

## Úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete pomocí lineární regrese.

## Teorie

### Měření modulu $E$ z protažení drátu

Při působení síly  $F$  na drát průřezu  $S$  se drát pružnou deformací prodlouží o [1]

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l_0 F}{S}. \quad (1)$$

$E$  je modul pružnosti v tahu, [1]

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{l_0 F}{\Delta l S} = \frac{4 l_0 F}{\Delta l \pi d^2} \quad (2)$$

Prodloužení drátu se měří zrcátkovou metodou. Protažení drátu se převádí na pootočení  $\Delta\alpha$  zrcátka upevněného na ose kladky s poloměrem  $r$ . [1]

$$\Delta l = r \Delta\alpha \quad (3)$$

Ve vzdálenosti  $L$  od zrcátka je umístěna svislá stupnice, před otočením zrcátka je v dalekohledu vidět dílek stupnice  $n_0$ , po otočení dílek  $n$ . Pro malé úhly pootočení platí pro prodloužení drátu přibližný vztah [1]

$$\Delta l \approx \frac{r(n_0 - n)}{2L} \quad (4)$$

### Měření modulu $E$ z průhybu trámku

Při zatěžování vodorovného kovového trámku, podepřeného dvěma břity ve vzdálenosti  $l$ , silou  $F$  se trámek prohne průhybem

$$y = \frac{F l^3}{48 E I_p}, \quad (5)$$

kde  $I_p$  je plošný moment setrvačnosti průřezové plochy tyče vzhledem k vodorovné ose, kolmé k délce trámku a procházející těžištěm. Pro obdélníkový průřez trámku výšky  $b$  a šířky  $a$  lze  $I_p$  vyjádřit vztahem

$$I_p = \frac{a b^3}{12}. \quad (6)$$

Modul pružnosti poté dostaneme jako

$$E = \frac{F l^3}{4 y a b^3}. \quad (7)$$

## Statistické vyhodnocení

Průměrná hodnota naměřených veličin při  $n$  měřeních je počítána podle vzorce aritmetického průměru [2]

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Statistická chyba  $\sigma_{stat}$  aritmetického průměru se získá ze vztahu [2]

$$\sigma_{stat} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n}}.$$

Absolutní chyba je potom získána z  $\sigma_{stat}$  a chyby měřidla  $\sigma_{měř}$  jako [3]

$$\sigma_{abs} = \sqrt{\sigma_{měř}^2 + \sigma_{stat}^2}$$

Chyba výpočtů se řídí zákonem přenosu chyb [4], lineární regrese podle metody nejmenších čtverců [5].

## Pomůcky

Posuvné měřidlo, pásové měřidlo, drát, kladka, zrcátko, stupnice, dalekohled, závaží, břity, kovové trávky, objektivový mikrometr

## Výsledky měření

Teplota [°C]	Tlak [hPa]	Vlhkost [% RH]
23,8	1004,0	21,4

Tabulka 1: Podmínky měření

## Úkol 1

Hodnota zobrazená na stupnici zrcátkem při základním zatížení drátu byla

$$n_0 = (147,0 \pm 0,5) \text{ mm}$$

Pomocí postupu popsaném v [1] se získaly hodnoty na svislé stupnici v závislosti na hmotnosti závaží, napínající drát. Hodnoty v následující tabulce mají chybu  $\pm 0,5$  mm.

$m[\text{g}]$	$n[\text{mm}]$	$m[\text{g}]$	$n[\text{mm}]$
1,1	144,8	1,8	129,0
1,2	142,3	1,9	126,8
1,3	140,0	2,0	124,8
1,4	137,8	2,1	122,5
1,5	135,8	2,2	120,3
1,6	133,3	2,3	118,0
1,7	131,3	2,4	116,0

Tabulka 2: Hodnota na stupnici v závislosti na hmotnosti závaží

Poloměr kladky  $r$  byl měřen posuvným měřidlem jako průměr, následně vydělený dvěma.

$$r = (19,28 \pm 0,01) \text{ mm}$$

Délka drátu od upevnění ke kladce  $l_0$  byla měřena pásovým měřidlem, k naměřené hodnotě byla poté přičtena  $\frac{1}{8}$  obvodu kladky.

$$l_0 = (1156,1 \pm 1,2) \text{ mm}$$

Délka  $L$  od zrcátka ke stupnici byla měřena pásovým měřidlem.

$$L = (810 \pm 1) \text{ mm}$$

Průměr drátu  $d$  byl měřen na třech místech mikrometrem.

$$d = (0,51 \pm 0,01) \text{ mm}$$

Prodloužení drátu po přidání závaží s celkovou hmotností 1400g spočítáme podle (4):

$$\Delta l = (0,369 \pm 0,008) \text{ mm}$$

Modul pružnosti v tahu poté je z (2)

$$E = (2,1 \pm 0,1) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

## Úkol 2

Pomocí postupu popsaném v [1] jsme naměřili prohnutí  $y_o$  ocelového trámku a  $y_m$  trámku mosazného. Chyba hodnot v tabulce je  $\pm 0,05\text{mm}$ .

