自控原理习题解答第八章

侯一凡

yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

2014

已知$G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$,求脉冲传递函数$G(z)$, 因为输入信号以离散信号的形式进入系统，则可获得脉冲传递函数.

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\mathcal{Z}[G(s)]=\mathcal{Z}[\frac{K}{s(s+a)}]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\mathcal{Z}[\frac{K}{a}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a})]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{K}{a}(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}})$$

$$=\frac{Kz(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

(1)从系统框图可知，$G_1(s)=\frac{1}{s+1}$，$G_2(s)=\frac{2}{s+2}$，$G_1(s)$与$G_2(s)$串联，其中间无采样开关，则系统的脉冲传递函数为:

$$G(z)=G_1G_2(z)=\mathscr{Z}[G_1(s)G_2(s)]=\mathscr{Z}[\frac{2}{(s+1)(s+2)}]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\mathscr{Z}[2(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=2(\frac{z}{z-e^{-T}}-\frac{z}{z-e^{-2T}})$$

$$=\frac{2z(e^{-T}-e^{-2T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

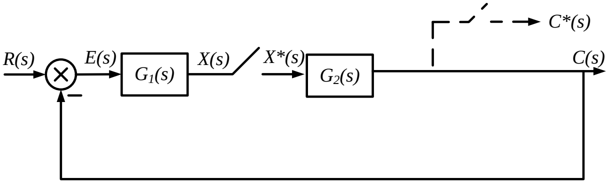
(2)从系统框图可知，$G_1(s)=\frac{1}{s+1}$，$G_2(s)=\frac{2}{s+2}$，$G_1(s)$与$G_2(s)$串联，其中间有采样开关，则系统的脉冲传递函数为:

$$G(z)=G_1(z)G_2(z)=\mathcal{Z}[G_1(s)]\cdot\mathcal{Z}[G_2(s)]=\mathcal{Z}[\frac{1}{(s+1)}]\cdot\mathcal{Z}[\frac{2}{(s+2)}]$$

$$\Rightarrow\quad G(z)=\frac{z}{z-e^{-T}}\cdot\frac{2z}{z-e^{-2T}}$$

$$=\frac{2z^2}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

(1) 输入信号不是以离散信号的形式输入，则只能求出输出的Z变换$C(z)$. 根据下图的信号传递关系列出关系式:

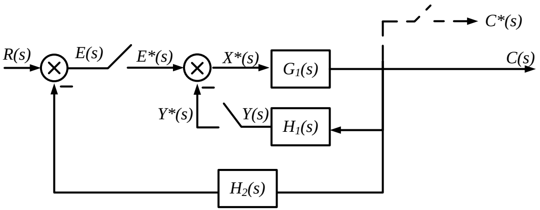


$E(s) = R(s) - C(s)$, $C(s) = X^*(s)G_2(s)$, $X(s) = G_1(s)E(s)$, 则有:
$X(s) = G_1(s)[R(s) - C(s)] = G_1(s)R(s) - G_1(s)X^*(s)G_2(s)$, 等式两边取Z变换得:
$X(z) = RG_1(z) - G_1G_2(z)X(z)$, 整理可得:

$$X(z) = \frac{RG_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}$$

又有$C(s) = X^*(s)G_2(s)$，即$C(z) = X(z)G_2(z)$，代入$X(z)$得:

$$C(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)}$$



(2) 根据下图的信号传递关系列出关系式:

$E(s)=R(s)-H_2(s)C(s)$, $C(s)=X^*(s)G_1(s)$, $X^*(s)=E^*(s)-Y^*(s)$, $Y(s)=H_1(s)C(s)$,

则有:$E(s)=R(s)-H_2(s)X^*(s)G_1(s)$, $X^*(s)=E^*(s)-Y^*(s)$, $Y(s)=H_1(s)X^*(s)G_1(s)$,

上述三个表达式两边同时Z变换得:

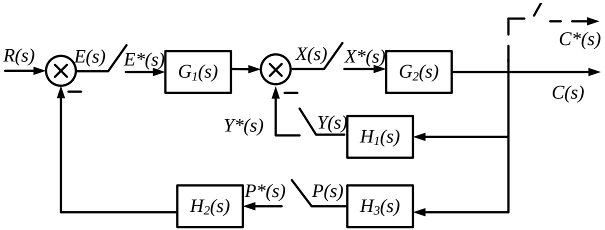
$E(z)=R(z)-G_1H_2(z)X(z)$, $X(z)=E(z)-Y(z)$, $Y(z)=G_1H_1(z)X(z)$.

