自控原理习题解答第七章

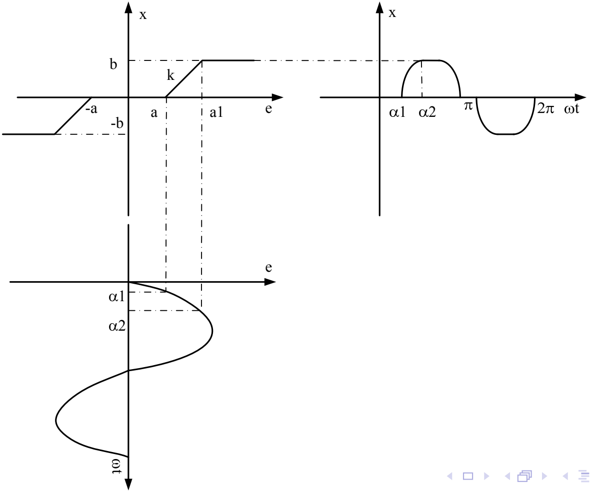
侯一凡

yfhou@xidian.edu.cn

《自动控制原理》

2014

(1) 从图中得知该非线性特性环节是具有死区的饱和特性，
设$e(t) = A\sin\omega t$，且令$\alpha_1 = \arcsin\frac{a}{A}$，$\alpha_2 = \arcsin\frac{a1}{A} = \arcsin\frac{b-ka}{Ak}$，
$b = k(a1 - a)$. 系统正弦输入信号e(t)，非线性特性$x(e)$及$x(t)$ 的曲线图
如下所示:



死区饱和非线性环节的数学表达式$x(t)$为:

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le \omega t\le \alpha_1\\ k[A\sin\omega t-a] & \alpha_1<\omega t\le \alpha_2\\ b & \alpha_2<\omega t\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

该特性为单值奇函数，所以根据定义得: $A_0=A_1=\phi_0=0$, 且$x(t)$在半周期内对称，则输出$x(t)$的基波分量为$x(t)=B_1\sin\omega t$, 其中:

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin\omega t d(\omega t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(t)\sin\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{4}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}k[A\sin\omega t-a]\sin\omega t d(\omega t)+\int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}b\sin\omega t d(\omega t)]$$

$$=\frac{4k}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}[A(\sin\omega t)^2-a\sin\omega t]d(\omega t)+\int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}(a1-a)\sin\omega t d(\omega t)]$$

$$=\frac{4k}{\pi}[A(\frac{\omega t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\omega t)|_{\alpha_1}^{\alpha_2}+a\cos\omega t|_{\alpha_1}^{\alpha_2}-(a1-a)\cos\omega t|_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}]$$

续上式计算:

$$B_1=\frac{4k}{\pi}[\frac{A}{2}(\alpha_2-\alpha_1)-\frac{A}{4}\sin 2\alpha_2+\frac{A}{4}\sin 2\alpha_1+a\cos\alpha_2-a\cos\alpha_1+(a1-a)\cos\alpha_2]$$

$$=\frac{4k}{\pi}[\frac{A}{2}(\arcsin\frac{a1}{A}-\arcsin\frac{a}{A})-\frac{A}{2}\frac{a1}{A}\sqrt{1-(\frac{a1}{A})^2}+\frac{A}{2}\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}+a1\cos\alpha_2-a\cos\alpha_1]$$

$$=\frac{4k}{\pi}[\frac{A}{2}(\arcsin\frac{a1}{A}-\arcsin\frac{a}{A})-\frac{A}{2}\frac{a1}{A}\sqrt{1-(\frac{a1}{A})^2}+\frac{A}{2}\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}$$

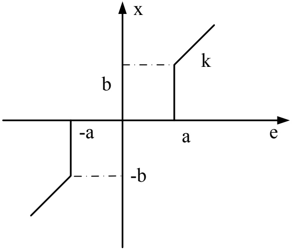
$$+a1\sqrt{1-(\frac{a1}{A})^2}-a\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

