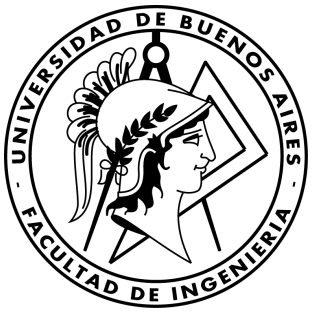


Trabajo Práctico N°1
Técnicas de Diseño

[75.29/95.06] Teoría de Algoritmos I
1er Cuatrimestre 2023

Emanuel, Tomas	108026
Javes, Sofia	107677

Índice

Primera Parte: Problema de K-merge por División y Conquista

Teorema Maestro del Algoritmo Propuesto

Analizando el algoritmo propuesto pudimos llegar a las siguientes conclusiones: Con el la expresión del Teorema Maestro:

$$T(n) = AT(n/B) + f(n)$$

Donde:

- A - La cantidad de llamados recursivos en el algoritmo
- B - En cuanto se divide el problema inicial
- $f(n)$ - En referencia a la parte no recursiva del algoritmo. Es la complejidad de la parte no recursiva

Tomando en cuenta esto, la lista de arreglos se divide en 2 en cada llamado recursivo, por lo tanto $B = 2$, tenemos 2 llamados recursivos, osea que $A = 2$:

```
1     izq = k_merge(izq)
2     der = k_merge(der)
```

En cuanto a la complejidad de lo no recursivo, podemos decir que es O(n)en el peor de los casos. Al dividir la lista en izq y der estamos a lo sumo usando la mitad de elementos, tomando por fuera las constantes de /2. Sabiendo que K*h = n nos queda O(n) también con el algoritmo de merge:

```
1
2     izq = lista_arreglos[:medio] #O(medio) -> a lo sumo O((K*h)/2) -> O(K*h)
3     der = lista_arreglos[medio:] #O(fin - medio+1)-> a lo sumo es O((K*h)/2) -> O(K
      *h)
```

Entonces, tomando en cuenta el Teorema maestro:

- K - Cantidad de arreglos ordenados
- H - Cantidad de elementos de cada arreglo
- n - K*H, la cantidad de elementos totales
- La expresión: $T(n) = AT(n/B) + f(n)$
- Con: $A = 2$, $B = 2$, $f(n) = O(n)$

Para determinar la complejidad:

$$n^{\log_b a} \rightarrow \ n^{\log_2 2} \rightarrow n^1 \rightarrow n$$

Por lo tanto:

$$n = f(n) = n$$

Como $f(n)$ y $n^{\log_b a}$ son asintóticamente iguales:

$$T(n) = O(n^{\log_b a} * \log n) = O(n^1 * \log n) = O(n * \log n)$$

La complejidad computacional del algoritmo propuesto por división y conquista es:

$$T(n) = O(n * \log n)$$

Describir el algoritmo que utiliza heaps, y determinar su complejidad.

El algoritmo propuesto utiliza un heap para encolar y desencolar los elementos que se encuentran en todos los arreglos. En primer lugar, encolamos el primer elemento de cada arreglo. Una vez hecho esto (como todos los arreglos están ordenados, es el más pequeño), iniciamos una iteración hasta que el heap que utilizamos se encuentre vacío. El procedimiento es simple, desencolamos una vez el número del heap, y vemos cual es el siguiente en el arreglo que provino ese número, y lo encolamos al heap. Esto es análogo (desencolar del heap y ver cual es el siguiente del número que provino ese número) hasta que no tenemos más números en un arreglo, por lo que no encolamos más nada de este arreglo y seguimos desencolando del heap. Una vez que la posición de todos los arreglos se encuentre en el final, desencolamos elementos restantes del heap y los añadimos al arreglo resultado. Dicho arreglo resultará completamente ordenado.

Descripción gráfica:

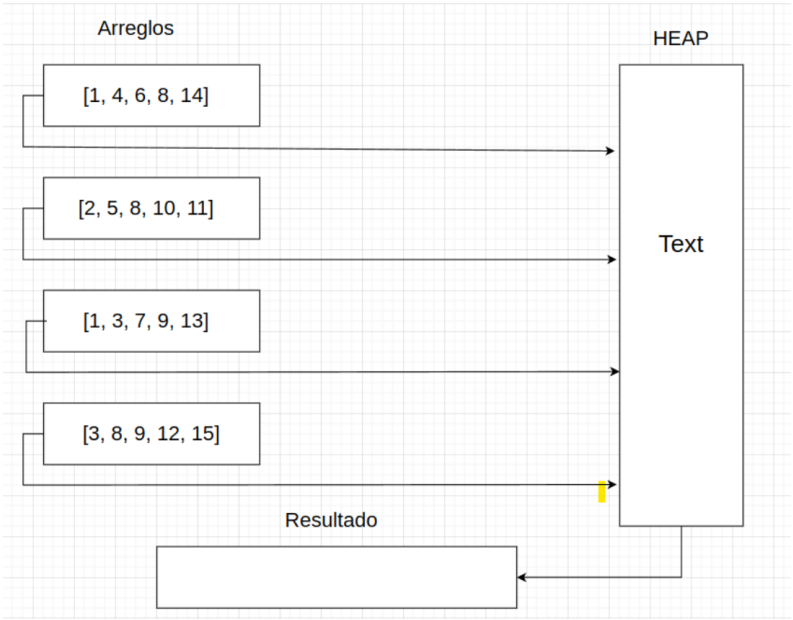
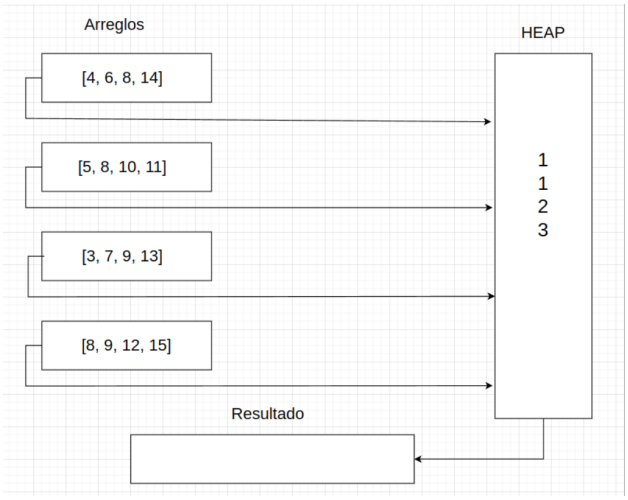
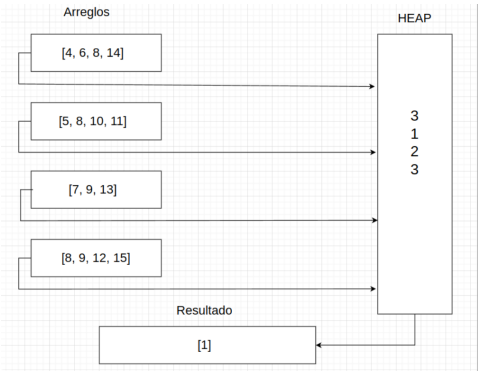


Figura 1: Situación inicial.

