Matemática Discreta

Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana

Lic en Sistemas de Información - FCyT - UADER

2022

Unidad 2: Lenguaje – Máquinas de estados finitos.

Lenguajes: Introducción. Definiciones. Teoría de conjuntos de las cadenas. Máquinas de estados finitos.

Lenguajes

Las sucesiones de símbolos, o caracteres, tienen un papel clave en el procesamiento de información en una computadora. Como los programas puede representarse en términos de sucesiones finitas de caracteres, se necesita alguna forma algebráica para manejar tales sucesiones finitas, también llamadas cadenas, palabras o enunciados.

Alfabeto

El símbolo Σ representa a un conjunto de símbolos finitos no vacío, que llamaremos *alfabeto*.

Por ejemplo:

$\Sigma = \{0, 1\}$ $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ $\Sigma = \{0, 1, \alpha, \beta,],), a, t, \times\}$

Se descartan los lenguajes del tipo: $\Sigma = \{a, b, c, aab, ca\}$

Potencia de Σ

Si Σ es un alfabeto y $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos las *potencia de* Σ recursivamente de la siguiente manera:
$\Sigma^1 = \Sigma$, y $\Sigma^{n+1} = \{xy/x \in \Sigma, y \in \Sigma^n\}$, donde xy denota la yuxtaposición de x e y.

Ejemplo

Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, hallar: Σ^2 y Σ^3

$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
$\Sigma^3 = \{000, 010, 100, 110, 001, 011, 101, 111\}$

En general, para todo entero positivo n, se verifica que $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$, ya que estamos trabajando con disposiciones (de tamaño n) con reposición.

Ejemplo

Dado $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, indicar cuántos elementos tiene Σ^3 y mostrar algunos.

$|\Sigma^3| = |\Sigma|^3 = 5^3 = 125$ Algunos de sus elementos son: aaa, abc, edc, ...

Cadena vacía

Para cualquier alfabeto Σ definimos $\Sigma^0 = \{\lambda\}$, donde λ denota la *cadena vacía*, es decir, la cadena que no consta de ningún símbolo tomado de Σ.

Note que:

- $\{\lambda\} \not\subseteq \Sigma$ ya que $\lambda \notin \Sigma$
- $\{\lambda\} \neq \varnothing$ ya que $|\{\lambda\}| = 1 \neq 0 = |\varnothing|$

Σ^+ y Σ^*

Si Σ es cualquier alfabeto, entonces
$\Sigma^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \Sigma^n$, y $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$

Observe que la única diferencia entre Σ^+ y Σ^* es el elemento λ, con lo cual

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \Sigma^0$$

Sean $w_1, w_2 \in \Sigma^+$, por lo tanto, $w_1 = x_1 x_2 ... x_m$ y $w_2 = y_1 y_2 ... y_n$, para $m, n \in \mathbb{Z}^+$, con $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n \in \Sigma$; se definen:

Cadenas iguales

Decimos que las cadenas w_1 y w_2 son iguales, y escribimos $w_1 = w_2$ si $m = n$, y $x_i = y_i$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Longitud de una cadena

La longitud de w_1, que se denota como $\parallel w_1 \parallel$, como el valor m. Para el caso de λ, $\parallel \lambda \parallel = 0$.

Concatenación de cadenas

La concatenación de w_1 y w_2, y escribimos, $w_1 w_2$, es la cadena $x_1 x_2 ... x_m y_1 y_2 ... y_n$.
La concatenación con λ será: $w_1 \lambda = w_1$, $\lambda w_1 = w_1$ y $\lambda\lambda = \lambda$.

Potencia de x

Para cualquier $x \in \Sigma^*$, definimos las potencias de x como $x^0 = \lambda$, $x^1 = x$, $x^2 = xx$, $x^3 = xx^2$,...,$x^{n+1} = xx^n$,..., donde $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y $x = 01$, hallar x^0, x^1, x^3, $\| x^2 \|$, $\| x^3 \|$, y una regla general para, $\| x^n \|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$x^0 = \lambda$

$x^1 = 01$

$x^3 = 010101$

$\| x^2 \| = 4$

$\| x^3 \| = 6$

$\| x^5 \| = 10$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\| x^n \| = n \| x \|$

