自控原理习题解答第五章

侯一凡

yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

2014

已知单位反馈系统的开环传函为: $G(s) = \frac{10}{s+1}$, 则有:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s+11}$$

系统的频率特性为:

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 121}}$$

$$\angle\Phi(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{11}$$

(1) $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$;

$\Rightarrow c(t) = |\Phi(j\omega)|\sin(t + 30^\circ + \angle\Phi(j\omega)) = 0.91\sin(t + 24.8^\circ)$.

(2) $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$;

$\Rightarrow c(t) = 2|\Phi(j\omega)|\cos(2t - 45^\circ + \angle\Phi(j\omega)) = 1.78\cos(2t - 55.3^\circ)$.

(3) $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$;

$\Rightarrow c(t) = 0.91\sin(t + 24.8^\circ) - 1.78\cos(2t - 55.3^\circ)$.

已知系统传递函数$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$，则其频率特性为:

$$G(j\omega)=\frac{K}{jT\omega+1}$$

幅频特性:

$$A(\omega)=|G(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

相频特性:

$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)=-\arctan T\omega$$

当$\omega=1$, $A=12/\sqrt{2}$, $\phi=-45°$. 则有:

$$\frac{K}{\sqrt{T^2+1}}=12/\sqrt{2}$$

$$-\arctan T=-45°$$

求解得: $T=1$, $K=12$.

已知系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

则系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

系统的频率特性为:

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{{\omega_n}^2}{\sqrt{({\omega_n}^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$\angle\Phi(j\omega) = -\arctan\frac{2\xi\omega_n\omega}{{\omega_n}^2-\omega^2}$$

当 $r(t)=2\sin t$，则 $c(t)=2\sin(t-45^\circ)$，$\omega=1$，$|\Phi(j\omega)|=1$，$\angle\Phi(j\omega)=-45^\circ$.

$$\frac{{\omega_n}^2}{\sqrt{({\omega_n}^2-1)^2+(2\xi\omega_n)^2}} = 1$$

$$\frac{2\xi\omega_n}{{\omega_n}^2-1} = 1$$

求解得: $\omega_n=1.848$, $\xi=0.653$.

(1) 开环传函：$G(s)H(s)=\frac{1}{(1+s)(1+2s)}$，

传递函数的积分环节个数为0，起点在实实轴；

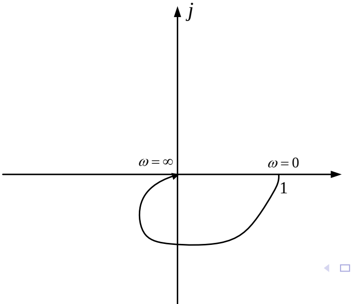
$n-m=2$，终点为$=\pi$方向趋向于原点。

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(1+j2\omega)}=\frac{1}{(1-2\omega^2)+j3\omega}$$

与实轴交点：令$3\omega=0$, 即虚部为0（起始点），$G(j\omega)H(j\omega)\mid_{\omega=0}=1$;

与虚轴交点：令$1-2\omega^2=0$ 得$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $G(j\omega)H(j\omega)\mid_{\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}j$

幅相特性图如下:



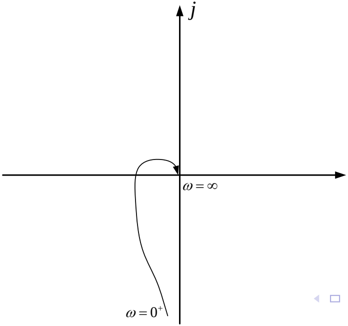
(2) 开环传函：$G(s)H(s)=\frac{1}{s(1+s)(1+2s)}$，

传递函数的积分环节个数为1，起点相角是$-\frac{\pi}{2}$，幅值为无穷大；
$n-m=3$，终点为$-\frac{3}{2}\pi$方向趋向于原点。

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)(1+j2\omega)}=\frac{1}{-3\omega^2+j(\omega-2\omega^3)}$$

与虚轴交点：令$\omega-2\omega^3=0$，得$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$G(j\omega)H(j\omega)\mid_{\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}j$

幅相特性图如下:



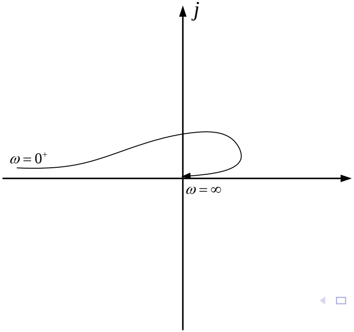
(3) 开环传函：$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2(1+s)(1+2s)}$，

传递函数的积分环节个数为2，起点相角是$-\pi$，幅值为无穷大；
$n-m=4$，终点为-2π方向趋向于原点。

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2(1+j\omega)(1+j2\omega)} = \frac{1}{-3\omega^3 j + (2\omega^4 - \omega^2)}$$

与实轴交点：令$2\omega^4 - \omega^2 = 0$，得$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$G(j\omega)H(j\omega)\mid_{\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{3}$

幅相特性图如下:



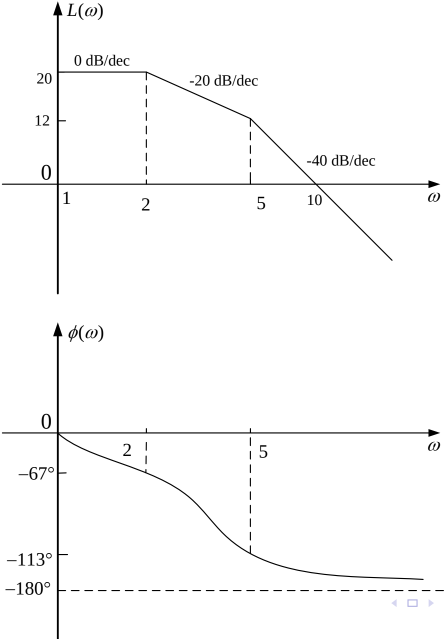
(1) 开环传函：$G(s)H(s)=\frac{100}{(s+2)(s+5)}=\frac{10}{(0.5s+1)(0.2s+1)}$，系统由比例、两个惯性环节构成。

1) 确定各惯性环节转折频率及对应斜率分别为:
$\omega_1=2,\quad -20dB/dec;$
$\omega_2=5,\quad -20dB/dec$