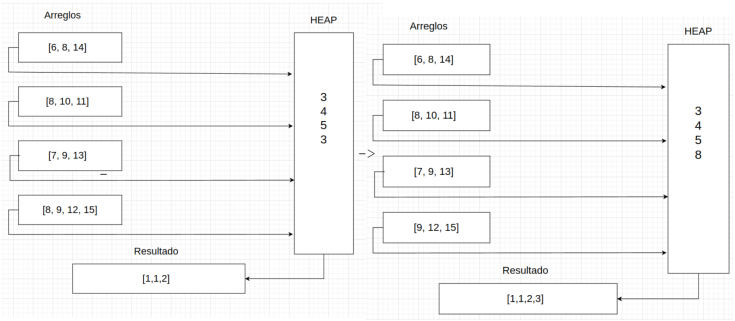
Luego encolamos los primeros elementos de cada arreglo:



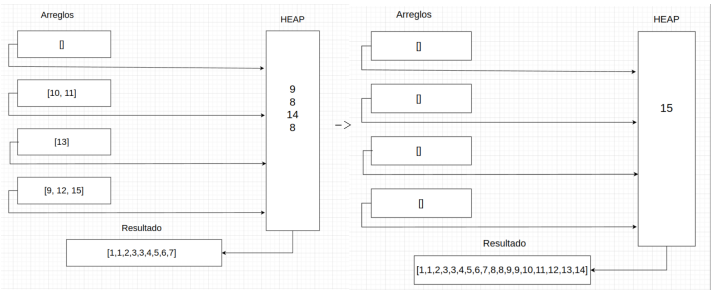
Desencolamos del heap el mínimo y del arreglo que provino ese mínimo en colamos el siguiente elemento y agregamos el mínimo desencolado al resultado:



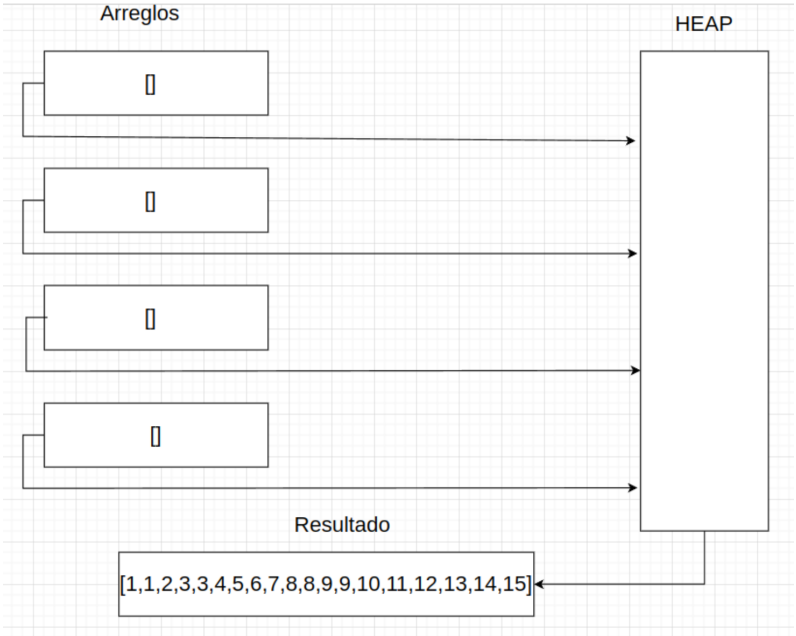
Seguimos con el mismo procedimiento, desencolar del heap y encolar al próximo del arreglo que provino, hasta quedarnos sin ningún numero mas de algún arreglo.



Si seguimos con el algoritmo: (Cabe resaltar que el desencolamiento cuando son dos elementos iguales no tiene ninguna preferencia,no debería tener una política de desencolamiento).



y por último desencolamos el último elemento del heap y nos queda el resultado:



Complejidad: Al principio encolamos los primeros elementos de todos los arreglos,como son k arreglo, y el encolamiento de los heaps son logaritmos, nos queda un log(k), siendo k los arreglos totales. Luego, el desencolar y encolar solamente es log k, ya que como mucho tenemos k elementos en el heap (ya para lo ultimo serian menos elementos en el heap, pero se toma lo peor), pero como lo tenemos que hacer hasta que cada uno de los arreglos se encuentre vacio, osea un total de k*h, porque cada arreglo tiene h elementos, quedaría en total:

$$O(k * h * \log k)$$

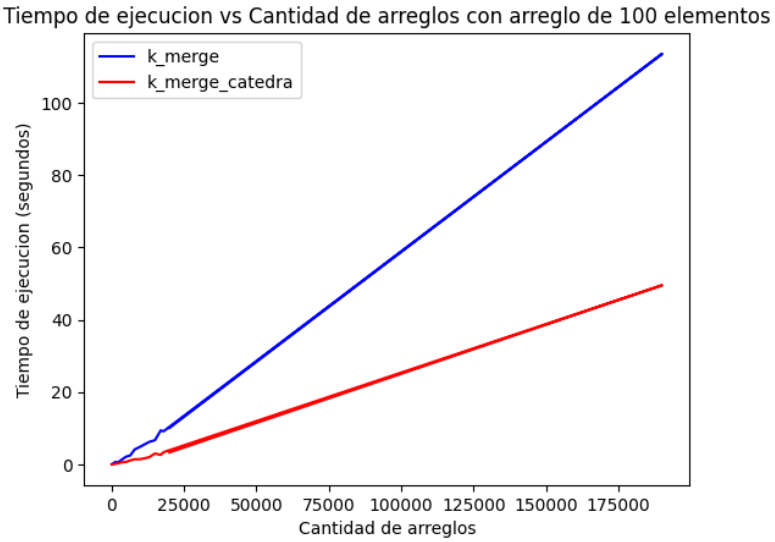
Tomando:

$$n = k * h \rightarrow O(n * \log k)$$

Implementar ambos algoritmos, y hacer mediciones (y gráficos) que permitan entender si las complejidades obtenidas para cada uno se condicen con la realidad.

