自控原理习题解答第六章

侯一凡

yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

2014

已知单位反馈系统的开环传函为: $G_o(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$,要求: K=20, $\gamma \geq 50°$, $h \geq 10$.

解: (1)令$K = 20$, 则$G_o(s) = \frac{20}{s(0.5s+1)}$, 先绘制固有部分的幅频特性图,如下图ABC 段:

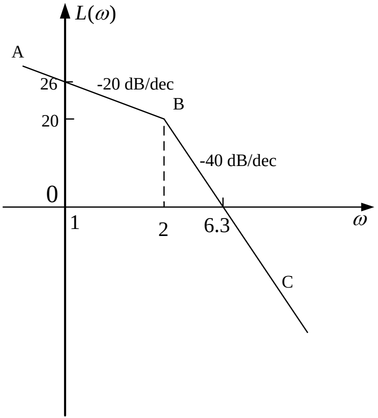


Figure: 6-2-1

(2) 从幅频图可知系统的增益截止频率$\omega_c = 6.3\ rad/s$, 则系统的相位裕量为:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5 \times 6.3 = 18^\circ$$

由此可见，系统的相位裕度不满足要求，设计后系统要求$\gamma \geq 50^\circ$，但对ω_c 没有要求，则采用超前补偿网络. 此外，系统相频曲线不会穿越-180°，则增益裕量h不必考虑。

(3) 设计超前装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1},$$

首先，计算超前校正装置产生的相位超前量$\phi_m = \gamma - \gamma_1 + \varepsilon$, 其中$\gamma$是校正后相角裕量, γ_1是校正前系统相角裕量, ε是因补偿装置的引入使系统交接频率ω_c增大而产生的相角滞后量，因为ω_c处的穿越斜率为$-40\ dB/dec$, 则$\varepsilon = 5^\circ - 10^\circ$. 令$\varepsilon = 5^\circ$,
则$\phi_m = 50^\circ - 18^\circ + 5^\circ = 37^\circ$.

$$\alpha = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = 4.2$$

(4)校正装置在ω_m处的幅值为$10\lg\alpha = 6.2\ dB$，则计算校正前系统在幅值为-6.2 dB 处的频率$\omega_m = 9$，该频率就是校正后系统的交接频率ω_c.
$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$， $T = 0.54$.
则补偿网络的传递函数为

$$\alpha G_c(s) = \frac{0.23s+1}{0.05s+1}$$

则补偿后系统的传递函数为：

$$G_e(s) = \frac{20(0.23s+1)}{s(0.5s+1)(0.05s+1)}$$

(5) 校核:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.23\times 9 - \arctan 0.5\times 9 - \arctan 0.05\times 9 = 52.5^\circ$$

则校核后的系统，满足各项指标。

6-2另解: (频率特性图形设计校正网络)
由相角裕量得知，需要设计超前角$\phi_c > 50^\circ - 18^\circ = 32^\circ$.
已知原系统幅频特性图以$-40\ dB/dec$穿过0dB线，若以$-20\ dB/dec$穿越0dB线，则有可能满足技术要求。
系统对ω_c没有要求，可自由决定。在$\omega = 2 - 6.3$之间任取一点作为ω_1. 例如取$\omega_1 = 4$, 做延长线交于原幅频图D点，过D点作$-20\ dB/dec$ 直线，交0dB线于$\omega = 10$, 这是设计后幅频图的中频段，在$\omega > 10$ 的范围内取一点E,对应的频率取为ω_2, 过E点作斜率为$-40\ dB/dec$的直线EF。则ABDEF 就是设计后的对数幅频特性图。
值得注意的是，确定ω_2有多种方法，第一种就是直接取最大超前角$\phi m = \phi_c$, 则有$\sqrt{\omega_1\omega_2} = \omega_c = 10$, 有$\omega_2 = 25$. 另一种方法是在横轴上取一点$\omega_2$，使得$\omega_c$在$\omega_1$和$\omega_2$ 的中间位置. 本题利用最大超前角计算公式，取$a = 5$, 则可获得最大超前角$\phi_m = \arcsin\frac{a-1}{a+1} = 42^\circ$, 满足要求。

