15

Álgebra booleana y funciones de conmutación

De nuevo nos enfrentamos a un sistema algebraico en el que la estructura depende principalmente de dos operaciones binarias cerradas. A diferencia del tratamiento dado al tema de los anillos, al estudiar las álgebras booleanas pondremos más énfasis en las aplicaciones que en la naturaleza abstracta del sistema. No obstante, examinaremos con cuidado la estructura de un álgebra booleana y veremos resultados un tanto diferentes de los de los anillos. Entre otras cosas, un álgebra booleana finita debe tener 2^n elementos, para algún $n \in \mathbf{Z}^+$. Por otro lado, conocemos al menos un anillo para cada $m \in \mathbf{Z}^+$, $m > 1$, el anillo $(\mathbf{Z}_m, +, \cdot)$.

En 1854, el matemático inglés George Boole publicó su obra monumental *An Investigation of the Laws of Thought*. En esta obra, Boole creó un sistema de lógica matemática que desarrolló en términos de lo que ahora llamamos un álgebra booleana.

En 1938, Claude Elwood Shannon desarrolló el álgebra de las funciones de conmutación y mostró la forma en que su estructura se relacionaba con las ideas establecidas por Boole. Como resultado de este trabajo, un ejemplo de las matemáticas abstractas del siglo XIX se convirtió en una disciplina matemática aplicada en el siglo XX.

15.1 Funciones de conmutación: Formas normales disjuntiva y conjuntiva

Un interruptor eléctrico puede encenderse (permitiendo el flujo de corriente) o apagarse (evitando el flujo de corriente). En forma análoga, en un transistor, la corriente pasa (conductor) o no pasa (no conductor). Éstos son ejemplos de *dispositivos con dos estados*. (En la sección 2.2 vimos que el interruptor eléctrico se relacionaba con la lógica con dos valores.)

Para analizar estos dispositivos con dos estados, abstraemos conceptos como "verdadero" y "falso", "encendido" y "apagado", de la forma siguiente.

Sea $B = \{0, 1\}$. Definimos la suma, producto y complemento para los elementos de B como

a) $0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1.$
b) $0 \cdot 0 = 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1; \quad 1 \cdot 1 = 1.$
c) $\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0.$

Una variable x es una *variable booleana* si x sólo toma valores de B. En consecuencia, $x + x = x$ y $x^2 = x \cdot x = xx = x$ para cualquier variable booleana x.

Si x, y son variables booleanas, entonces

1) $x + y = 0$ si y sólo si $x = y = 0$, y
2) $xy = 1$ si y sólo si $x = y = 1$.

Si $n \in \mathbf{Z}^+$, entonces $B^n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) | b_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$. Una función $f: B^n \to B$ es una *función de conmutación*, o *booleana*, de n variables. Las n variables se enfatizan si escribimos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde cada x_i, para $1 \leq i \leq n$ es una variable booleana.

Ejemplo 15.1 Sea $f: B^3 \to B$, donde $f(x, y, z) = xy + z$. (Escribimos xy en vez de $x \cdot y$) Esta función booleana queda determinada evaluando f para cada una de las ocho posibles asignaciones a las variables x, y, z, como lo demuestra la tabla 15.1.

Tabla 15.1

x	y	z	xy	$f(x, y, z) = xy + z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Definición 15.1 Para $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$, sean $f, g: B^n \to B$ dos funciones booleanas de las n variables booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Decimos que f y g son *iguales* y escribimos $f = g$ si las columnas para f, g [en sus respectivas tablas de función] son exactamente las mismas. [Las tablas muestran que $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = g(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ para cada una de las 2^n posibles asignaciones de 0 o 1 a cada una de las n variables booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.]

Definición 15.2 Si $f: B^n \to B$, entonces el *complemento* de f, que se denota con $\overline{f}$, es la función booleana definida sobre B^n como

$$\overline{f}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \overline{f(b_1, b_2, \ldots, b_n)}.$$

Si $g: B^n \to B$, definimos $f+g$, $f \cdot g: B^n \to B$ la *suma* y *producto* de f, g, respectivamente, como

$$(f+g)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n) + g(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

y

$$(f \cdot g)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot g(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

En la tabla 15.2 resumimos diez leyes (consecuencias importantes de estas definiciones).

Tabla 15.2

1) $\overline{\overline{f}} = f$	$\overline{\overline{x}} = x$	Ley del *doble complemento*
2) $\overline{f+g} = \overline{f}\,\overline{g}$ $\overline{fg} = \overline{f} + \overline{g}$	$\overline{x+y} = \overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$	Leyes de *DeMorgan*
3) $f+g = g+f$ $fg = gf$	$x+y = y+x$ $xy = yx$	Leyes *conmutativas*
4) $f+(g+h) = (f+g)+h$ $f(gh) = (fg)h$	$x+(y+z) = (x+y)+z$ $x(yz) = (xy)z$	Leyes *asociativas*
5) $f+gh = (f+g)(f+h)$ $f(g+h) = fg+fh$	$x+yz = (x+y)(x+z)$ $x(y+z) = xy+xz$	Leyes *distributivas*
6) $f+f = f$ $ff = f$	$x+x = x$ $xx = x$	Leyes de *idempotencia*
7) $f+\mathbf{0} = f$ $f \cdot \mathbf{1} = f$	$x+0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Leyes de *identidad*
8) $f+\overline{f} = \mathbf{1}$ $f\overline{f} = \mathbf{0}$	$x+\overline{x} = 1$ $x\overline{x} = 0$	Leyes de los *inversos*
9) $f+\mathbf{1} = \mathbf{1}$ $f \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	$x+1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Leyes de *dominación*
10) $f+fg = f$ $f(f+g) = f$	$x+xy = x$ $x(x+y) = x$	Leyes de *absorción*

Como con las leyes de la lógica (en el Cap. 2) y las leyes de la teoría de conjuntos (en el Cap. 3), las propiedades que aparecen en la tabla 15.2 son satisfechas por las funciones booleanas arbitrarias $f, g, h: B^n \to B$ y por las variables booleanas arbitrarias x, y, z. (Escribimos fg en vez de $f \cdot g$.)