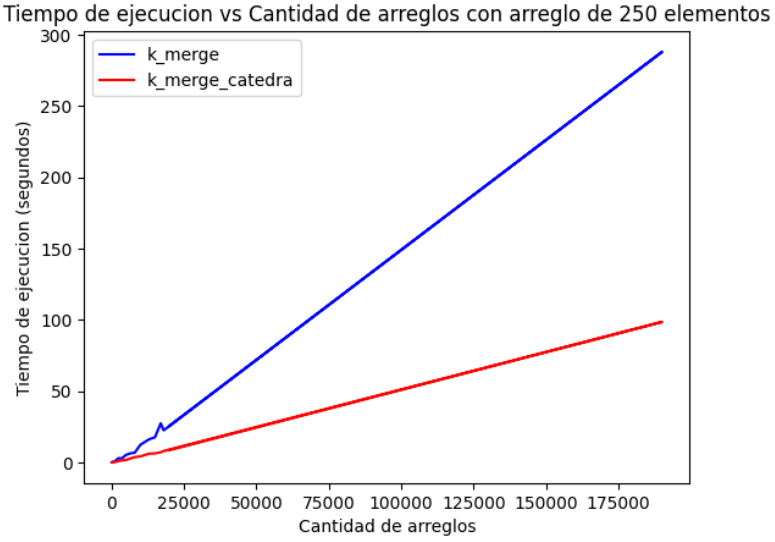
Para poder corroborar y estar seguros de que las complejidades calculadas en un principio realizamos pruebas en donde vamos variando las 2 variables del problema k y h.

Para la primera prueba, mantenemos fijo el numero de elementos por arreglos (100) y subimos el numero de arreglos en total.



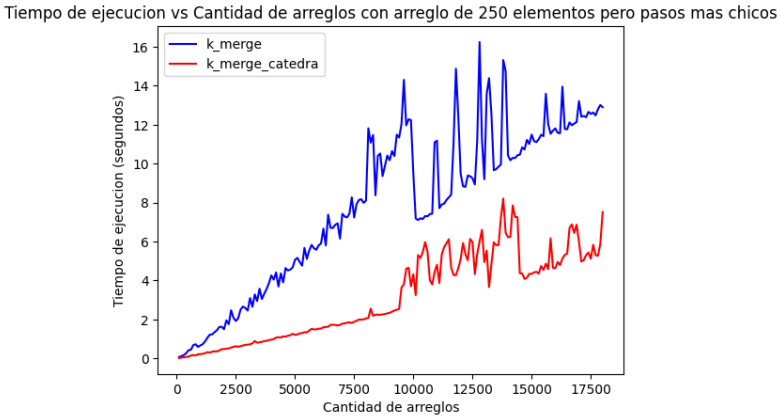
En esta primera observación se puede ver como ambos algoritmos se comportan de manera similar a medida que aumentamos la cantidad de arreglos. Podemos ver como el gráfico de k_merge crece más rápido en comparación con el algoritmo de la cátedra. Lo que a grandes rasgos se podría creer que estamos trabajando con algoritmos de complejidad logarítmica, nos animaríamos a decir que el $k_megre_catedra$ parece crecer de una forma más lineal.

Para la siguiente prueba realizamos lo mismo que la anterior pero aumentamos el valor fijo de los elementos por arreglo de 100 a 200.



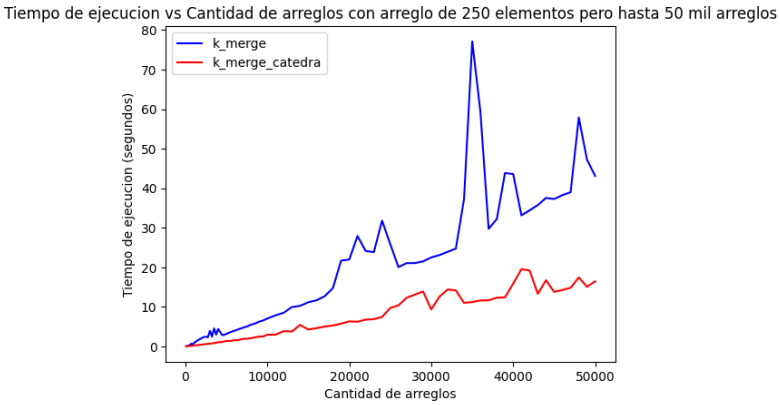
Se puede ver que no hay mucha diferencia con el gráfico de la prueba anterior pero se puede notar un leve distanciamiento de las complejidades ya que pareciera como si el algoritmo de k_merge tardara un poco más que en la prueba anterior y el otro algoritmo y el otro algoritmo parece tener menos pendiente. De igual forma podemos observar que la primera medición comienza en 50 segundos mientras que la de la prueba anterior comienza en 20. Entonces, al aumentar a 250 los elementos de cada arreglo pero mantener ese numero fijo mientras aumentamos la cantidad de arreglos, no hay cambios notables con respecto a la prueba anterior.

Para la tercera prueba decidimos dejar fija la cantidad de arreglos pero aumentar la cantidad de elementos por arreglo. En esta prueba se puede ver como crece el tiempo de ejecución de forma más irregular.



