自控原理习题解答第四章

侯一凡

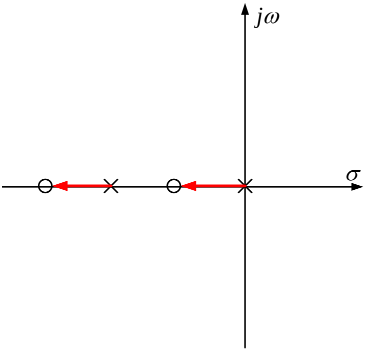
yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

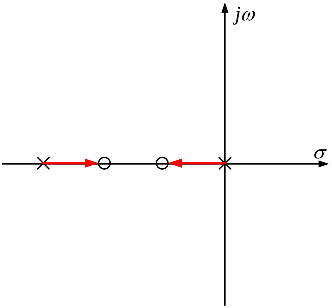
2014

解题思路：
根轨迹分支数等于开环极点个数，始于开环极点，止于开环零点；
实轴上的根轨迹是右侧开环实数极点及零点个数和为奇数的线段；
相邻的开环极点之间有根轨迹，则必存在分离点；
相邻的开环零点之间存在根轨迹，则必存在汇合点。

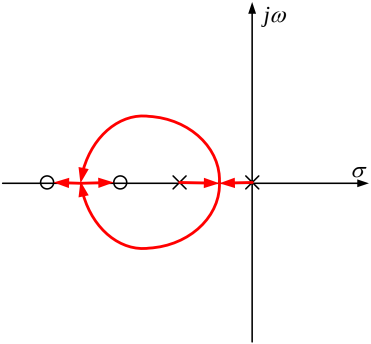
(1) 系统有两个开环极点，两个开环零点，则根轨迹有两条分支，且从开环极点指向开环零点。根轨迹如右图所示。



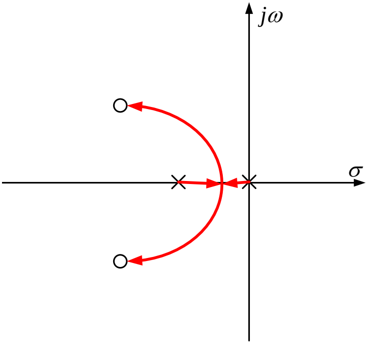
(2) 系统有两个开环极点，两个开环零点，则根轨迹有两条分支，且从开环极点指向开环零点，根轨迹如右图所示。



(3) 系统有两个开环极点，两个开环零点，则根轨迹有两条分支。
相邻的开环极点之间有根轨迹，则必存在分离点；
相邻的开环零点之间存在根轨迹，则必存在汇合点。
分离点是即将从实数变为共轭复数，汇合点是极点从共轭复数变成实数。
则根轨迹如右图所示。



(4) 系统有两个开环极点，两个开环复数零点，则根轨迹有两条分支，且存在开环复数零点，则根轨迹以一定的入射角终止于零点。
实轴上相邻的开环极点之间存在根轨迹，则必然存在分离点，此时闭环极点从实数变成共轭复数，终止于开环复数零点。根轨迹如右图所示。



已知单位负反馈系统开环传递函数:

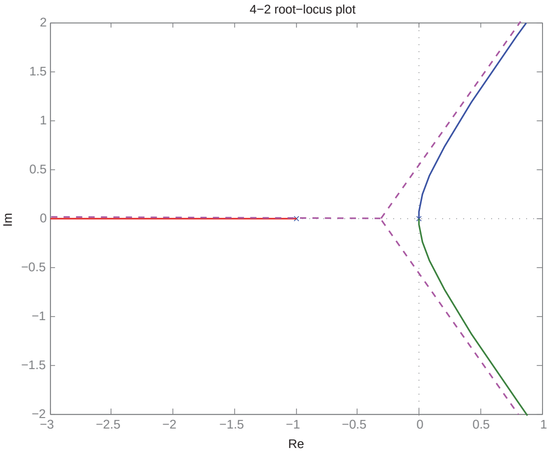
$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$$