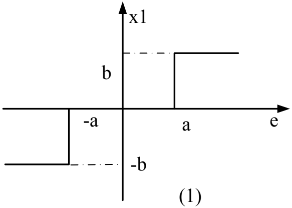
$$=\frac{2kA}{\pi}[\arcsin\frac{a1}{A}-\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a1}{A}\sqrt{1-(\frac{a1}{A})^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

代入$a1=\frac{b-ak}{k}$, 整理得:

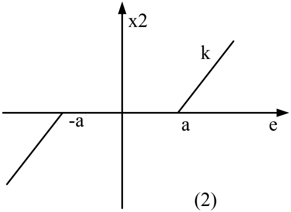
$$N(A)=\frac{B_1}{A}=\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{b-ak}{Ak})-\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{b-ak}{Ak}\sqrt{1-(\frac{b-ak}{Ak})^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

(2) 从图中得知该非线性特性环节由下列两个非线性环节并联得到(即具有死区的继电器特性和死区特性)，其输出特性图如下图所示:





(1)



(2)

根据非线性系统的并联化简得知,系统的描述函数等于这两个非线性环节描述函数的叠加，即$N(A) = N_1(A) + N_2(A)$.

具有死区的继电器特性和死区特性的输出表达式为:

$$x_1(t)=\begin{cases}0 & 0<\omega t\le\alpha_1\\ b & \alpha_1\le\omega t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad x_2(t)=\begin{cases}0 & 0<\omega t\le\alpha_1\\ k[A\sin\omega t-a] & \alpha_1\le\omega t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

则可分别求取其描述函数$N_1(A)$和$N_2(A)$, 两个特性均为单值奇函数，所以根据定义得: $A_0=A_1=\phi_0=0$, 则输出$x_1(t)$ 的基波分量为$x_1(t)=B_1\sin\omega t$, 其中:

$$B_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x_1(t)\sin\omega t d(\omega t)=\frac{4}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}b\sin\omega t d(\omega t)]=\frac{4b}{\pi}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}$$

整理得:

$$N_1(A)=\frac{B_1}{A}=\frac{4b}{A\pi}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}$$

同理得$N_2(A)=k-\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$

$$N(A)=N_1(A)+N_2(A)=\frac{4b}{A\pi}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}+k-\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

详细求解$N_2(A)$:

$x_2(t) = B_2 \sin \omega t$，其中:

$$B_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x_2(t)\sin \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} k[A\sin \omega t - a]\sin \omega t d(\omega t)]$$

根据三角函数的化简公式得:

$$= \frac{4k}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} A\sin(\omega t)^2 d(\omega t) - \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} a\sin(\omega t)d(\omega t)]$$

$$= \frac{4k}{\pi}[\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} A\frac{1-\cos 2\omega t}{2}d(\omega t) - a\cos\alpha_1]$$

$$= \frac{2Ak}{\pi}[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 2\alpha_1) - \frac{2a}{A}\cos\alpha_1]$$

$$= \frac{2Ak}{\pi}[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \sin\alpha_1\sqrt{1-\sin\alpha_1^2} - \frac{2a}{A}\sqrt{1-\sin\alpha_1^2}] = \frac{2Ak}{\pi}[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{a}{A}) - \frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

$$N_2(A) = \frac{B_2}{A} = \frac{2k}{\pi}[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{a}{A}) - \frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]$$

由题意可知，非线性环节为具有饱和放大器特性，则其描述函数为:

$$N(A)=\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]\quad A\geq a$$

因为$a=1,k=1$,则

$$N(A)=\frac{2}{\pi}[\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{1}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}]\quad A\geq 1$$

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi}{2\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{2}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2})}\quad A\geq 1$$

由上式可知，描述函数的负倒数特性起始于$(-1,j0)$点，并随着幅值A的增大沿着负实轴向左移动，趋向负无穷。

已知$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$，则:

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(0.5j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$

$$\phi(\omega)=-90^\circ-\arctan 0.5\omega-\arctan 0.2\omega=-180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 0.5\omega+\arctan 0.2\omega=90^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{0.5\omega+0.2\omega}{1-0.5\omega\times 0.2\omega}=\infty$$

$$\Rightarrow \quad \omega=\sqrt{10}$$

系统处于临界稳定状态时，对应K值应满足下式(代入$\omega=\sqrt{10}$)

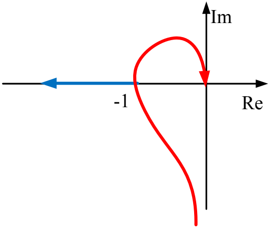
$$|G(j\omega)|=\frac{K}{\omega\sqrt{(0.5\omega)^2+1}\sqrt{(0.2\omega)^2+1}}=1$$

$$\Rightarrow \quad K=7$$

(2) 描述函数的负倒数特性曲线与$G(j\omega)$的频率特性曲线相交于负实轴一点$(-\frac{K}{7}, j0)$,
当$K=10$ 时，在交点处有自持振荡，其振荡频率$\omega=\sqrt{10}$, 振幅A 由下式求得。

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi}{2\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{2}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}}=-\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow \quad A=1.72$$



注意: 从上式得: $N(A)=0.7$, 且有$k=1, a=1$, 则由饱和非线性元件的描述函数曲线得知应变量$\frac{N(A)}{k}=0.7$, 此时曲线对应的自变量查图为$\frac{a}{A}=0.58$，即$A=1.72$.

由题意得，图示框图中含有具有死区的继电器特性的非线性环节，其描述函数如下:

$$N(A) = \frac{4b}{A\pi}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}\ (A \geq a)$$

又有$G(s) = \frac{3}{s(0.8s+1)(s+1)}$，则:

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(0.8j\omega+1)(j\omega+1)}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.8\omega - \arctan \omega = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 0.8\omega + \arctan \omega = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

从而求得

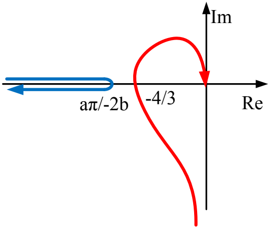
$$|G(j\omega)| = \frac{3}{\omega\sqrt{(0.8\omega)^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{4}{3}$$

即$G(j\omega)$的频率特性曲线相交于负实轴一点$(-\frac{4}{3}, j0)$.

由上述描述函数可知:

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-A\pi}{4b\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}} \quad (A \geq a)$$

当$A=a$时, $-\frac{1}{N(A)} \to -\infty$,
当$A=\infty$时, $-\frac{1}{N(A)} \to -\infty$, 当$A=\sqrt{2}a$ 时,
取得最大值$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{a\pi}{2b}$.
要使得系统不产生自激振荡, 则描述函数的负倒数特性曲线与$G(j\omega)$的频率特性曲线在负实轴不相交。即:



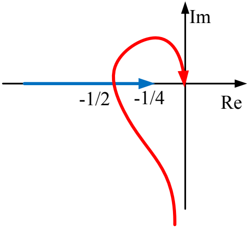
$$-\frac{a\pi}{2b} < -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{8}{3\pi}$$

由题意得，图示框图中含有具有死区特性的非线性环节，其描述函数如下:

$$N(A)=k-\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]\ (A\geq a)$$

其中$k=4,a=1$，则：

$$N(A)=4-\frac{8}{\pi}[\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{1}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}]\ (A\geq 1)$$



描述函数的负倒数特性:

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-1}{4-\frac{8}{\pi}[\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{1}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}]}\ (A\geq a)$$

当$A=1$时，$-\frac{1}{N(A)}\to-\infty$，
当$A=\infty$时，$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{1}{4}$.