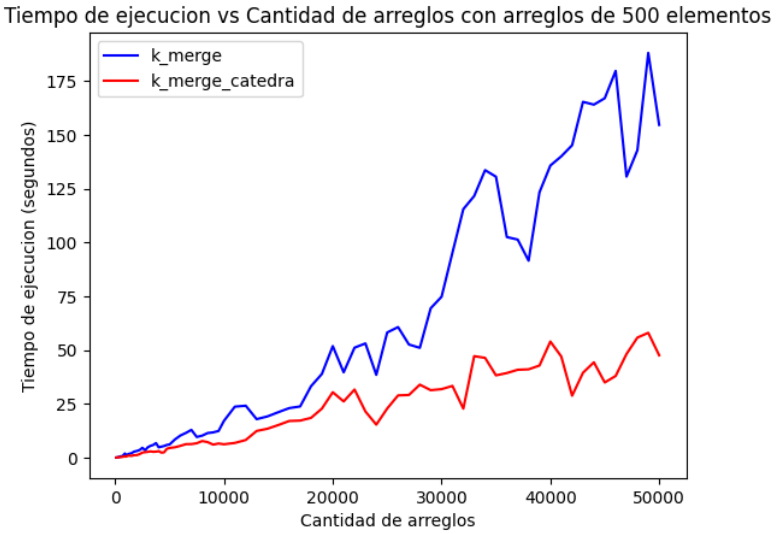
Se observa que a partir de los 10.000 arreglos aproximadamente ambos algoritmos comienzan a tener crecimientos mas irregluares. Pero a grandes rasgos, se puede ver como siguen un patron se crecimiento dentro de todo lineal para el $k\_megre\_catedra$ y logaritmico para el k_merge normal.

Como bien especifica el titulo del grafico, para esta prueba decidimos hacer algo similar que en la prueba anterior pero en este caso la cantidad de arreglos aumenta a pasos mas grandes, de a 10.000 elementos.



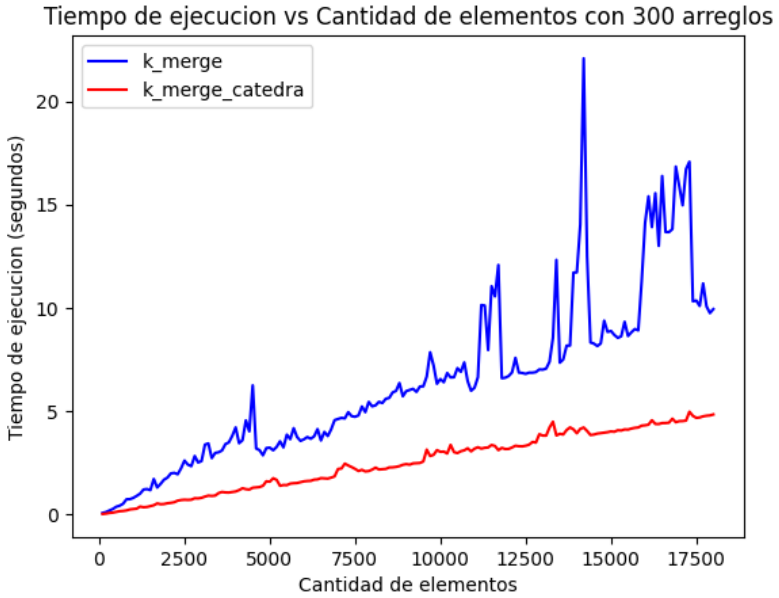
Obtenemos resultado similares que la prueba anterior, pero en este caso al hacer pasos mas grandes, los saltos no son tantos. Igualmente podemos ver el mismo crecimiento hasta el gran salto que se da cuando la cantidad de arreglos es aproximadamente 32.000.

En esta prueba aumentamos tambien la cantidad de arreglos con la misma diferencia de pasos que la prueba anterior pero con la diferencia de que cada arreglo contiene 500 elementos, es decir, el doble con lo que estabamos testeando en la prueba anterior.

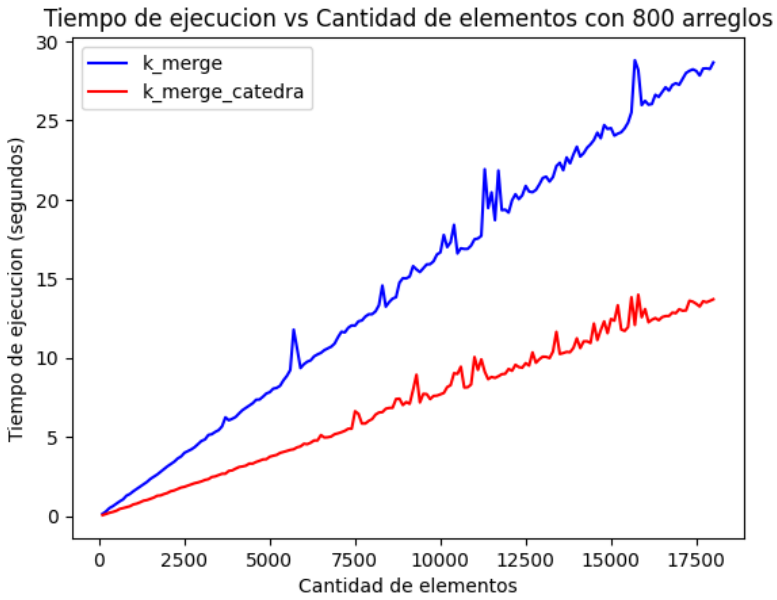


A medida que aumenta la cantidad de arreglos se puede ver que la diferencia entre las complejidades aumenta levemente tambien. De igual manera, el comportamiento del crecimiento continua siendo similar a lo que estuvimos observando en los casos anteriores.

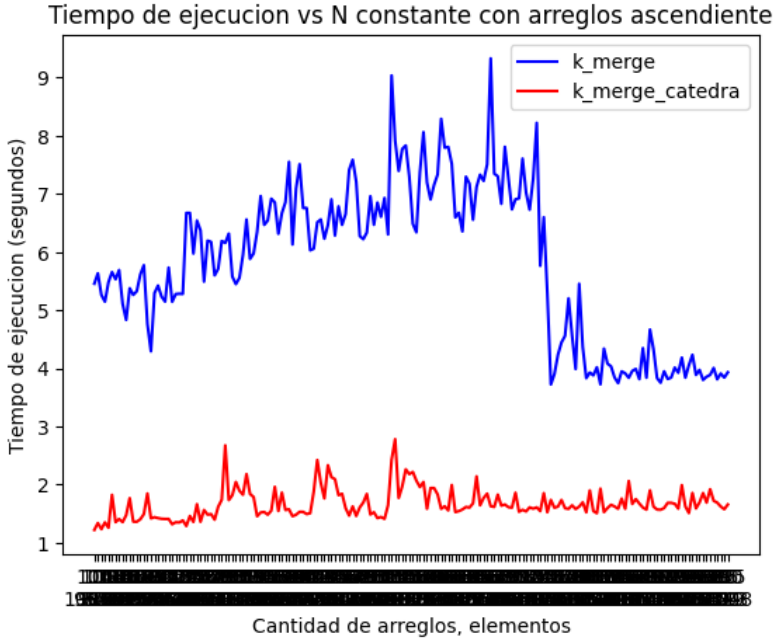
Para la sexta prueba hicimos variable la cantidad de elementos pero manteniendo fija la cantidad de arreglos, en 300.



