Úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čočky. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnejte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

Teorie

Měření tíhového zrychlení z doby kmitu kyvadla

Tíhové zrychlení g figuruje ve vztahu pro výpočet periody fyzického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \tag{1}$$

kde I moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m je hmotnost kyvadla, g je místní tíhové zrychlení, d je vzdálenost těžiště od osy otáčení, α je maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy. Metodou fyzického kyvadla lze tedy tíhové zrychlení změřit.
Z důvodu zjednodušení výpočtů a měření aproximujeme fyzické kyvadlo kyvadlem matematickým, tedy hmotným bodem zavěšeným na nehmotném vlákně. Perioda tohoto kyvadla se pro malé výchylky spočte jako

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

pro délku závěsu l. Ačkoliv fyzická realizace matematického kyvadla je nemožná, je možné se jí přiblížit zavěšením těžké kovové koule na tenký provázek a rozkmitáním s malým úhlem. Takto změříme tíhové zrychlení pomocí

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_M^2} \tag{3}$$

Jak bylo zmíněno výše, aproximace fyzického kyvadla matematickým není přesná, je tedy nutné spočíst systematickou chybu, kterou se tímto přiblížením dopouštíme. Vyjádříme tedy moment setrvačnosti fyzického kyvadla, změříme rozměry a spočteme tíhové zrychlení pomocí (1). Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R se spočítá jako

$$I_{k0} = \frac{2}{5}m_k R^2 \tag{4}$$

Moment setrvačnosti homogenní tyče délky L vzhledem k ose kolmé k délce tyče a procházející jedním jejím koncem vyjádříme jako

$$I_t = \frac{1}{3} m_t L^2 \tag{5}$$

Použitím Steineroy věty

$$I = I_0 + ma^2, \tag{6}$$

kde m je hmotnost tělesa a a vzdálenost os vypočítáme moment setrvačnosti kyvadla

$$I = \frac{2}{5} m_k R^2 + m_k (L + R) + \frac{1}{3} m_t L^2, \tag{7}$$

považujeme-li provázek za homogenní tyč s délkou L. Považujeme-li úhlovou výchylku kyvadla α za dostatečně malou, můžeme vyjádřit tíhové zrychlení jako

$$g = \frac{4\pi^2 I}{mdT^2}. \tag{8}$$

Reverzní kyvadlo

Reverzní kyvadlo je fyzické kyvadlo, které kývá podle dvou rovnoběžných os. Jsou-li tyto dvě osy od sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla l_r, kyvadlo kývá podle obou se stejnou periodou

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \tag{9}$$

V našem případě je vzdálenost os pevná, perioda kmitů se mění v závislosti na vzdálenosti těžké kovové čočky. Pro určení polohy čočky, při které kyvadlo kývá se stejnou periodou podle obou os, využijeme medotu grafické interpolace. Následně vypočítáme tíhové zrychlení z (9) jako

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T_r^2} \tag{10}$$

Těžiště fyzického kyvadla

Jelikož reálný provázek není nehmotný, jeho hmotnost ovlivní polohu těžiště fyzikálního kyvadla. Těžiště obecného tělesa vypočítáme jako

$$\vec{r_s} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV. \tag{11}$$

Uvažujeme-li těžiště homogenní koule a homogenní tyče v jednorozměrném prostoru, dostaneme vzdálenost těžiště fyzického kyvadla od osy kmitání jako

$$l_s = \frac{m_k(L + R) + m_t \frac{L}{2}}{m_k + m_t}. \tag{12}$$

Statistické vyhodnocení

Průměrná hodnota naměřených veličin při n měřeních je počítána podle vzorce aritmetického průměru

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Statistická chyba σ_{stat} aritmetického průměru se získá ze vztahu

$$\sigma_{stat} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{\sqrt{n}}.$$

Absolutní chyba je potom získána z σ_{stat} a systematické chyby σ_{sys} jako

$$\sigma_{abs} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2}$$

Chyba výpočtů se řídí zákonem přenosu chyb.

Pomůcky

Posuvné měřidlo, pásové měřidlo, váhy, měřič času, provázek, kovová kulička, reverzní kyvadlo, závěsné zařízení

Výsledky měření

Hodnoty

Podmínky měření jsou uvedeny v následující tabulce.

Teplota [°C]	Tlak [hPa]	Vlhkost [% RH]
24,6	989,6	32,3

Tabulka 1: Podmínky měření

Délka provázku fyzického kyvadla byla změřena pásovým měřidlem.

