自控原理习题解答第三章

侯一凡

yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

2014

(1) 对系统的单位阶跃响应进行拉普拉斯反变换，得：

$$C(s)=\frac{1}{s}+0.2\cdot\frac{1}{s+60}-1.2\cdot\frac{1}{s+10}$$

已知

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

则根据传递函数定义有：

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=(\frac{1}{s}+0.2\cdot\frac{1}{s+60}-1.2\cdot\frac{1}{s+10})\cdot s$$

$$=\frac{s^2+70s+600+0.2s(s+10)-1.2s(s+60)}{s^2+70s+600}$$

整理可得：

$$\Phi(s)=\frac{600}{s^2+70s+600}$$

(2) 已知系统闭环传递函数$\Phi(s)$,则单位脉冲响应下的输出拉普拉斯变换为:

$$C(s) = \Phi(s) \times 1 = \frac{600}{(s+60)(s+10)}$$

$$= \frac{12}{s+10} - \frac{12}{s+60}$$

$$= 12(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+60})$$

对上式取拉普拉斯反变换，求得单位脉冲响应为:

$$c(t) = 12e^{-10t} - 12e^{-60t} \quad (t \geq 0)$$

3-1题的另解：

(1) 根据阶跃响应的表达式的形式，得知表达式中含有两个指数衰减函数，则二阶系统必为过阻尼系统，且求得系统闭环极点为：$s_1 = -60$, $s_2 = -10$.
二阶系统的闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

过阻尼系统的闭环极点为两个不相同的负实根,即:

$$s_{1,2} = -(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \quad \Rightarrow \quad s_1 \cdot s_2 = \omega_n^2$$

将上述结果代入$\Phi(s)$, 则闭环传递函数变换为：

$$\Phi(s) = \frac{s_1 \cdot s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

(2)根据拉普拉斯变换的微分性质，单位脉冲响应可由单位阶跃响应求一阶微分解得，已知单位阶跃响应如下：

$$c(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$$

对$c(t)$求一阶微分，得单位脉冲响应为：

$$c(t)' = 12e^{-10t} - 12e^{-60t}$$

(1) 求一阶系统的单位阶跃响应：

$$C(s)=\Phi(s)\cdot R(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$$

部分分式展开后，得：

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

取上式的拉氏反变换，得单位阶跃响应：

$$c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}\quad(t\geq 0)$$

(2) 求一阶系统的单位斜坡响应：

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

部分分式展开后，得：

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

取上式的拉氏反变换，得单位斜坡响应：

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

(2) 求一阶系统的单位斜坡响应(另解):
根据拉普拉斯变换的积分性质，单位斜坡响应可由单位阶跃响应求积分获得。
已知单位阶跃响应:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

对上式求积分后，则得单位斜坡响应:

$$c(t) = \int (1 - e^{-\frac{t}{T}})dt$$

整理后得:

$$c(t) = t + Te^{-\frac{t}{T}} + C$$

由初始条件$c(0) = 0$, 代入上式解得: $C = -T$。则有单位斜坡响应为:

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

由系统框图知：该系统为单位负反馈的一阶系统，求得系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

一阶系统的主要动态性能指标为调整时间t_s。

题目给出温度计测量容器内水温时，1 min指示实际水温的98%，即解得系统的允许误差值$\Delta = 0.02$，则有$t_s = 4T = 1$ min，解得$T = 0.25$min.

此外，水温以$10^\circ C/min$速度线性增加，则有输入信号$T_i(t) = 10t$.

