un libro distinto entre 40 libros de Física y 50 libros de Matemática?

Respuesta
Tenemos 40 elementos en el primer conjunto y 50 elementos en el segundo, la cantidad de formas de seleccionar un elemento del total es 90.

Ejemplo 2
Durante una campaña local, ocho candidatos republicanos y cinco demócratas se nominan para presidentes del consejo escolar.

1. Si el presidente va a ser alguno de estos candidatos, ¿cuántas posibilidades hay para el posible ganador?
2. ¿Cuántas posibilidades hay para que una pareja de candidatos (uno de cada partido) se opongan entre sí en la elección final?
3. ¿Qué principio del conteo se usó en cada uno de los incisos anteriores?

Respuesta

1. Las posibilidades para el posible ganador son de una entre 13.
2. La cantidad de posibles parejas para una elección final es 40. Dado que se tienen 8 candidatos republicanos y 5 demócratas y se requiere que le elección final sea una pareja de candidatos de partidos diferentes.
3. Parte 1) principio de la suma. Parte 2) principio de la multiplicación.

Ejemplo 3
Los automóviles Buick se fabrican en 4 modelos, 12 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión.

1. ¿Cuántos autos Buick distintos se pueden fabricar?
2. Si uno de los colores disponibles es el azul, ¿cuántos Buick azules diferentes se pueden fabricar?

Respuesta

1. Por regla del producto se puede armar la solución como el producto de las distintas alternativas:
   4 modelos x 12 colores x 3 tamaños de motor x 2 tipos de transmisión:
   $$4 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2 = 288$$
   Se pueden fabricar 288 Buick distintos.
2. Basándose en la solución anterior y añadiendo las restricciones:
   4 modelos x color azul x 3 tamaños de motor x 2 tipos de transmisión:
   $$4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$
   Se pueden fabricar 24 Buick distintos de color azul.

Ejemplo 4
El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una ṕroxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre 10 miembros del consejo) Indicar cuántas listas diferentes se pueden formar si los puestos son: un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero.

Respuesta
La cantidad de miembros es 10, por los tanto:

- Para el puesto de presidente elijo 1 entre 10.
- Para el puesto de vicepresidente elijo 1 entre 9. Dado que uno ya fue elegido como presidente.
- Para el puesto de secretario elijo 1 entre 8. Dado que uno ya fue elegido como presidente y uno para vicepresidente.
- Para el puesto de tesorero elijo 1 entre 7. Dado que uno ya fue elegido como presidente, uno para vicepresidente y uno como secretario.

Por lo tanto la cantidad de listas será $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Supongamos ahora que en el comité, de sus 10 miembros, 3 son médicos. ¿Cuántas listas del inciso anterior se pueden formar bajo las siguientes condiciones?

1. Con un presidente que sea un médico
2. Con un médico exactamente en la lista.
3. Con al menos un médico en la lista.

Respuesta

1. Se tiene por restricción que para la presidencia tiene que ser médico. Por lo tanto la cantidad de listas será
$$3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$$
2. Se tiene por restricción que sólo debe haber exactamente un médico en la lista. Es un escenario de un problema con diferentes casos:
   - Si el médico es presidente se tiene $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.
   - Si el médico es vicepresidente se tiene $7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5$.
   - Si el médico es secretario se tiene $7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5$.
   - Si el médico es tesorero se tiene $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$.

   Cada uno de estos casos se tiene que tener en cuenta pero no se realizan de forma simultánea, por ende se aplica regla de la suma:
$$3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 4(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3) = 2520$$

   Resultando en 2520 listas diferentes con exactamente un médico.

Supongamos ahora que en el comité, de sus 10 miembros, 3 son médicos. ¿Cuántas listas del inciso anterior se pueden formar bajo las siguientes condiciones?

1. Con un presidente que sea un médico
2. Con un médico exactamente en la lista.
3. Con al menos un médico en la lista.

Respuesta
Para el último inciso la restricción es que al menos un médico sea parte de la lista. Una forma de resolver este problema es contar todas las listas diferentes sin restricciones y restarles la cantidad de listas que la cantidad de médicos es igual a 0.

$$\text{Al menos un médico} = \text{todas las listas sin restricciones} - \text{listas sin médico}$$

$$5040-(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = 5040 - 840 = 4200$$

Se tienen 4200 listas diferentes con al menos un médico.

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.1 (Página 226) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

1. 1 al 4
2. 6
3. 8 al 16
4. 17 al 19
5. 21 al 28
6. 32 al 41
7. 54 al 60

Permutación

Una *permutación de n elementos diferentes* $x_1, x_2, ..., x_n$ es un ordenamiento de los n elementos $x_1, x_2, ..., x_n$.