又有$G(s)=\frac{2.5}{s(0.25s+1)(s+1)}$，则:

$$G(j\omega)=\frac{2.5}{j\omega(0.25j\omega+1)(j\omega+1)}$$

$$\phi(\omega)=-90^\circ-\arctan 0.25\omega-\arctan\omega=-180^\circ$$
$$\Rightarrow\quad \arctan 0.25\omega+\arctan\omega=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \omega=2$$

从而求得

$$|G(j\omega)|=\frac{2.5}{\omega\sqrt{(0.25\omega)^2+1}\sqrt{\omega^2+1}}=\frac{1}{2}$$

即$G(j\omega)$的频率特性曲线相交于负实轴一点$(-\frac{1}{2},j0)$.
由此可知，描述函数的负倒数特性曲线与$G(j\omega)$的频率特性曲线必在负实轴相交，即存在自激振荡，振荡频率$\omega=2$。即:

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-1}{4-\frac{8}{\pi}[\arcsin(\frac{1}{A})+\frac{1}{A}\sqrt{1-(\frac{1}{A})^2}]}=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\quad A=2.5$$

注意: 从上式得: $N(A)=2$, 且有$k=4, a=1$, 则由死区非线性元件的描述函数曲线得知应变量$\frac{N(A)}{k}=0.5$, 此时曲线对应的自变量查图为$\frac{a}{A}=0.4$，即$A=\frac{a}{0.4}=2.5$.
当$1\le A\le 2.5$,系统稳定，当$A>2.5$，系统不稳定。

由题意得，图示框图中含有具有饱和特性的非线性环节，其描述函数如下:

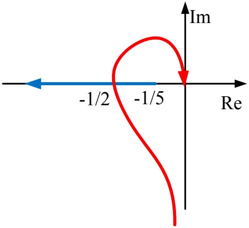
$$N(A) = \frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]\ (A \geq a)$$

其中 $k=5, a=\frac{b}{5}$ 则:

$$N(A) = \frac{10}{\pi}[\arcsin(\frac{b}{5A})+\frac{b}{5A}\sqrt{1-(\frac{b}{5A})^2}]\ (A \geq \frac{b}{5})$$

描述函数的负倒数特性:

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi}{10[\arcsin(\frac{b}{5A})+\frac{b}{5A}\sqrt{1-(\frac{b}{5A})^2}]}$$



又有$G(s)=\frac{3}{s(s+1)(s+2)}$，则:

$$G(j\omega)=\frac{3}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$\phi(\omega)=-90^\circ-\arctan\omega-\arctan 0.5\omega=-180^\circ$$

$$\Rightarrow\quad \arctan 0.5\omega+\arctan\omega=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{2}$$

从而求得

$$|G(j\omega)|=\frac{3}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}}=\frac{1}{2}$$

即$G(j\omega)$的频率特性曲线相交于负实轴一点$(-\frac{1}{2},j0)$.
由此可知，描述函数的负倒数特性曲线与$G(j\omega)$的频率特性曲线必在负实轴相交，即存在自激振荡，振荡频率$\omega=2$。即:

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi}{10[\arcsin(\frac{b}{5A})+\frac{b}{5A}\sqrt{1-(\frac{b}{5A})^2}]}=-\frac{1}{2}$$

注意: 从上式得: $N(A)=2$, 且有$k=5$, 则由饱和非线性元件的描述函数曲线得知应变量$\frac{N(A)}{k}=0.4$, 此时曲线对应的自变量查图为$\frac{a}{A}=0.3$, 即$A=\frac{a}{0.3}=3.33a$.
系统稳定应满足$A>3.33a$，即$A>0.67b$, 则$b<1.5A$。

已知二阶系统方程: $\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+{\omega_n}^2\theta=0$
解: 令$x_1=\theta$, $x_2=\dot{\theta}$, 则有

$$\begin{cases}\dot{x_1}=\dot{\theta}=x_2\\ \dot{x_2}=\ddot{\theta}=-2\xi\omega_n\dot{\theta}-{\omega_n}^2\theta=-2\xi\omega_n x_2-{\omega_n}^2x_1\end{cases}$$