解：开环极点三个：$p_1 = p_2 = 0$，$p_3 = -1$，系统无开环零点。
(1) 根轨迹有三条分支，连续且对称实轴。
(2) 根轨迹起始于$(0, j0)$, $(-1, j0)$点，三条均终止于无穷远处。
(3) 渐近线有三条，交于实轴一点，交点坐标与交角计算如下：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i) - \sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m} = -\frac{1}{3}$$

$$\phi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} 60^\circ & l = 0 \\ 180^\circ & l = 1 \\ -60^\circ & l = 2 \end{cases}$$

(4)实轴上的根轨迹是区域$(-\infty, -1]$.
(5)分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} = 0$
 $\Rightarrow d_1 = 0$，$d_2 = -\frac{2}{3}$(d_2不在根轨迹上，舍去)
(6)跟虚轴无交点。



注意：原点处根轨迹分离点处角度，可参见教材P92实轴上分离点的分离角会合角法则。

实轴上的根轨迹离开分离点时，根轨迹切线的方向角成为分离角，恒为±90°，会合角也恒为±90°。

已知开环传递函数：

$$G(s) = \frac{K_o}{s(s^2+2s+5)}$$

根轨迹绘制步骤如下：
三个开环极点：$p_1 = 0$，$p_2 = -1+2j$，$p_3 = -1-2j$，无开环零点。
(1) 根轨迹有3条分支，连续且对称实轴；
(2) 根轨迹起始于$(0, j0)$, $(-1, 2j)$, $(-1, -2j)$点，均终止于无穷远处；
(3) 渐近线3条，交点坐标与交角计算如下：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i) - \sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m} = -\frac{2}{3}$$

$$\phi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} 60^\circ & l=0 \\ 180^\circ & l=1 \\ -60^\circ & l=2 \end{cases}$$

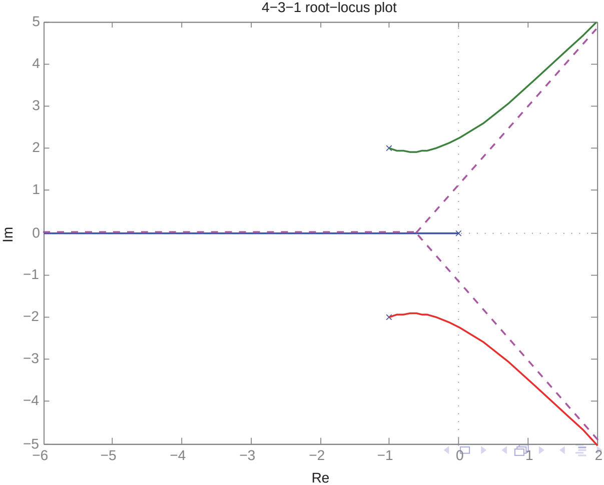
(4)实轴上的根轨迹是区域$(-\infty, 0]$.
(5)虚轴交点：$f(s) = s^3+2s^2+5s+K_o = 0$ (令$s = j\omega$)
$\Rightarrow \quad -j\omega^3 - 2\omega^2 + j5\omega + K_o = 0$，解得：$\omega = \pm\sqrt{5}$, $K_o = 10$.

(6) 出射角计算:

$\theta_{p_2}=180^\circ-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)=180^\circ-(180^\circ-\arctan 2)-90^\circ=-26.6^\circ$

$\theta_{p_3}=-\theta_{p_2}=26.6^\circ$

4-3-1根轨迹如下图:



已知开环传递函数:

$$G(s)=\frac{K_o(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

根轨迹绘制步骤如下:
该系统含有4个开环极点和1个开环零点: $p_1=p_2=0$, $p_3=-2$, $p_4=-4$, $z_1=-1$。
(1) 根轨迹有3条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹起始于$(0,j0)$, $(-2,j0)$, $(-4,j0)$点，终止于$(-1,j0)$, 其余3条终止于无穷远处;
(3) 渐近线3条，交点坐标与交角计算如下:

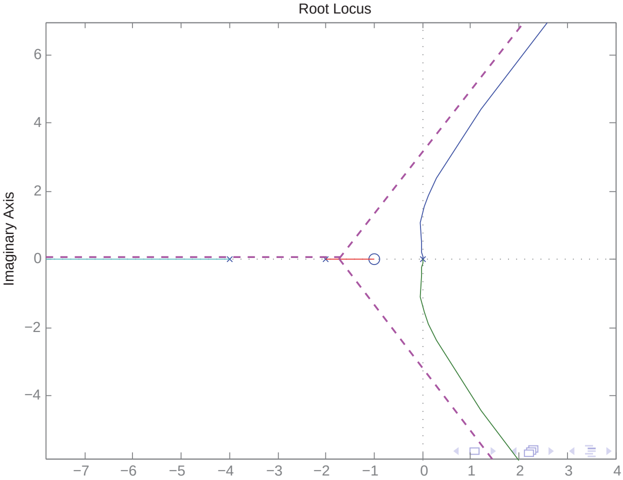
$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i)-\sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m}=-\frac{5}{3}$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}60^\circ & l=0\\ 180^\circ & l=1\\ -60^\circ & l=2\end{cases}$$

(4)实轴上的根轨迹是区域$(-\infty,-4]$, $[-2,-1]$.

(5)虚轴交点: $f(s) = s^4 + 6s^3 + 8s^2 + K_o s + K_o = 0$ (令$s = j\omega$)
$\Rightarrow \quad \omega^4 - j6\omega^3 - 8\omega^2 + jK_o\omega + K_o = 0$
解得: $\omega = \pm\sqrt{2},\ K_o = 12.$

4-3-2根轨迹如下图:



已知开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K_o}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

根轨迹绘制步骤如下:

该系统含有4个开环极点: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, $p_4 = -5$。

(1) 根轨迹有3条分支,连续且对称实轴;

(2) 根轨迹起始于$(0, j0)$, $(-1, j0)$, $(-2, j0)$, $(-5, j0)$点,终止于无穷远;

(3) 渐近线4条,交点坐标与交角计算如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i) - \sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m} = -\frac{8}{3}$$

$$\phi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} 45^\circ & l = 0 \\ 135^\circ & l = 1 \\ 225^\circ & l = 2 \\ -45^\circ & l = 3 \end{cases}$$

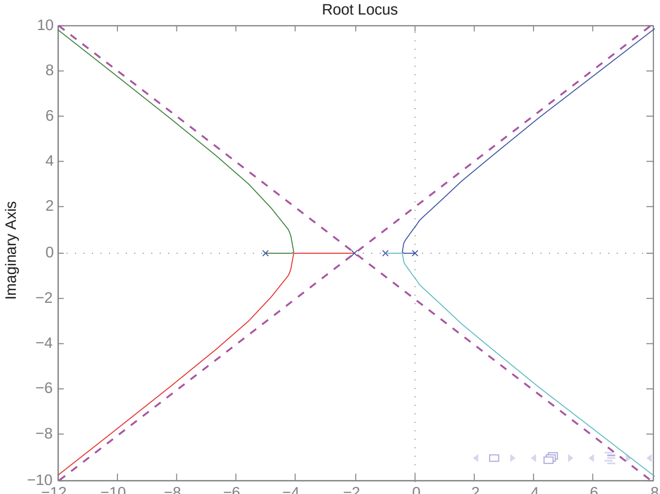
(4)实轴上的根轨迹是区域$[-5, -2]$, $[-1, 0]$.

(5)分离点：$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+5}=0$

$\Rightarrow\ s_1=-0.4, s_2=-4.06, s_3=-1.54$（$s_3$不在根轨迹上，舍去）

(6)虚轴交点：$f(s)=s^4+8s^3+17s^2+10s+K_o=0$ (令$s=j\omega$)

$\Rightarrow\ \omega^4-j8\omega^3-17\omega^2+j10\omega+K_o=0$，解得：$\omega=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，$K_o=19.7$。



已知单位负反馈系统开环传递函数:

$$G(s)=\frac{K(s+a)}{s^2(s+1)}\quad(0<a<1)$$

解: 系统有开环极点三个: $p_1=p_2=0$，$p_3=-1$，系统开环零点$z_1=-a\in(0,-1)$。
(1) 根轨迹有三条分支，连续且对称实轴。
(2) 根轨迹起始于$(0,j0)$, $(-1,j0)$点，1条终止于$(-a,j0)$点，其余2条均终止于无穷远处。
(3) 渐近线有2条，交于实轴一点，交点坐标与交角计算如下:

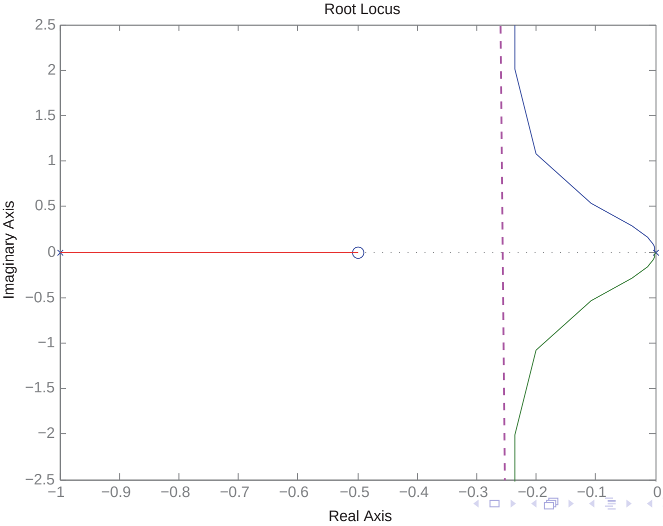
$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i)-\sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m}=-\frac{1-a}{2}=\frac{a-1}{2}\in(-\frac{1}{2},0)$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}90^\circ & l=0\\ -90^\circ & l=1\end{cases}$$

(4)实轴上的根轨迹是区域$[-1,-a]$.
(5)无分离点，且与虚轴无交点。

相比4-2题，系统增加一个负实数零点后，系统根轨迹全部在[s]平面的左半平面，系统稳定。

取$a=0.5$时，绘制4-4根轨迹如下图：



已知单位负反馈系统开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}$$

根轨迹绘制步骤如下：
该系统含有2个开环极点和1个开环零点: $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $z_1 = -4$。
(1) 根轨迹有2条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹始于$(0, j0)$, $(-2, j0)$点，1条终止于$(-4, j0)$点，1条终止于无穷远处；
(3) 渐近线1条，为负实轴。
(4) 实轴上的根轨迹是区域$(-\infty, -4]$，$[-2, 0]$。
(5) 实轴上存在分离点和汇合点，坐标计算如下：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s(0.5s+1)}{0.25s+1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 8s + 8 = 0$$

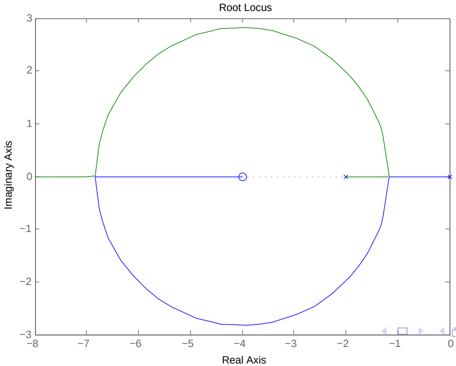
$\Rightarrow S_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2} \ \Rightarrow \ s_1 = -6.83$ (汇合点)，$s_2 = -1.17$ (分离点)。

系统无超调量时，闭环极点均为负实数，则根据幅值条件，代入分离点与汇合点坐标得：

$$|G(s)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K(0.25 \times (-1.17) + 1)}{1.17 \times (0.5 \times (-1.17) + 1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 0.69$$

$$|G(s)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K(0.25 \times (-6.83) + 1)}{6.83 \times (0.5 \times (-6.83) + 1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 23.3$$

即：$0 < K < 0.69$ 或$K > 23.3$.