El símbolo **0** denota la función booleana constante cuyo valor es siempre 0, y **1** es la función cuyo único valor es 1. (*Nota*: $\mathbf{0}, \mathbf{1} \notin B$.)

De nuevo, la idea de dualidad aparece en las propiedades 2 – 10. Si s representa un teorema acerca de la igualdad de las funciones booleanas, entonces s^d, el *dual* de s, se obtiene al reemplazar en s todas las ocurrencias de $+$ $(\cdot)$ por $\cdot$ $(+)$ y todas las ocurrencias de $\mathbf{0}(\mathbf{1})$ por $\mathbf{1}(\mathbf{0})$. Por el principio de dualidad (que analizaremos en la sección 15.4), la proposición s^d también es un teorema. Lo mismo es cierto para un teorema que trata de la igualdad de las variables booleanas, excepto que reemplazamos en este caso los valores booleanos 0 y 1, no las funciones constantes **0** y **1**.

El principio de dualidad es útil para establecer la propiedad 5 de la tabla 15.2 para funciones y variables booleanas.

Ejemplo 15.2 *La ley distributiva de + sobre ·.* Las últimas dos columnas de la tabla 15.3 muestran que $f + gh = (f + g)(f + h)$. También vemos que $x + yz = (x + y)(x + z)$ es un caso particular de esta propiedad, si $f, g, h: B^3 \to B$, con $f(x, y, z) = x$, $g(x, y, z) = y$ y $h(x, y, z) = z$. Por lo tanto, no necesitamos más tablas para establecer esta propiedad para las variables booleanas.

Por el principio de dualidad, tenemos que $f(g + h) = fg + fh$.

Tabla 15.3

f	g	h	gh	$f+g$	$f+h$	$f+gh$	$(f+g)(f+h)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Ejemplo 15.3

a) Para establecer la primera ley de absorción para las variables booleanas, en vez de basarnos en la construcción de una tabla, argumentamos de la forma siguiente:

		Razones
$x + xy$	$= x1 + xy$	Ley de identidad
	$= x(1 + y)$	Ley distributiva de · sobre +
	$= x1$	Ley de dominio (y ley conmutativa de +)
	$= x$	Ley de identidad

Este resultado indica que algunas de las leyes pueden deducirse de otras. La pregunta es entonces qué propiedades debemos establecer con tablas para obtener las demás, como lo hicimos aquí. Analizaremos esto posteriormente, en la sección 15.4, cuando estudiemos la estructura de un álgebra booleana.

Por el momento, demostraremos que los resultados de la tabla 15.2 pueden usarse para simplificar otras expresiones booleanas.

b) Para las variables booleanas w, x, y y z, tenemos que

	Razones
$wy + xy + wz + xz = (w + x)y + (w + x)z$	Ley conmutativa de · y la ley distributiva de · sobre +
$= (w + x)(y + z)$	Ley distributiva de · sobre +

c) Simplificaremos la expresión $wx + \overline{\overline{x}z} + (y + \overline{z})$, donde w, x, y y z son variables booleanas.

	Razones
$wx + \overline{\overline{x}z} + (y + \overline{z}) = wx + (\overline{\overline{x}} + \overline{z}) + (y + \overline{z})$	Ley de De Morgan
$= wx + (x + \overline{z}) + (y + \overline{z})$	Ley del doble complemento
$= [(wx + x) + \overline{z}] + (y + \overline{z})$	Ley asociativa de +
$= (x + \overline{z}) + (y + \overline{z})$	Ley de absorción (y las leyes conmutativas de + y ·)
$= x + (\overline{z} + \overline{z}) + y$	Leyes conmutativa y asociativa de +
$= x + \overline{z} + y$	Ley idempotente de +

Hasta este momento, hemos repetido para las funciones booleanas lo hecho con las proposiciones. Al dar una función booleana (en términos algebraicos), construimos su tabla de valores. Consideremos ahora el proceso inverso: dada una tabla de valores, encontraremos una función booleana (descrita en términos algebraicos) para la cual sea la tabla correcta.

Ejemplo 15.4 Dadas tres variables booleanas x, y, z encontraremos las fórmulas para las funciones $f, g, h: B^3 \to B$ de las columnas dadas en la tabla 15.4.

Para la columna que está debajo de f, queremos un resultado que tenga el valor 1 cuando $x = y = 0$ y $z = 1$. La función $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z$ es una de esas funciones. De la misma forma, $g(x, y, z) = x\overline{y}\,\overline{z}$ da el valor 1 para $x = 1, y = z = 0$ y 0 en los demás casos. Como f y g tienen el valor 1 solamente en un caso y estos casos son distintos entre sí, su suma $f + g$ toma el valor 1 exactamente en estos dos casos. Así, $h(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z}$ tiene la columna de valores dados bajo h.

Tabla 15.4

x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Este ejemplo nos lleva a la siguiente definición.

Definición 15.3 Para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$, si f es una función booleana sobre las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

a) cada término x_i o su complemento $\overline{x}_i$, para $1 \leq i \leq n$ es una *literal*;
b) un término de la forma $y_1 y_2 \cdots y_n$ donde cada $y_i = x_i$ o $\overline{x}_i$, para $1 \leq i \leq n$, es una *conjunción fundamental*; y
c) una representación de f como una suma de conjunciones fundamentales es una *forma normal disyuntiva* (f.n.d.) de f.

Aunque no daremos una demostración formal, los siguientes ejemplos indican que cualquier función $f: B^n \to B, f \neq \mathbf{0}$, tiene una única representación (excepto por el orden de las conjunciones fundamentales) como una f.n.d.

Ejemplo 15.5 Encuentre la f.n.d. de $f: B^3 \to B$, donde $f(x, y, z) = xy + \overline{x}z$.