计算系统的误差闭环传递函数为：

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{T_i(s)} = \frac{Ts}{Ts+1}$$

根据拉普拉斯变换的终值定理求稳态误差，有：

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{Ts}{Ts+1}\cdot\frac{10}{s^2} = 10T = 2.5^\circ C$$

3-3题另解1:
由系统框图知该系统为单位负反馈系统，求得系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

则系统为I型系统。

此外，水温以$10^\circ C/min$速度线性增加，有$T_i(t) = 10t$，信号强度$B = 10$。系统跟踪斜坡信号，则计算静态速度误差系数K_v有:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{T}$$

则稳态误差为:

$$e_{ss}(\infty) = \frac{B}{K_v} = 10T = 2.5^\circ C$$

3-3题另解2：
由系统框图知：该系统为单位负反馈的一阶系统，求得系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

则系统为一阶惯性环节。此外，水温以$10^\circ C/min$速度线性增加，有$T_i(t) = 10t$，信号强度$B = 10$。

系统的输入是斜坡信号，则根据一阶系统的单位斜坡响应曲线可知，系统到达稳态时，存在常值误差，稳态误差为T。又因为该系统输入信号的强度$B = 10$，对于线性系统，则可知稳态误差为$10T$. 即有：

$$e_{ss}(\infty) = 10T = 2.5^\circ C$$

已知系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

系统特征方程为: $s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0$,
解出特征根$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $(0 < \xi < 1)$,
令$\sigma = -\xi\omega_n$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$,
则$\sigma^2 + {\omega_d}^2 = {\omega_n}^2$。

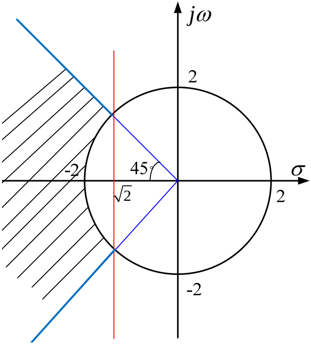
(1) 当$0.707 \leq \xi < 1$, $\omega_n \geq 2$.

a) 因为$\omega_n \geq 2$, 根据$\sigma^2 + {\omega_d}^2 = {\omega_n}^2$,
则特征根位于以原点为圆心, 半径为2的圆外。

b) $\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, $0.707 \leq \xi < 1$。

$$\Rightarrow \quad -45^\circ \leq \phi \leq 45^\circ, \phi \neq 0^\circ$$

综合上述条件, 特征根的位置在右图所示的阴影部分。



(2) 当$0 < \xi \leq 0.5$, $2 \leq \omega_n \leq 4$.

a) 因为$2 \leq \omega_n \leq 4$, 根据$\sigma^2 + {\omega_d}^2 = {\omega_n}^2$，则特征根位于以原点为圆心，半径为2 与4 之间的圆内。

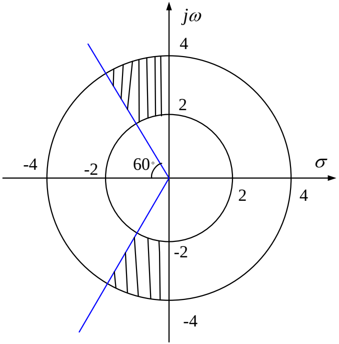
b) $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, $0 < \xi \leq 0.5$。

$$\Rightarrow \quad -90^\circ < \phi \leq -60^\circ$$

或

$$60^\circ \leq \phi < 90^\circ$$

综合上述条件，特征根的位置在右图所示的阴影部分。



(3) 当$0.5 \le \xi < 0.707$, $\omega_n \le 2$.

a) 因为$\omega_n \le 2$, 根据$\sigma^2 + {\omega_d}^2 = {\omega_n}^2$, 则特征根位于以原点为圆心，半径为2的圆内。

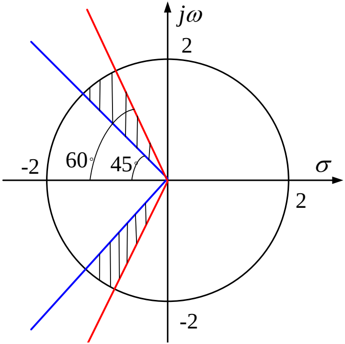
b) $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, $0.5 \le \xi < 0.707$。

$$\Rightarrow \quad -60^\circ \le \phi < -45^\circ$$

或

$$45^\circ < \phi \le 60^\circ$$

综合上述条件，特征根的位置在右图所示的阴影部分。



已知单位反馈系统的开环传递函数，则可以推导出系统的闭环传递函数：

$$G(s)=\frac{4}{s(s+2)} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{4}{s(s+2)}}{1+\frac{4}{s(s+2)}}=\frac{4}{s^2+4s+4}$$

$$\Phi(s)=\frac{4}{s^2+4s+4}=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