已知单位负反馈系统的闭环特征方程：$s^3+3s^2+(K_o+2)s+10K_o=0$，则系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_o(s+10)}{s^3+3s^2+2s}=\frac{K_o(s+10)}{s(s+1)(s+2)}$$

该系统含有3个开环极点$p_1=0$，$p_2=-1$，$p_3=-2$，1个开环零点$z_1=-10$。
(1) 根轨迹有3条分支，连续且对称实轴；
(2) 根轨迹起始于$(0,j0)$，$(-1,j0)$，$(-2,j0)$点，1条终止于$(-10,j0)$点，其余2条终止于无穷远处；
(3) 渐近线2条，交点坐标与交角计算如下：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i)-\sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m}=\frac{7}{2}=3.5$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}90^\circ & l=0\\ -90^\circ & l=1\end{cases}$$

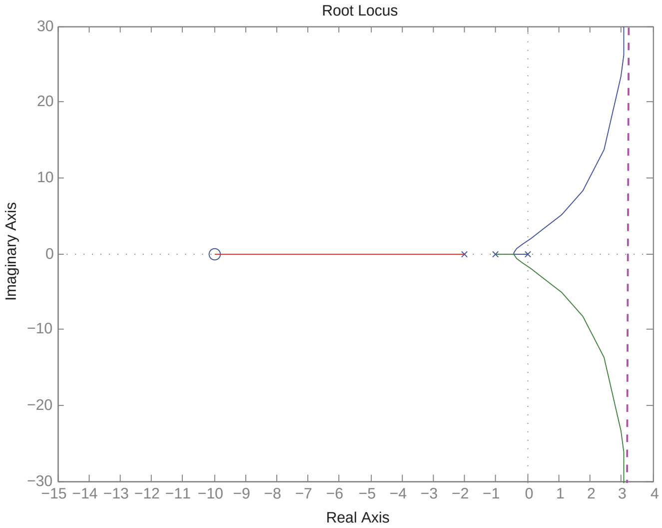
(4)实轴上的根轨迹是区域$[-10,-2]$, $[-1,0]$。

(5)分离点坐标:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s(s+1)(s+2)}{s+10}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2s^3+33s^2+60s+20=0$$

$\Rightarrow\ s_1=-0.43, s_2=-1.6, s_3=-14.5$ (s_2,s_3不在根轨迹上，舍掉)
(6)与虚轴的交点坐标: $f(s)=s^3+3s^2+(K_o+2)s+10K_o=0$
$\Rightarrow\quad -j\omega^3-3\omega^2+j(2+K_o)10\omega+10K_o=0$
解得: $\omega=\sqrt{20/7}=\pm1.69$，$K_o=6/7=0.86$。
系统稳定，则$0<K_o<0.86$。

4-8根轨迹如下图:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
30
20
10
0
−10
−20
−30
−15 −14 −13 −12 −11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

已知开环传递函数：

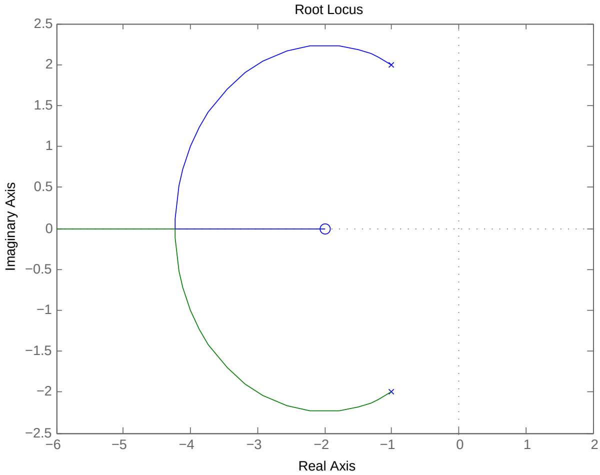
$$G(s)=\frac{K(s+2)}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

根轨迹绘制步骤如下:
该系统含有2个开环极点和1个开环零点:
$p_1=-1+2j$, $p_2=-1-2j$, $z_1=-2$。
(1) 根轨迹有2条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹起始于$(-1,2j)$, $(-1,-2j)$点，1条终止于$(-2,j0)$点, 1条终止于无穷远处;
(3) 渐近线1条，为负实轴。
(4)实轴上的根轨迹是区域$(-\infty,-2]$.
(5)实轴上存在汇合点，坐标计算如下:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{(s+1)^2+4}{s+2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad s^2+4s-1=0$$