De la tabla 15.5, vemos que la columna de f tiene cuatro unos, los cuales nos indican las cuatro conjunciones fundamentales necesarias en la f.n.d. de f, de modo que $f(x, y, z) = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$.

Tabla 15.5

x	y	z	xy	$\overline{x}z$	f
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Otra forma de resolver este problema consiste en tomar cada término producto e introducir de alguna forma todas las variables faltantes. Usamos las propiedades de estas variables para obtener $xy + \overline{x}z = xy(z + \overline{z}) + x(y + \overline{y})z$ (¿por qué?) $= xyz + xy\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\overline{y}z$.

Ejemplo 15.6 Encuentre la f.n.d. de $g(w, x, y, z) = wx\overline{y} + wy\overline{z} + xy$.

Examinaremos cada término como sigue:

a) $wx\overline{y} = wx\overline{y}(z + \overline{z}) = wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z}$
b) $wy\overline{z} = w(x + \overline{x})y\overline{z} = wxy\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z}$
c) $xy = (w + \overline{w})xy(z + \overline{z}) = wxyz + wxy\overline{z} + \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z}$

De la propiedad de idempotencia de + se sigue que la f.n.d. de g es

$$g(w, x, y, z) = wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + wxy\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + wxyz + \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z}.$$

Consideremos las primeras tres columnas de la tabla 15.6. Si acordamos enumerar las variables booleanas en orden alfabético, veremos que los valores de x, y, z en cualquier fila determinan una etiqueta en binario. Estas etiquetas en binario para 0, 1, 2, . . . , 7 surgen para las filas 1, 2, . . . , 8, respectivamente, como se muestra en las columnas 4 y 5 de la tabla 15.6. [Observemos, por ejemplo, que la primera fila tiene número de fila 1 pero etiqueta en binario 000(= 0). De la misma forma, la séptima fila, donde $x = 1, y = 1, z = 0$, tiene número de fila 7 pero etiqueta en binario 110(= 6).] Como resultado, la f.n.d. de una función booleana no nula se puede expresar en forma más compacta. Por ejemplo, la función f del ejemplo 15.5 puede darse como $f = \Sigma m(1, 3, 6, 7)$, donde m indica los *mintérminos* (es decir, las conjunciones fundamentales, en este caso, con tres literales) en las filas 2, 4, 7, 8, con las respectivas etiquetas en binario 1, 3, 6, 7. Usamos la palabra *mintérmino* para enfatizar que la conjunción fundamental toma el valor 1 un número minimal de veces (a saber, una vez) sin ser idénticamente nula. Por ejemplo, $m(1)$ denota el mintérmino para la fila con etiqueta en binario 001(=1), donde $x = y = 0$ y $z = 1$; esto corresponde a la conjunción fundamental $\overline{x}\overline{y}z$, la que toma el valor 1 para exactamente una asignación (donde $x = y = 0$ y $z = 1$).

Tabla 15.6

x	y	z	Etiqueta en binario	Número de fila
0	0	0	000 (= 0)	1
0	0	1	001 (= 1)	2
0	1	0	010 (= 2)	3
0	1	1	011 (= 3)	4
1	0	0	100 (= 4)	5
1	0	1	101 (= 5)	6
1	1	0	110 (= 6)	7
1	1	1	111 (= 7)	8

Aun sin una tabla podemos representar la f.n.d. de la función g del ejemplo 15.6, pogamos por caso, como una *suma de mintérminos*. Para cada conjunción fundamental $c_1c_2c_3c_4$, donde $c_1 = w$ o $\overline{w}$, . . . , $c_4 = z$ o $\overline{z}$, reemplazamos cada c_i, $1 \leq i \leq 4$, por 0, si c_i es una variable con complemento, y por 1 en caso contrario. De esta forma obtenemos la etiqueta en binario asociada con esa conjunción fundamental. Como suma de mintérminos, vemos que $g = \Sigma m(6, 7, 10, 12, 13, 14, 15)$.

La forma normal conjuntiva, que analizaremos antes de cerrar esta sección, es dual de la forma normal disyuntiva.

Ejemplo 15.7 Sea $f: B^3 \rightarrow B$ dada en la tabla 15.7. Un término de la forma $c_1 + c_2 + c_3$, donde $c_1 = x$ o $\overline{x}$, $c_2 = y$ o $\overline{y}$ y $c_3 = z$ o $\overline{z}$ es una *disyunción fundamental*. La disyunción fundamental $x + y + z$ toma el valor 1 en todos los casos, excepto donde el valor de cada x, y, z es 0. En forma análoga, $x + \overline{y} + z$ toma el valor 1 excepto cuando $x = z = 0$ y $y = 1$. Como cada una de estas disyunciones fundamentales toma el valor 0 solamente en un caso y estos casos no ocurren

Tabla 15.7

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

en forma simultánea, el producto $(x+y+z)(x+\overline{y}+z)$ toma el valor 0 precisamente en los dos casos dados. Si seguimos de esta forma podremos representar f como

$$f = (x+y+z)(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)$$

que es la *forma normal conjuntiva* (f.n.c.) de f.

Puesto que la disyunción fundamental $x+y+z$ toma el valor 1 un número máximo de veces (sin ser idénticamente **1**), es un *maxtérmino*, particularmente cuando usamos una etiqueta de fila en binario para representarla. Usamos las etiquetas en binario para indexar las filas de la tabla y escribir $f = \prod M(0, 2, 6)$, un *producto de maxtérminos*.

Esta representación existe para cualquier $f \neq \mathbf{1}$ y es única salvo por el orden de las disyunciones fundamentales (o maxtérminos).