解得：$\omega_n=2$，$\xi=0.5$。
由于$0<\xi<1$，可知该系统为二阶欠阻尼系统。
在单位阶跃信号作用下，二阶欠阻尼系统的响应表达式如下：

$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi)$$

又已知$\phi=\arccos\xi=60°$,代入上式，整理化简得：

$$c(t)=1-\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-0.25}}\cdot\sin(2\sqrt{1-0.25}t+60°)$$

$$=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t+60°)$$

由该二阶系统单位阶跃响应曲线可知，峰值时间和超调量计算如下：

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.1$$

$$\sigma\% = \frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}100\% = \frac{1.3-1}{1} = 30\%$$

又根据超调量计算公式：

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 30\%$$

计算求得：$\xi = 0.357$, $\omega_n = 3.36rad/s$
则系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{11.3}{s(s+2.4)}$$

此外，由于允许误差值$\Delta = 0.02$，则有：

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 3.33\ s$$

已知单位反馈系统的开环传递函数，可以推导出系统的闭环传递函数：

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K}{0.1s^2+s+K}=\frac{10K}{s^2+10s+10K}$$

$$\Phi(s)=\frac{10K}{s^2+10s+10K}=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

则有${\omega_n}^2=10K$, $2\xi\omega_n=10$.

(1) 若$K=10$，解得：$\omega_n=10$，$\xi=0.5$。超调量和峰值时间计算如下：

$$\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%=16.3\% \qquad t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.36\ s$$

(2) 若$K=20$，解得：$\omega_n=10\sqrt{2}$，$\xi=0.25\sqrt{2}$。超调量和峰值时间计算如下：

$$\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%=30.5\% \qquad t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.24\ s$$

则当$K\uparrow$时，$\omega_n\uparrow$，$\xi\downarrow$，超调量$\sigma\%\uparrow$，峰值时间$t_p\downarrow$，系统快速性提高。

已知系统的闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

(1) 若$\omega_n = 5$，$\xi = 0.1$。超调量和调整时间计算如下：

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 72.9\% \qquad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 6\ s\ (\Delta = 0.05)$$

$$\omega_n = 10,\ \xi = 0.1. \quad \Rightarrow \quad \sigma\% = 72.9\% \quad t_s = 3\ s$$

$$\omega_n = 1,\ \xi = 0.1. \quad \Rightarrow \quad \sigma\% = 72.9\% \quad t_s = 30\ s$$

(2) 若$\omega_n = 5$，$\xi = 0.5$。超调量和调整时间计算如下：

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16.3\% \qquad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.2\ s$$

(3) 总结：

a) 超调量$\sigma\%$只与阻尼系数ξ相关，$\xi\uparrow$时，$\sigma\%\downarrow$，系统平稳性能提高。

b) 若ξ不变，当$\omega_n\uparrow$时，$t_s\downarrow$，系统快速性提高，但$\sigma\%$不变，即系统的平稳性不变。

c) 若ω_n不变，当$\xi\uparrow$时，$\sigma\%\downarrow$，系统平稳性能提高，$t_s\downarrow$，快速性提高。

已知系统的单位的阶跃响应：

$$c(t)=1-1.25e^{-1.2t}\sin(1.6t+53.1^\circ)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi)$$

则可以得到：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}=1.25,\ \ \xi\omega_n=1.2,\ \ \omega_n\sqrt{1-\xi^2}=1.6,\ \ \phi=53.1^\circ=0.93\ rad$$

