(1) Resolver $66x + 29y = 1$; $x, y \in \mathbb{Z}$

$\text{mcd}(66, 29) = 1 \mid 1$ tiene sol.

¿Solución particular? a simple vista no aparece $\Rightarrow$ Algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 29 \\ \hline 8 & 2 \end{array} \qquad 8 = 66 + (-2) \cdot 29$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 8 \\ \hline 5 & 3 \end{array} \qquad 5 = 29 + (-3) \cdot 8$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad 3 = 8 + (-1) \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad 2 = 5 + (-1) \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad 1 = 3 + (-1) \cdot 2$$

1 mcd.

$1 = 3 + (-1) \cdot 2 =$

$= (8 + (-1) \cdot 5) + (-1)(5 + (-1) \cdot 3)$

$= 8 + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 3 =$

$= (66 + (-2) \cdot 29) + (-2)(29 + (-3) \cdot 8) + (8 + (-1) \cdot 5) =$

$= 66 + (-4) 29 + 7 \cdot 8 + (-1) \cdot 5 =$

$= 66 + (-4) \cdot 29 + 7 \cdot (66 + (-2) \cdot 29) + (-1)(29 + (-3) \cdot 8)$

$= 8 \cdot 66 + (-19) \cdot 29 + 3 \cdot 8 =$

$= 8 \cdot 66 + (-19) \cdot 29 + 3 \cdot (66 + (-2) \cdot 29) =$

$= \boxed{11 \cdot 66 + (-25) \cdot 29 = 1}$

Sol part: $x_0 = 11$; $y_0 = -25$

$\boxed{11 \cdot 66 + (-25) \cdot 29 = 1}$ Sol part: $x_0 = 11$; $y_0 = -25$ de $66x + 29y = 1$

$66 \cdot 11 + 29 \cdot (-25) + k \cdot 29 \cdot 66 - k \cdot 29 \cdot 66 = 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.

cofinos

$$66\underbrace{(11 - 29k)}_{x} + 29\underbrace{(-25 + 66k)}_{y} = 1$$

Sol: $x = 11 - 29k$; $y = -25 + 66k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

② Resolver $198x + 87y = 3$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$198x + 87y = 3$$

$$\text{mcd}(198, 87) = 3$$

DIVIDO POR $\text{mcd}(198, 87) = 3$

$$66x + 29y = 1$$

ejercicio 1, ya resuelta

Sol: $x = 11 - 29k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.
$y = -25 + 66k$

Forma 1 (mcd (198, 87))

DIVISORES COMUNES

198	87	3
66	29	

Forma 2 (alg euclides)

$$\begin{array}{r|l} 198 & 87 \\ \hline 24 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 87 & 24 \\ \hline 15 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 15 \\ \hline 9 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 9 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$3 \rightarrow \text{mcd}(198, 87)$

$$\cancel{\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}}$$

③ Resolver $67x + 29y = 4$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$67x + 29y = 4$$

mcd$(67, 29) = 1$ divide a $4 \Rightarrow$ tiene solución

¿Sol. particular $67x + 29y = 4$? No aparece a simple vista

¿Sol. particular $67a + 29b = 1$? No aparece a simple vista

$$\begin{array}{r|l} 67 & 29 \\ \hline 9 & 2 \end{array} \qquad 9 = 67 + (-2).29$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 9 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad 2 = 29 + (-3).9$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \qquad 1 = 9 + (-4).2$$

mcd

$$\begin{aligned}
1 &= 9 + (-4).2 \\
&= (67 + (-2).29) + (-4).(29 + (-3).9) \\
&= 67 + (-6).29 + 9.12 = \\
&= 67 + (-6).29 + 12.(67 + (-2).29) \\
&= \boxed{13.67 + (-30).29 = 1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{13 \cdot 67 + (-30) \cdot 29 = 1}$$

Sol. particular de $67a + 29b = 1$

$$67 \cdot 13 + 29 \cdot (-30) = 1$$

$\times 4$

$$67 \cdot (13 \cdot 4) + 29 \cdot (-30 \cdot 4) = 1 \cdot 4$$

$$67 \cdot 52 + 29 \cdot (-120) = 4$$

Sol particular de $67x + 29y = 4$

Todas las soluciones:

$$67 \cdot 52 + 29 \cdot (-120) + k \cdot 67 \cdot 29 - k \cdot 67 \cdot 29 = 4 \quad ; \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

$$67 \cdot (52 + 29k) + 29 \cdot (-120 - 67k) = 4$$

Sol: $x = 52 + 29k \quad ; \quad y = -120 - 67k \quad , \forall k \in \mathbb{Z}.$

4.3 (Grimaldi 223p.)