Ejemplo 15.8

Sea $g\colon B^4 \to B$ tal que $g(w, x, y, z) = (w+x+y)(x+\overline{y}+z)(w+\overline{y})$. Para obtener la f.n.c. de g, escribimos de nuevo cada disyunción en el producto como sigue:

a) $w+x+y = w+x+y+0 = w+x+y+z\overline{z}$
$\qquad = (w+x+y+z)(w+x+y+\overline{z})$

b) $x+\overline{y}+z = w\overline{w}+x+\overline{y}+z = (w+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+z)$

c) $w+\overline{y} = w+x\overline{x}+\overline{y} = (w+x+\overline{y})(w+\overline{x}+\overline{y})$
$\qquad = (w+x+\overline{y}+z\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y}+z\overline{z})$
$\qquad = (w+x+\overline{y}+z)(w+x+\overline{y}+\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y}+z)(w+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$

En consecuencia, por la ley de idempotencia de $\cdot$, tenemos $g(w, x, y, z) = (w+x+y+z)(w+x+y+\overline{z})(w+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+z)(w+x+\overline{y}+\overline{z}) \cdot (w+\overline{x}+\overline{y}+z)(w+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$.

Para obtener g como producto de maxtérminos, asociamos a cada disyunción fundamental $d_1+d_2+d_3+d_4$ el número binario $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, donde $b_1 = 0$ si $d_1 = w$; $b_1 = 1$ si $d_1 = \overline{w}$; $\ldots$; $b_4 = 0$ si $d_4 = z$; $b_4 = 1$ si $d_4 = \overline{z}$. Como resultado, $g = \prod M(0, 1, 2, 3, 6, 7, 10)$.

Nuestro último ejemplo de la sección repasará lo aprendido acerca de las formas de representar una función booleana no constante f (es decir, $f \neq \mathbf{0}$ y $f \neq \mathbf{1}$).

Ejemplo 15.9 Si $h(w, x, y, z) = wx + \overline{w}y + \overline{x}yz$, entonces podemos escribir nuevamente cada sumando de h como sigue:

i) $wx = wx(y + \overline{y})(z + \overline{z}) = wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z}$
ii) $\overline{w}y = \overline{w}(x + \overline{x})\,y(z + \overline{z}) = \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}yz + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$
iii) $\overline{x}yz = (w + \overline{w})\overline{x}yz = w\overline{x}yz + \overline{w}\,\overline{x}yz$

Usamos la ley de idempotencia para + y vemos que la f.n.d. de h es

$$wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}yz + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}yz.$$

Si consideramos cada conjunción fundamental en la f.n.d. de h, obtenemos las siguientes etiquetas binarias y números de mintérminos:

$wxyz$:	1111 (= 15)	$wx\overline{y}\,\overline{z}$:	1100 (= 12)	$\overline{w}\,\overline{x}yz$:	0011 (= 3)
$wxy\overline{z}$:	1110 (= 14)	$\overline{w}xyz$:	0111 (= 7)	$\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$:	0010 (= 2)
$wx\overline{y}z$:	1101 (= 13)	$\overline{w}xy\overline{z}$:	0110 (= 6)	$w\overline{x}yz$:	1011 (= 11)

En consecuencia, también podemos escribir $h = \sum m\,(2, 3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15)$. De esta representación, usando mintérminos, tenemos $h = \prod M\,(0, 1, 4, 5, 8, 9, 10)$, un producto de maxtérminos.

Por último, tomamos la etiqueta en binario de cada maxtérmino y determinamos su disyunción fundamental correspondiente:

$0 = 0000$:	$w + x + y + z$	$8 = 1000$:	$\overline{w} + x + y + z$
$1 = 0001$:	$w + x + y + \overline{z}$	$9 = 1001$:	$\overline{w} + x + y + \overline{z}$
$4 = 0100$:	$w + \overline{x} + y + z$	$10 = 1010$:	$\overline{w} + x + \overline{y} + z$
$5 = 0101$:	$w + \overline{x} + y + \overline{z}$		

Esto nos dice que la f.n.c. de h es

$$(w + x + y + z)(w + x + y + \overline{z})(w + \overline{x} + y + z)(w + \overline{x} + y + \overline{z})\cdot$$
$$(\overline{w} + x + y + z)(\overline{w} + x + y + \overline{z})(\overline{w} + x + \overline{y} + z).$$

Por lo tanto,

$$\begin{gathered} wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}xyz + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}yz + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}yz = \\ \sum m(2,3,6,7,11,12,13,14,15) = \prod M(0,1,4,5,8,9,10) = \\ (w + x + y + z)(w + x + y + \overline{z})(w + \overline{x} + y + z)(w + \overline{x} + y + \overline{z})\cdot \\ (\overline{w} + x + y + z)(\overline{w} + x + y + \overline{z})(\overline{w} + x + \overline{y} + z). \end{gathered}$$

EJERCICIOS 15.1

1. Encuentre el valor de cada una de las siguientes expresiones booleanas si los valores de las variables booleanas w, x, y y z son 1, 1, 0 y 0, respectivamente.

a) $\overline{xy} + \overline{x}\,\overline{y}$ **b)** $w + \overline{x}y$
c) $wx + \overline{y} + yz$ **d)** $wx + xy + yz$
e) $(wx + y\overline{z}) + w\overline{y} + \overline{(w + y)(\overline{x} + y)}$

2. Sean w, x y y variables booleanas, donde x toma el valor 1. Para cada una de las siguientes expresiones booleanas, determine, si es posible, el valor de la expresión. Si no puede determinar el valor de la expresión, encuentre entonces el número de asignaciones de valores de w y y tales que producen el valor 1 para la expresión.

a) $x + xy + w$ **b)** $xy + w$ **c)** $\overline{x}y + xw$ **d)** $\overline{x}y + w$

3. a) ¿Cuántas filas se necesitan para construir la tabla (de función) de una función booleana de n variables?
   b) ¿Cuántas funciones booleanas diferentes de n variables existen?

4. a) Encuentre la conjunción fundamental formada con las variables w, x, y, z o sus complementos, de modo que el valor de la conjunción sea 1 exactamente cuando

   i) $w = x = 0,\ y = z = 1.$ ii) $w = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$
   iii) $w = 0,\ x = y = z = 1.$ iv) $w = x = y = z = 0.$

   b) Responda la parte (a), esta vez para las disyunciones fundamentales en vez de las conjunciones fundamentales, donde el valor de cada disyunción fundamental es 0 precisamente para los valores dados de w, x, y, z.