En este caso se puede observar que mientras aumentamos la cantidad de elementos el algoritmo de k_merge demora mas que el algoritmo propuesto por la catedra. El k merge de la catedra parece no tener tantas irregularidades como el otro algoritmo a la hora de ordenar. Cabe destacara de igual manera que los compartamientos no varian demasiado, a grandes rasgos parecen comportarse casi de manera lineal.



Para el último set de pruebas, nos pareció importante observar el comportamiento de los algoritmos intentando variar ambas variable (k y h) pero mientras una disminuye la otra aumenta, intentando así mantener la n constante.



En este caso se observa que mientras el *k_merge_catedra* se mantiene a grandes rasgos constante, el *k_merge* parece que aumenta de forma lineal. Decidimos tomar como valido la subida hasta cuando hay una caída abrupta, nuestra hipótesis se basa en que de tener procesos corriendo a la par en la computadora, estos al haber terminado podrían haber afectado en como el algoritmo se ejecuta en un tiempo menor, ya que sube su prioridad en la cola de planificación

A grandes rasgos podemos observar que ambos algoritmos se comportan de forma constante (ignorando los grandes saltos) pero el tiempo de ejecución de k_merge sigue siendo mayor al del algoritmo propuesto.

Concluyendo con este set de pruebas podemos ver las diferencias entre las complejidades de los algoritmos dados en el problema. En este análisis podemos ver que la complejidad inicialmente propuesta con el teorema maestro para el $k_merge_catedra$ puede que no sea el correcto ya que un algoritmo efectivamente logarítmico se comporta de la forma que se muestra el k_merge. Al haber una diferencia de crecimiento tanto variando h como k, podemos intuir que la complejidad propuesta inicialmente no es la correcta ya que, de ser logarítmica, debería comportarse de una forma similar al otro algoritmo.

Para verificar estas pruebas, decidimos agregar mas pruebas de lo mismo, solamente cambiando como generábamos los arreglos, esta vez utilizando la semilla de time, multiplicando por la variable del for y después agarrando el resto de la división con el rango que se nos pasa, siendo este primeramente 500. Por ultimo, decidimos cambiar el rango en donde se generaban los sets, siendo este un numero variable, para 250 elementos decidimos utilizar un rango de 1000 para que no estén tan repetidos, en un rango de 1000 utilizar otro numero mayor y así. Los resultados de estas se encuentran en las notebooks al final, notamos que cambiando la generación de arreglos y el rango de los elementos, los gráficos no tenían tantas inconsistencias como tenían los anteriores. Dado que se puede ver mas claramente en estos gráficos, nos vemos mas inclinados a saber que la complejidad empleada es la correcta.

En caso que la complejidad obtenida en el punto 1 no se con diga con la realidad, indicar por qué (qué condición falla). Indicar la complejidad correcta

Como bien dijimos, gracias a los gráficos hechos en las pruebas, podemos constatar que la complejidad obtenida utilizando el Teorema Maestro no se condice con la realidad. En cambio, podemos observar, que el algoritmo a simple vista aparenta ser de complejidad O(n).

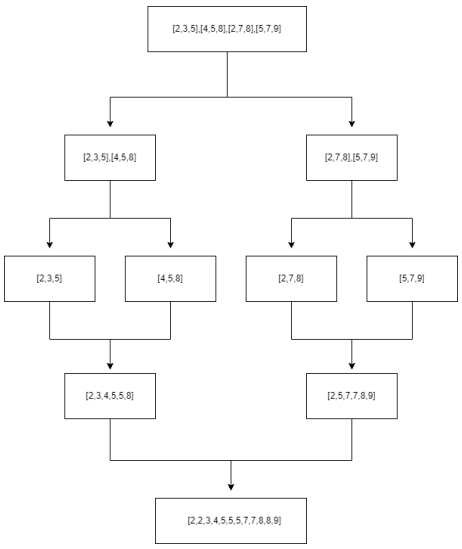
Empezando por el Teorema Maestro, y revisando las condiciones necesarias para poder utilizarlo, 1 de las 3 condiciones para efectivamente usarlo no se cumple en este caso. Siendo las 3 condiciones:

- A debe ser natural

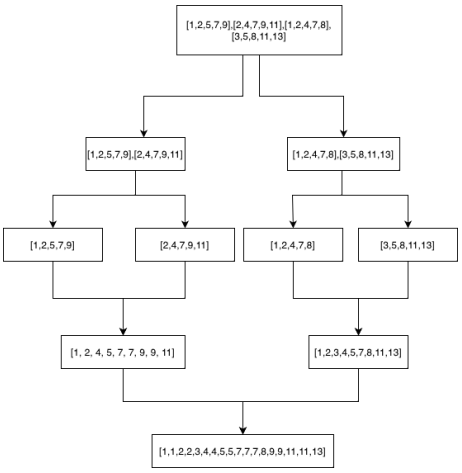
- B es real y > 1 y es constante (siempre lo mismo)
- El caso base es constante (siempre lo mismo)

Se pueden afirmar las primeras 2 condiciones dado que A efectivamente dado que solo hay 2 llamados recursivos en el algoritmo, y B, es 2 ya que el problema siempre se divide en 2 partes, no en una variable.

En cuanto a la tercera condición, podemos hacer una comparación con el algoritmo de mergesort básico. En este algoritmo se puede aplicar el Teorema Maestro dado que el caso base siempre se aplica a 1 elemento. Por el otro lado, el algoritmo implementado en este Trabajo Practico, utiliza un caso base que no es constante, varia con la cantidad de los elementos de los arreglos.



(a) Un problema de 4 arreglos con 5 elementos cada uno



(b) Un problema de 4 arreglos con 5 elementos cada uno

De por sí, el Teorema Maestro toma en cuenta el h, es decir, la cantidad de elementos por arreglo para el calculo de complejidad, ya que en efecto, toma el n que contiene el h. Pero, en este caso, podemos ver, que la profundidad del arreglo siempre estara dada por la cantidad de arreglos, es decir, K. Es por esto que en este algoritmo se toma por demas la variable H en el calculo de la complejidad. Lo que resulta en una complejidad posiblemente mayor a la que en realidad es.