2) 绘制最低频段($\omega<2$)渐近线，渐近线斜率0，则渐近线方程为:
$L(\omega)=20\lg 10=20dB.$

3) $2\leq\omega<5$, 一个惯性环节作用，渐近线斜率为-20 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 10-20\lg 0.5\omega.$
当$\omega=5,\quad L(\omega)=12dB.$

4) $\omega\geq 5$, 另一个惯性环节作用，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为: $20\lg|G|=20\lg 10-20\lg 0.5\omega-20\lg 0.2\omega$
截止频率ω_c:
$L(\omega)=20\lg 10-20\lg 0.5\omega_c-20\lg 0.2\omega_c=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_c=10rad/s.$


L(ω)
0 dB/dec
-20 dB/dec
-40 dB/dec
20
12
0
1
2
5
10
ω
φ(ω)
0
2
5
ω
−67°
−113°
−180°

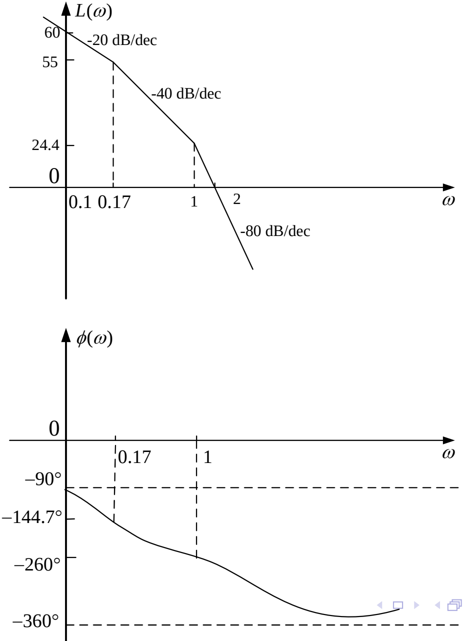
(2) 开环传函：$G(s)H(s)=\frac{100}{s(s^2+s+1)(6s+1)}$，
系统由比例、积分、惯性和振荡环节构成。

1) 确定各转折频率及对应斜率为:
$\omega_1=0.17$，$-20dB/dec$； $\omega_2=1$，$-40dB/dec$.

2) 绘制最低频段($\omega<0.17$)渐近线，渐近线斜率-20 dB/dec，则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega$
当$\omega=0.1$， $L(\omega)=60dB$.
当$\omega=0.17$， $L(\omega)=55dB$.

3) $0.17\leq\omega<1$, 惯性环节作用，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega-20\lg 6\omega$.
当$\omega=1$， $L(\omega)=24.4dB$.

4) $\omega\geq 1$, 振荡环节作用，渐近线斜率为-80 dB/dec, 渐近线方程为:
$L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega-20\lg 6\omega-40\lg\omega$
截止频率ω_c:
$L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega_c-20\lg 6\omega_c-40\lg\omega_c=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_c=2rad/s$.



$L(\omega)$
60
-20 dB/dec
55
-40 dB/dec
24.4
0
0.1 0.17
1
2
ω
-80 dB/dec
$\phi(\omega)$
0
0.17
1
ω
−90°
−144.7°
−260°
−360°

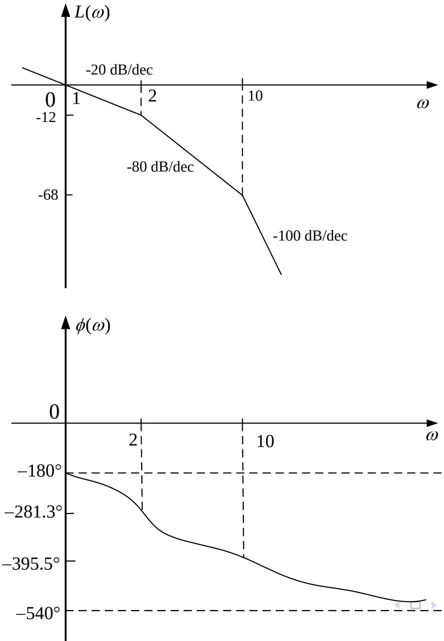
(3) 开环传函:$G(s)H(s)=\frac{10}{s^2(s+10)(0.25s^2+0.4s+1)}=\frac{1}{s^2(0.1s+1)(0.25s^2+0.4s+1)}$,
系统由比例、两个积分、惯性和振荡环节构成。

1) 确定各转折频率及对应斜率为:
$\omega_1=2,\ -40dB/dec;$
$\omega_2=10,\ -20dB/dec$

2) 绘制最低频段($\omega<2$)渐近线，系统有两个积分环节，则渐近线斜率-40 dB/dec，渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 1-40\lg\omega$
当$\omega=2,\quad L(\omega)=-12dB.$

3) $2\le\omega<10$, 振荡环节作用，渐近线斜率为-80 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 1-40\lg\omega-40\lg 0.5\omega.$
当$\omega=10,\quad L(\omega)=-68dB.$

4) $\omega\ge 10$, 惯性环节作用，渐近线斜率为-100 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 1-40\lg\omega-40\lg 0.5\omega-20\lg 0.1\omega$
系统在最低频段穿越0dB线，则截止频率ω_c:
$L(\omega)=20\lg 1-40\lg\omega=0\quad\Rightarrow\quad\omega_c=1rad/s.$


L(ω)
-20 dB/dec
0
1
2
10
ω
-12
-80 dB/dec
-68
-100 dB/dec
ϕ(ω)
0
2
10
ω
−180°
−281.3°
−395.5°
−540°

(4) 开环传函：$G(s)H(s)=\frac{0.2s+1}{s(2s+1)(10s+1)}$，
系统由积分、一阶微分、两个惯性环节构成。

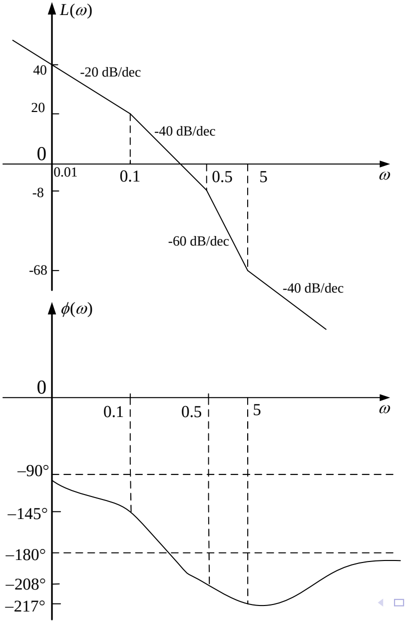
1) 确定各转折频率及对应斜率为:
$\omega_1=0.1$，$-20dB/dec$；$\omega_2=0.5$，$-20dB/dec$；$\omega_3=5$，$20dB/dec$

2) 绘制最低频段($\omega<0.1$)渐近线，系统有积分环节，则渐近线斜率-20 dB/dec，渐近线方程为: $L(\omega)=-20\lg\omega$
当$\omega=0.01$，$L(\omega)=40dB$；当$\omega=0.1$，$L(\omega)=20dB$.