$\Rightarrow \quad s_1=-4.24$, $s_2=0.24$ (不在根轨迹上，舍去)
(6) 出射角计算:
$\theta_{p_1}=180^\circ+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)=180^\circ+\arctan 2-90^\circ=153.4^\circ$
$\theta_{p_2}=-153.4^\circ$

4-10-1根轨迹如下图:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2

已知开环传递函数:

$$G(s)=\frac{K(s+20)}{s(s+10+10j)(s+10-10j)}$$

根轨迹绘制步骤如下:
该系统含有3个开环极点和1个开环零点:
$p_1=0$, $p_2=-10+10j$, $p_3=-10-10j$, $z_1=-20$。
(1) 根轨迹有3条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹起始于$(0,j0)$, $(-10,10j)$, $(-10,-10j)$点，1条终止于$(-20,j0)$点, 2条终止于无穷远处;
(3) 渐近线2条，交点坐标与交角计算如下:

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i)-\sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m}=\frac{0}{2}=0$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}90^\circ & l=0\\ -90^\circ & l=1\end{cases}$$

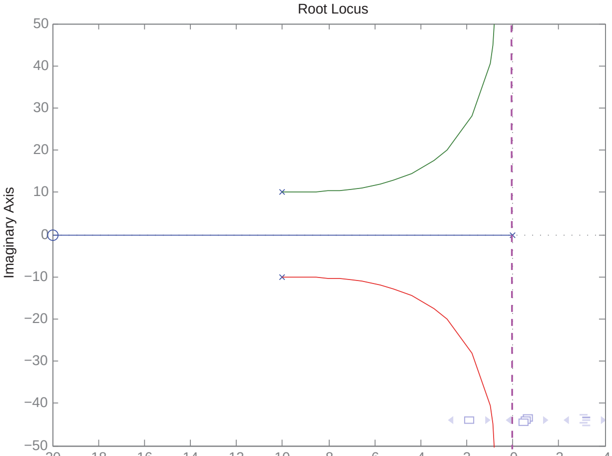
(4)实轴上的根轨迹是区域$[-20,0]$.
(5)无分离点及汇合点。

(6) 出射角计算:

$\theta_{p_2} = 180^\circ + \angle(p_2 - z_1) - \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) =$
$180^\circ + \arctan 1 - (180^\circ - \arctan 1) - 90^\circ = 0^\circ$

$\theta_{p_3} = 0^\circ$

4-10-2根轨迹如下图:



已知开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

根轨迹绘制步骤如下:
该系统含有3个开环极点和1个开环零点:
$p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = -3,\ z_1 = -2$。
(1) 根轨迹有3条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹起始于$(0, j0)$, $(-1, j0)$, $(-3, j0)$点，1条终止于$(-2, j0)$点，2条终止于无穷远处;
(3) 渐近线2条，交点坐标与交角计算如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i) - \sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m} = \frac{-1-3+2}{2} = -1$$

$$\phi_a = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} 90^\circ & l=0 \\ -90^\circ & l=1 \end{cases}$$

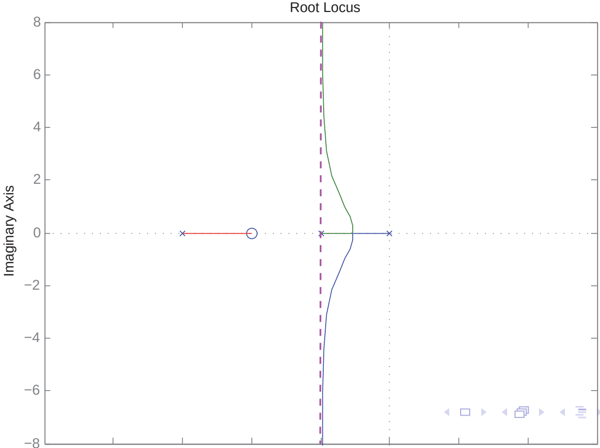
(4)实轴上的根轨迹是区域$[-3,-2]$, $[-1,0]$.