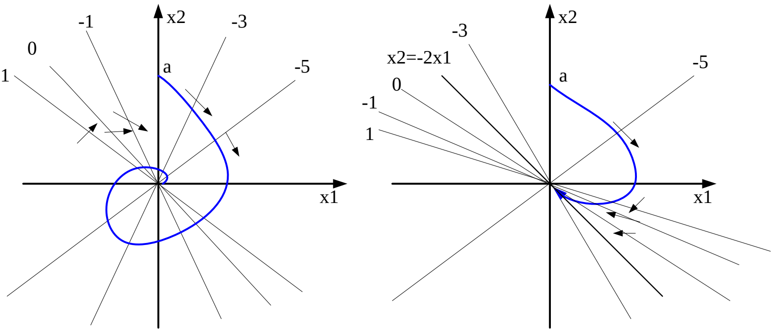
因此，将上述表达式相除，得到:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\alpha=\frac{-2\xi\omega_n x_2-{\omega_n}^2x_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow\quad x_2=\frac{-{\omega_n}^2x_1}{\alpha+2\xi\omega_n}$$

当α取不同值时，得到不同斜率的等倾线，在每一条等倾线上作一系列相应斜率的短线。
(1) $\omega_n=2$, $\xi=0.5$, 则$x_2=\frac{-4x_1}{\alpha+2}$, 求得不同$\alpha$的等倾线。
$\alpha=0$，$x_2=-2x_1$; $\alpha=1$，$x_2=-1.33x_1$; $\alpha=-1$，$x_2=-4x_1$;
$\alpha=-3$，$x_2=4x_1$; $\alpha=-5$，$x_2=1.33x_1$; $\alpha=\infty$，$x_2=0$;
(2) $\omega_n=2$, $\xi=1$, 则$x_2=\frac{-4x_1}{\alpha+4}$, 求得不同$\alpha$的等倾线。
$\alpha=0$，$x_2=-x_1$; $\alpha=1$，$x_2=-0.8x_1$; $\alpha=-1$，$x_2=-1.33x_1$;
$\alpha=-3$，$x_2=-4x_1$; $\alpha=-5$，$x_2=4x_1$; $\alpha=\infty$，$x_2=0$;

下图分别为$\xi = 0.5$和$\xi = 1$的相迹图:



(a) 阻尼系数为0.5 (b) 阻尼系数为1

注意：当$\xi = 1$时，系统的特征根为两个相同的负实根，此时，相迹图的渐近线存在一条特殊的等倾线，相轨迹最终沿着这条特殊的等倾线趋于原点。

从框图得知，该非线性环节为饱和特性，设其输入信号为$e(t)$,输出信号为$m(t)$. 首先，以线性部分来列微分方程有:

$$\ddot{c}+\dot{c}=2m$$

又有$r-e=c$, 求导后代入上式有:

$$\ddot{e}+\dot{e}+2m=\ddot{r}+\dot{r}$$

根据饱和特性非线性环节的特点，由边界线$e=e_0$,$e=-e_0$,分割成单个区域，其输出表达式为:

$$m(t)=\begin{cases} e, & |e|<e_0 \\ -1, & e<-e_0 \\ 1, & e>e_0 \end{cases}$$

针对其3个不同区域，得到不同的方程:

$$\begin{cases} \ddot{e}+\dot{e}+2e=\ddot{r}+\dot{r}, & |e|<e_0 \quad (1) \\ \ddot{e}+\dot{e}-2=\ddot{r}+\dot{r}, & e<-e_0 \quad (2) \\ \ddot{e}+\dot{e}+2=\ddot{r}+\dot{r}, & e>e_0 \quad (3) \end{cases}$$