求解得：$\omega_n=2$，$\xi=0.6$。
则调整时间、峰值时间、超调量及上升时间计算如下：

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=3.33\ s,\quad t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1.96\ s$$

$$\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=9.48\%,\qquad t_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1.38\ s$$

(1) $0.01s^3+0.3s^2+s+20=0$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数，则需列写劳斯表如下：

s^3	0.02	1
s^2	0.3	20
s^1	-0.33	0
s^0	20	

劳斯表中第一列元素有负数，且符号改变了2次，则系统不稳定，且含有2个正实部的根。

(2) $s^5+12s^4+44s^3+48s^4+s+1=0$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数，则需列写劳斯表如下：

s^5	1	44	1
s^4	12	48	1
s^3	40	$\frac{11}{12}$	
s^2	$\frac{1909}{40}$	1	
s^1	$\frac{1799}{22908}$	0	
s^0	1		

劳斯表中第一列元素均为正数，则系统稳定。

(3) $s^6+3s^5+5s^4+9s^3+8s^2+6s+4=0$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数，则需列写劳斯表如下：

s^6	1	5	8	4	
s^5	3	9	6		
s^4	2	6	4		出现全0行，则构造辅助方程：$2s^4+6s^2+4=0$，
s^3	0(8)	0(12)			求导后得：$8s^3+12s=0$，系数代替全0行系数。
s^2	3	4			
s^1	1.33				
s^0	4				

劳斯表中第一列元素均为正数，系统有不含有正实部的根，
但系统存在纯虚根，系统不稳定。从辅助方程求解得：

$$2s^4+6s^2+4=(2s^2+2)(s^2+2)=0$$

求解得: $s_{1,2}=\pm j$, $s_{3,4}=\pm\sqrt{2}j$

(4) 根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式缺s^1的项，则系统不稳定。

已知单位反馈系统的开环传递函数，可以推导出系统的闭环传递函数：

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K}{s^3+3s^2+2s+K}$$

则有闭环特征方程：$s^3+3s^2+2s+K=0$。
根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数，则有$K>0$. 列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

若要系统稳定，劳斯表中第一列元素均为正数，即满足下列条件:

$$\frac{6-K}{3}>0$$

综合上述条件, 解得:

$$0<K<6$$

要求系统闭环极点位于$s=-1$左侧，即令$s=s_1-1$，代入原特征方程式，有：

$$(s+1)(s+1.5)(s+2)+K_o=0 \;\Rightarrow\; (s_1-1+1)(s_1-1+1.5)(s_1-1+2)+K_o=0$$

整理可得到：$s_1^3+1.5s_1^2+0.5s_1+K_o=0$。
根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数，则有$K_o>0$. 列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s_1^3 & 1 & 0.5 \\ s_1^2 & 1.5 & K_o \\ s_1^1 & \frac{0.75-K_o}{1.5} & \\ s_1^0 & K_o & \end{array}$$

要系统稳定，则满足下列条件:

$$\frac{0.75-K_o}{1.5}>0$$

综合上述条件，解得:

$$0<K_o<0.75$$

K_o的可以取无限趋近于0.75的值。

单位负反馈系统闭环特征方程为开环传递函数分子多项式与分母多项式之和。

(1)系统的特征方程为:

$$s(s-1)(s+5)+10(s+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad s^3+4s^2+5s+10=0$$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数. 列写劳斯表如下:

s^3	1	5
s^2	4	10
s^1	2.5	
s^0	10	

劳斯表中第一列元素均为正数，则系统稳定。

(2)系统的特征方程为:

$$s(s^2+8s+24)+100=0$$

$$\Rightarrow \quad s^3+8s^2+24s+100=0$$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数. 列写劳斯表如下:

s^3	1	24
s^2	8	100
s^1	11.5	
s^0	100	

劳斯表中第一列元素均为正数，则系统稳定。

(3)系统的特征方程为:

$$s^2(300s^2+600s+50)+3s+1=0$$
$$\Rightarrow \quad 300s^4+600s^3+50s^2+3s+1=0$$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数. 列写劳斯表如下：

