Matemática Discreta

Licenciatura en Sistemas de Información

Mgs. Stella Vaira - Lic. Miguel Fedonczuk
Esp. David Colliard Schneider - Prof. Mariana Cottonaro

FCyT - Oro Verde - UADER

La sucesión de **los números de Fibonacci**

Esta sucesión hace referencia a la secuencia ordenada de números descrita por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII:

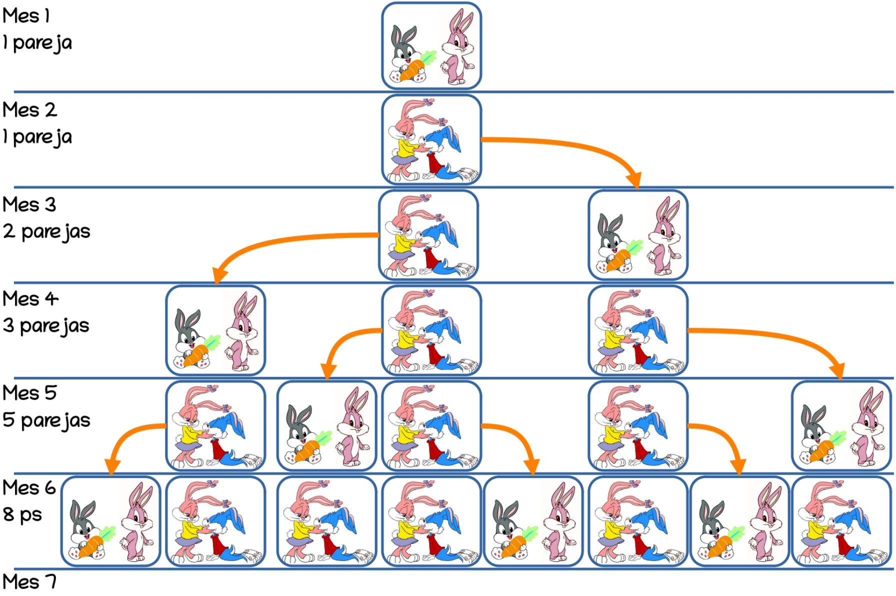
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Esta sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de cría de conejos: "Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja" (Laurence Sigler, Fibonacci's Liber Abaci)

La respuesta a esta pregunta es la que sigue:

- Partimos de una pareja de conejos el primer mes. ($F_1 = 1$)
- Durante el segundo mes la pareja envejece pero no procrea. ($F_2 = 1$)
- El tercer mes la pareja procrea otra pareja (es decir, ya tenemos dos parejas). ($F_3 = 2$)
- El cuarto mes, la primera pareja vuelve a procrear y la pareja nueva envejece sin procrear (luego tenemos tres parejas). ($F_4 = 3$)
- El quinto mes, las dos parejas más viejas vuelven a procrear mientras que la nueva pareja no procrea (cinco parejas en total). ($F_5 = 5$)
- ...

UADER FCyT



13 parejas: 5 parejas adultas que procrean y 8 parejas que envejecen

Los ***números de Fibonacci*** pueden definirse recursivamente, mediante una relación de recurrencia lineal de segundo orden homogénea:

$$\begin{cases} F_0 = 0;\ F_1 = 1; \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+\ n \geq 2 \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Una sucesión estrechamente relacionada con los números de Fibonacci es la de los ***números de Lucas***, la cual se define:

$$\begin{cases} L_0 = 2;\ L_1 = 1; \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+\ n \geq 2 \end{cases}$$

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

Solución general de la RR de los números de **Fibonacci**:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0,\ n \geq 2 \qquad F_0 = 0;\ F_1 = 1$$

ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$

raíces de la ecuación característica: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

F_n es de la forma $F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Utilizamos las condiciones iniciales para hallar C_1 y C_2:

$$\begin{cases} F_0 = 0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ F_1 = 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ 1 = C_1\left(\sqrt{5}\right) \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Solución general: $\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0}$