3) $0.1\le\omega<0.5$, 惯性环节作用，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=-20\lg\omega-20\lg 10\omega$.
当$\omega=0.5$，$L(\omega)=-8dB$.

4) $0.5\le\omega<5$, 惯性环节作用，渐近线斜率为-60 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=-20\lg\omega-20\lg 10\omega-20\lg 2\omega$
当$\omega=5$，$L(\omega)=-68dB$.

5) $\omega\ge 5$, 一阶微分环节作用，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=-20\lg\omega-20\lg 10\omega-20\lg 2\omega+20\lg 0.2\omega$.
系统在$0.1\le\omega<0.5$频段穿越0dB线，则截止频率ω_c:
$L(\omega)=-20\lg\omega_c-20\lg 10\omega_c=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_c=0.32rad/s$.



$L(\omega)$
40
20
0
-8
-68
-20 dB/dec
-40 dB/dec
-60 dB/dec
-40 dB/dec
0.01
0.1
0.5
5
ω
$\phi(\omega)$
0
0.1
0.5
5
ω
−90°
−145°
−180°
−208°
−217°

(a) 从图(a)得知系统含有比例、惯性环节，
则系统开环传函为: $G(s)=\frac{K}{Ts+1}$.
1)当$\omega<10$，直线斜率为0，系统仅有放大环节作用，
即$L(\omega)=20\lg K=20$, 则$K=10$.
2)当$\omega=10$, 渐近线斜率为-20，则惯性环节作用，即$T=\frac{1}{\omega}=0.1$.
图(a)系统开环传函为:

$$G(s)=\frac{10}{0.1s+1}$$

(b) 从图(b)得知系统含有比例、纯微分、惯性环节，
则系统开环传函为:$G(s)=\frac{Ks}{Ts+1}$.
1)当$\omega=10$，直线斜率为20，系统有放大和纯微分环节作用，
即$L(\omega)=20\lg K+20\lg\omega=0$, 则$K=0.1$.
2)当$\omega=50$, 渐近线斜率为0，则惯性环节作用，即$T=\frac{1}{\omega}=0.02$.
图(b)系统开环传函为:

$$G(s)=\frac{0.1s}{0.02s+1}$$

(c) 从图(c)得知系统含有比例、积分、惯性环节，
则系统开环传函为:$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$.
1)当$\omega = 50$，直线斜率为-20，系统有放大和积分环节作用，
即$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega = 0$, 则$K = 50$.
2)当$\omega = 100$, 渐近线斜率为-40，则惯性环节作用，即$T = \frac{1}{\omega} = 0.01$.
图(c)系统开环传函为:

$$G(s) = \frac{50}{s(0.01s + 1)}$$

(d) 从图(d)得知系统含有比例、积分、两个惯性环节，
则系统开环传函为:$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$.
1)当$\omega=100$，第一条直线斜率为-20，系统有放大和积分环节作用，
即$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega=0$，则$K=100$.
2)当$\omega_1=0.01$，渐近线斜率为-40，则一个惯性环节作用，
即$T_1=\frac{1}{\omega_1}=100$.
3)当$\omega_2=20$，渐近线斜率为-60，则另一个惯性环节作用，
即$T_2=\frac{1}{\omega_2}=0.05$.
图(d)系统开环传函为:

$$G(s)=\frac{100}{s(100s+1)(0.05s+1)}$$

(e) 从图(e)得知系统含有放大、二阶振荡环节，
则系统开环传函为:$G(s) = \frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$.
1)当$\omega < 630$，第一条直线斜率为0，系统有放大环节作用，
即$L(\omega) = 20\lg K = 20$，则$K = 10$.
2)当$\omega > 630$，渐近线斜率为-40，则振荡环节作用，即$T = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{630}$.
3)当$\omega = 630$，计算其渐近线幅频值，即$L(\omega) = 20\lg 10 = 20$，则修正后的幅频值为: $L(\omega) = 20 + 3 = 23dB$.
由修正后的幅频特性曲线方程得:

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{630^2})^2+(\frac{2\xi\omega}{630})^2}$$

代入$\omega = 630$，上述表达式满足$L(\omega) = 23$，则求得$\xi = 0.35$.
图(e)系统开环传函为:

$$G(s) = \frac{10}{\frac{s^2}{630^2}+\frac{0.7s}{630}+1}$$

(f) 从图(f)得知系统含有放大、积分、二阶振荡环节构成，
则系统开环传函为:$G(s)=\frac{K}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$.
1)当$\omega<45.3$，第一条直线斜率为-20，低频段渐近线方程为:
$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega$，当$\omega=100$ 时，延长线与横轴相交，即
有$L(\omega)=20\lg K-20\lg 100=0$，则$K=100$.
2)当$\omega>45.3$，渐近线斜率为-60，则增加一个振荡环节作用，
即$T=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{45.3}$.
3)当$\omega=45.3$，计算其渐近线幅频值，
即$L(\omega)=20\lg 100-20\lg 45.3=6.878$，则修正后的幅频值为:
$L(\omega)=6.878+4.85=11.728$.
由修正后的幅频特性曲线方程得:

$$L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega-20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{45.3^2})^2+(\frac{2\xi\omega}{45.3})^2}$$

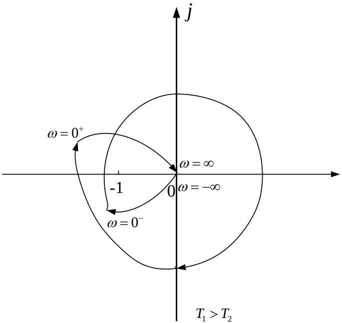
代入$\omega=45.3$，上述表达式满足$L(\omega)=11.728$，则求得$\xi=0.286$.
图(f)系统开环传函为:

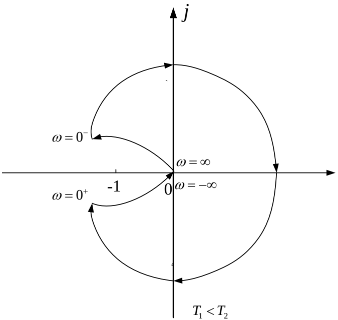
$$G(s)=\frac{100}{s(\frac{s^2}{45.3^2}+\frac{0.572s}{45.3}+1)}$$

.