5. Suponga que $f\colon B^3 \to B$ está dada por $f(x, y, z) = \overline{(x+y)+(\overline{x}z)}$.
   a) Determine la f.n.d. y f.n.c. de f.
   b) Escriba f como una suma de mintérminos y como un producto de maxtérminos (usando etiquetas en binario).

6. Sea $g\colon B^4 \to B$ dada por $g(w, x, y, z) = (wz + xyz)(x + \overline{x}\overline{y}z)$.
   a) Determine la f.n.d. y f.n.c. de g.
   b) Escriba g como una suma de mintérminos y como un producto de maxtérminos (usando etiquetas en binario).

7. Sea F_6 el conjunto de todas las funciones booleanas $f\colon B^6 \to B$.
   a) ¿Cuánto vale $|F_6|$?
   b) ¿Cuántas conjunciones (disyunciones) fundamentales existen en F_6?
   c) ¿Cuántos mintérminos (maxtérminos) tiene F_6?
   d) ¿Cuántas funciones $f \in F_6$ toman el valor 1 cuando (exactamente) dos de sus variables toman el valor 1? (En los demás casos, el valor de f puede ser 0 o 1.)
   e) ¿Cuántas funciones $f \in F_6$ toman el valor 1 cuando al menos dos de sus variables toman el valor 1? (En los demás casos, el valor de f puede ser 0 o 1.)
   f) Sean u, v, w, x, y y z las seis variables booleanas para las funciones en F_6. ¿Cuántas de estas funciones son independientes de x [es decir, $f(u, v, w, x, y, z) = f(u, v, w, \overline{x}, y, z)$]? ¿Cuántas son independientes de las tres variables booleanas x, y, z?

8. Sea $f\colon B^4 \to B$. Encuentre la forma normal disyuntiva de f si

   a) $f^{-1}(1) = \{0101$ (es decir, $w = 0, x = 1, y = 0, z = 1$), $0110, 1000, 1011\}$.
   b) $f^{-1}(0) = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001, 0110\}$.

9. Sea $f\colon B^n \to B$. Si la f.n.d. de f tiene m conjunciones fundamentales y su f.n.c. tiene k disyunciones fundamentales, ¿cuál es la relación entre m, n y k?

10. Si x, y y z son variables booleanas y $x + y + z = xyz$, demuestre que las tres tienen el mismo valor.

11. Simplifique las siguientes expresiones booleanas.
   a) $xy + (x + y)\overline{z} + y$ b) $x + y + \overline{(\overline{x} + y + z)}$
   c) $yz + wx + z + [wz(xy + wz)]$ d) $x_1 + \overline{x}_1x_2 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \cdots$

12. Encuentre los valores de las variables booleanas w, x, y, z que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones (booleanas) simultáneas.

$$x + \overline{x}y = 0 \qquad \overline{x}y = \overline{x}z \qquad \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{z} + zw = \overline{z}w$$

13. a) Para $f, g, h\colon B^n \to B$, demuestre que $fg + \overline{f}h + gh = fg + \overline{f}h$ y que $fg + f\overline{g} + \overline{f}g + \overline{f}\overline{g} = 1$.
   b) Enuncie el dual de cada resultado de la parte (a).

14. Sean $f, g\colon B^n \to B$. Defina la relación "$\leq$" en F_n, el conjunto de todas las funciones booleanas de n variables, como $f \leq g$ si el valor de g es 1 al menos cuando el valor de f es 1.
   a) Demuestre que esta relación es un orden parcial en F_n.
   b) Demuestre que $fg \leq f$ y $f \leq f + g$.

d) y **e)** Verdaderas.
f) Falsa. El anillo $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ es un subanillo (pero no un cuerpo) en $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.
g) Falsa. Para cualquier primo p, $\{a/(p^n) | a, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$ es un subanillo de $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$.
h) Falsa. $f(6) = 12 = f(2 \cdot 3)$, pero $f(2) \cdot f(3) = (4)(6) = 24$.
i) Falsa. Consideremos el cuerpo de la tabla 14.6.
j) Verdadera.

3. **a)** $[a + a = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = (a + a) + (a + a)] \Rightarrow [a + a = 2a = z]$. Por lo tanto, $-a = a$.
b) Para cualquier $a \in R$, $a + a = z \Rightarrow a = -a$. Para $a,b \in R$, $(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b \Rightarrow ab + ba = z \Rightarrow ab = -ba = ba$, por lo que R es conmutativo.

5. Como $az = z = za$ para todo $a \in R$, tenemos que $z \in C$ y $C \neq \emptyset$. Si $x, y \in C$, entonces $(x + y)a = xa + ya = ax + ay = a(x + y)$, $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$ y $(-x)a = -(xa) = -(ax) = a(-x)$, para todo $a \in R$, de modo que $x + y, xy, -x \in C$. En consecuencia, C es un subanillo de R.

7. Como m, n son primos relativos, podemos escribir $1 = ms + nt$ donde $s,t \in \mathbf{Z}$. Como m, $n > 0$, se sigue que uno de los números s o t debe ser positivo y el otro negativo. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que s es negativo, de modo que $1 - ms = nt > 0$.

Entonces $a^n = b^n \Rightarrow (a^n)^t = (b^n)^t \Rightarrow a^{nt} = b^{nt} \Rightarrow a^{1-ms} = b^{1-ms} \Rightarrow a(a^m)^{(-s)} = b(b^m)^{(-s)}$. Pero como $-s > 0$ y $a^m = b^m$, tenemos $(a^m)^{(-s)} = (b^m)^{(-s)}$. En consecuencia,

$$([(a^m)^{(-s)} = (b^m)^{(-s)} \neq z] \wedge [a(a^m)^{(-s)} = b(b^m)^{(-s)}]) \Rightarrow a = b,$$

ya que podemos usar la ley de cancelación para el producto en un dominio de integridad.