s^4	300	50	1
s^3	600	3	
s^2	48.5	1	
s^1	-9.4		
s^0	1		

劳斯表中第一列元素有负数，符号改变两次，则系统含有两个正实部的根，系统不稳定。

系统的特征方程为:

$$s^4+2s^3+2s^2+4s+2=0$$

根据劳斯稳判的必要条件，特征方程式不缺项且各系数均为正数. 列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 2 & 2 \\
s^3 & 2 & 4 & \\
s^2 & 0 \to \varepsilon & 2 & \text{用}\varepsilon\text{ 代替0 元素，}\varepsilon\text{ 为极小的正数} \\
s^1 & (4-\frac{4}{\varepsilon}) \to -\infty & & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}$$

劳斯表中第一列元素有负数，符号改变两次，则系统有两个位于[S]右半平面的根，系统不稳定。

解题方法: 利用系统的型别与静态误差系数求解。

(1) 根据系统的开环传递函数，判定该系统为0型系统，则有:

输入信号为$u(t)$时，

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 10$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{u}{1+K_p} = \frac{u}{11}$$

输入信号为t时，

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v} = \infty$$

输入信号为$\frac{1}{2}t^2$时，

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

解题方法: 利用系统的型别与静态误差系数求解。

(2) 根据系统的开环传递函数，判定该系统为I型系统，则有:

输入信号为$u(t)$时，

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{u}{1+K_p} = 0$$

输入信号为t时，

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{21}{8}$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{8}{21}$$

输入信号为$\frac{1}{2}t^2$时，

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = 0$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

解题方法: 利用系统的型别与静态误差系数求解。

(3) 根据系统的开环传递函数，判定该系统为II型系统，则有:

输入信号为$u(t)$时，

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \infty$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{u}{1 + K_p} = 0$$

输入信号为t时，

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \infty$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0$$

输入信号为$\frac{1}{2}t^2$时，

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = 8$$

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_a} = 0.125$$

典型二阶系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s}$$

已知二阶系统的性能指标:

$$\sigma_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 15\% = 0.15, \quad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 2s$$

求得：$\xi = 0.52$，$\omega_n = 2.88$。

代入开环传递函数，得到:

$$G(s) = \frac{2.88^2}{s^2 + 2 \times 0.52 \times 2.88s}$$

系统跟踪单位斜坡信号时，

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{2.88^2}{2 \times 0.52 \times 2.88} = 2.77$$

则有：

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0.36$$

(1)

$$G(s)=\frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$$

根据系统的开环传递函数，判定该系统为0型系统，则有：

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{100}{(0.1s+1)(s+5))}=20$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{100}{(0.1s+1)(s+5))}=0$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=\lim_{s\to 0}s^2\frac{100}{(0.1s+1)(s+5))}=0$$

若$r(t)=2t$，则有：

$$e_{ss}(\infty)=\frac{2}{K_v}=\infty$$

若$r(t)=2+2t+t^2$，则有：

$$e_{ss}(\infty)=\frac{2}{1+K_p}+\frac{2}{K_v}+\frac{2}{K_a}=\infty$$

(2)

$$G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

根据系统的开环传递函数，判定该系统为I型系统，则有：

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = 10$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{s \to 0} s^2\frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = 0$$

若$r(t) = 2t$，则有：

$$e_{ss}(\infty) = \frac{2}{K_v} = 0.2$$

若$r(t) = 2 + 2t + t^2$，则有：

$$e_{ss}(\infty) = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{2}{K_a} = \infty$$

(3)

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+10)}$$

根据系统的开环传递函数，判定该系统为II型系统，则有:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+10)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+10)} = \infty$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \lim_{s\to 0} s^2\frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+10)} = 1$$

若$r(t) = 2t$, 则有：

$$e_{ss}(\infty) = \frac{2}{K_v} = 0$$

若$r(t) = 2 + 2t + t^2$, 则有:

$$e_{ss}(\infty) = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{2}{K_a} = 2$$