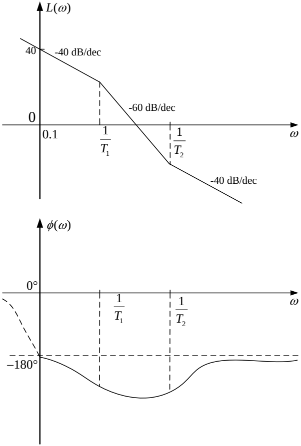
已知开环传函：$G(s)H(s)=\frac{T_2s+1}{s^2(T_1s+1)}$，

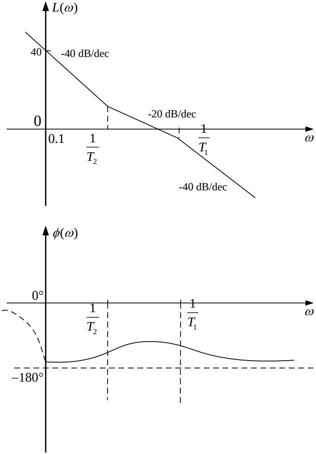
(1) 幅相特性图如下：





由开环传函得知该系统开环稳定，即$P=0$。当$T_1>T_2$，其幅相特性图顺时针方向包围$(-1,j0)$ 点两周，该系统闭环不稳定。而当$T_1<T_2$，幅相特性图不包围$(-1,j0)$ 点，闭环稳定。



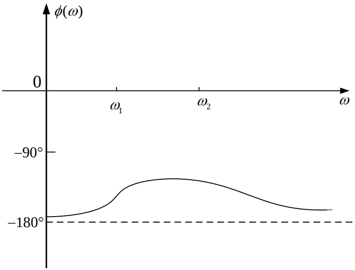


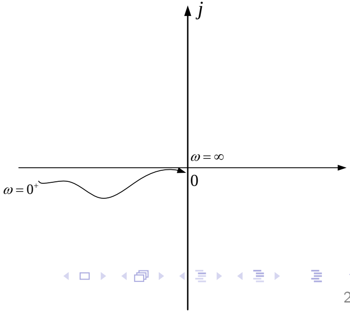
由开环传函得知该系统开环稳定，即$P=0$。当$T_1>T_2$，其对数频率特性图穿越-180°的正负穿越次数之差$N=0-1=-1$，则$N\neq\frac{P}{2}$，该系统闭环不稳定。而当$T_1<T_2$，其对数频率特性图穿越-180°的正负穿越次数之差$N=0-0=0$，则$N=\frac{P}{2}$，闭环稳定。

(a) 首先求取图a系统的开环传递函数，低频段渐近线斜率为-40，则系统有比例和两个积分环节，在ω_1 处，加入一个一阶微分环节，斜率变为-20，在ω_2处，增加一个惯性环节，斜率变为-40，则系统的开环传函为:

$$G(s) = \frac{K(\frac{1}{\omega_1}s+1)}{s^2(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$$

则大致的对数相频特性曲线与幅相频率特性曲线如下图所示:

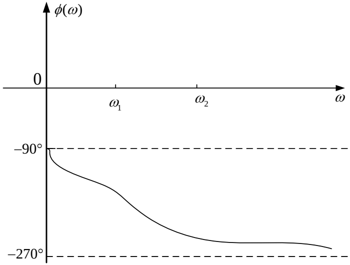


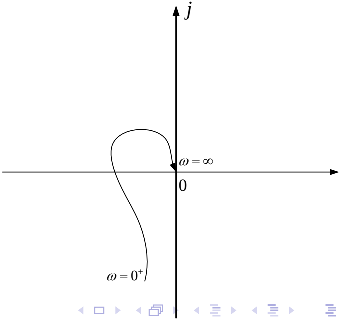


(b) 首先求取图b系统的开环传递函数，低频段渐近线斜率为-20，则系统有比例和一个积分环节，在ω_1 处，加入一个惯性环节，斜率变为-40，在ω_2处，增加一个惯性环节，斜率变为-60，系统开环传函为:

$$G(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$$

则大致的对数相频特性曲线与幅相频率特性曲线如下图所示:

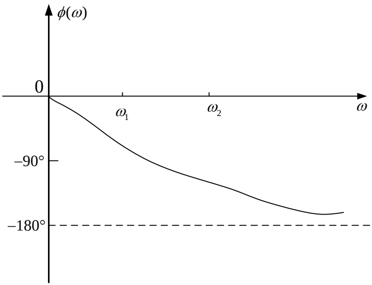


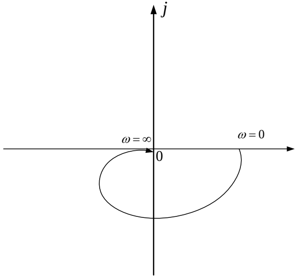


(c) 首先求取图a系统的开环传递函数，低频段渐近线斜率为0，则系统有比例环节，在ω_1 处，加一个惯性环节，斜率变为-20，在ω_2 处，增加一个惯性环节，斜率变为-40，系统开环传函为:

$$G(s) = \frac{K}{(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$$

则大致的对数相频特性曲线与幅相频率特性曲线如下图所示:





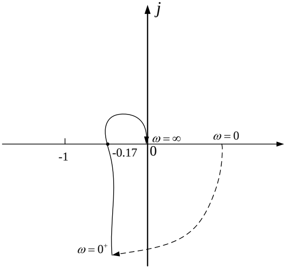
已知开环传函: $G(s)H(s)=\frac{250}{s(s+5)(s+15)}=\frac{3.33}{s(\frac{1}{5}s+1)(\frac{1}{15}s+1)}$, 则其频率特性为:

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{3.33[-(\frac{1}{5}+\frac{1}{15})\omega+j(-1+\frac{\omega^2}{75})]}{\omega\cdot(\frac{\omega^2}{25}+1)\cdot(\frac{\omega^2}{225}+1)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{250}{\omega\cdot\sqrt{\frac{\omega^2}{25}+1}\cdot\sqrt{\frac{\omega^2}{225}+1}}$$

$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)H(j\omega)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{5}-\arctan\frac{\omega}{15}$$

(1) 根据相频特性得知, $\phi(\omega):-90^\circ\sim-270^\circ$. 求与实轴的交点, 则令频率特性的虚部为0, 即$Im[G(j\omega)H(j\omega)]=0$, 则求出交界频率$\omega_x=8.67$, 则此时的实频特性$Re[G(j\omega)H(j\omega)]=-0.17$, 则系统的奈奎斯特图如下:



已知开环传函: $G(s)H(s)=\frac{250}{s(s+5)(s+15)}$.