10. Si $n \in Z^+$ y n es impar, demuestre que 8 | $(n^2 - 1)$

$n = 2k + 1, k \in Z$

$8 \mid (n^2 - 1)$

$8 \mid ((2k + 1)^2 - 1)$

$8 \mid (4k^2 + 4k + 1 - 1)$

$8 \mid (4k^2 + 4k)$

$8 \mid 4k(k + 1)$, necesito que $4k(k + 1)$ sea múltiplo de 8.

$k(k + 1)$ es siempre par. $k(k + 1) = 2t, t \in Z$

$8 \mid 4(2t) = 8 \mid 8t$, 8 siempre divide a un múltiplo de 8.

13. Si $n \in N$, demuestre que 3 | $(7^n - 4^n)$

Base n = 1

$3 \mid (7^1 - 4^1)$

$3 \mid 3$

Hipótesis n=k

$3 \mid (7^k - 4^k)$

$(7^k - 4^k) = 3s, s \in Z$

Tesis n=k+1

¿$3 \mid (7^{k+1} - 4^{k+1})$? ¿$(7^{k+1} - 4^{k+1}) = 3t, t \in Z$?

Demostración

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7.7^k - 4.4^k = (4 + 3).7^k - 4.4^k = 4.7^k + 3.7^k - 4.4^k$

$= 3.7^k + 4(7^k - 4^k)$

Para cualquiera $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}$ (recuerde que el divisor no puede ser 0)

1. $1|a$ y $a|0$
2. $[(a|b) \wedge (b|a)] \Rightarrow a = \pm b$
3. $[(a|b) \wedge (b|c)] \Rightarrow a|c$
4. $a|b \Rightarrow a|bx$
5. Si $x = y + z$ y a divide a dos de los enteros x, y, z, entonces a divide al entero restante.
6. $[(a|b) \wedge (a|c)] \Rightarrow a|(bx + cy)$. ($bx + cy$ es combinación lineal entera de b y c)
7. Si $\forall 1 \leq i \leq n$, $c_i \in \mathbb{Z}$ y $a|c_i$ entonces $a|(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$

3 | 3.7^k y 3 | $(7^k - 4^k)$

Por lo tanto

3 | $(1)3.7^k + (4)(7^k - 4^k)$, por propiedad 6

3 | $3.7^k + (4)(7^k - 4^k)$

3t = $3.7^k + (4)(7^k - 4^k)$

Por lo tanto

3 | $(7^{k+1} - 4^{k+1})$

4.4 (Grimaldi 232p.)

14. Una ejecutiva compra \$249.00 de juguetes para los niños de sus empleados. Para cada niña, compra una muñeca de \$3.30; cada niño recibe un conjunto de soldados que cuestan \$2.90.

¿Cuantos juguetes de cada tipo compró?

x = Cantidad de muñecas compradas.

y = Cantidad de soldados comprados.

x ? y?

\$3.3x + \$2.9y =\$249

3.3x + 2.9y =249

33x + 29y =2490

mcd(33;29) = 1

33 = (1)29 + 4

29 = (7) 4 + 1

1 = 29 - (7)4 = 29 - (7)(33-29) = (-7)33 + (8)29

¿ x = -7 e y = 8 es una solución al problema? NO

$$1 = (-7)33 + (8)29$$

$$2490 = (-17430)33 + (19920)29$$

$$2490 = \underbrace{(-17430 + 29k)}_{x}33 + \underbrace{(19920 - 33k)}_{y}29$$

$k \in Z$

$$-17430 + 29k \geq 0$$

$$29k \geq 17430$$

$$k \geq \frac{17430}{29} \approx 601.03$$

$$k \geq 602$$

$$19920 - 33k \geq 0$$

$$-33k \geq -19920$$

$$k \leq \frac{-19920}{-33} \approx 603.64$$

$$k \leq 603$$

$$602 \leq k \leq 603$$

Si k =602

$$-17430 + 29(602) = 28$$

$$19920 - 33(602) = 54$$

$$2490 = (28)33 + (54)29$$

Si k = 603

$$-17430 + 29(603) = 57$$

$$19920 - 33(603) = 21$$

$$2490 = (57)33 + (21)29$$

¿Cuantos juguetes de cada tipo compró?

Rta: Compró 28 muñecas y 54 soldados o pudo haber comprado 57 muñecas y 21 soldados.