(1) 当$F_1(s)$单独作用时，令$F_2(S)=R(s)=0$. 则误差的闭环传递函数为:

$$\Phi_{EF1}(s)=\frac{E(s)}{F_1(s)}=\frac{-G_1G_2}{1+G_1G_2G_3} \quad \Rightarrow \quad E(s)=\frac{-G_1G_2}{1+G_1G_2G_3}F_1(s)$$

已知:

$$F_1(s)=\frac{1}{s}$$

根据终值定理，稳态误差为:

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-G_1G_2}{1+G_1G_2G_3}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{-K_2(\tau s+1)}{(T_2s+1)}\cdot\frac{K_3}{s(T_3s+1)}}{1+\frac{K_1K_2K_3(\tau s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}}=-\frac{1}{K_1}=-1/5=-0.2$$

(2) 当$F_2(s)$单独作用时，令$F_1(S)=R(s)=0$. 则误差的闭环传递函数为:

$$\Phi_{EF2}(s)=\frac{E(s)}{F_2(s)}=\frac{-G_3}{1+G_1G_2G_3} \quad \Rightarrow \quad E(s)=\frac{-G_3}{1+G_1G_2G_3}F_2(s)$$

已知:

$$F_2(s)=\frac{1}{s}$$

根据终值定理，稳态误差为:

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-G_3}{1+G_1G_2G_3}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{-K_3}{s(T_3s+1)}}{1+\frac{K_1K_2K_3(\tau s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}}=-\frac{1}{K_1K_2}=-1/(5*10)=-0.02$$

单位负反馈系统的闭环特征方程为开环传递函数的分子多项式与分母多项式之和，则得到系统的特征方程:

$$(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)+K_o=0$$

$$\Rightarrow \quad s^4+12s^3+69s^2+198s+200+K_o=0$$

根据劳斯稳判，列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 69 & 200+K_o \\ s^3 & 12 & 198 & 0 \\ s^2 & 52.5 & 200+K_o & \\ s^1 & \frac{52.5\times198-12(200+K_o)}{52.5} & & \\ s^0 & 200+K_o & & \end{array}$$

系统发生持续振荡，则处于临界稳定状态，劳斯表有全0行，闭环极点为纯虚根。

即满足$\frac{52.5\times198-12(200+K_o)}{52.5}=0$，则有$K_o=666.25$.

列写辅助方程: $52.5s^2+200+K_o=0 \quad \Rightarrow \quad 52.5s^2+866.25=0$ (1)

闭环极点为纯虚根，即令$s=\pm j\omega$ 代入上述方程(1)，

求出振荡频率$\omega=4.06rad/s$.

解题思路：利用劳斯稳判来求解。
(a)系统为多反馈回路系统，主反馈为单位反馈，则首先确定系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{s+1}{s}\cdot\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+2s\cdot\frac{10}{s(s+1)}}=\frac{10(s+1)}{s^2(s+21)}$$

从系统框图得知，主反馈为单位负反馈，则系统特征方程式为$G(s)$的分子加分母，即有：

$$s^2(s+21)+10(s+1)=s^3+21s^2+10s+10=0$$

根据劳斯稳判，列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 21 & 10 \\ s^1 & \frac{200}{21} & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素均为正数，则系统稳定。

解题思路：利用劳斯稳判来求解。
(b) 首先求系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+(10s+1)\cdot\frac{10}{s(s+2)}}=\frac{10}{s^2+102s+10}$$

则系统特征方程式为：

$$s^2+102s+10=0$$

根据劳斯稳判，列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & 102 & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素均为正数，则系统稳定。

系统主反馈为单位反馈，则首先确定系统的开环传递函数：

$$G(s)=(1+\frac{K_1}{s})\cdot\frac{{\omega_n}^2}{s(s+2\xi\omega_n)}=\frac{{\omega_n}^2(s+K_1)}{s^2(s+2\xi\omega_n)}$$