Al no poder aplicar el Teorema Maestro nos vimos en la necesidad de calcular la complejidad del algoritmo propuesto de forma tradicional, analizando cada línea. Teniendo en cuenta que la len en python es O(1), tenemos que el len($lista_arreglos$) será O(1), al igual que calcular el medio en la línea siguiente. Por otro lado, cuando hacemos izq y der python hace una copia del arreglo original, donde el peor de los casos seria al principio, cuando queremos dividir por dos la cantidad de k arreglos en dos y por consiguiente copiar los elementos de cada arreglo en una posición en memoria, teniendo un total de O(k*h/2) ->O(k*h). Teniendo en cuenta que el merge se va a llamar solamente con 2 arreglos dado que se llama después del caso base de la función recursiva izq y der, estaríamos haciendo merge de dos arreglos ordenados, que en el peor de los casos, al final de todo cuando tenemos el arreglo original dividido en dos con cada arreglo ordenado (cada arreglo con k*h/2 elementos), dando un total de O(k*h/2)lo que resulta en O(k*h), tomando el peor caso. La profundidad del algoritmo es solamente en base al k, por lo que haríamos k/2 llamados para cada llamado, teniendo log k llamados, resultando en O(k), en cada llamado dividimos la lista en dos y después hacemos un merge. Quedaría O(k/2*(k*h/2+k*h/2)) quedando en total un O(k*k*h) resumiendo en O(k*n) tomando en cuenta que n = k*h.

Indicar cualquier conclusión adicional que les parezca relevante en base a lo analizado.

Teniendo en cuenta los gráficos hechos para respaldar nuestras respuestas a los algoritmos propuestos, se puede efectivamente verificar esta complejidad.

En primer lugar tomaremos los gráficos en donde k cambia y h se permanece constante. En estos se puede observar un gran brecha entre nuestro algoritmo y el k_merge propuesto por la cátedra, esto es porque usando nuestra complejidad, estaría usando k^2 cuando el k_merge utiliza solamente k. Esto también se puede ver en el gráfico de la prueba 2, aunque, si tomamos los graficos hechos a partir de la generacion de datos con random y rango 500, en este tenemos una baja en performance a 10 mil arreglos en el k_merge nuestro, es por ello que tomamos la performance hecha por la generacion de datos utilizando time y un rango mayor. Nuestra hipótesis a porque hay una baja de performance en algunos graficos, como se dijo antes, puede ser que la computadora se liberó de un proceso y el proceso correspondiente a dicha prueba pudo subir en prioridad, tomando menos tiempo de ejecución. Podemos observar lo mismo en el gráfico de la prueba 5, que ya para 50 mil arreglos hay una brecha muy importante en el gráfico respecto al tiempo de ejecución. Por el otro lado, en el gráfico número 6 podemos observar distinto, donde k lo dejamos constante, en 300 arreglos, y vamos variando la cantidad de elementos. En los dos casos, sin tomar los picos en donde la ejecución tardó un poco más, un crecimiento más bien lineal en los dos casos, correspondiendo a nuestra complejidad calculada. Por último, decidimos probar mantener el n constante, tomando por un lado un aumento en k y disminución en h y luego viceversa. En el primer gráfico, no se puede ver, pero empezamos con 100 arreglos con 10.000 elementos, subiendo el k y restando el h. En el se puede ver hasta un cierto punto un aumento lineal de nuestro algoritmo, confirmando la complejidad que habíamos hecho, ya que el algoritmo de la cátedra mas que nada aumenta con crecimiento logarítmico, ya que aumentamos el k que lo contiene el *log*, finalizando con una complejidad : $cte * \log k$, mientras que el nuestro queda con $k * cte$, es por ello que crece más bien lineal. De nuevo, la hipótesis de la baja de performance que se nota en el gráfico podría ser por dejar un proceso aparte en el momento de la ejecución y por ende tener un poco más de prioridad para ejecutar el algoritmo.

Segunda Parte: ¡Problema de contrabando!

Describir un algoritmo Greedy que resuelva el caso propuesto.

Nuestra propuesta de algoritmo greedy es la siguiente. Por su característica de greedy, nosotros queremos una solución al menor tiempo posible, y en esto nos basamos para formular el algoritmo.

En primer lugar, nos centramos en un caso base como sería tener un soborno que requiera un solo tipo de producto, aplicándolo a nuestra problemática decidimos enfocarnos en el producto de cigarrillos. Como bien sabemos, el aduanero sólo nos pedirá aquello que tenemos (no nos pedirá cigarrillos de más ni productos que no poseemos). Un ejemplo sería, tener paquetes de cigarrillos de [3,5,8,10,13,15] unidades y el aduanero nos pide 9 cigarrillos para poder pasar. En este caso, al estar implementando un algoritmo greedy, el resultado correcto sería pagar el soborno con un paquete de 10 cigarrillos. Nuestra primera implementación, ordenaba el arreglo y hacia una búsqueda binaria hasta encontrar un paquete que entrara en la cantidad de cigarrillos pedidos.

Esto resolvería este primer acercamiento al problema, pero esto no es del todo así ya que nos preguntamos ¿Qué pasaría si el aduanero nos pidiera un soborno de 16 cigarrillos? ¿Cómo debería actuar nuestro algoritmo?

Entendemos que en el siguiente caso nuestro pago del soborno debería ser una caja de 15 y una de 3. El algoritmo al ser greedy sabemos que obtendrá una solución pero por su condición esta no siempre será la más óptima como lo sería si devolvieramos un paquete de 13 y un paquete de 3. La cantidad de paquetes será la misma pero el resultado será exacto (no estaríamos devolviendo cigarrillos de más). El algoritmo greedy se centra principalmente en dar una solución que contenga lo pedido pero no siempre será lo óptimo.