(2) 解出系统的开环极点: $p_1=0$, $p_2=-5$, $p_3=-15$, 则系统无开环正实部的极点，开环稳定，即$P=0$. 根据奈氏稳定判据，该系统的奈奎斯特图不包围$(-1,j0)$点，则系统闭环稳定。

(3) 计算截止频率ω_c:
最低频段转折频率$\omega=5$, 因为$K=3.33$, 在低频段时系统会穿越0dB线，则$\omega_c=3.33$.
相角裕量计算如下:

$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c)=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{5}-\arctan\frac{\omega_c}{15}=43.8^\circ$$

(4) 计算相位交界频率ω_g:

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega_g}{5}-\arctan\frac{\omega_g}{15}=-180^\circ \quad\Rightarrow\quad \omega_g=8.67$$

增益裕量计算如下:

$$20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|=20\lg 3.33-20\lg\omega_g-20lg\sqrt{1+\frac{{\omega_g}^2}{25}}-20\lg\sqrt{1+\frac{{\omega_g}^2}{225}}=-15.65$$

$$h=15.65$$

(1) 已知开环传函: $G(s)=\frac{10}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$，系统由比例、积分、两个惯性环节构成。

1) 确定各转折频率及对应斜率为:

$\omega_1=2,\quad -20dB/dec;$

$\omega_2=10,\quad -20dB/dec$

2) 绘制最低频段($\omega<2$)渐近线，系统有比例、积分环节，则渐近线斜率-20 dB/dec，渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega$

当$\omega=1,\quad L(\omega)=20dB.$

当$\omega=2,\quad L(\omega)=14dB.$

3) $2\leq\omega<10$, 增加一个惯性环节，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega-20\lg 0.5\omega.$

当$\omega=10,\quad L(\omega)=-14dB.$

4) $\omega\geq 10$, 增加一个惯性环节，渐近线斜率为-60 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega-20\lg 0.5\omega-20\lg 0.1\omega.$

系统在$2\leq\omega<10$频段穿越0dB线，则截止频率ω_c计算如下:

$L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega_c-20\lg 0.5\omega_c=0\quad\Rightarrow\quad \omega_c=4.5rad/s.$

相频特性曲线表达式:

$$\phi(\omega)=-90^\circ-\arctan 0.5\omega-\arctan 0.1\omega$$

相角裕量计算如下:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c = 0^\circ$$

计算相位交接频率ω_g:

$$\phi(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega_g - \arctan 0.1\omega_g = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 0.5\omega_g + \arctan 0.1\omega_g = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.5\omega_g + 0.1\omega_g}{1 - 0.5\omega_g \times 0.1\omega_g} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \omega_g = 4.5$$

增益裕量计算如下:

$$20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = 20\lg 10 - 20\lg \omega_g - 20\lg 0.5\omega_g - 20\lg 0.1\omega_g = 7dB$$

$$h = -7dB$$

5-11-1的波德图如下:

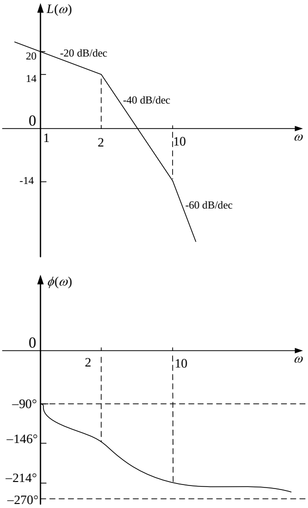


Figure: 5-11-1

(2) 已知开环传函:

$$G(s)=\frac{2083(s+3)}{s(s^2+20s+625)}=\frac{10(\frac{1}{3}+1)}{s(\frac{1}{625}s^2+\frac{20}{625}s+1)}$$

系统由比例、积分、一阶微分环节、振荡环节构成。

1) 确定各转折频率及对应斜率为:

$\omega_1=3,\ 20dB/dec$; $\omega_2=25,\ -40dB/dec$.

2) 绘制最低频段($\omega<3$)渐近线，系统有比例、积分环节，则渐近线斜率-20 dB/dec，渐近线方程为: $L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega$

当$\omega=1,\quad L(\omega)=20dB$.

当$\omega=3,\quad L(\omega)=10.5dB$.

3) $3\leq\omega<25$, 增加一个一阶微分环节，渐近线斜率为0 dB/dec, 则渐近线方程为: $L(\omega)=10.5dB$.

4) $\omega\geq 25$, 增加一个振荡环节，渐近线斜率为-40 dB/dec, 则渐近线方程为:

$L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega+20\lg\frac{1}{3}\omega-40\lg\frac{1}{25}\omega$.

系统在$\omega\geq 25$频段穿越0dB线，则截止频率ω_c计算如下:

$L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega_c+20\lg\frac{1}{3}\omega_c-40\lg\frac{1}{25}\omega_c=0\quad\Rightarrow\qquad\omega_c=45.6rad/s$.