化简整理得:

$$X(z)=\frac{R(z)}{1+G_1H_2(z)+G_1H_1(z)}$$

又有$C(s)=X^*(s)G_1(s)$，即$C(z)=X(z)G_1(z)$，代入$X(z)$得:

$$C(z)=\frac{R(z)G_1(z)}{1+G_1H_2(z)+G_1H_1(z)}$$



(3) 根据下图的信号传递关系列出关系式: $E(s) = R(s) - H_2(s)P^*(s)$, $C(s) = X^*(s)G_2(s)$, $X^*(s) = E^*(s)G_1(s) - Y^*(s)$, $Y(s) = H_1(s)C(s)$, $P(s) = H_3(s)C(s)$, 则有: $E(s) = R(s) - H_2(s)P^*(s)$, $C(s) = X^*(s)G_2(s)$, $X^*(s) = E^*(s)G_1(s) - Y^*(s)$, $Y(s) = H_1(s)X^*(s)G_2(s)$, $P(s) = H_3(s)X^*(s)G_2(s)$,
对上述表达式同时Z变换得: $E(z) = R(z) - H_2(z)P(z)$, $C(z) = X(z)G_2(z)$, $X(z) = E(z)G_1(z) - Y(z)$, $Y(z) = G_2H_1(z)X(z)$, $P(z) = G_2H_3(z)X(z)$. 整理得:

$$X(z) = \frac{R(z)G_1(z)}{1 + G_2H_1(z) + G_2H_3(z)G_1(z)H_2(z)}$$

$$C(z) = \frac{R(z)G_1(z)G_2(z)}{1 + G_2H_1(z) + G_2H_3(z)G_1(z)H_2(z)}$$

(1) 已知开环脉冲传递函数: $G(z)=\frac{0.36z+0.26}{z^2-1.36z+0.36}$, 则闭环特征方程为;

$$D(z)=z^2-1.36z+0.36+0.36z+0.26=z^2-z+0.62=0$$

令$z=\frac{w+1}{w-1}$, 代入特征方程得:

$$(\frac{w+1}{w-1})^2-\frac{w+1}{w-1}+0.62=0$$

$$\Rightarrow \quad 0.62w^2+0.76w+2.62=0$$

由此列出劳斯表:

w^2	0.62	2.62
w^1	0.76	
w^0	2.62	

由劳斯表可以看出，系统是稳定的。

(2) 已知开环脉冲传递函数：$G(z)=\frac{(z+0.7)}{(z-1)(z-0.36)}$，则闭环特征方程为；

$$D(z)=(z-1)(z-0.36)+z+0.7=z^2-0.36z+1.06=0$$

令$z=\frac{w+1}{w-1}$，代入特征方程得:

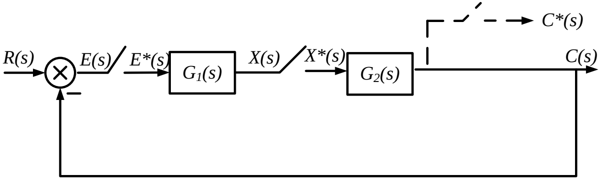
$$(\frac{w+1}{w-1})^2-0.36(\frac{w+1}{w-1})+1.06=0$$

$$\Rightarrow \quad 1.7w^2-0.12w+2.42=0$$

由此列出劳斯表:

w^2	1.7	2.42
w^1	-0.12	
w^0	2.42	

由劳斯表可以看出，第一列元素有负数，则系统是不稳定的。



系统的框图如上图所示，$G_1(s)=\frac{2}{s(s+1)}$，$G_2(s)=\frac{1}{s}$，采样开关的采样周期为T.
则$G_1(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-e^{-T}}$，$G_2(z)=\frac{z}{z-1}$，$R(z)=\frac{z}{z-1}$.
由信号关系得知：$E(s)=R(s)-C(s)$, $C(s)=X^*(s)G_2(s)$, $X(s)=E^*(s)G_1(s)$,
则有:$E(s)=R(s)-X^*(s)G_2(s)$, $X(s)=E^*(s)G_1(s)$, $C(s)=X^*(s)G_2(s)$,
上述三个表达式两边同时Z 变换得：$E(z)=R(z)-G_2(z)X(z)$,
$X(z)=E(z)G_1(z)$, $C(z)=G_2(z)X(z)$.
整理得:

$$C(z)=\frac{R(z)G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}$$

$$\Rightarrow \quad C(z)=\frac{2z^3(1-e^{-T})}{(z-1)^3(z-e^{-T})+2z^2(z-1)(1-e^{-T})}$$

从系统框图得知，$G_1(s)=K$，$G_2(S)=\frac{4}{s(s+2)}$. 系统的开环脉冲函数为:

$$G_1G_2(z)=\mathcal{Z}[\frac{4K}{s(s+2)}]=2K(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-2T}})=\frac{2Kz(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

