

Úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
 - (a) $y_1 = y_2 = B$... doba kmitu T_1
 - (b) $y_1 = -y_2 = B$... doba kmitu T_2
 - (c) $y_1 = 0, y_2 = B$
 - i. doba kmitu T_3
 - ii. doba $\frac{T_s}{2}$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočítejte kruhové frekvence $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_s , ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4 .
4. Vypočítejte stupeň vazby κ .
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

Teorie

Pro studium kmitů vázaných oscilátorů využijeme dvě stejná fyzická kyvadla spojená slabou pružnou vazbou realizovanou dvěma pružinami. Za předpokladu malých výchylek kyvadla a nulového tření lze vyjádřit úhlová frekvence nevázaného fyzického kyvadla pomocí jeho periody kmitu T jako

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1)$$

Při tomto experimentu změříme periody kmitů kyvadla pro tři různé počáteční výchylky kyvadel φ_1 a φ_2 .

1. Pro počáteční výchylky $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$ platí [1]

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A \cos \omega_1 t. \quad (2)$$

Kyvadla kmitají se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí ω_1 vyjádřenou podle (1) pomocí T_1 .

2. Pro počáteční výchylky $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = A$ platí [1]

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (3)$$

Kyvadla kmitají se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí ω_2 , ale s fázovým posunem π .

3. Pro $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$ platí [1]

$$\varphi_1 = A \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right] \quad (4)$$

$$\varphi_2 = A \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right] \quad (5)$$

V případě slabé vazby ($\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1 \approx \omega_2$) obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí [1]

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) = \frac{2\pi}{T_3} \quad (6)$$

a amplitudy jejich pohybu se periodicky mění s frekvencí [1]

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{2\pi}{T_s} \quad (7)$$

Stupeň vazby spočítáme pomocí vztahu [1]

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}. \quad (8)$$

Statistické vyhodnocení

Průměrná hodnota naměřených veličin při n měřeních je počítána podle vzorce aritmetického průměru [2]

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Statistická chyba σ_{stat} aritmetického průměru se získá ze vztahu [2]

$$\sigma_{stat} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n}}.$$

Absolutní chyba je potom získána z σ_{stat} a chyby měřidla $\sigma_{měř}$ jako [3]

$$\sigma_{abs} = \sqrt{\sigma_{měř}^2 + \sigma_{stat}^2}$$

Chyba výpočtů se řídí zákonem přenosu chyb [4], lineární regrese podle metody nejmenších čtverců [5].

Pomůcky

Fyzická kyvadla, závěsné zařízení, spouštěcí zařízení, měřič vzdálenosti, pásové měřidlo, počítač

Výsledky měření

Pohyb kyvadla byl měřen pomocí automatického měřiče vzdálenosti a doby kmitů byly poté vyhodnoceny pomocí počítače. Jelikož časový krok při měření činil 0,05 s, byla tato hodnota také zvolena jako chyba měřidla.

	1	2	3	průměr	σ_{stat}	$\sigma_{měř}$	σ_{abs}
$5T_0[s]$	9,40	9,40	9,40	9,40	0,00	0,05	0,05
$T_0[s]$	1,88	1,88	1,88	1,88	0,00	0,01	0,01

Tabulka 1: Naměřené hodnoty T_0

	1	2	3	průměr	σ_{stat}	$\sigma_{měř}$	σ_{abs}
$6T_1[s]$	11,20	11,25	11,20	11,22	0,017	0,05	0,05
$T_1[s]$	1,87	1,88	1,87	1,87	0,003	0,01	0,01
$6T_2[s]$	10,80	10,70	10,75	10,75	0,029	0,05	0,06
$T_2[s]$	1,80	1,78	1,79	1,79	0,005	0,01	0,01
$5T_3[s]$	9,20	9,20	9,20	9,20	0,000	0,05	0,05
$T_3[s]$	1,84	1,84	1,84	1,84	0,000	0,01	0,01
$T_s/2[s]$	42,10	41,25	41,10	41,48	0,311	0,05	0,32
$T_s[s]$	84,20	82,50	82,20	82,97	0,623	0,10	0,63

Tabulka 2: Naměřené hodnoty pro slabší pružinu

	1	2	3	průměr	σ_{stat}	$\sigma_{měř}$	σ_{abs}
$6T_1[s]$	11,20	11,25	11,20	11,22	0,017	0,05	0,05
$T_1[s]$	1,87	1,88	1,87	1,87	0,003	0,01	0,01
$6T_2[s]$	10,40	10,35	10,35	10,37	0,017	0,05	0,05
$T_2[s]$	1,73	1,73	1,73	1,73	0,003	0,01	0,01
$5T_3[s]$	7,20	7,25	7,25	7,23	0,017	0,05	0,05
$T_3[s]$	1,80	1,81	1,81	1,81	0,004	0,01	0,01
$T_s/2[s]$	22,10	21,50	21,95	21,85	0,180	0,05	0,19
$T_s[s]$	44,20	43,00	43,90	43,70	0,361	0,10	0,37

Tabulka 3: Naměřené hodnoty pro silnější pružinu

Následující tabulka obsahuje měření kmitů kyvadel se shodnou a protilehlou fází pro několik vzdáleností pružiny od závěsu kyvadel. Vzdálenost l byla měřena pásovým měřidlem, jedná se o vzdálenost od dolní hrany závěsu kyvadla po vrchní hranu úchyty pružiny.