相频特性曲线表达式: $\phi(\omega)=-90^\circ+\arctan\frac{1}{3}\omega+\angle G_1(j\omega)H(j\omega)$.

$$\angle G_1(j\omega)H(j\omega)=\begin{cases}-\arctan\frac{20\omega}{625-\omega^2} & \omega\leq 25\\ -180^\circ-\arctan\frac{20\omega}{625-\omega^2} & \omega>25\end{cases}$$

相角裕量计算如下:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ + \arctan\frac{1}{3}\omega_c - 180^\circ - \arctan\frac{20\omega_c}{625-{\omega_c}^2} = 28.3^\circ$$

当$\omega: 0 \to +\infty$变化时，该系统的相频范围为: $-90^\circ \to -180^\circ$, 则系统不会穿越负实轴，无相位交接频率ω_g及增益裕量。

5-11-2的波德图如下:

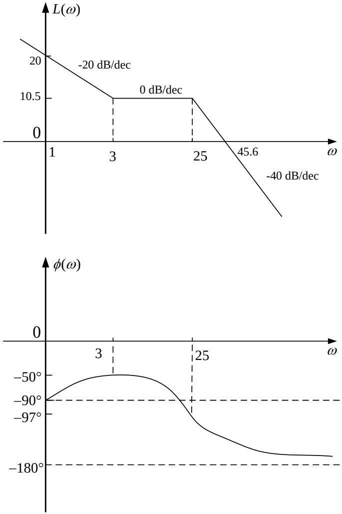
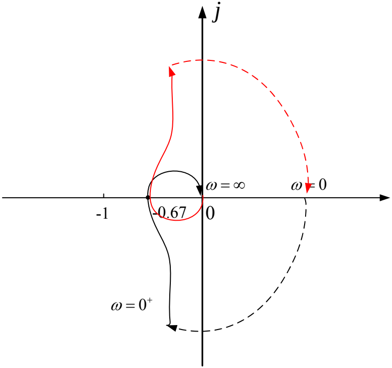


Figure: 5-11-2

(1) 已知开环传函：$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$，
开环传递函数频率特性为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j2\omega+1)}=\frac{1}{j(\omega-2\omega^3)-2\omega^2}$$

虚轴交点：$\omega-2\omega^3=0$，得$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{3}$

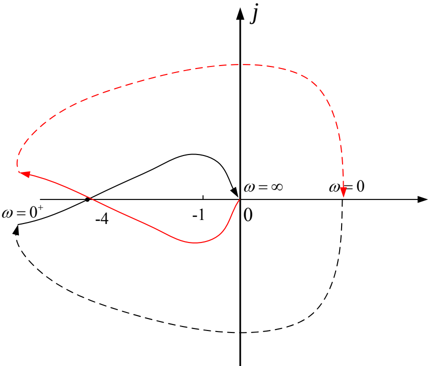


系统有三个开环极点，
$p_1=0$，$p_2=-1$，
$p_3=-0.5$，无位于[s]右半平面的开环极点，
即$P=0$. 幅相特性曲线不包围$(-1,j0)$ 点，则系统闭环稳定。

(2) 已知开环传函: $G(s) = \frac{4s+1}{s^2(s+1)(2s+1)}$,
开环传递函数频率特性为:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{4j\omega+1}{(j\omega)^2\omega(j\omega+1)(j2\omega+1)} = \frac{1+16\omega^2}{j\omega^3(1-8\omega^2)-(10\omega^4+\omega^2)}$$

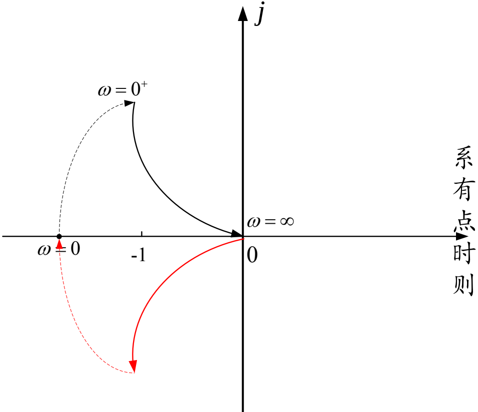
虚轴交点: $1-8\omega^2=0$, 得$\omega=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\frac{\sqrt{2}}{4}} = -4$



系统有四个开环极点, $p_1=p_2=0$, $p_3=-1$, $p_4=-0.5$, 无位于[s]右半平面的开环极点, 即$P=0$. 幅相特性曲线顺时针包围$(-1,j0)$点2圈, $N=2$, 则系统闭环不稳定。

(3) 已知开环传函：$G(s)=\frac{K}{s(Ts-1)}$,
开环传递函数频率特性为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(jT\omega-1)}=\frac{K}{-T\omega^2-j\omega}$$



系统开环极点$p_1=0$, $p_2=\frac{1}{T}$，则有一个位于[s]右半平面的开环极点，即$P=1$. 幅相特性曲线顺时针包围$(-1,j0)$点1圈，$N=1$，则系统闭环不稳定。

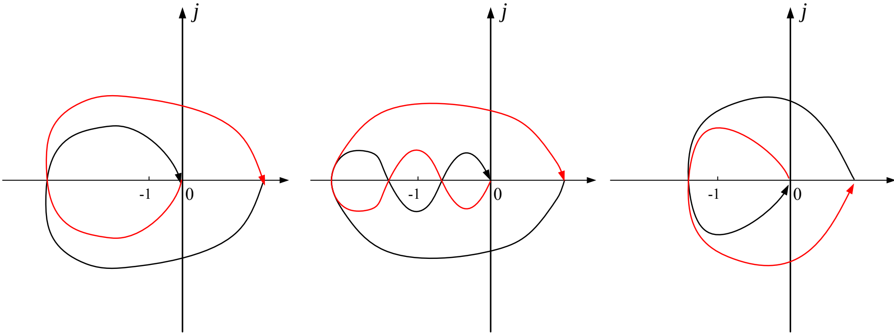


Figure: 5-14-a

(a) 图(a)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

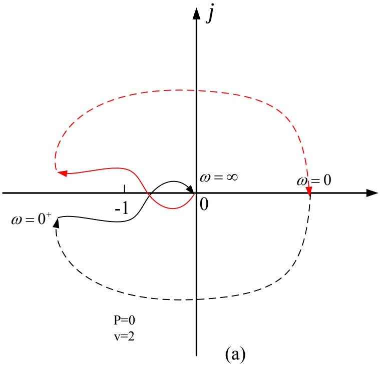


Figure: 5-14-a

根据奈氏判据，$(-1, j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N = 0 - 0 = 0$，因为$P = 0$，$N = \frac{P}{2}$，则该系统闭环稳定。(或者说$P = 0$，系统开环稳定，幅相特性曲线不包围$(-1, j0)$ 点，则系统闭环也稳定).