补偿后系统的幅频特性图为：

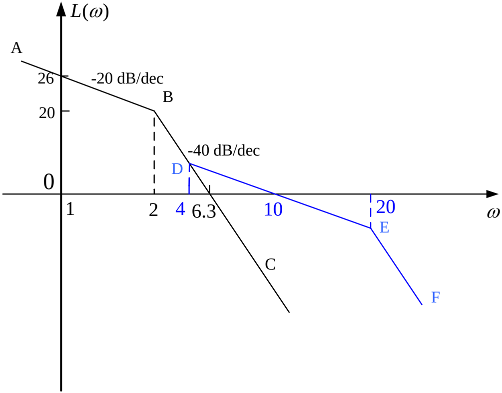


Figure: 6-2-2

补偿网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\frac{1}{\omega_1}s + 1}{\frac{1}{\omega_2}s + 1} = \frac{0.25s + 1}{0.05s + 1}$$

则补偿后系统的传递函数为：

$$G_e(s) = \frac{20(0.25s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.05s + 1)}$$

校核:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.25 \times 10 - \arctan 0.5 \times 10 - \arctan 0.05 \times 10 = 52.9^\circ$$

则校核后的系统，满足各项指标。

已知系统传递函数: $G_o(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)}$，要求$\gamma=40^\circ$, $K_v=8$.

(1) 根据速度误差系数的计算得:

$$K_v=\lim_{s\to0} sG_o(s)=\lim_{s\to0} s\frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)}=K=8 \quad\Rightarrow\quad K=8$$

(2) 绘制固有部分的幅频特性图,如下图ABCD段:

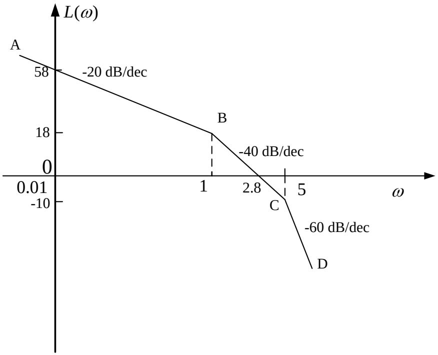


Figure: 6-5-1

从幅频图可知系统的增益截止频率$\omega_c = 2.8\ rad/s$, 则系统的相位裕量为:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 2.8 - \arctan 0.2 \times 2.8 = -9^\circ$$

由此可见，系统的相位裕度不满足要求，设计后系统要求$\gamma = 40^\circ$，但对ω_c 没有要求.
(3) 设计滞后装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1},$$

校正后系统相角应满足满足: $\phi(\omega) = -180^\circ + 40^\circ + 5^\circ = -135^\circ$, 则对应该相角的交接频率为: $-90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.2\omega_c = -135^\circ$, 解得校正后系统的交接频率$\omega_c = 0.74$.
(4) 未校正系统在$\omega_c = 0.74$处的幅值等于$L(0.74) = 20\lg 8 - 20\lg 0.74 = 20.6\ dB$, 则要求串联滞后校正装置后，幅值在该频率必须衰减20.6，即$-20\lg\alpha = 20.6$, 求得$\alpha = 0.09$.
(5) $\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{10}$, $T = 150$

(6) 则补偿网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{13.5s + 1}{150s + 1}$$

则补偿后系统的传递函数为：

$$G_e(s) = \frac{8(13.5s + 1)}{s(s + 1)(0.2s + 1)(150s + 1)}$$

(7) 校核:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.74 \times 13.5 - \arctan 0.74 - \arctan 0.2 \times 0.74$$

$$- \arctan 150 \times 0.74 = 40^\circ$$

则校核后的系统，满足各项指标。

补偿后系统的对数幅频特性图为AIHEFG段：

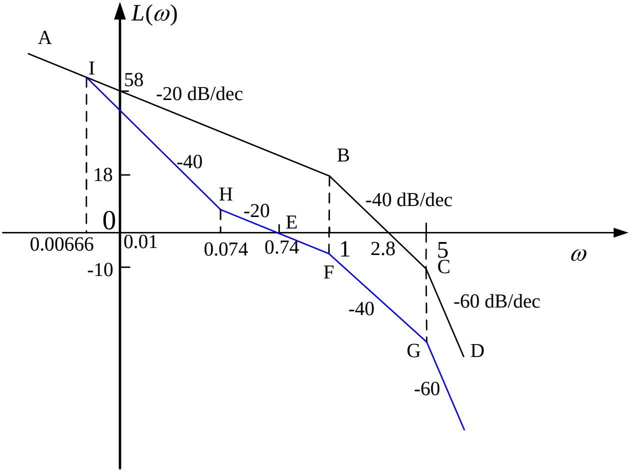


Figure: 6-5-2

已知系统的开环传函为：$G_o(s)=\frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$，要求相角裕量$\gamma=65°$，幅值裕量$h\geq 6\ dB$.