9. Sean $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$, con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Entonces $x - y = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in A + B$. Si $r \in R$ y $a + b \in A + B$, con $a \in A$ y $b \in B$, entonces $ra \in A$, $rb \in B$ y $r(a + b) \in A + B$. De manera similar, $(a + b)r \in A + B$ y $A + B$ es un ideal de R.

11. Consideremos los números $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Si uno de estos números es congruente con 0 módulo n, se sigue el resultado. Si no, existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que $(x_1 + x_2 + \cdots + x_i) \equiv (x_1 + \cdots + x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j) (\text{mod } n)$. Por lo tanto, n divide a $(x_{i+1} + \cdots + x_j)$.

13. **a)** 1250 **b)** 1953 **c)** 3/16

15. **a)** 0 **b)** 5 **c)** 0
d) 5, si el último dígito de n es 5;
0, si el último dígito de n es 0.

RESPUESTAS

Capítulo 15
Álgebra booleana y funciones de conmutación

Sección 15.1— pág. 743

1. **a)** 1 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 1

3. **a)** 2^n **b)** $2^{(2^n)}$

La siguiente tabla muestra el crecimiento del número de funciones booleanas respecto del crecimiento del número n (de variables booleanas).

n	$2^{(2^n)}$
1	4
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

5. **a)** f.n.d. $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$
f.n.c. $(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})$

b) $f = \sum m(2,4,5,6,7) = \prod M(0,1,3)$

7. **a)** 2^{64} **b)** 2^6 **c)** 2^6 **d)** 2^{49} **e)** 2^7 **f)** 2^{32}; 2^8

9. $m + k = 2^n$

11. **a)** $y + x\bar{z}$ **b)** $x + y$ **c)** $wx + z$ **d)** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots$

13. **a)** (i)

f	g	h	fg	$\bar{f}h$	gh	$fg+\bar{f}h+gh$	$fg+\bar{f}h$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

La alternativa es $fg + \bar{f}h = (fg + \bar{f})(fg + h) = (f + \bar{f})(g + \bar{f})(fg + h) =$
$\mathbf{1}(g + \bar{f})(fg + h) = fgg + gh + \bar{f}fg + \bar{f}h = fg + gh + \mathbf{0}g + \bar{f}h = fg + gh + \bar{f}h.$

(ii) $fg + f\bar{g} + \bar{f}g + \bar{f}\bar{g} = f(g + \bar{g}) + \bar{f}(g + \bar{g}) = f\cdot\mathbf{1} + \bar{f}\cdot\mathbf{1} = f + \bar{f} = \mathbf{1}$

b) (i) $(f+g)(\bar{f}+h)(g+h) = (f+g)(\bar{f}+h)$

(ii) $(f+g)(f+\bar{g})(\bar{f}+g)(\bar{f}+\bar{g}) = \mathbf{0}$

15. **a)** $f \oplus f = \mathbf{0}$; $f \oplus \bar{f} = \mathbf{1}$; $f \oplus \mathbf{1} = \bar{f}$; $f \oplus \mathbf{0} = f$

b) (i) $f \oplus g = \mathbf{0} \Leftrightarrow f\bar{g} + \bar{f}g = \mathbf{0} \Rightarrow f\bar{g} = \bar{f}g = \mathbf{0}$. $[f = 1$ y $f\bar{g} = 0] \Rightarrow g = 1$. $[f = 0$ y $\bar{f}g = 0] \Rightarrow g = 0$. Por lo tanto, $f = g$.

(iii) $\bar{f} \oplus \bar{g} = \bar{f}\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{f}}\bar{g} = \bar{f}g + f\bar{g} = f\bar{g} + \bar{f}g = f \oplus g$

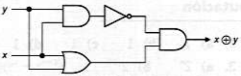
(iv) Éste es el único resultado que no es verdadero. Cuando f tiene el valor 1, g tiene el valor 0 y h el valor 1 (o g tiene el valor 1 y h el valor 0), entonces $f \oplus gh$ tiene valor 1 pero $(f \oplus g)(f \oplus h)$ tiene valor 0.

(v) $fg \oplus fh = \overline{fg}fh + fg\overline{fh} = (\bar{f} + \bar{g})fh + fg(\bar{f} + \bar{h}) = \bar{f}fh + f\bar{g}h + f\bar{f}g + fg\bar{h} =$
$f\bar{g}h + fg\bar{h} = f(\bar{g}h + g\bar{h}) = f(g \oplus h)$

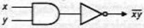
(vi) $\bar{f} \oplus g = \bar{f}\bar{g} + fg = fg + \bar{f}\bar{g} = f \oplus \bar{g}$
$\overline{f \oplus g} = \overline{f\bar{g} + \bar{f}g} = (\bar{f} + g)(f + \bar{g}) = \bar{f}\bar{g} + fg = \bar{f} \oplus g$

ección 15.2—
ág. 754

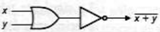
1. **a)** $x \oplus y = (x + y)\overline{(xy)}$



b) $\overline{xy}$

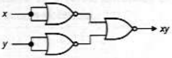


c) $\overline{x+y}$

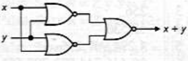


3. **a)**

b)



c)



INSTRUCTOR'S SOLUTIONS MANUAL

DISCRETE AND COMBINATORIAL MATHEMATICS

FIFTH EDITION

Ralph P. Grimaldi

Rose-Hulman Institute of Technology

PEARSON
Addison Wesley

Boston San Francisco New York
London Toronto Sydney Tokyo Singapore Madrid
Mexico City Munich Paris Cape Town Hong Kong Montreal

CHAPTER 15
BOOLEAN ALGEBRA AND SWITCHING FUNCTIONS

Section 15.1

1. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) 1

2. (a) Since x has value 1, $x + xy + w$ has value 1 regardless of the values of y and w.
(b) Three assignments: (1) $y : 1$, $w : 1$; (2) $y : 0$, $w : 1$; and (3) $y : 1$, $w : 0$.
(c) Two assignments: (1) $y : 1$, $w : 1$; (2) $y : 0$, $w : 1$.
(d) Two assignments: (1) $y : 1$, $w : 1$; (2) $y : 0$, $w : 1$.