Nuestra solución a este problema, es utilizar el máximo del arreglo ordenado, si vemos que ese máximo se sobrepasa del pedido por el aduanero, deberíamos hacer una combinación con ese monto, es por ello que nos guardamos una variable de incautado total para llevar cuenta de cuánto tenemos en total. En la próxima iteración, tendríamos, en el ejemplo de arriba, 15 guardado como incautado total y el arreglo quedaría para ver [3,5,8,10,13]. De nuevo chequeamos que el total incautado (15) más el elemento de mayor valor actual (13) no sobrepase el pedido total (16). Como el total incautado más el mayor valor actual es más que lo pedido, nuestro segundo elemento se encuentra en este arreglo. Por lo que nuevamente, hacemos una búsqueda lineal sobre el arreglo que nos quedó para encontrar el elemento que mejor nos quede con 15, que sería 3.

Como dijimos, se puede ver la deficiencia de este algoritmo, la mejor solución al problema sería devolver el paquete de 13 cigarrillos y el paquete de 3, pero se devuelve 15 y 3. Esto pasa para todos los casos en donde el soborno pedido sea mayor al máximo paquete de unidades que tengamos, no tendremos una solución exacta. Pero como es un algoritmo greedy, nos conformamos con esa solución.

Casos en donde el resultado de nuestro algoritmo es óptimo podrían ser las siguientes, teniendo un arreglo de [3,5,8,10,13,15] nos pidieran algo que no sobrepase el 15, por ejemplo 9,11,5 o cualquier otro número $<= 15$.Por el otro lado si nos pidieran algún número >15, donde combinando 15 +(otros máximos,13,10) + la solución que nos acerque al número no sea exacta teniendo otra combinación no exacta. Unos ejemplos de donde sería óptimo podría ser que nos pidieran :

Soborno Pedido (cigarrillos)	Incautado
32	15,3,5
18	15,3
40	15,13,10,3

Y ejemplos donde la solución no sea la óptima podrían ser:

Soborno Pedido (cigarrillos)	Incautado	Incautado Optimo
16	15,3	8,5,3 | 13,3
21	15,8	10, 8, 3
24	15,10	13, 8, 3

Describir e implementar un algoritmo (que sea óptimo) que resuelva el problema utilizando programación dinámica.

En una primera instancia para poder resolver este problema intentamos hacerlo a través de una modificación del problema de knapsack (problema de la mochila). Partimos de ello intentando amoldarlo a nuestras necesidades y restricciones. Interpretamos el peso de la mochila como el soborno que se nos pedia pero en este caso, en vez de tratar de maximizar esto con los paquetes que teniamos intentaríamos setear esta variable como un peso mínimo al que debería llegar la mochila. Luego de intentar varias modificaciones al no obtener los resultados esperados se nos ocurrió interpretar el problema de otra manera. Donde, en vez de resolver el problema de intentar llenar la mochila con el peso mínimo resolveríamos de alguna forma su çomplemento". Esto significaba, tener un peso máximo (que sería la sumatoria de todos los valores de los paquetes disponibles) y tener un peso mínimo, el cual efectivamente seguiría siendo el soborno pedido. En este caso lo que hicimos fue hacer la diferencia entre este peso máximo con el peso mínimo. Con esto obtendríamos un nuevo peso que sería el peso máximo definitivo de una "nueva mochila".Una forma mas bien practica de verlo es, sin tener ninguna restriccion por parte del aduanero, nosotros quisieramos maximizar todos los productos que queremos llevar en la mochila, siendo este maximizante la suma de todos. Pero en el caso de que se nos ponga un limitante, quisieramos una vez mas maximizar lo que llevemos en la mochila con ese limitante impuesto. Al tener esto, podríamos intentar maximizar este peso máximo sabiendo que no nos pasaríamos de este, y por ende, lo que no metieramos en esta mochila (Osea, los que no entrasen en esa maximizacion), serían aquellos paquetes que debían ser utilizados para llegar al peso mínimo (soborno) de antes. Para verificar esto, pusimos como beneficio el mismo peso de los paquetes y realizamos una serie de pruebas y podemos decir, que, en efecto, funciona de la forma óptima que esperábamos.

Como bien sabemos, para poder realizar este problema con programacion dinamica hay que poder ser capaces de plantear los sub-problemas. En este caso, plantear estos como medida de la cantidad de elementos no es suficiente para saber de qué manera la presencia de un elemento condiciona a otros. Es por esto que fue necesario agregar un arreglo extra con cada beneficio que traeria agregar cada paquete si decidieramos incluirlo. Para este arreglo, como no teniamos algun tipo de beneficio obligatorio asignamos el mismo valor del peso. Es decir, un paquete de 5 cigarrillos tendria un beneficio de 5 si se agrega, y así sucesivamente, como en un problema habitual de la mochila.

Justificar la complejidad de ambos algoritmos propuestos. Indicar casos (características y ejemplos) de deficiencias en el algoritmo greedy propuesto, para los cuales este no obtenga una solución óptima.

Tomando en cuenta que n = cantidad de cosas que el usuario tomo, h = cantidad de paquetes de una cosa, es decir que si el usuario compro 6 paquetes de cigarrillos, teniendo [15,12,14,7,2,4] una posible compra, tenemos n = 1 y h = 6 dado que hay 6 paquetes y hay una sola cosa, los cigarrillos. Mientras que en el caso de soborno tenemos algo parecido, aunque el aduanero nos pedira solamente un paquete, es decir que h = 1 siempre, lo que cambia es que cosas nos pedira, puede ser medialunas, naranjas del sahara, cupones para evadir el ente impuestario, etc. Teniendo en cuenta la precondicion de tener disponible las cosas que el aduanero nos pide, podriamos tener en el peor de los casos t = "cantidad de cosas que se nos pide al pasar", t=n, si el aduanero es muy estricto, aunque tomaremos dos variables, donde t siempre es <= n. Para comenzar, decidimos que la forma que se recibian los datos serian dentro de un arreglo de estructuras del tipo:

```
1
2     class paquete:
3    def __init__(self, nombre, unidades):
4        self.nombre = nombre
5        self.unidades = unidades
```

donde el algoritmo greedy al igual que el de dinámica recibieron por ejemplo:

```
1
2     unidades_cigarillos = [3,5,8,10,13,15]
3     productos = []
4     unidades_coca = [12,11,7,15,2,6]
5     for unidad in unidades_coca:
6     productos.append(paquete("coca",unidad))
7     for unidad in unidades_cigarillos:
8         productos.append(paquete("cigarrillos", unidad))
9
10    soborno_cigarrillos = paquete("cigarrillos", 29)
11    soborno_cocas = paquete("coca",7)
12    incautado = algoritmo(productos, [soborno_cigarrillos,soborno_cocas]
```

y devolverian un diccionario con los paquetes de cada objeto que se dejarian en la aduana

Algoritmo greedy

En el comienzo del algoritmo greedy: decidimos guardar los productos que necesitaramos en un diccionario para poder acceder a aquellos más fácilmente, teniendo un O(n), ya que se recorre todos los productos comprados por el usuario y los guarda. Teniendo en cuenta que guardar en un diccionario una lista haciendo una copia de la misma, hacer esto costaria O(n*h) tomando el peor caso, donde uno sea mas grande que los otros o que todos tengan la misma longitud. Luego de eso llamamos al algoritmo un total de t veces, siendo t la cantidad de sobornos de cosas que el aduanero nos pide.