(1) 先绘制校正前系统的对数幅频特性如下图ABCD线段：

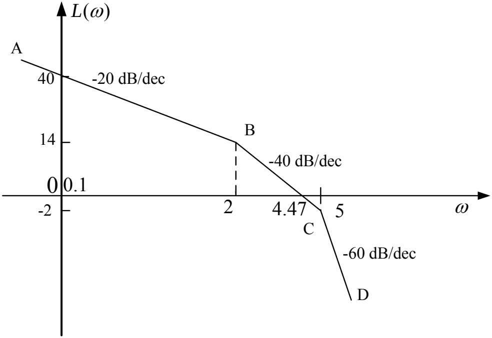


Figure: 6-8

可知增益截止频率$\omega_c=4.47$，则计算相角裕量$\gamma=-18°$，不满足要求.

计算相位穿越频率ω_g:

$$\phi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan 0.2\omega_g - \arctan 0.5\omega_g = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 0.2\omega_g + \arctan 0.5\omega_g = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.2\omega_g + 0.5\omega_g}{1 - 0.2\omega_g \times 0.5\omega_g} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 0.2\omega_g \times 0.5\omega_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_g = \sqrt{10}$$

则$L(\omega_g) = 20\lg 10 - 20\lg 10 - 20\lg 2 - 20\lg 5 = -10$,
$h = -L(\omega_g) = 10\ dB$, 满足要求。

先采用超前校正网络设计

(1)由上述相角裕量计算得知，需要补偿的相角$\phi = 65^\circ - (-18^\circ) = 83^\circ$，考虑超前网络截止频率增大引起的滞后相角，取$\varepsilon = 5^\circ$，则得到最大超前角为：$\phi_m = \phi + \varepsilon = 88^\circ$，
$\alpha = \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m} = 3282$.
校正装置在ω_m处的幅值为$10\lg\alpha = 35.2\ dB$，则计算校正前系统在幅值为-35.2 dB 处的频率$\omega_m = 17.8$，该频率就是校正后系统的交接频率ω_c.
$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$，$T = 9.6\times10^{-4}$ 则补偿网络的传递函数为

$$\alpha G_c(s) = \frac{3.1s+1}{9.6\times10^{-4}s+1}$$

则校正后系统的传递函数为：

$$G_e(s) = \frac{10(3.1s+1)}{s(0.5s+1)(0.2s+1)(9.6\times10^{-4}s+1)}$$

(5) 校核:

$$\begin{aligned}\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 3.1\times17.8 - \arctan 0.5\times17.8 - \arctan 0.2\times17.8 \\ - \arctan 9.6\times10^{-4}\times17.8 = 21^\circ < 50^\circ\end{aligned}$$

则采用单级超前校正装置，不满足相角裕量指标。

加入二级超前校正装置:

设校正装置的最大超前角$\phi_{m2}=55°$，则$\alpha_2=\frac{1+\sin\phi_{m2}}{1-\sin\phi_{m_2}}=10.1$.
校正装置在ω_{m2}处的幅值为$10\lg\alpha_2=10\ dB$，则在ω_{m2}处，二级超前校正装置使系统幅值增加了10 dB，选取ω_{m2}为校正后系统的交接频率ω_c'.
需计算经过一级超级校正后系统幅值为-10 dB时的ω，则
有$L(\omega)=20\lg 10-20\lg\omega+20\lg 3.1\omega-20\lg 0.5\omega-20\lg 0.2\omega=-10$,
解得$\omega=31.3\ rad/s$，即$\omega_c'=31.3\ rad/s$. $T=0.01$
则二级超前校正网络的传递函数为:

$$\alpha_2 G_{c2}(s)=\frac{0.1s+1}{0.01s+1}$$

校正后系统的传递函数为：

$$G_e(s)=\alpha_2 G_0(s)G_c(s)G_{c2}(s)$$

$$=\frac{10(3.1s+1)(0.1s+1)}{s(0.5s+1)(0.2s+1)(9.6\times 10^{-4}s+1)(0.01s+1)}$$

校核:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 3.1 \times 31.3 - \arctan 0.5 \times 31.3 - \arctan 0.2 \times 31.3$$

$$-\arctan 9.6\times 10^{-4}\times 31.3 + \arctan 0.1\times 31.3 - \arctan 0.01\times 31.3 = 65.6^\circ > 65^\circ$$

$$-90^\circ + \arctan 3.1 \times \omega_g - \arctan 0.5 \times \omega_g - \arctan 0.2 \times \omega_g$$

$$-\arctan 9.6 \times 10^{-4} \times \omega_g + \arctan 0.1 \times \omega_g - \arctan 0.01 \times \omega_g = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \omega_g = 320\ rad/s$$

则$L(\omega_g) = 20\lg 10 - 20\lg \omega_g + 20\lg 3.1\omega_g + 20\lg 0.1\omega_g - 20\lg 0.5\omega_g - 20\lg 0.2\omega_g = -20$, $h = -L(\omega_g) = 20\ dB > 6\ dB$, 则校核后的系统，满足各项指标。

采用滞后校正网络设计
已知增益截止频率$\omega_c = 4.47$,
则计算相角裕量$\gamma = -18^\circ$，$h = -L(\omega_g) = 0\ dB$。

(1) 校正后系统相角应满足满足: $\phi(\omega) = -180^\circ + 65^\circ + 5^\circ = -110^\circ$, 则对应该相角的交接频率为: $-90^\circ - \arctan 0.2\omega_c - \arctan 0.5\omega_c = -110^\circ$, 解得校正后系统的交接频率$\omega_c = 0.51\ rad/s$.

(2)未校正系统在$\omega_c = 0.51$处的幅值等于$L(0.51) = 20\lg 10 - 20\lg 0.51 = 26\ dB$, 则要求串联滞后校正装置后，幅值在该频率必须衰减26 dB，即$-20\lg\alpha = 26$, 求得$\alpha = 0.05$.

(3) $\frac{1}{\alpha T} = frac\omega_c 10$, $T = 392.2$

(4) 则补偿网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{19.6s + 1}{392.2s + 1}$$

则补偿后系统的传递函数为：

$$G_e(s) = \frac{10(19.6s+1)}{s(0.5s+1)(0.2s+1)(392.2s+1)}$$

(5) 校核:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.51 \times 19.6 - \arctan 0.51 - \arctan 0.2 \times 0.51$$

$$- \arctan 392.2 \times 0.51 = 51.8^\circ$$

$$\phi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan 0.2\omega_g - \arctan 0.5\omega_g + \arctan 19.6\omega_g$$

$$- \arctan 392.2\omega_g = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \omega_g = 3.1\ rad/s$$

则$L(\omega_g) = 20\lg 10 - 20\lg\omega_g + 20\lg 19.6\omega_g - 20\lg 0.5\omega_g - 20\lg 392.2\omega_g$
$= -19.6$,
$h = -L(\omega_g) = 19.6\ dB$,
则校核后的系统，满足各项指标。

总结:

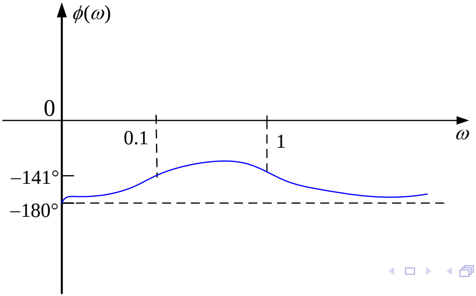
(1) 超前校正是利用校正装置产生的超前相角来补偿原系统中元件产生的相角滞后量，以增大系统的相位裕量。超前校正会使系统瞬态响应的速度变快，频带变宽。超前校正虽然能有效改善系统的动态性能，但当待校正系统的相频特性曲线在ω_c处急剧下降时，单级超前校正网络并不能实现其校正效果。这是因为校正后系统的交接频率会向高频段移动，在新的交接频率处，由于待校正系统的相角滞后量过大，所以单级超前校正网络难于获得所要求的相角裕量。