主反馈为单位负反馈，则系统特征方程式为$G(s)$的分子加分母，即有：

$$s^2(s+2\xi\omega_n)+{\omega_n}^2(s+K_1)=s^3+2\xi\omega_n s^2+{\omega_n}^2 s+{\omega_n}^2 K_1=0$$

又已知$\omega_n=86.6rad/s$, $\xi=0.2$，代入上式特征方程得：

$$s^3+34.64s^2+7499.56s+7499.56K_1=0$$

根据劳斯稳判，列写劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 7499.56 \\ s^2 & 34.64 & 7499.56K_1 \\ s^1 & \frac{7499.56\times34.64-7499.56K_1}{34.64} & \\ s^0 & 7499.56K_1 & \end{array}$$

系统要满足稳定性，则劳斯表第一列元素均为正数，即满足：

$\frac{7499.56\times34.64-7499.56K_1}{34.64}>0$，及$K_1>0$。

则有：$0<K_1<34.64$.

(1) 系统为多反馈回路系统，主反馈为单位反馈，则首先确定系统的开环传递函数:

$$G(s)=K_1\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{K_2}{s}}{1+\frac{K_2\beta}{s}}=\frac{K_1K_2}{s^2+K_2\beta s}$$

单位反馈的系统闭环传递函数为:

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K_1K_2}{s^2+K_2\beta s+K_1K_2}=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

则有${\omega_n}^2=K_1K_2$，$2\xi\omega_n=K_2\beta$。$\xi=\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$

由$\beta\geq 0$，分下述情况讨论：

1)若$\beta=0$，则$\xi=0$，系统处于无阻尼情况，系统发生振荡，不稳定。

2)若$0<\beta<2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，则$0<\xi<1$，系统处于欠阻尼情况，系统稳定。

3)若$\beta=2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，则$\xi=1$，系统处于临界阻尼情况，系统稳定。

4)若$\beta>2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，则$\xi>1$，系统处于过阻尼情况，系统稳定。

此外，已知特征方程$s^2+K_2\beta s+K_1K_2=0$，

可解出系统特征根为：$s_{1,2}=\frac{-\beta K_2\pm\sqrt{\beta^2K_2^2-4K_1K_2}}{2}$

若$\beta\uparrow$，则特征根离虚轴越远，系统稳定性越强。

(2-1) 当$0 < \beta < 2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，$0 < \xi < 1$时，对于欠阻尼二阶系统，动态性能指标$\sigma\%$及$t_s$的计算公式为:

$$\sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \qquad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}(\Delta = 0.05)$$

1) 超调量$\sigma\%$仅与阻尼系数ξ有关，且$\xi\uparrow$，$\sigma\%\downarrow$。
又根据上述计算式$\xi = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，
当参数K_1, K_2一定时，若$\beta\uparrow$，则$\xi\uparrow$，即有$\sigma\%\downarrow$。
2) 调整时间t_s与$\xi\omega_n$成反比。
由上述计算可知，$2\xi\omega_n = K_2\beta$，即有$\xi\omega_n = 0.5K_2\beta$。
当参数K_2 一定时，若$\beta\uparrow$，则$\xi\omega_n\uparrow$，即有$t_s\downarrow$。

(2-1) 当$\beta \geq 2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$，$\xi \geq 1$时，系统由临界阻尼向过阻尼状态过渡。系统不存在超调，且随着阻尼系数$\xi\uparrow$，$t_s\uparrow$，即有$\beta\uparrow$，$t_s\uparrow$。

(3)由上述计算得知，系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K_1K_2}{s^2 + K_2\beta s} = \frac{K_1K_2}{s(s + K_2\beta)}$$

系统为I型系统，若输入信号$r(t) = at$, 则可计算静态速度误差系数:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K_1K_2}{s(s + K_2\beta)} = \frac{K_1}{\beta}$$