$T=0.5\ s$, 则系统的闭环特征方程为:

$$D(z)=(z-1)(z-e^{-1})+2Kz(1-e^{-1})=z^2+[2K(1-e^{-1})-(1+e^{-1})]z+e^{-1}=0$$

令$z=\frac{w+1}{w-1}$, 代入特征方程得:

$$2K(1-e^{-1})w^2+2(1-e^{-1})w-2K(1-e^{-1})+2(1+e^{-1})=0$$

要使系统稳定，则特征方程系数均为正数，即:

$$\begin{cases}2K(1-e^{-1})>0\\ -2K(1-e^{-1})+2(1+e^{-1})>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 0.8<K<2.16$$

(1) 系统含有零阶保持器与环节串联形式，则系统开环脉冲传递函数:

$$G_1G_2(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{K}{s(s+a)}] = \frac{z-1}{z}[\frac{K}{a}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}})]$$

$$\Rightarrow \quad G_1G_2(z) = \frac{K(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})}$$

闭环特征方程: $D(z) = a(z-e^{-aT}) + K(1-e^{-aT}) = 0$
令$z = \frac{w+1}{w-1}$, 代入特征方程得:

$$[a+K-(K+a)e^{-aT}]w + a - K + (K+a)e^{-aT} = 0$$

要使系统临界稳定，则$a-K+(K+a)e^{-aT} = 0$, 解得:

$$K = \frac{a(1+e^{-aT})}{1-e^{-aT}}$$

(a) 当 $T = 1\ s$时，

$$K_1 = \frac{a(1+e^{-aT})}{1-e^{-aT}} = \frac{a(1+e^{-a})}{1-e^{-a}}$$

(b) 当 $T = 0.5\ s$时，

$$K_2 = \frac{a(1+e^{-aT})}{1-e^{-aT}} = \frac{a(1+e^{-0.5a})}{1-e^{-0.5a}}$$

讨论:

$$K_1 = \frac{\frac{a(1+e^{-a})}{1+e^{-0.5a}}}{1-e^{-0.5a}}$$

$$K_2 = \frac{\frac{a(1+e^{-0.5a})^2}{1+e^{-0.5a}}}{1-e^{-0.5a}}$$

由此可知: $K_1 < K_2$.
结论: 采样周期T是离散系统的一个重要参数，T变化时，稳定性也会发生变化，缩短采样周期T可以使系统稳定性得到改善。

解题思路：利用离散系统的误差终值定理求解，求取误差$E(z)$。

(1)已知$G_p(s)=1$，$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s+a}$，根据系统框图信号关系求开环脉冲传函：

$$G_pG(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{K}{s(s+a)}]=\frac{K}{a}(1-z^{-1})(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}})=\frac{K(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})}$$

单位负反馈系统的误差为：

$$E(z)=\frac{1}{1+G_pG(z)}R(z)$$

1) 当$r(t)=1(t)$，即$R(z)=\frac{z}{z-1}$，则代入终值定理有：

$$e_{ssp}=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_pG(z)}\frac{z}{z-1}=\frac{a}{a+K}$$

2) 当$r(t)=t$，即$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$，则代入终值定理有：

$$e_{ssp}=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_pG(z)}\frac{Tz}{(z-1)^2}=\infty$$

(2)已知$G_p(s)=1, G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$, 根据系统框图信号关系求开环脉冲传函:

$$G_pG(z)=\mathcal{Z}[\frac{K}{s(s+a)}]=\frac{K}{a}(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}})=\frac{Kz(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

单位负反馈系统的误差为:

$$E(z)=\frac{1}{1+G_pG(z)}R(z)$$

1) 当$r(t)=1(t)$, 即$R(z)=\frac{z}{z-1}$, 则代入终值定理有:

$$e_{ssp}=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_pG(z)}\frac{z}{z-1}=0$$

2) 当$r(t)=t$, 即$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$, 则代入终值定理有:

$$e_{ssp}=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_pG(z)}\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{aT}{k}$$

与具有相同传函的连续系统的误差比较:

(1) $G_p(s)=1, G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s+a}$

$$e_{ssp}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G(s)}\frac{1}{s}=\frac{a}{a+K}$$

$$e_{ssp}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G(s)}\frac{1}{s^2}=\infty$$