Si queremos permutar las letras a, b, c hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas posibles:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Factorial de un número

Para un entero $n \geq 0$, n *factorial* (que se denota con $n!$) se define como

$$0! = 1,$$
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Así, por ejemplo, el problema anterior se puede calcular como

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Nota: Esta operación está disponible en la calculadora científica mediante la tecla [$x!$].

Teorema

Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Por lo que si queremos permutar 10 elementos, la cantidad de formas que lo podemos hacer es $10! = 3628800$

Una propiedad que vamos a utilizar durante los cálculos es la posibilidad de asociar alguno de los primeros factores del factorial:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-i+1) \cdot (n-i)!$$

Por ejemplo:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!$$

Ejemplo 1
Matías trabaja como operador de pc en una pequeña universidad. Una tarde, él ve que durante el día se han enviado 12 programas para su procesamiento por lotes. ¿De cuántas formas puede ordenar Matías el procesamiento de esos programas si:

1. no existe restricciones?
2. él considera que cuatro de los programas tienen prioridad sobre los otros ocho y desea procesarlos antes?
3. primero separa los programas en los cuatro de máxima prioridad, cinco de menor prioridad y tres de mínima prioridad, y desea procesar los 12 programas de modo que los de máxima prioridad se procesen primero y los tres programas de mínima prioridad se procesen al final?

Respuesta

1. Es un ordenamiento de 12 elementos distintos, con lo cual, se puede realidar de $12!$ formas diferentes.
2. Primero proceso 4 y luego 8, lo que se puede realizar de $4! \cdot 8!$ formas diferentes.
3. Si siguiendo el mismo criterio, el último procesamiento se puede realizar de $4! \cdot 5! \cdot 3!$ maneras diferentes.

Ejemplo 2
¿De cuántas formas es posible ordenar los símbolos a,b,c,d,e,e,e,e,e de modo que ninguna e quede junto a otra?

Respuesta
Se tiene 5 letras e y 4 restantes. Para que no estén juntas tendrá que estar eXeXeXeXe
Por lo cual tendremos $1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4! = 24$

Ejemplo 3
Un profesor de ciencias de la computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN, y los otros cuatro son de PYTHON. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si...

1. sin no hay restricciones?
2. si los lenguajes se deben alternar?
3. si todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?

Respuesta

1. Sin restricciones 7! formas.
2. La distribución de los libros deberá tener la forma P F P F P F P, por lo tanto

$$4P \cdot 3F \cdot 3P \cdot 2F \cdot 2P \cdot 1F \cdot 1P = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4! \cdot 3! = 144$$

3. Tomamos los libros de Fortran como una unidad primero. Entonces tenemos que FPPPP, PFPPP, PPFPP, PPPFP, PPPPF son las posiciones que ocuparían los libros de Fortran de estar todos juntos lo que nos da 5!. A esto aún hay que multiplicarlo por la predisposición de los libros de Fortran entre sí, que es 3!.
   Por lo tanto nos daría $3! \cdot 5! = 720$

Algunas veces se desea permutar sólo alguno de los elementos de un conjunto, no la totalidad.

Permutación de r en n

Una permutación r de n elementos (distintos) $x_1, x_2, ..., x_n$ es un ordenamiento de r elementos de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. El número de permutaciones r de un conjunto de n elementos diferenties se denota por $P(n, r)$.

Por ejemplo, si se desea armar las permutaciones de orden 2 a partir de 4 elementos distintos a, b, c, d

$$\begin{matrix} ab & ca \\ ac & cb \\ ad & cd \\ \\ ba & da \\ bc & db \\ bd & dc \end{matrix}$$

Teorema

El número de permutaciones de r de un conjunto de n objetos diferentes es

$$P(n,r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}_{r-veces}, \qquad \forall r \leq n$$

En notación factorial:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

Así, la cantidad de maneras de seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 10 personas es

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Ejemplo 1
Bajo las siguientes condiciones, se desea saber cuántas permutaciones en la palabra COMPUTER es posible hacer:

1. Si no se permiten repeticiones.
2. Si sólo se utilizan tres de sus letras.
3. Si se permiten repeticiones y se desea calcular el número de secuencias de 12 letras.

Respuesta

1. Como se desean permutar las ocho diferentes letras disponibles, por lo que se puede realizar de $P(8,8) = 8! = 40320$ formas diferentes.
2. Si sólo se utilizan tres de sus letras, se puede realizar de $P(8,3) = 8!/5! = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas diferentes.
3. Como se permiten repeticiones y tenemos disponibles doce lugares, existen 8^{12} secuencias de 12 letras con las ocho letras disponibles.