$l[\text{mm}]$		1	2	průměr	σ_{stat}	$\sigma_{měř}$	σ_{abs}
266	$6T_1[\text{s}]$	11,20	11,20	11,20	0,000	0,05	0,05
	$T_1[\text{s}]$	1,87	1,87	1,87	0,000	0,01	0,01
	$6T_2[\text{s}]$	10,25	10,20	10,23	0,025	0,05	0,06
	$T_2[\text{s}]$	1,71	1,70	1,70	0,004	0,01	0,01
247	$6T_1[\text{s}]$	11,20	11,20	11,20	0,000	0,05	0,05
	$T_1[\text{s}]$	1,87	1,87	1,87	0,000	0,01	0,01
	$6T_2[\text{s}]$	10,30	10,55	10,43	0,125	0,05	0,13
	$T_2[\text{s}]$	1,72	1,76	1,74	0,021	0,01	0,02
218	$6T_1[\text{s}]$	11,20	11,25	11,23	0,025	0,05	0,06
	$T_1[\text{s}]$	1,87	1,88	1,87	0,004	0,01	0,01
	$6T_2[\text{s}]$	10,50	10,50	10,50	0,000	0,05	0,05
	$T_2[\text{s}]$	1,75	1,75	1,75	0,000	0,01	0,01
195	$6T_1[\text{s}]$	11,20	11,20	11,20	0,000	0,05	0,05
	$T_1[\text{s}]$	1,87	1,87	1,87	0,000	0,01	0,01
	$6T_2[\text{s}]$	10,65	10,55	10,60	0,050	0,05	0,07
	$T_2[\text{s}]$	1,78	1,76	1,77	0,008	0,01	0,01
173	$6T_1[\text{s}]$	11,25	11,30	11,28	0,025	0,05	0,06
	$T_1[\text{s}]$	1,88	1,88	1,88	0,004	0,01	0,01
	$6T_2[\text{s}]$	10,65	10,70	10,68	0,025	0,05	0,06
	$T_2[\text{s}]$	1,78	1,78	1,78	0,004	0,01	0,01

Tabulka 4: Závislost dob kmitů na poloze pružiny

Úkol 1

Z tabulky 1 vyčteme

$$T_0 = (1,88 \pm 0,01) \text{ s.}$$

Úkol 2

Z tabulky 2 zjistíme hodnoty pro slabší pružinu

$$T_{sl_1} = (1,87 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{sl_2} = (1,79 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{sl_3} = (1,84 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{sl_4} = (41,48 \pm 0,32) \text{ s}$$

a z tabulky 3 pak

$$T_{si_1} = (1,87 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{si_2} = (1,73 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{si_3} = (1,81 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{si_4} = (21,85 \pm 0,19) \text{ s.}$$

Úkol 3

Dosažením hodnot z tabulky 2 a 3 do (1) dostaneme

$$\omega_{sl_1} = (3,361 \pm 0,016) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_2} = (3,507 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_3} = (3,415 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_4} = (0,076 \pm 0,001) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_1} = (3,361 \pm 0,016) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_2} = (3,637 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_3} = (3,475 \pm 0,025) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_4} = (0,144 \pm 0,001) \text{ s}^{-1}.$$

Použitím vztahu (6) a (7) získáme

$$\omega_{sl_3} = (3,434 \pm 0,012) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_4} = (0,073 \pm 0,012) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_3} = (3,499 \pm 0,012) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_4} = (0,138 \pm 0,012) \text{ s}^{-1}.$$