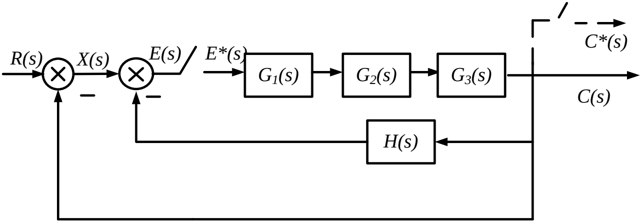
(2) $G_p(s)=1, G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$

$$e_{ssp}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G(s)}\frac{1}{s}=0$$

$$e_{ssp}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G(s)}\frac{1}{s^2}=\frac{a}{K}$$

结论: 从上述结果看出，在形式上离散系统的误差与其相同传函的连续系统形式完全相同，但是离散系统的稳态误差除了与系统结构，输入信号有关之外，还与采样周期T有关，T越小，稳态误差越小。

从框图中知，前向通路有3个连续环节$G_1(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$，$G_2(s)=K$，$G_3(s)=\frac{1}{s^2}$，反馈回路$H(s)=0.5s$。
前向通路传函：$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$，反馈回路的传函$H(s)$，系统的框图如下：



从框图得知三个关系式：
(1) $C(s)=E^*(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)$
(2) $E(s)=X(s)-C(s)H(s)$
(3) $E_1(s)=R(s)-C(s)$
整理得：

$$E(s)=R(s)-E^*(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)-E^*(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)H(s)$$

对上式误差表达式两边Z变换，得:

$$E(z) = R(z) - E(z)G_1G_2G_3(z) - E(z)G_1G_2G_3H(z)$$

$$\Rightarrow \quad E(z) = \frac{1}{1 + G_1G_2G_3(z) + G_1G_2G_3H(z)} R(z)$$

$$G_1G_2G_3(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{K}{s^3}] = K\frac{z-1}{z}\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{KT^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

$$G_1G_2G_3H(z) = \mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)G_3(s)H(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{0.5K}{s^2}]$$

$$= 0.5K\frac{z-1}{z}\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{0.5KT}{z-1}$$

$K = 10, T = 0.2$, 代入上式得:

$$G_1G_2G_3(z) = \frac{0.2(z+1)}{(z-1)^2}$$

$$G_1G_2G_3H(z) = \frac{1}{z-1}$$

令$G(z)=G_1G_2G_3(z)+G_1G_2G_3H(z)$, 则由终值定理得:

$$e_{ssp}=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

(1) 位置误差系数:

$$K_p=\lim_{z\to 1}G(z)=\lim_{z\to 1}[\frac{0.2(z+1)}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}]=\infty$$

(2) 速度误差系数:

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)[\frac{0.2(z+1)}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}]=\infty$$

(3) 加速度误差系数:

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)^2[\frac{0.2(z+1)}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}]=0.4$$

(4)$r(t)=1(t)+t+\frac{1}{2}t^2$

$$e_{ssp}=\frac{1}{1+K_p}+\frac{T}{K_v}+\frac{T^2}{K_a}=0.1$$

(1)开环脉冲传函:

$$G(z)=\mathcal{Z}[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s}]=(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{K}{s^2}]=\frac{z-1}{z}\frac{KTz}{(z-1)^2}=\frac{KT}{z-1}$$

单位反馈系统闭环传函:

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{KT}{z-1+KT}$$

(2) $T=1$, 则由闭环传函得知系统的闭环特征方程: $z-1+K=0$. 令

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

代入特征方程得:

$$w+1+(K-1)(w-1)=0 \quad\Rightarrow\quad Kw+2-K=0$$

系统稳定的条件: $0<K<2$.

(1)在框图中，设$G_1(s)=K$，$G_2(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$，$G_3(s)=\frac{0.5}{s}$. 则开环脉冲传函:

$$G(z)=G_1(z)G_2G_3(z)=K\cdot\mathcal{Z}[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{0.5}{s}]=K(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{0.5}{s^2}]=\frac{0.5KT}{z-1}$$

单位反馈系统闭环传函:

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.5KT}{z-1+0.5KT}$$

(2) $K=2$, 则由闭环传函得知系统的闭环特征方程: $z-1+T=0$. 令

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

代入特征方程得:

$$w+1+(T-1)(w-1)=0 \quad\Rightarrow\quad Tw+2-T=0$$

系统稳定的条件: $0<T<2$.

补充:
(3)当$r(t)=1(t)$, 求输出的在采样时刻的值$c(kT)$?
解: 从上式得知系统闭环传递函数:

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.5KT}{z-1+0.5KT}=\frac{T}{z-1+T}$$

$$\Rightarrow \quad C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{T}{z-1+T}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{zT}{z^2+(T-2)z+1-T}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+T-1}$$

$$c(kT)=\mathcal{Z}^{-1}[C(z)]=1(t)-(1-T)^k$$