(b) 图(b)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

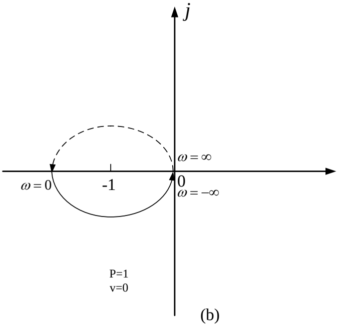


Figure: 5-14-b

根据奈氏判据，在整个频段内$(-1, j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N = 1 - 0 = 0$，因为$P = 1$，$N = P$，则该系统闭环稳定。(或者说幅相特性曲线在整个频段逆时针包围$(-1, j0)$点1周，则系统闭环也稳定).

(c) 图(c)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

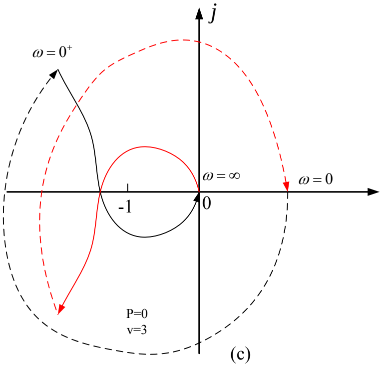


Figure: 5-14-c

根据奈氏判据，在正频段内$(-1,j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N=1-1=0$，因为$P=0$，$N=\frac{P}{2}$，则该系统闭环稳定。(或者说幅相特性曲线在正频段内不包围$(-1,j0)$ 点，则系统闭环稳定)。

(d) 图(d)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

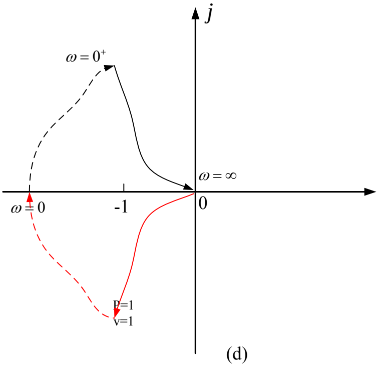


Figure: 5-14-d

根据奈氏判据，在正频段内$(-1,j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N=0-1=-1$，因为$P=1$，$N\neq\frac{P}{2}$，则该系统闭环不稳定。(或者说幅相特性曲线在整个频段顺时针时针包围$(-1,j0)$点1周，则系统闭环不稳定).

(e) 图(e)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

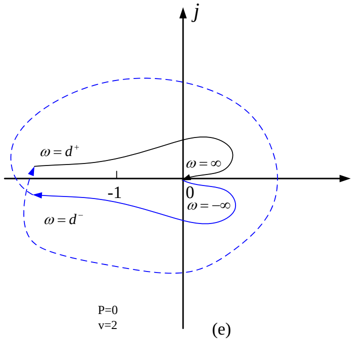


Figure: 5-14-e

根据奈氏判据，在整个频段内$(-1,j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N=0-2=-2$, 因为$P=0$, $N\neq P$, 则该系统闭环不稳定。(或者说幅相特性曲线在整个频段顺时针包围$(-1,j0)$ 点2 周，则系统闭环不稳定).

(f) 图(f)所示的幅相特性曲线的增补曲线如下图所示:

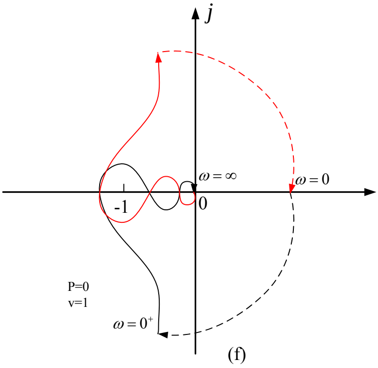


Figure: 5-14-f

根据奈氏判据，在整个频段内$(-1, j0)$点左侧曲线穿越负实轴正负穿越次数之差$N = 0 - 1 = -1$，因为$P = 0$，$N \neq \frac{P}{2}$，则该系统闭环不稳定。(或者说幅相特性曲线在整个频段顺时针包围$(-1, j0)$点2周，则系统闭环不稳定).

已知开环传递函数：$G(s)=\frac{K}{s(s^2+s+1)}$，则频率特性为：

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1-\omega^2+j\omega)}$$

(1) 先计算相位交界频率ω_g：

$$\phi(\omega_g)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega_g}{1-{\omega_g}^2}=-180^\circ \quad\Rightarrow\quad \omega_g=1$$

因为$h=20$，$h=20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|}$，则$|G(j\omega_g)|=0.1$.

$$\Rightarrow\quad \frac{K}{\omega_g\cdot\sqrt{(1-{\omega_g}^2)^2+{\omega_g}^2}}\quad\Rightarrow\quad K=0.1$$

(2) 计算截止频率ω_c：

因为$K=0.1$，则$\omega_c=0.1$. 相角裕度计算如下：

$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c)=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{1-{\omega_c}^2}=84^\circ$$

(1) 由开环频率特性表得知: $\omega_c = 8$, 则相角裕量为:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$$

由开环频率特性表得知: $\omega_g = 10$, $|G(j\omega_g)| = 0.64$, 则 $\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 1.5625$, 增益裕量为:

$$h = 3.88\ dB$$

(2) $h = 20dB$, $h = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|}$, 则$|G(j\omega_g)| = 0.1$。
所需的增益K的变化为:

$$\frac{0.1}{0.64} = 0.156$$

故增益K变为原来的0.156倍.

已知开环传递函数:

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}$$

先计算相位交接频率ω_g:

$$\phi(\omega_g)=-\arctan\omega_g-\arctan 2\omega_g-\arctan 3\omega_g=-180^\circ$$

$$\Rightarrow\quad 180^\circ-\arctan 3\omega_g=\arctan\omega_g+\arctan 2\omega_g$$

$$\Rightarrow\quad \tan(180^\circ-\arctan 3\omega_g)=\frac{\omega_g+2\omega_g}{1-\omega_g\cdot 2\omega_g}$$

$$\Rightarrow\quad -3\omega_g=\frac{3\omega_g}{1-2{\omega_g}^2}\quad\Rightarrow\quad \omega_g=1$$

已知$h=20dB$, 则$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|=0.1$. 则有:

$$\frac{K}{\sqrt{1+{\omega_g}^2}\cdot\sqrt{1+4{\omega_g}^2}\cdot\sqrt{1+9{\omega_g}^2}}=0.1\quad\Rightarrow\quad K=1$$

已知开环传递函数:

$$G(s)=\frac{as+1}{s^2}$$

(1) 相角裕量为:

$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c)=45^\circ \quad\Rightarrow\quad 180^\circ+\arctan a\omega_c-180^\circ=45^\circ$$

$$\Rightarrow\quad \arctan a\omega_c=45^\circ \quad\Rightarrow\quad a\omega_c=1$$

(2) 根据截止频率的定义得:

$$|G(j\omega_c)|=\frac{\sqrt{a^2{\omega_c}^2+1}}{{\omega_c}^2}=1$$

$$\Rightarrow\quad a^2{\omega_c}^2+1={\omega_c}^2$$

综合上式得: $\omega_c=\sqrt{2}=1.414$, $a=0.707$.