(2)滞后校正网络能使系统开环频率特性的中高频段的增益下降和增益交接频率ω_c 减小,从而有可能使系统获得足够大的相角裕量和，增强系统抗高频干扰的功能，但它不影响系统的低频段的特性，使系统同时满足动态和稳态性能。其缺点是滞后校正装置降低了系统的带宽，导致瞬态响应速度变慢。

(a) 从图(a)所示的幅频频率渐近线可知，系统包含比例、两个积分、一阶微分和惯性环节构成，开环传递函数:$G(s) = \frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$
从图上可知渐近线转折频率为: $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 1$, 则有: $\tau = 10$, $T = 1$.
此外，当$\omega = 0.1$时，幅频值为: $L(\omega) = 20\lg K - 40\lg\omega = 20$,
则$K = 0.1$. 解得系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{0.1(10s+1)}{s^2(s+1)}$$

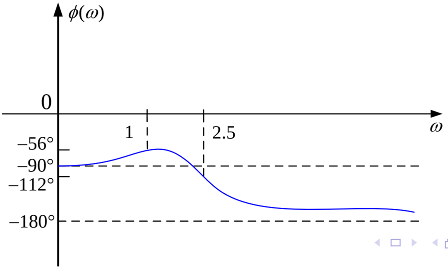
其近似相频曲线如下图:



(b) 从图(b)所示的幅频频率渐近线可知，系统包含比例、积分、一阶微分和振荡环节构成，开环传递函数如下：$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$
从图上可知渐近线转折频率为：$\omega_1=1$, $\omega_2=2.5$, 则有：$\tau=1$，$T=0.4$.
此外，当$\omega=1$时，幅频值为：$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega=20$, 则$K=10$.
当$\omega=2.5$时，已知转折频率处的精确值，
得$-20\lg 2\xi=28-20=8\ dB$, 则$\xi=0.2$, 解得系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$$

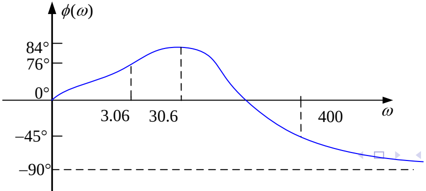
其近似相频曲线如下图：



(c) 从图(c)所示的幅频频率渐近线可知，系统包含比例、二阶微分、振荡环节和惯性环节构成，传递函数如下：$G(s) = \frac{K(\tau^2 s^2+2\xi_1\tau s+1)}{(T_1 s+1)^2(T_2 s+1)}$
从图上可知渐近线转折频率为：$\omega_1 = 3.06$, $\omega_2 = 400$,
则有：$\tau = 0.327$, $T_2 = 0.0025$.
此外，当$\omega < 3.06$时，幅频值为：$L(\omega) = 20\lg K = -20$, 则$K = 0.1$.
当$\omega = 3.06$时，已知转折频率处的二阶微分环节的精确值，
得$20\lg 2\xi_1 = -8\ dB$, 则$\xi_1 = 0.2$.
当$\omega = 400$时，幅频值为：$L(\omega) = 20\lg K + 40\lg \tau\omega - 40\lg T_1\omega = 20$,
则$T_1 = 0.0327$. 解得系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{0.1(0.327^2 s^2 + 0.1308s + 1)}{(0.0327s + 1)^2(0.0025s + 1)}$$

其近似相频曲线如下图：



(1) 从校正前的开环对数幅频特性曲线(虚线)可知，系统由比例、积分、两个惯性环节构成，传递函数如下：

$$G_o(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

从图上可知渐近线转折频率为: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 100$,
则有： $T_1 = 0.5$, $T_2 = 0.01$.
此外，当$\omega = 1$时，幅频值为: $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega = 40$,
则$K = 100$. 解得校正前系统传递函数为:

$$G_o(s) = \frac{100}{s(0.5s + 1)(0.01s + 1)}$$

从校正后的开环对数幅频特性曲线(实线)可知，系统由比例、积分、惯性、一阶微分、振荡环节构成，传递函数如下:

$$G_e(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)}$$

从图上可知渐近线转折频率为: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 5$, $\omega_3 = 100$, $\xi = 1$,
则有: $T_1 = 1$, $T_2 = 0.01$, $\tau = 0.2$.
此外，当$\omega = 1$时，幅频值为: $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega = 40$,
则$K = 100$. 解得校正后系统传递函数为:

$$G_e(s) = \frac{100(0.2s + 1)}{s(s + 1)(0.0001s^2 + 0.02s + 1)}$$

(2) 已知校正后的传递函数: $G_e(s) = G_o(s)G_c(s)$, 则校正装置的传递函数为:

$$G_c(s) = \frac{G_e(s)}{G_o(s)} = \frac{(0.2s+1)(0.5s+1)}{(s+1)(0.01s+1)}$$

其对数幅频曲线如下图所示:

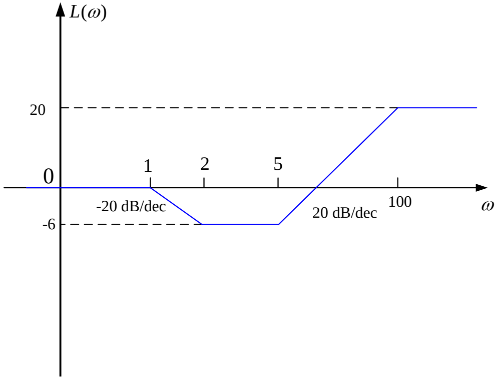


Figure: 6-11

(3) 校正前系统的相角裕度:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.01\omega_c$$

从图上得知系统校正前的增益截止频率: $\omega_c = 14.1\ rad/s$, 代入上式得:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5 \times 14.1 \arctan 0.01 \times 14.1 = 0^\circ$$

校正后系统的相角裕度:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.2\omega_c - \arctan \omega_c - \arctan \frac{0.02\omega_c}{1 - 0.0001 \times \omega_c^2}$$

从图上得知系统校正后的增益截止频率: $\omega_c = 20\ rad/s$, 代入上式得:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.2 \times 20 - \arctan 20 - \arctan \frac{0.02 \times 20}{1 - 0.0001 \times 400} = 56.4^\circ$$

(1) 已知复合控制系统的框图，求输出$Y(s)$对输入$R(s)$的传递函数(设扰动$N(s)=0$).
根据梅森增益公式:

$$\Phi_r(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\cdots$$

该系统存在两个回路: $L_1=-G_3H$, $L_2=-G_1G_2G_3$, 且L_1和L_2相互接触，则$\sum L_iL_j=0$, 得:

$$\Delta=1+G_3H+G_1G_2G_3$$

从$R(s)$到$Y(s)$的前向通路有两条，其前向通路传函及相应的代数余子式为: $P_1=G_1G_2G_3$, $\Delta_1=1$(此前向通路与两个回路均相接触),
$P_2=G_rG_2G_3$, $\Delta_2=1$(此前向通路与两个回路均相接触).

$$\Phi_r(s)=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_1G_2G_3+G_rG_2G_3}{1+G_3H+G_1G_2G_3}$$

(2) 由第(1)题可知:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_r G_2 G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_r G_2 G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3} \cdot R(s)$$

要求实现系统对输入$R(s)$的完全不变性，则使系统的输出在任何时刻都完全复现输入，即$Y(s) = R(s)$. 则有:

$$\frac{G_1 G_2 G_3 + G_r G_2 G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad G_1 G_2 G_3 + G_r G_2 G_3 = 1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3$$

$$\Rightarrow \quad G_r = \frac{1 + G_3 H}{G_2 G_3}$$

(3) 已知复合控制系统的框图，求输出$Y(s)$对扰动$N(s)$的传递函数(设输入$R(s)=0$).
根据梅森增益公式:

$$\Phi_n(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

Δ的计算与第(1)题一样，即:

$$\Delta = 1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3$$

从$N(s)$到$Y(s)$的前向通路有两条，其前向通路传函及相应的代数余子式为: $P_1 = -G_3$, $\Delta_1 = 1$(此前向通路与两个回路均相接触),
$P_2 = G_n G_2 G_3$, $\Delta_2 = 1$(此前向通路与两个回路均相接触).

$$\Phi_n(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_n G_2 G_3 - G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}$$

(4) 由第(3)题可知:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{G_n G_2 G_3 - G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{G_n G_2 G_3 - G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3} \cdot N(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}(G_n G_2 - 1) \cdot N(s)$$

此时令:

$$G_n(s) = \frac{1}{G_2}$$

则系统输出不受扰动$N(s)$的影响，即实现系统对扰动的完全不变性。