则有系统的稳态误差:

$$e_{ss}(\infty) = \frac{a}{K_v} = \frac{a\beta}{K_1}$$

当参数K_1一定时，若$\beta\uparrow$, 则$e_{ss}(\infty)\uparrow$。

图3-38所示系统为恒速系统，且$N_r(s)$为给定转速，则系统输入为阶跃信号。设$N_r(s)=\frac{A}{s}$, $M_c(s)=\frac{B}{s}$, 其中A,B=常数，表示信号强度。
首先，计算系统在扰动输入$M_c(s)$下的误差闭环传递函数(令$N_r(s)=0$).

$$\Phi_{EM}(s)=\frac{E(s)}{M_c(s)}=\frac{-\frac{1}{Js}}{1+G(s)\cdot\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{Js}}$$

$$\Rightarrow\quad E(s)=\frac{-\frac{1}{Js}}{1+G(s)\cdot\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{Js}}\cdot\frac{B}{s}$$

(1) 若采用比例调节器，即$G(s)=K_p$, 则控制系统对于给定输入是I型系统，由终值定理得：

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{-\frac{1}{Js}}{1+K_p\cdot\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{Js}}\cdot\frac{B}{s}=-\frac{B}{K_p}$$

此时误差不为零，因此，不能仅采用比例调节器。

(2) 要消除误差必须同时提高放大系统和系统型别，则选用比例-积分调节器，即$G(s)=K_p(1+\frac{1}{T_is})$。由终值定理得：

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\frac{1}{Js}}{1+K_p(1+\frac{1}{T_is})\cdot\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{Js}}\cdot\frac{B}{s}=0$$

此时稳态误差调节为0，系统型别提高为II型系统。

解题思路: 图示系统采用的是按输入补偿的复合控制方式，增加从输入$R(s)$ 到$E(s)$ 的前馈通路来消除误差。

补偿之前(即$K_b=0$)，输入$R(s)$到$E(s)$ 的前馈通路仅有一条(图示中为一条信号流线)，补偿后增加了一条输入$R(s)$到$E(s)$ 的前馈通路，即从$R(s)$出发按照信号流线的方向，经过$\frac{K_b s}{\tau s+1}$ 环节，再经过$\frac{K_1}{s(Ts+1)}$环节，最后通过单位负反馈到达$E(s)$。

补偿前后误差闭环传递函数的分子改变，选取适当的参数K_b，可以消除稳态误差。

(注：题目有问题，需输入改成单位斜坡信号，$r(t)=n(t)=t$)

控制作用和扰动同时作用时，用线性叠加原理计算总误差。

(1) 当$R(s)=\frac{1}{s^2}$作用时(令扰动$N(s)=0$)，此时控制作用产生的误差为$E_R(s)$，则控制作用下的误差闭环传递函数为：

$$\Phi_{ER}(s)=\frac{E_R(s)}{R(s)}=\frac{1-\frac{K_b s}{\tau s+1}\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}\quad\Rightarrow\quad E_R(s)=\frac{1-\frac{K_b s}{\tau s+1}\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}$$

(2) 当$N(s)=\frac{1}{s}$作用时(令控制$R(s)=0$)，此时扰动作用产生的误差记为$E_N(s)$，则扰动作用下的误差闭环传递函数为：

$$\Phi_{EN}(s)=\frac{E_N(s)}{N(s)}=\frac{-\frac{K_2}{\tau_2 s+1}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}} \quad\Rightarrow\quad E_N(s)=\frac{-\frac{K_2}{\tau_2 s+1}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}$$

(3) 利用线性系统的叠加原理，得到总误差为：

$$E(s)=E_R(s)+E_N(s)=\frac{1-\frac{K_b s}{\tau s+1}\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{-\frac{K_2}{\tau_2 s+1}}{1+K_3\cdot\frac{K_1}{s(T_1 s+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}$$

由终值定理得：

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1-K_bK_1}{K_1K_3}+0=\frac{1-K_bK_1}{K_1K_3}=0$$

解得：$K_b=\frac{1-K_2}{K_1}$.