15. Determine los valores de $c \in Z^{+}, 10 < c < 20$, para los que la ecuación diofántica $84x + 990y = c$ no tiene solución. Determine las soluciones para los valores restantes de c.

Si $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$, la ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene una solución entera $x = x_0$, $y = y_0$ si y sólo si $mcd(a, b)$ divide a c.

mcd(84;990) = 6

6 debe dividir a c

6 | c, teniendo en cuenta que 11<=c<=19. ¿Cuánto debe valer c para que la ecuación tenga solución?

Solo la ecuación tiene solución cuando c=12 o c=18.

Determine las soluciones para los valores restantes de c.

TAREA

84x+990y = 12 y 84x+990y = 18

16.

a) Determine los enteros $w, x, y \in Z$ que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones diofánticas:

$$\begin{cases} w + x + y = 50 \\ w + 13x + 31y = 116 \end{cases}$$

b) ¿Existe una solución en la parte (a) tal que $w, x, y > 0$?

c) ¿Existe una solución en la parte (a) tal que $w > 0, x > 28$ y $y > -15$?

$$\begin{cases} w + x + y = 50 \\ w + 13x + 31y = 116 \end{cases}$$

A la segunda ecuación, le restamos la primera

$0w + 12x + 30y = 66$

$12x + 30y = 66$

mcd(12;30) | 66

6 | 66, 66 = 6n, siendo n entero. 66 = 6 (11)

Por lo tanto la ecuación tiene solución.

$12x + 30y = 66$

$2x + 5y = 11$

5 = (2)2+1

1 = 5-(2)2

$11 = (-22)\,2 + (11)\,5$

$11 = (-22 + 5k)\,2 + (11 - 2k)\,5, k \in Z$

$x = -22 + 5k$

$y = 11 - 2k$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} w + (-22 + 5k) + (11 - 2k) = 50 \\ w + 13(-22 + 5k) + 31(11 - 2k) = 116 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w + 3k - 11 = 50 \\ w + 3k + 55 = 116 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = 50 + 11 - 3k \\ w = 116 - 55 - 3k \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = 61 - 3k \\ w = 61 - 3k \end{cases}$$

$w = 61 - 3k$

Determine los enteros w, x, y

Respuesta

$x = -22 + 5k$
$y = 11 - 2k$

$w = 61 - 3k$

$k \in Z$

b) ¿Existe una solución en la parte (a) tal que $w, x, y > 0$?

Probamos k =0

$x = -22$
$y = 11$

$w = 61$

No es solución

$11 = (-22 + 5k)\,2 + (11 - 2k)\,5, k \in Z$

$-22 + 5k > 0$

$5k > 22$

$k > \frac{22}{5} = 4.4$

$k \geq 5$

$11 - 2k > 0$

$-2k > -11$

$k < \frac{11}{2} = 5.5$

$k \leq 5$

Si k = 5

$x = -22 + 5(5) = 3$
$y = 11 - 2(5) = 1$

$w = 61 - 3(5) = 46$

Verificación

$$\begin{cases} 46 + 3 + 1 = 50 \\ 46 + 13(3) + 31(1) = 116 \end{cases}$$

Respuesta:

Existe una solución con las restricciones dadas

$x = 3$
$y = 1$

$w = 46$

c) ¿Existe una solución en la parte (a) tal que $w > 0, x > 28$ y $y > -15$?

TAREA

$-22 + 5k > 28$

$11 - 2k > -15$

<u>4.5 (Grimaldi 236p.)</u>

5) Encuentre el valor del entero positivo más grande tal que 2^n divida a 22!

12) a) ¿Cuántos divisores positivos tiene $n = 2^{14}\, 3^9\, 5^8\, 7^{10}\, 11^3\, 13^5\, 37^{10}$?

b) Para los divisores de la parte (a), ¿cuántos son

i) divisibles entre tiene $n = 2^3\, 3^4\, 5^7\, 11^2\, 37^2$?

ii) divisibles entre 1.166.400.000?

iii) cuadrados perfectos?

iv) cuadrados perfectos divisibles entre $2^2\, 3^4\, 5^2\, 11^2$?

v) cuadrados perfectos divisibles entre $2^3\, 3^4\, 5^4\, 7^5$?

vi) cubos perfectos?

vii) cubos perfectos que son múltiplos de $2^{10}\, 3^9\, 5^2\, 7^5\, 11^2\, 13^2\, 37^2$?

viii) cuartas potencias perfectas?

ix) quintas potencias perfectas?

x) cuadrados perfectos y cubos perfectos?

15. Determine el cuadrado perfecto más pequeño que es divisible entre 7!.