(5)分离点计算:

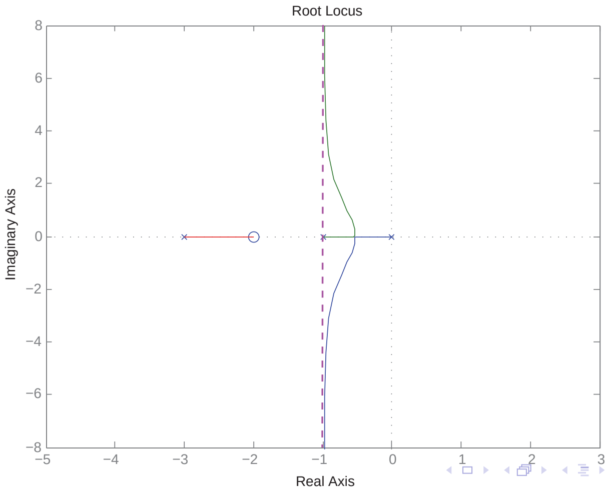
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s(s+1)(s+3)}{s+2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad s^3+5s^2+8s+3=0$$

$$\Rightarrow \quad s_1=-0.53,\ s_2=-0.8+2.6j,\ s_3=-0.8-2.6j$$

分离点坐标是实数，则s_2和s_3舍掉。



阻尼系数$\xi = cos\phi = 0.5$，$\phi = 60^\circ$，此时设共轭复数极点为$s_{1,2} = \sigma \pm \sqrt{3}\sigma j$。将$s_1$带入闭环系统特征方程，可得
$s_1(s_1+1)(s_1+3)+K(s_1+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0.68$，$K = 2.45$。
此时闭环系统的主导极点为$s_{1,2} = -0.68 \pm 1.18j$，$K = 2.45$。



解题思路:
正反馈回路根轨迹的幅值条件与负反馈一样，但相角条件变为:
$\angle G(s)H(s) = \pm 2k\pi, k = 0, 1, \cdots$。
因此，在绘制实轴上根轨迹、渐近线夹角及出射角与入射角计算条件改变了，其余规则跟负反馈系统绘制完全相同。

已知开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_o(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

根轨迹绘制步骤如下:
该系统含有4个开环极点和1个开环零点:
$p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = -2$, $p_4 = -4$, $z_1 = -1$。
(1) 根轨迹有4条分支，连续且对称实轴;
(2) 根轨迹起始于$(0, j0)$, $(-2, j0)$, $(-4, j0)$点，1条终止于$(-1, j0)$点，3条终止于无穷远处;

(3) 渐近线3条，交点坐标与交角计算如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i) - \sum_{j=1}^{m}(z_j)}{n-m} = \frac{-2-4+1}{3} = -\frac{5}{3}$$

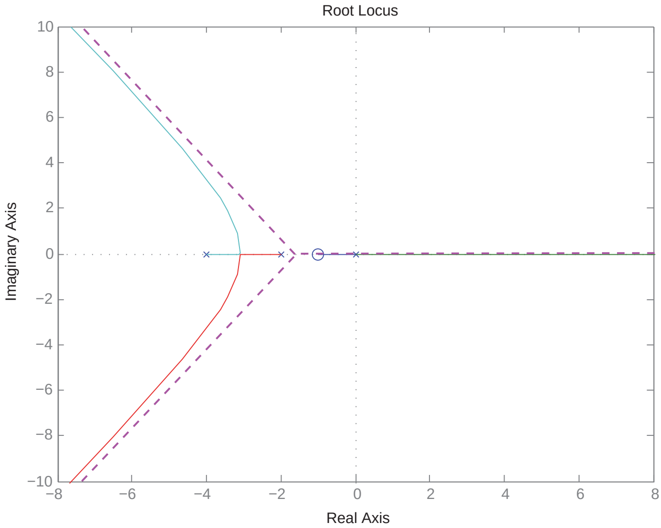
$$\phi_a = \frac{2l\pi}{n-m} = \begin{cases} 0^\circ & l=0 \\ 120^\circ & l=1 \\ -120^\circ & l=2 \end{cases}$$

(4)实轴上的根轨迹是区域$[-4,-2]$, $[-1,0]$, $[0,+\infty)$.
(5)分离点计算:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+1}$$

$$\Rightarrow \quad s_2 = -3.1$$

4-15根轨迹如下图:


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8