已知系统开环传函：$G(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{s}$，则频率特性为：

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{\omega}$$

$$\angle G(j\omega)=-90^{\circ}-2\omega\cdot 57.3^{\circ}$$

延迟环节的幅相曲线为单位圆，当系统存在延迟环节，延迟环节对系统开环频率特性的影响是造成了相频特性明显变化。系统的开环幅相图为螺旋线，且为顺时针。设ω_x为开环幅相曲线穿越负实轴的频率，则有：

$$\angle G(j\omega_x)=-90^{\circ}-2\omega_x\cdot 57.3^{\circ}=-(2k+1)\pi \quad k=0,1,2,\cdots$$

鉴于穿越频率ω_x幅频特性有：

$$|G(j\omega_x)|=\frac{K}{\omega_x}$$

当$\omega_x\uparrow$, $|G(j\omega_x)|\downarrow$, 在频率为最小的ω_x时，幅相曲线第一次穿越负实轴，则有：

$$\angle G(j\omega_x)=-90^{\circ}-2\omega_x\cdot 57.3^{\circ}=-180^{\circ} \ \Rightarrow \ \omega_x=0.78$$

当$|G(j\omega_x)|=\frac{K}{\omega_x}=1$时，系统闭环临界稳定，则$K$的最大值为0.78.

(1) 从对数幅频特性图先计算系统的开环传函，$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

1)当$\omega<\omega_1$，第一条直线斜率为0，系统有比例环节作用，
即$L(\omega)=20\lg K=20$，则$K=10$.

2)当$\omega_1<\omega<10$，渐近线斜率为-20，则一个惯性环节作用，
即$T_1=\frac{1}{\omega_1}$.
且有$L(\omega)=20\lg K-20\lg T_1\omega$，当$\omega=1$时，$L(\omega)=0 \quad\Rightarrow\quad T_1=10$.

3)当$\omega>10$，渐近线斜率为-40，则另一个惯性环节作用，
即$T_2=\frac{1}{10}=0.1$.

则系统的开环传函为：$G(s)=\frac{10}{(0.1s+1)(10s+1)}$.
当输入信号为单位阶跃输入时，即$r(t)=1(t)$，则求位置误差系数：

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=10$$

$$e_{ss}(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=0.091$$

(2) 单位反馈系统的闭环传函：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10}{s^2+10.1s+11}$$

(1) 从对数幅频特性图得:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\frac{\omega}{0.2})}{j\omega(j\frac{\omega}{0.1} + 1)(j\frac{\omega}{4} + 1)}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{K(1 + 5s)}{s(10s + 1)(0.25s + 1)}$$

当$\omega = 1$, 渐近线穿越0dB线，即有幅频渐近线方程:

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg 10\omega + 20\lg 5\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

. 则系统的开环传函为:

$$G(s) = \frac{2(5s + 1)}{s(10s + 1)(0.25s + 1)}$$

(2) 由于系统是最小相位系统，因而可通过计算相位裕量γ来判断系统的稳定性. 从图可知$\omega_c = 1$, 在ω_c 处，系统的相位裕量为:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 5 - \arctan 10 - \arctan 0.25 = 70.4^\circ > 0^\circ$$

则系统闭环稳定.

(3) 当输入信号为单位斜坡信号时，即$r(t)=t$, 则求速度误差系数:

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=2$$

系统的稳态误差:

$$e_{ss}(\infty)=\frac{1}{K_v}=0.5$$

(4)当幅频特性向右平移时，开环增益K增大，系统的增益交界频率ω_c增大，相位裕量γ减小，从而减小稳态误差，系统快速性提高。

已知系统的开环传函为:$G(s) = \frac{K}{s(s+0.2)}$，则单位反馈系统的闭环传函:

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2+0.2s+K} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

则$2\xi\omega_n = 0.2$, $K = {\omega_n}^2$.
又已知$M_r = 1.5$, 则有:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.36$$

则代入上式得: $\omega_n = 0.28$, $K = 0.078$.
根据增益交界频率的定义得:

$$|G(j\omega_c)| = \frac{K}{\omega_c\sqrt{{\omega_c}^2+0.04}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 0.25$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 5\omega_c = 38.6^\circ$$

从闭环幅频特性图得知: $M_r = 1.4$, $\omega_r = 10$, $\omega_b = 40$.
又有:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.4 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.4$$

则超调量为:

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 25.5\%$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 12$$

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^2+1}-2\xi^2} = 11.8$$

$$\gamma = \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^2}-2\xi^2}} = 39.2^\circ$$

$$\omega_c t_s = \frac{6}{\tan\gamma} \quad \Rightarrow \quad t_s = 0.62s$$

系统的开环传递函数为: $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{48(s+1)}{s(8s+1)(\frac{1}{20}s+1)}$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan\omega_c - \arctan 8\omega_c - \arctan\frac{1}{20}\omega_c$$

利用其开环频率特性，得知对数频率幅频特性曲线在$1 < \omega_c < 20$频段穿越$0dB$线，求取其剪切频率$\omega_c = 6$. 代入上式，得相角裕量为:
$\gamma = 65^\circ$.
对于高阶系统，利用开环频域指标与时域指标的近似估算公式，得:

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4(\frac{1}{\sin\gamma} - 1) = 20\%$$

$$K_0 = 2 + 1.5(\frac{1}{\sin\gamma} - 1) + 2.5(\frac{1}{\sin\gamma} - 1)^2 = 2.175$$

$$t_s = \frac{K_0\pi}{\omega_c} = 1.14\ s$$