	1	2	průměr	σ_{stat}	σ_{sys}	σ_{abs}
l [mm]	997	998	997,5	0,5	0,02	0,5

Tabulka 2: Délka provázku pro fyzické kyvadlo

Průměr kuličky byl měřen posuvným měřidlem z různých stran.

	1	2	3	4	5	průměr	σ_{stat}	σ_{sys}	σ_{abs}
d_k[mm]	25,6	25,2	26,0	25,2	25,2	25,4	0,2	0,02	0,2
R[mm]	12,8	12,6	13,0	12,6	12,6	12,7	0,1	0,01	0,1

Tabulka 3: Rozměry kuličky

Hmotnost kuličky m_k a hmotnost provázku m_t byly měřeny na digitálních váhách.

$$m_k = (62,3365 \pm 0,0001)\text{ g}$$

$$m_t = (0,5493 \pm 0,0001)\text{ g}$$

Redukovaná délka reverzního kyvadla byla měřena pásovým měřidlem.

$$l_r = (994 \pm 1)\text{ mm}$$

Perioda fyzického kyvadla byla měřena automatickým měřičem času.

	$8T_f$ [s]	T_f [s]
1	16,0867	2,0108
2	16,0918	2,0115
3	16,0924	2,0116
4	16,0899	2,0112
5	16,0912	2,0114
6	16,0877	2,0110
7	16,0904	2,0113
8	16,0811	2,0101
9	16,0818	2,0102
10	16,0898	2,0112
průměr	16,0883	2,0110
σ_{stat}	0,0013	0,0002
σ_{sys}	0,0001	0,00001
σ_{abs}	0,0013	0,0002

Tabulka 4: Periody fyzického kyvadla

Následující tabulka udává periody kmitání reverzního kyvadla s čočkou dole (T_d) a nahoře (T_n) v závislosti na vzdálenosti čočky od bližšího břitu d_z.

	$8T_d$			$8T_n$		
d_z [mm]	1 [s]	2 [s]	průměr [s]	1 [s]	2 [s]	průměr [s]
78,40	16,0835	16,0816	16,0826	16,3454	16,3470	16,3462
76,32	16,0651	16,0678	16,0665	16,2764	16,2695	16,2730
73,24	16,0472	16,0486	16,0479	16,1369	16,1384	16,1377
71,02	16,0307	16,0325	16,0316	16,0465	16,0522	16,0494
69,58	16,0271	16,0281	16,0276	15,9829	15,9800	15,9815
67,40	16,0149	16,0127	16,0138	15,9135	15,9142	15,9139

Tabulka 5: Osminásobky period reverzního kyvadla při různých polohách čočky

Společná perioda reverzního kyvadla pro obě osy byla měřena automatickým měřičem času.

	$8T$ [s]	T [s]
1	16,0307	2,0038
2	16,0308	2,0039
3	16,0310	2,0039
4	16,0315	2,0039
5	16,0300	2,0038
6	16,0307	2,0038
průměr	16,0308	2,00385
σ_{stat}	0,0002	0,00003
σ_{sys}	0,0001	0,00001
σ_{abs}	0,0002	0,00003

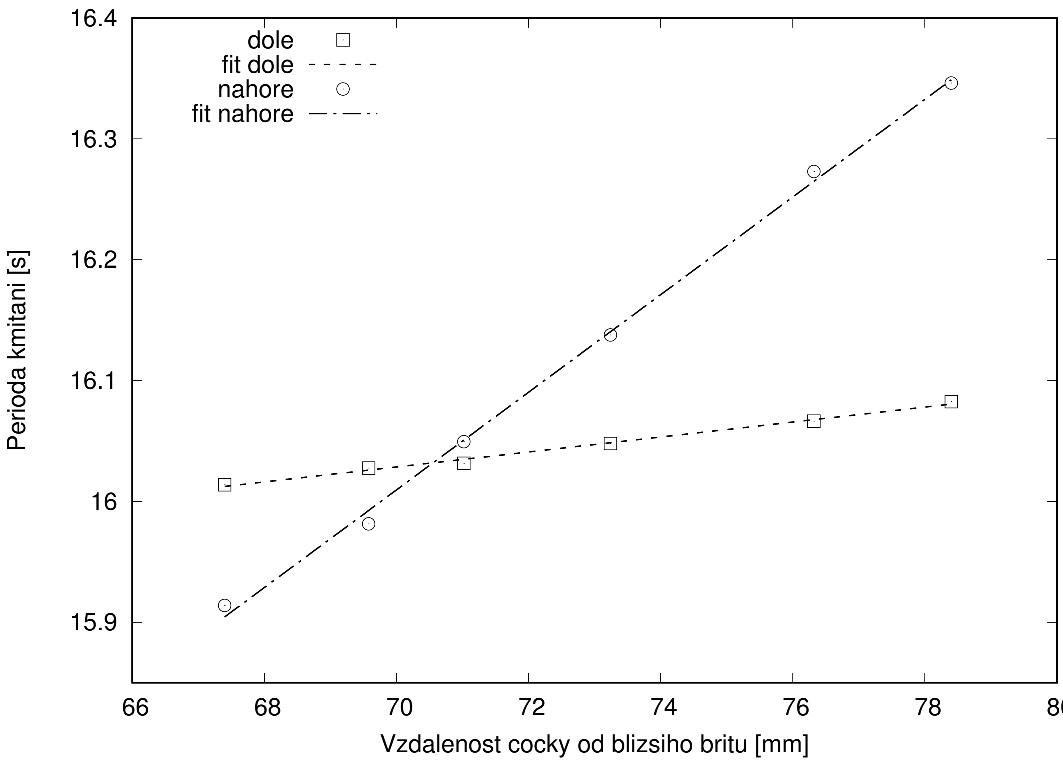
Tabulka 6: Periody reverzního kyvadla shodné pro obě osy