假设输入信号为单位阶跃: $r(t) = 1(t)$, 则$\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$.
(1) 讨论在方程式(1)的情况，即$\ddot{e} + \dot{e} + 2e = \ddot{r} + \dot{r} = 0$,方程变成线性方程，可以依据等倾线方法，求取其等倾线方程:

$$\dot{e} = -\frac{2}{1+\alpha}e \quad |e| < e_0$$

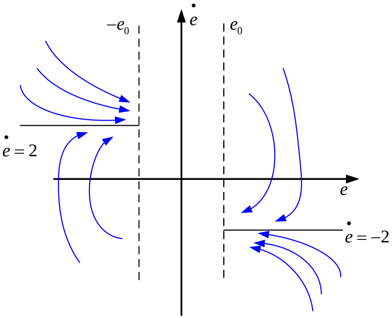
(2)同理，求取方程式(2)与(3)对应的等倾线方程:

$$\dot{e} = \frac{2}{1+\alpha} \quad e < -e_0$$

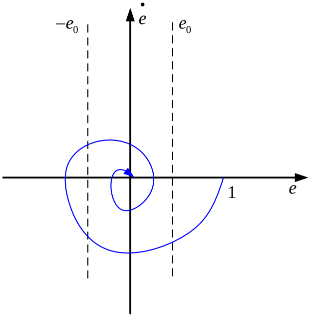
$$\dot{e} = -\frac{2}{1+\alpha} \quad e > e_0$$

可以看出，方程(2)和(3)对应的等倾线是一族水平线。

相轨迹图如下：(a)是在正饱和区和负饱和区的相轨迹，
(b)$r(t) = 1(t)$时的相轨迹。



(a)$|e| > e_0$



(b) r(t)=1(t)时系统的相轨迹

(1)从图中可知，系统非线性环节为饱和特性，其描述函数为:

$$N(A)=\frac{2k}{\pi}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]\ (A\geq a)$$

其中$k=\frac{\pi}{a}$，则:

$$N(A)=\frac{2}{a}[\arcsin(\frac{a}{A})+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}]\ (A\geq a)$$

描述函数的负倒数特性:

$$-\frac{1}{N(x)}=\frac{-a}{2[\arcsin(\frac{a}{x})+\frac{a}{x}\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}]}\ (x\geq a)$$

当$x=a$时，$-\frac{1}{N(x)}=-\frac{a}{\pi}$，当$A=\infty$时，$-\frac{1}{N(x)}\to-\infty$. 所以其负倒特性曲线起始于$(-\frac{a}{\pi},j0)$点，沿着负实轴趋向负无穷。

(2) 线性部分的传递函数为: $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$, 则:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan\omega - \arctan 0.5\omega = -180^\circ$$

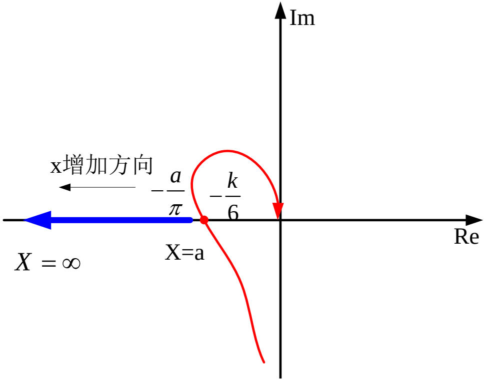
$$\Rightarrow \quad \arctan 0.5\omega + \arctan\omega = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{2}$$

从而求得

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} = \frac{K}{6}$$

即$G(j\omega)$的频率特性曲线相交于负实轴一点$(-\frac{K}{6}, j0)$.

负倒特性曲线如下图蓝色所示，线性部分奈氏图如下图红色曲线所示:



(3)系统存在稳定周期振荡的范围，即描述函数的负倒数特性曲线与$G(j\omega)$的频率特性曲线在负实轴不相交。即:

$$-\frac{\pi}{a} < -\frac{K}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{6a}{\pi} < K < \infty$$