3. (a) 2^n (b) $2^{(2^n)}$

4.
a) (i) $\overline{w}\,\overline{x}yz$ (ii) $\overline{w}xy\overline{z}$
(iii) $\overline{w}xyz$ (iv) $\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

b) (i) $w + x + \overline{y} + \overline{z}$ (ii) $w + \overline{x} + \overline{y} + z$
(iii) $w + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ (iv) $w + x + y + z$

5.

x	y	z	$\overline{x+y}$	$\overline{x}z$	$\overline{\overline{(x+y)} + (\overline{x}z)}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

(a) d.n.f. $xyz + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$
c.n.f. $(x + y + z)(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})$

(b) $f = \sum m(2, 4, 5, 6, 7) = \prod M(0, 1, 3)$

6. a) $g(w, x, y, z) = (wz + xyz)(x + \overline{x}\,\overline{y}z) = wxz + xyz + w\overline{x}\,\overline{y}z = wx(y + \overline{y})z +$ $(w + \overline{w})xyz + w\overline{x}\,\overline{y}z = wxyz + wx\overline{y}z + wxyz + \overline{w}xyz + w\overline{x}\,\overline{y}z$. Consequently, the d.n.f. for g is $wxyz + wx\overline{y}z + \overline{w}xyz + w\overline{x}\,\overline{y}z$, a sum of four minterms.

From the d.n.f. for g we know that the c.n.f. for g is a product of 12 maxterms. The binary labels for the above minterms are

$wxyz$:	$1111(=15)$	$wx\overline{y}z$:	$1101(=13)$
$\overline{w}xyz$:	$0111(=7)$	$w\overline{x}\,\overline{y}z$:	$1001(=9)$

Consequently we have the maxterms

$0000(=0)$	$w+x+y+z$	$0001(=1)$	$w+x+y+\overline{z}$	$0010(=2)$	$w+x+\overline{y}+z$
$0110(=3)$	$w+x+\overline{y}+\overline{z}$	$0100(=4)$	$w+\overline{x}+y+z$	$0101(=5)$	$w+\overline{x}+y+\overline{z}$
$0110(=6)$	$w+\overline{x}+\overline{y}+z$	$1000(=8)$	$\overline{w}+x+y+z$	$1010(=10)$	$\overline{w}+x+\overline{y}+z$
$1011(=11)$	$\overline{w}+x+\overline{y}+\overline{z}$	$1100(=12)$	$\overline{w}+\overline{x}+y+z$	$1110(=14)$	$\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+z$

and the c.n.f. for g is the product of these 12 maxterms.

b) $g=\sum m(7,9,13,15)=\prod M(0,1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,14)$

7. (a) 2^{64} (b) 2^{6} (c) 2^{6}

8. (a) $f(w,x,y,z)=\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}xy\overline{z}+w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+w\overline{x}yz$

(b) $f(w,x,y,z)=\overline{w}\,\overline{x}yz+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}xyz+w\overline{x}y\overline{z}+w\overline{x}yz+wx\overline{y}\,\overline{z}+wx\overline{y}z+wxy\overline{z}+wxyz$

9. $m+k=2^n$

10. If $x=0$, then $x+y+z=xyz\Longrightarrow x+y+z=0\Longrightarrow y=z=0$.
If $x=1$, then $x+y+z=xyz\Longrightarrow 1=xyz\Longrightarrow y=z=1$.

11. (a) $xy+(x+y)\overline{z}+y=y(x+1)+(x+y)\overline{z}=y+x\overline{z}+y\overline{z}=y(1+\overline{z})+x\overline{z}=y+x\overline{z}$.

(b) $x+y+\overline{(\overline{x}+y+z)}=x+y+(x\overline{y}\,\overline{z})=x(1+\overline{y}\,\overline{z})+y=x+y$.

(c) $yz+wz+z+[wz(xy+wz)]=z(y+1)+wx+wxyz+wz=z+wx(1+yz)+wz=z+wx+wz=z(1+w)+wx=z+wx$.

12. $x+\overline{x}y=0\Longrightarrow x=0=\overline{x}y\Longrightarrow x=y=0$; $\overline{x}y=\overline{x}z$, $x=y=0\Longrightarrow z=0$; $\overline{x}y+\overline{x}\,\overline{z}+zw=\overline{z}w$, $x=y=z=0\Longrightarrow w=1$.

13. (a)

(i)

f	g	h	fg	$\overline{f}h$	gh	$fg+\overline{f}h+gh$	$fg+\overline{f}h$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

Alternately, $fg+\overline{f}h = (fg+\overline{f})(fg+h) = (f+\overline{f})(g+\overline{f})(fg+h) = \mathbf{1}(g+\overline{f})(fg+h) = fgg+gh+\overline{f}fg+\overline{f}h = fg+gh+\mathbf{0}g+\overline{f}h = fg+gh+\overline{f}h$.