Prefijo y sufijo

Si $x, y \in \Sigma^*$ y $w = xy$, entonces:

- La cadena x es un *prefijo* de w (*prefijo propio* si $y \neq \lambda$).
- La cadena y es un *sufijo* de w (*sufijo propio* si $x \neq \lambda$)

Ejemplo

Para $w = 010011100$, indicar todos los prefijos, prefijos propios, sufijos y sufijos propios.

prefijos: λ, 0, 01, 010, 0100, 01001, 010011, 0100111, 01001110, 010011100
p. propios: λ, 0, 01, 010, 0100, 01001, 010011, 0100111, 01001110

sufijos: λ, 0, 00, 100, 1100, 11100, 011100, 0011100, 10011100, 010011100
s. propios: λ, 0, 00, 100, 1100, 11100, 011100, 0011100, 10011100

Subcadena

Si $x, y, z \in \Sigma^*$ y $w = xyz$, entonces y es una *subcadena* de w. Cuando ni x ni z son iguales λ, y es una subcadena propia.

Lenguaje

Para un alfabeto dado Σ, cualquier subconjunto de Σ^* es un *lenguaje* sobre Σ. Esto incluye al subconjunto $\varnothing$, al que llamaremos *lenguaje vacío*.

Concatenación de lenguajes

Para un alfabeto Σ y los lenguajes $A, B \subseteq \Sigma^*$, la concatenación de A y B, se denota con AB, y es $\{ab / a \in A, b \in B\}$.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{x, y, z\}$, y los lenguajes $A = \{x, xy, z\}$, $B = \{\lambda, y\}$. Hallar AB, BA, y verificar que $|AB| \neq |BA|$ y $|AB| \neq |A||B|$.

$AB = \{x\lambda, xy, xy\lambda, xyy, z\lambda, zy\} = \{x, xy, xyy, z, zy\}$

$BA = \{\lambda x, \lambda xy, \lambda z, yx, yxy, yz\} = \{x, xy, z, yx, yxy, yz\}$

$|AB| \neq |BA|$ porque $|AB| = 5$ y $|BA| = 6$

$|AB| \neq |A||B|$ porque $|AB| = 5$ y $|A||B| = 3 \cdot 2 = 6$

Teorema

Para un alfabeto Σ y $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ se verifica:

- $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A$
- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(B \cup C)A = BA \cup CA$
- $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$

Para cualquier lenguaje $A \subseteq \Sigma^*$ podemos construir otros lenguajes de la manera siguiente:

- $A^0 = \{\lambda\}$, $A^1 = A$ y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $A^{n+1} = \{ab / a \in A, b \in A^n\}$
- $A^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A^n$ (Clausura positiva de A)
- $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ (Clausura de Kleene)

Ejemplos

Sea $\Sigma = \{x, y\}$

- Si $A = \{xx, xy, yx, yy\}$, entonces A^* es el lenguaje de todas las cadenas $w \in \Sigma^*$ de longitud par.
- Con A de la primera parte, y $B = \{x, y\}$, el lenguaje BA^* contiene todas las cadenas de Σ^* de longitud impar.
- El lenguaje $\{x\}\{x, y\}^*$ contiene cada cadena de Σ^* para la cual x es un prefijo.
- El lenguaje $\{x, y\}^+\{yy\}$ contiene todas las cadenas de Σ^* para la cual yy es un sufijo propio.
- Cada cadenas del lenguaje $\{x, y\}^*\{xxy\}\{x, y\}^*$ tiene a xxy como subcadena.
- Cualquier cadena de $\{x\}^*\{y\}^*$ consta λ y de todas las cadenas con un número finito de x seguido de un número finito de y

Teorema

Para en alfabeto Σ y los lenguajes $A, B \subseteq \Sigma^*$,

- $A \subset AB^*$
- $A \subseteq B^+A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A^+ \subseteq B^+$
- $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$
- $AA^* = A^*A = A^+$
- $A^*A^* = A^* = (A^*)^* = (A^*)^+ = (A^+)^*$
- $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*$

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.1 (Página 325) del libro *Matemática Discreta de Ralph Grimaldi* que se encuentra en el campus virtual:

1. 1 al 10
2. 12 al 14
3. 22 al 24