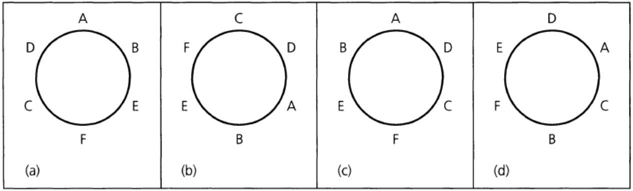
Ejemplo 2
En un grupo de 10 estudiantes, se escogerá a cinco y se les sentará en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

Respuesta

Es una permutación de 5 elementos elegidos entre un total de 10. Por lo que la cantidad de formas de ordenarlos es $P(10,5) = 30240$.

Ejemplo 3
Si seis personas, designadas como A, B, ..., F, se sientan en torno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles?

Respuesta
Las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de otra mediante una rotación. En la figura: (a) y (b) idénticas - (b), (c) y (d) distintas.



Por lo que si define:
x : número de disposiciones circulares y : número de disposiciones lineales

$$6 \cdot x = y$$

$$6 \cdot x = 6!$$

$$x = 5!$$

En general, la cantidad de disposiciones circulares de n objetos distintos es $(n-1)!$

Ejemplo 4
Probar la siguiente igualdad:

$$\frac{P(n+1,r)}{P(n,r)} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

Respuesta

$$\frac{P(n{+}1{,}r)}{P(n{,}r)} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!}} = \frac{(n{+}1)!}{(n{+}1{-}r)!} \cdot \frac{(n{-}r)!}{n!} = \frac{(n{+}1).n!}{(n{+}1{-}r)!} \cdot \frac{(n{-}r)!}{n!} =$$

$$= \frac{(n{+}1)\cdot 1}{(n{+}1{-}r)!} \cdot \frac{(n{-}r)!}{1} = \frac{(n{+}1)\cdot(n{-}r)!}{(n{+}1{-}r)(n{-}r)!} = \frac{n{+}1}{n{+}1{-}r}$$

¿Qué ocurre si queremos seleccionar objetos de un conjunto sin que nos importe el orden de selección?

Combinaciones de n en r

Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ que contiene n elementos diferentes,

1. Una *combinación* r de X es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X de r elementos).
2. El número de combinaciones r de un conjunto de n elementos distintos se denota por $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$.

Supongamos que queremos seleccionar entre los docentes María, Braulio, Rosa, Amanda y Néstor un grupo de tres para que realicen una clase de consulta. ¿De cuántas maneras pueden armarse dicho grupo?

Evidentemente no importa el orden de selección, por lo cual, seleccionar a María, Amanda y Néstor, es lo mismo que seleccionar a Amanda, Néstor y María.

Si listamos las posibilidades se ve que existen 10 maneras:

$MBR, MBA, MRA, BRA, MBN, MRN, BRN, MAN, BAN, RAN$, por lo que $C(5, 3) = 10$.

Si consideramos que por cada combinación se pueden ordenar los elementos seleccionados, y de esta manera, obtener una permutación de dichos elementos, se tiene que $P(n,r) = C(c,r) \cdot r!$

Teorema

El número de combinaciones r de de un conjuntos de n objetos distintos es

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \qquad r \leq n$$

Para el ejemplo anterior, la selección de 3 docentes de un grupo de 5, se puede calcular la cantidad de maneras diferentes de hacer dicha selección mediante

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

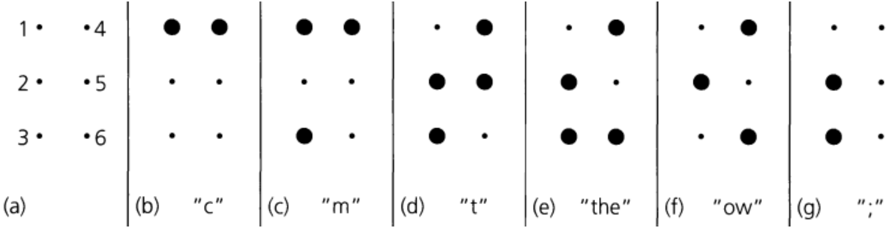
Ejemplo 1
Miriam quiere dar una fiesta para algunos miembros de su comité de caridad. Debido al tamaño de su casa, sólo puede invitar a 11 de los 20 miembros de su comité. ¿De cuántas formas puede hacer la selección si no importa el orden en que lo hace? ¿De cuántas formas se pueden sentar en la mesa dichos invitados?

Respuesta
Para hacer la selección de los 11 invitados de entre los 20 de su comité, la misma se puede hacer de 167960 formas diferentes, ya que

$$C(20, 11) = \frac{20!}{11!9!} = 167960$$

Luego, a dichos invitados, los puede ordenar en la mesa circular de $(11 - 1)! = 10!$ formas diferentes, considerando que son disposiciones circulares.

Ejemplo 2
En el sistema Braille, un símbolo, como una letra minúscula, un signo de puntuación, un sufijo, etc., se escribe resaltando al menos uno de los puntos de la disposición de seis puntos que aparecen en la parte (a) de la figura. En las partes b) a la g) se presentan algunos ejemplos.