(ii) $fg+f\overline{g}+\overline{f}g+\overline{f}\overline{g} = f(g+\overline{g})+\overline{f}(g+\overline{g}) = f\cdot\mathbf{1}+\overline{f}\cdot\mathbf{1} = f+\overline{f} = \mathbf{1}$

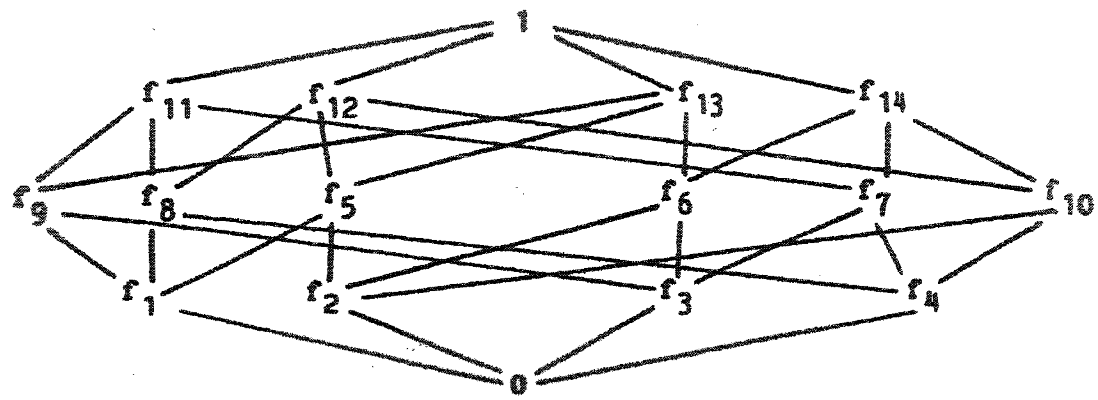
(b) (i) $(f+g)(f+h)(g+h) = (f+g)(\overline{f}+h)$

(ii) $(f+g)(f+\overline{g})(\overline{f}+g)(\overline{f}+\overline{g}) = \mathbf{0}$

14. (a) For any $f \in F_n$, f has value 1 whenever f has value 1 so the relation is reflexive. If $f, g \in F_n$ and $f \leq g$ and $g \leq f$, then if f has value 1 for a certain assignment of Boolean values to its n variables, g also has value 1 since $f \leq g$. Likewise, when g has value 1, f does also, since $g \leq f$. So f and g have the value 1 simultaneously and $f = g$, making the relation antisymmetric. Finally, if $f, g, h \in F_n$ with $f \leq g$ and $g \leq h$, then if f has the value 1 so does g (since $f \leq g$) and so does h (since $g \leq h$). Hence $f \leq h$ and the relation is transitive.

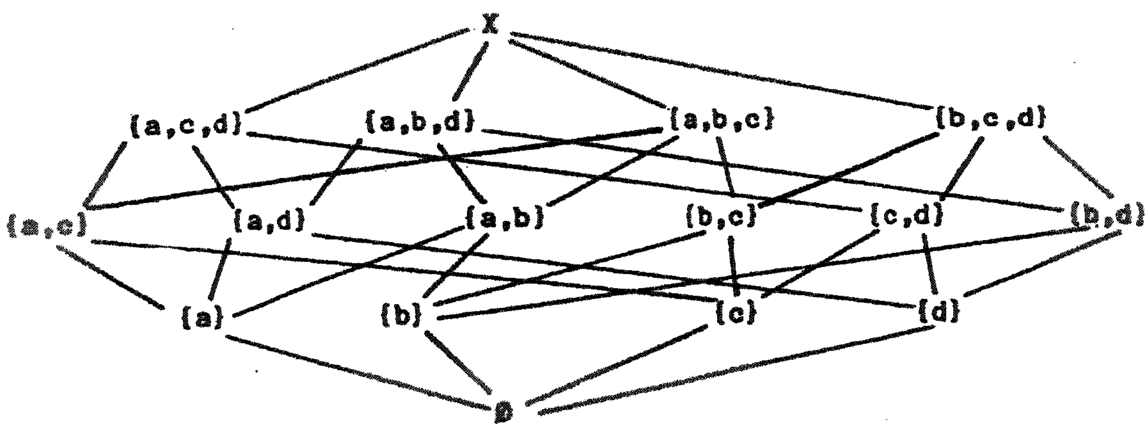
(b) fg has the value 1 iff f, g both have value 1 so $fg \leq f$. When f has the value 1 so does $f+g$, so $f \leq f+g$.

(c)



Minterms	Maxterms	
$f_1(x,y) = xy$	$f_{11}(x,y) = x + \overline{y}$	$f_5(x,y) = y,\ f_6(x,y) = \overline{x},$
$f_2(x,y) = \overline{x}y$	$f_{12}(x,y) = x + y$	$f_7(x,y) = \overline{y},\ f_8(x,y) = x,$
$f_3(x,y) = \overline{x}\,\overline{y}$	$f_{13}(x,y) = \overline{x} + y$	$f_9(x,y) = xy + \overline{x}\,\overline{y}$
$f_4(x,y) = x\overline{y}$	$f_{14}(x,y) = \overline{x} + \overline{y}$	$f_{10}(x,y) = \overline{x}y + x\overline{y}$

Let $X = \{a, b, c, d\}$



Ignoring the labels at the vertices, these Hasse diagrams are structurally the same.

15. (a) $f \oplus f = 0$; $f \oplus \overline{f} = 1$; $f \oplus 1 = \overline{f}$; $f \oplus 0 = f$

(b) (i) $f \oplus g = 0 \Leftrightarrow f\overline{g} + \overline{f}g = 0 \Rightarrow f\overline{g} + \overline{f}g = 0$. $[f = 1$, and $f\overline{g} = 0] \Rightarrow g = 1$. $[f = 0$ and $\overline{f}g = 0] \Rightarrow g = 0$. Hence $f = g$.

(iii) $\overline{f} \oplus \overline{g} = \overline{f}\overline{\overline{g}} + \overline{\overline{f}}\overline{g} = \overline{f}g + f\overline{g} = f\overline{g} + \overline{f}g = f \oplus g$

(iv) This is the only result that is not true. When f has value 1, g has value 0 and h value 1 (or g has value 1 and h value 0), then $f \oplus gh$ has value 1 but $(f \oplus g)(f \oplus h)$ has value 0.

(v) $fg \oplus fh = \overline{fg}fh + fg\overline{fh} = (\overline{f} + \overline{g})fh + fg(\overline{f} + \overline{h}) = \overline{f}fh + f\overline{g}h + f\overline{f}g + fg\overline{h} =$