Matemática Discreta

Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana

Lic en Sistemas de Información - FCyT - UADER

2022

Unidad 5: El sistema de los Enteros.

Principio del buen orden. Principio de inducción matemática. Definiciones recursivas. Algoritmo de la división. Números primos. Máximo común divisor. Algoritmo de Euclides. Teorema fundamental de la Aritmética. La función ϕ de Euler.

El principio del buen orden: Inducción Matemática

El principio del buen orden

Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un elemento mínimo. (Con frecuencia decimos entonces que $\mathbb{Z}^+$ es bien ordenado).

En matemáticas, la inducción es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n, que toma una infinidad de valores enteros. La inducción matemática consiste en el siguiente razonamiento:

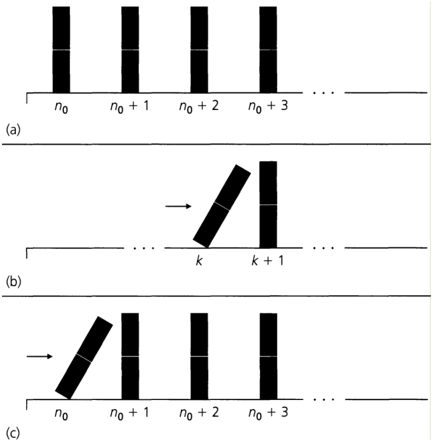
Principio de inducción finita o de inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

1. Si $S(1)$ es verdadera; y
2. siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), implica que $S(k+1)$ también es verdadera;

entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Una descripción informal de la inducción matemática puede ser ilustrada por el efecto dominó, donde ocurre una reacción en cadena con una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de la otra.



$$[S(n_0) \wedge [\forall k \geq n_0 : [S(k) \Rightarrow S(k+1)]]] \Rightarrow \forall n \geq n_0 : S(n_0)$$

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, la suma de los primeros n enteros positivos se puede calcular haciendo $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, la suma de los primeros n impares positivos es n^2.

Entre las varias sucesiones interesantes de números que aparecen en la matemática discreta y combinatoria, están los ***números armónicos*** $H_1, H_2, H_3, ...$, donde

$$H_1 = 1,\ H_2 = 1 + \tfrac{1}{2},\ H_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3},\ ...,$$
$$\text{en general: } H_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Probar que si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, $H_{2^n} \leq n + 1$

DEFINICIONES RECURSIVAS

Para definir conjuntos recursivamente, se especifican algunos elementos iniciales en un paso base y proporcionamos, en el paso recursivo, una regla para construir nuevos elementos a partir de los que ya tenemos.

Ejemplo:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \text{y}\ \forall n \geq 3\text{: } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

la cual también se puede expresar como

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \text{y}\ \forall n \geq 0\text{: } a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

Otros ejemplos son las definiciones de:

- Los números armónicos: $H_1 = 1$; y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $H_{n+1} = H_n + \left(\frac{1}{n+1}\right)$
- Factorial de un número: $0! = 1$; y $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $(n+1)! = (n+1).n!$

Los ***números de Fibonacci*** pueden definirse recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F_0 = 0;\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots$$

Una sucesión estrechamente relacionada con los números de Fibonacci es la de los ***números de Lucas***, la cual se define:

$$\begin{cases} L_0 = 2,\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ldots$$

Forma alternativa del Principio de inducción finita

Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), donde la variable n, que representa un entero positivo, aparece una o más veces. Además, sean $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ con $n_0 \leq n_1$.

1. Si $S(n_0), S(n_0+1), S(n_0+2), ..., S(n_1-1)$ y $S(n_1)$ son verdaderas; y
2. siempre que $S(n_0), S(n_0+1), ..., S(k-1)$ y $S(k)$ sean verdaderas (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), implica que $S(k+1)$ también es verdadera;

entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Sea la sucesión entera $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$, donde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, . Probar que $a_n \leq 3^n$.

Después de transcurrir n meses en un experimento de invernadero, el número p_n de plantas (de un tipo particular) satisface las ecuaciones: $p_0 = 3$, $p_1 = 7$, y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$, con $n \geq 2$. Probar que $p_n = 2^{n+2} - 1$.

Demuestre las siguientes propiedades que tienen las sucesiones anteriormente mencionadas:

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {F^2}_i = F_n.F_{n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $F_n \leq \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$