Úkol 4

Podle vztahu (8) dostaneme stupeň vazby pro slabší pružinu

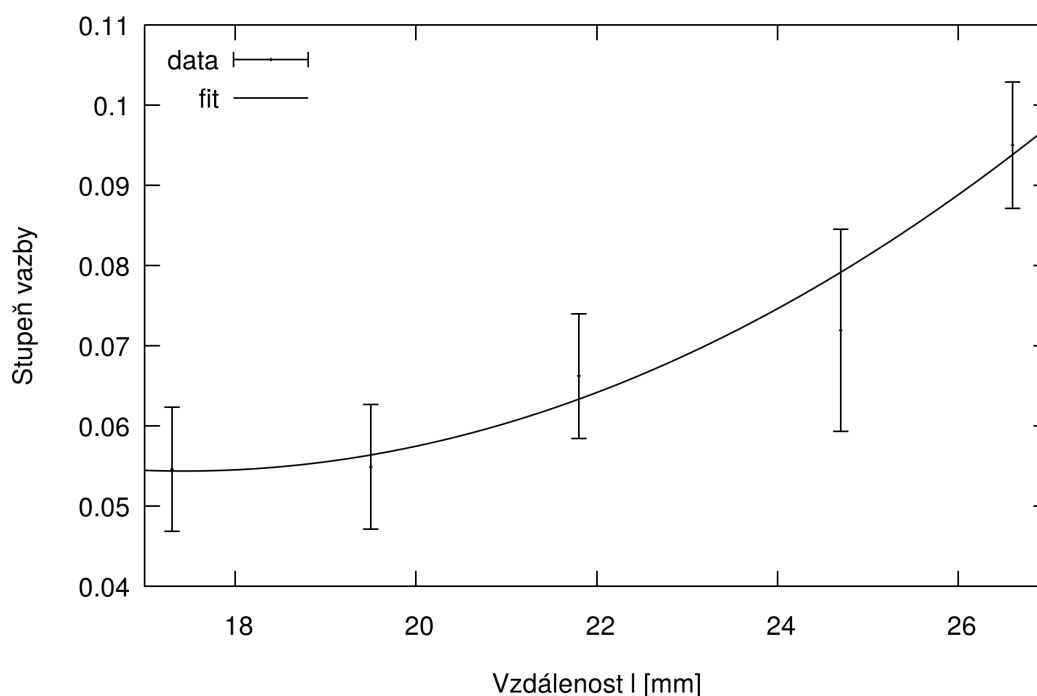
$$\kappa_{sl} = (0,042 \pm 0,007)$$

a silnější pružinu

$$\kappa_{si} = (0,079 \pm 0,007).$$

Úkol 5

Následující graf zobrazuje závislost κ na l pomocí údajů z tabulky 4. Je proložen kvadratickým fitem.

Obrázek 1: Graf závislosti stupně vazby na vzdálenosti l

Diskuse

V úkolu číslo 1 nebyly měřeny zvlášť periody obou fyzických kyvadel, nýbrž byla tato kyvadla kalibrována tak, aby opticky působila ve fázi i po několika kmitáních. Tento fakt však nelze považovat za výrazný zdroj chyb. V tuto dobu se však také objevila skutečnost, že druhé z kyvadel mělo ve svém závěsu z technických důvodů výrazně vyšší tření, a tedy bylo také poznametelně více tlumeno. Určitá chyba se tedy dá připsat tomuto tlumení, obzvlášť v případě měření T_s . Tuto skutečnost dokládá přiložený pracovní graf, na kterém je patrné výrazné prodloužení periody kmitů obalové křivky. Největším zdrojem chyb bylo nesporně poněkud problematické zpracování výsledků měření na počítači, při kterém se pracovalo z části odhadem, především pak při měření T_s , kdy nebylo možné přesně rozeznat, v kterou chvíli dosáhla obalové křivka vlnění minima či maxima. I přes tento fakt však hodnoty, vypočítané z týchž naměřených dat různými způsoby, sobě až na chybu měření odpovídají. Před začátkem měření pátého úkolu se podařilo eliminovat již zmíněný problém se zvýšeným třením jednoho z kyvadel, tento fakt se tedy již nepodílel na chybě měření.

Závěr

Doba kmitu dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel je

$$T_0 = (1,88 \pm 0,01) \text{ s.}$$

Změřené doby kmitů jsou

$$T_{sl_1} = (1,87 \pm 0,01) \text{ s,}$$

$$T_{sl_2} = (1,79 \pm 0,01) \text{ s},$$

$$T_{sl_3} = (1,84 \pm 0,01) \text{ s},$$

$$T_{sl_4} = (41,48 \pm 0,32) \text{ s}$$

$$T_{si_1} = (1,87 \pm 0,01) \text{ s},$$

$$T_{si_2} = (1,73 \pm 0,01) \text{ s},$$

$$T_{si_3} = (1,81 \pm 0,01) \text{ s},$$

$$T_{si_4} = (21,85 \pm 0,19) \text{ s}.$$

Kruhové frekvence odpovídající jednotlivým dobám kmitů jsou

$$\omega_{sl_1} = (3,361 \pm 0,016) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_2} = (3,507 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_3} = (3,415 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{sl_4} = (0,076 \pm 0,001) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_1} = (3,361 \pm 0,016) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_2} = (3,637 \pm 0,019) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_3} = (3,475 \pm 0,025) \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{si_4} = (0,144 \pm 0,001) \text{ s}^{-1}.$$

Hodnoty ω_3 a ω_4 vypočtené z (6) a (7) se neliší o více než chybu měření.

Stupně vazby pro slabou a silnou pružinu jsou

$$\kappa_{sl} = (0,042 \pm 0,007)$$

$$\kappa_{si} = (0,079 \pm 0,007).$$

Literatura

- [1] Studijní text "Studium kmitů vázaných oscilátorů", dostupné z http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_107.pdf
- [2] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 10, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar10.pdf>
- [3] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 1, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar1.pdf>
- [4] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 9, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar9.pdf>
- [5] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 11, dostupné z <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar11.pdf>