1. ¿Cuántos símbolos diferentes podemos representar en el sistema Braille?
2. ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?
3. ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve?
4. ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

Respuesta

1. ¿Cuántos símbolos diferentes podemos representar en el sistema Braille?

$$\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 63$$

2. ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?

$$\binom{6}{3} = 20$$

3. ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve?

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 15 + 15 + 1 = 31$$

4. ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

Ejemplo 3

¿Cuántos bytes contienen...

1. exactamente dos unos?
2. exactamente cuatro unos?
3. exactamente seis unos
4. al menos seis unos?

Respuesta

1. exactamente dos unos?

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array} \right) = 28$$

2. exactamente cuatro unos?

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) = 70$$

3. exactamente seis unos

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 6 \end{array} \right) = 28$$

4. al menos seis unos?

$$\left(\begin{array}{c} 8 \\ 6 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 7 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 8 \end{array} \right) = 28 + 8 + 1 = 37$$

Ejemplo 4
Un comité de 12 personas será elegido entre 10 hombres y 10 mujeres. ¿De cuántas formas se puede hacer la selección si...

1. no hay restricciones?
2. debe haber un número par de mujeres?
3. debe haber más mujeres que hombres?
4. debe haber al menos ocho hombres?

Respuesta

1. no hay restricciones?
$$\left(\begin{array}{c} 20 \\ 12 \end{array} \right) = 125970$$
2. debe haber un número par de mujeres?
$$\binom{10}{10}\binom{10}{2} + \binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{6}\binom{10}{6} + \binom{10}{4}\binom{10}{8} + \binom{10}{2}\binom{10}{10} = 53640$$
3. debe haber más mujeres que hombres?
$$\binom{10}{2}\binom{10}{10} + \binom{10}{3}\binom{10}{9} + \binom{10}{4}\binom{10}{8} + \binom{10}{5}\binom{10}{7} = 40935$$
4. debe haber al menos ocho hombres?
$$\binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{9}\binom{10}{3} + \binom{10}{10}\binom{10}{2} = 10695$$

Ejemplo 5
¿De cuántas formas un estudiante que realiza un examen puede responder...

1. ... siete de diez preguntas.
2. ... tres de las primeras cinco y cuatro de las últimas cinco.
3. ... siete de diez preguntas, de las cuales al menos tres deberán ser de las primeras cinco.

Respuesta

1. ... 7 de 10 preguntas se puede contestar de $C(10,7) = 120$ formas diferentes.
2. ... 3 de las primeras 5 y 4 de las últimas 5 se pueden contestar de $C(5,3) \cdot C(5,4) = 50$ formas diferentes.
3. ... 7 de 10 preguntas, de las cuales **al menos** 3 deberán ser de las primeras 5. En este ítem tendremos que considerar la posibilidad de que de las primeras cinco preguntas se contesten 3, 4 o 5 de ellas, con lo cual se responderan las restantes 4, 3 o 2 preguntas, respectivamente, de las últimas cinco disponibles en el examen. Haciendo uso de los principios de multiplicación y de la suma, se tiene:

$$C(5,3) \cdot C(5,4) + C(5,4) \cdot C(5,3) + C(5,5) \cdot C(5,2) = 50 + 50 + 10 = 70$$

formas diferentes de realizar la prueba.

Nota: recuerde que también es válido utilizar la notación $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{2}$

Ejemplo 6
Probar que que:

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{1} = n$
4. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Respuesta

1. $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$
2. $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$
3. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$
4. $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p!)p!}$ y por otro lado
   $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-(n-p))!(n-p!)} = \dfrac{n!}{n!(n-p)!}$, por lo que las expresiones son iguales.

   Con lo cual, por ejemplo, $C(7,4) = C(7,3)$.

Ejemplo 7
Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $P(x,2) + P(x-2,2) + P(x-4,2) = 98$

b) $6 \cdot C(x,3) = P(x-1,4)$

Respuesta

a)

$$P(x,2) + P(x-2,2) + P(x-4,2) = 98$$

$$x \cdot (x-1) + (x-2)(x-3) + (x-4) \cdot (x-5) = 98$$

$$x^2 – 5x – 24 = 0$$

De las dos soluciones de la ecuación cuadrática ($x = 8$; $x = -3$), -3 no verifica la ecuación dada. Por lo que la única solución es $x = 8$

b)

$$6 \cdot C(x,3) = P(x-1,4)$$

$$6 \cdot \frac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$x^2 – 8x + 12 = 0$$

De las dos soluciones de la ecuación cuadrática ($x = 6$; $x = 2$), 2 no verifica la ecuación dada, ya que no existe la expresión $P(2-1,4)$. Por lo que la única solución es $x = 6$

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.2 (Página 237) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

1. 1 al 6
2. 31 al 37
3. 44 al 49
4. 58 al 62