Úkol 1

Dosazením do (3) z tabulky 2, 3 a 4 dostaneme

$$g = (9,74 \pm 0,05)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Úkol 2



Obrázek 1: Závislost osminásobku periody kmitů reverzního kyvadla na vzdálenosti čočky

Směrnice přímky *fit dole* je $k_1 = (0,0062 \pm 0,0002)$, směrnice *fit nahore* $k_2 = (0,0404 \pm 0,0009)$.

Úkol 3

Dosazením hodnot z tabulky 6 a hodnoty l_r do (10) dostaneme

$$g = (9,77 \pm 0,02)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Úkol 4

Použitím hodnot z tabulky 2, 3 a (7) a hodnot m_k a m_t získáme moment setrvačnosti fyzikálního kyvadla

$$I = (0,0632 \pm 0,0003)\ \mathrm{kg\,m^2}$$

Dosazením do (8) dostaneme

$$g = (9,74 \pm 0,04)\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Nepřesnost aproximace fyzikálního kyvadla jako matematického je tedy v rámci chyby měření.

Úkol 5

Využitím (12) získáme vzdálenost těžiště fyzického kyvadla od osy otáčení

$$l_s = 1005,7 \text{ mm}$$

Délka matematického kyvadla je

$$l_m = L + R = 1010,2 \text{ mm}$$

Rozdíl je tedy $4,5$ mm.

Diskuse

Při výpočtu tíhového zrychlení pomocí matematického kyvadla bylo největším zdrojem chyb (kromě samotného přiblížení) měření délky závěsu, které bylo nepřesné kvůli špatné možnosti přiložit měřidlo, roli také hrála určitá elasticita provázku a také fakt, že provázek byl uvázán uzlem, který nemusel kmitat stejným způsobem, jako zbytek závěsu. Při výpočtu pomocí fyzického kyvadla k tomuto přistupuje také fakt, že kulička nebyla dokonalá homogenní koule. Dalším faktorem je rozdíl mezi předpokládanou a skutečnou polohou těžiště kyvadla. Díky automatickému měření času nepřibyla do měření chyba způsobená pomalou reakční dobou pozorovatele.

Tak jako u matematického kyvadla, i u měření tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla lze za výrazný zdroj chyby považovat měření délky mezi břity, ačkoli díky pevnému tělu kyvadla není tato chyba příliš velká. Tření břitů v závěsu a další disipativní síly se také mohly projevit.

Závěr

Změřená hodnota tíhového zrychlení metodou matematického kyvadla je

$$g = (9,74 \pm 0,05)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Změřená hodnota tíhového zrychlení metodou reverzního kyvadla je

$$g = (9,77 \pm 0,02)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Rozdíl mezi hodnotou tíhového zrychlení změřenou pomocí matematického a fyzického kyvadla je zanedbatelný (řádu 10^{-3}).

Vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení se od délky matematického kyvadla liší o $4,5$ mm.

Literatura

[1] Studijní text "Měření tíhového zrychlení", dostupné z
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_121.pdf
[2] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 1, dostupné z http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar1.pdf
[3] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 9, dostupné z http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar9.pdf
[4] Doc. Mgr. Jakub Čížek, PhD.: prezentace Úvod do praktické fyziky, seminář 10, dostupné z http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/seminar10.pdf