$m[\text{g}]$	$y_o[\text{mm}]$	$y_m[\text{mm}]$
10	0,10	0,18
20	0,20	0,38
30	0,30	0,53
40	0,40	0,73
50	0,50	0,90
60	0,60	1,08
70	0,70	1,28
80	0,80	1,48
90	0,90	1,63
100	1,00	1,83

Tabulka 3: Prohnutí trámku v závislosti na hmotnosti

Vzdálenost mezi břity  $l$  byla měřena pásovým měřidlem.

$$l = (412 \pm 1) \text{ mm}$$

Rozměry  $a$  a  $b$  trámků byly měřeny na třech místech mikrometrem.

$$a_o = (11,98 \pm 0,02) \text{ mm}$$

$$b_o = (1,95 \pm 0,01) \text{ mm}$$

$$a_m = (11,84 \pm 0,03) \text{ mm}$$

$$b_m = (1,98 \pm 0,01) \text{ mm}$$

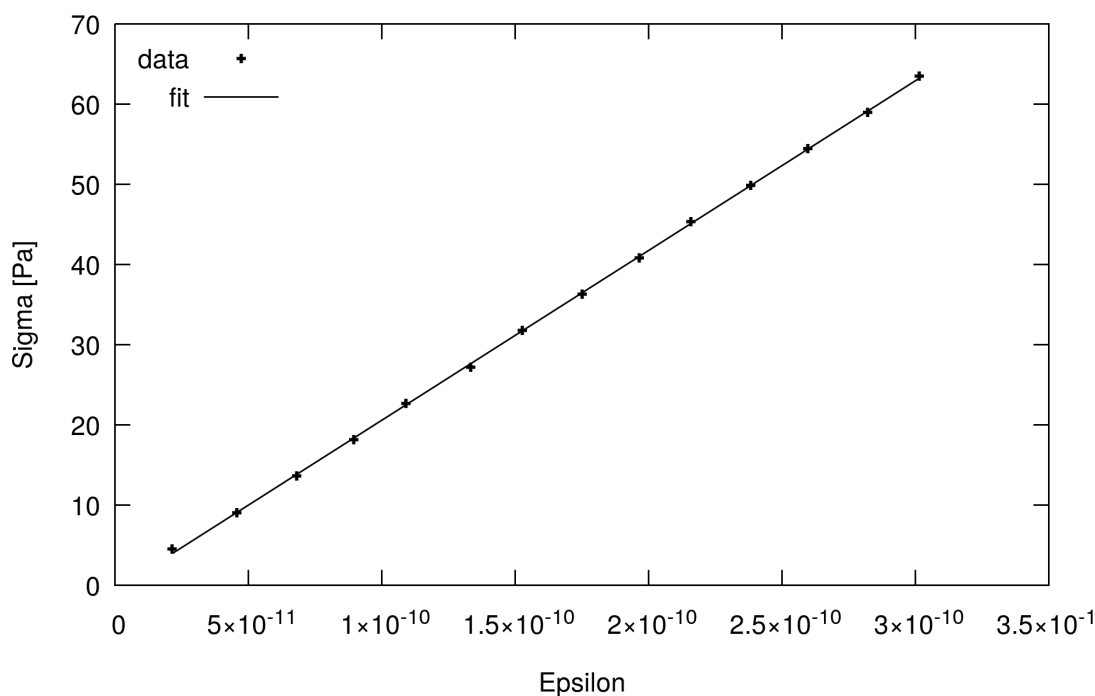
Z (7) spočítáme

$$E_o = (1,9 \pm 0,1) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_m = (1,02 \pm 0,03) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

### Úkol 3

Následující graf zachycuje závislost  $\sigma$  na  $\epsilon$  podle (2). Lineární regrese byla provedena pomocí rovnice  $y = Ex + b$ .



Obrázek 1: Graf závislosti napětí na relativním prodloužení

$$E = (2,1 \pm 0,1) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

### Diskuse

Hodnoty modulu pružnosti v tahu oceli vyšly různými metodami shodně až na součet jejich chyb. Měření tedy bylo poměrně přesné. Chyby výsledků jsou však značné, což je způsobeno velkými relativními chybami měření malých vzdáleností.

Určitá nepřesnost mohla být způsobena hmotnostmi závaží, o kterých se při výpočtech předpokládá, že mají přesně uvedenou hmotnost s nulovou chybou, skutečná hmotnost se mohla trochu lišit. Určitá systematická chyba může také pocházet z měření poloměru kladky a tloušťky drátu. Při měření modulu pružnosti pomocí trámek také může určitá nepřesnost pocházet z faktu, že závěs pro závaží nemusel být umístěn přesně v polovině vzdálenosti mezi břity, správná poloha byla kontrolována pouze opticky, tudíž může být náchylná k subjektivní chybě.

## Závěr

Modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu je

$$E = (2,1 \pm 0,1) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a mosazi z průhybu trámku je

$$E_o = (1,9 \pm 0,1) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_m = (1,02 \pm 0,03) \times 10^{11} \text{ Pa}$$

## Literatura

- [1] Studijní text "Měření modulu pružnosti v tahu", dostupné z [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_109.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_109.pdf)
- [2] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 10, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar10.pdf>
- [3] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 1, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar1.pdf>
- [4] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 9, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar9.pdf>
- [5] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 11, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar11.pdf>