Dentro de la operacion, tenemos primero un sort, que si tomamos un algoritmo comparativo de ordenamiento tendriamos h*log(h) ya que tomamos el peor de los casos donde tengamos muchos productos de algo que se compro. Esto lo hacemos para poder hacer la siguiente comparacion, un while hasta que el primero que se esta viendo sea mayor que el soborno que se pide. Esto, en el caso [3,5,8,10,13,15], el aduanero nos podria pedir 51 elementos en un mal dia, teniendo que buscar por cada uno de los primeros elementos e ir sumandolos, determinando que deberiamos empezar con el 3. Esto podria tomar, en el peor de los casos O(h) ya que vamos aumentando 1 en el indice y no hacemos .pop que llevaria la complejidad a $O(h^2)$ (tomamos que el append y el acceder a un diccionario es O(1)). Por el otro lado hacemos una busqueda binaria sobre el arreglo que nos queda, que en el peor de los casos seria cuando tenemos que buscar sobre toda la cantidad de productos, teniendo O(log h). Mientras que lo otro que se hace es preguntar si esta algo en un diccionario, y ponerle una cantidad a ese valor, siendo todo O(1) segun las complejidades de python.

Llevamos en la funcion de operacion un total de O(h*log(h)+h+log(h)), pero esta operacion se llama t veces, dado que serian t sobornos que se estan pidiendo, teniendo en el algoritmo greedy una complejidad de O(n+t*(h*log(h)+h+log(h))) que podemos achicar en O(n+t*h*log(h)).

Aclaracion, se devuelve el incautado en formato de diccionario. Si quisieramos devolverlo en formato de lista donde siguiendo el orden de los sobornos pedidos tendriamos que agregar una complejidad de O(t), pero no pensamos que fuera mas entendible devolverlo de esta manera.

Algoritmo de programación dinámica

Al igual que el algoritmo greedy, empezamos con hacer un diccionario de los productos para poder tener los paquetes con sus respectivas unidades, que cuesta O(n). Luego al empezar la operación dinámica,hacemos la suma de todos los elementos de los productos, que es O(n). Cómo pensamos el problema como un problema de la mochila, la complejidad de serie: $O(n * 2^m)$, donde W se calcula a partir de la suma total de todos los elementos restado al soborno que se nos pide, y m son los bits que se usan para escribir ese W . Luego de esto, vamos para atrás en la matriz y luego usando los índices que se devolvieron de la ejecución de la mochila usando W agarramos los productos que se deben incautar. Las dos llamadas son O(n) dado que se revisan todos los elementos en el for, por lo que la llamada a la operación dinámica se resuelve en $O(n+n*2^m+n+n)$ y esto se llama por cada soborno que se toma, por lo que resumiendo seria $O(t * n * 2^m)$.

Pruebas

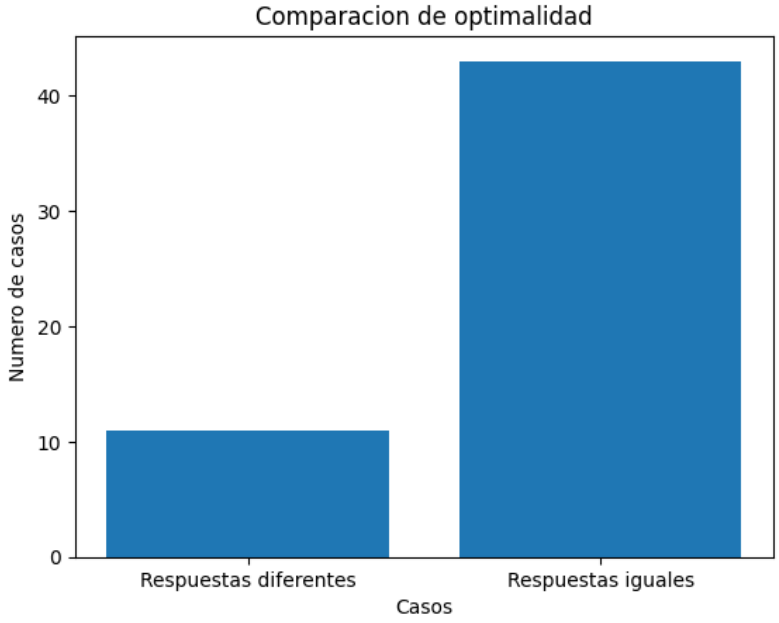
Para comenzar, en los dos algoritmos utilizamos un set para probar su correcto funcionamiento, dado que haciamos cambios en el algoritmo, queriamos saber si estos seguian funcionando de la manera en que fueron escritos, estas pruebas fueron escritas con los valores que deberian devolver, y estas fueron:

```
1
2  test_soborno_con_exactos_13_cigarrillos
3  test_soborno_con_exactos_3_cigarrillos
4  test_soborno_con_menos_cigarrillos_1
5  test_soborno_con_menos_cigarrillos_2
6  test_soborno_con_menos_cigarrillos_3
7  test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_exacta_1
8  test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_exacta_2
9  test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_exacta_3
10 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_exacta_4
11 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_no_exacta_1
12 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_no_exacta_2
13 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_no_exacta_3
14 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_dos_no_exacta_4
15 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_exacta_1
16 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_exacta_2
17 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_exacta_3
18 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_exacta_4
19 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_exacta_5
20 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_no_exacta_1
21 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_no_exacta_2
22 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_no_exacta_3
23 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_no_exacta_4
24 test_soborno_con_mas_cigarrillos_pero_suma_de_mas_de_dos_no_exacta_5
25 test_soborno_con_dos_o_mas_productos_1
26 test_soborno_con_dos_o_mas_productos_2
```

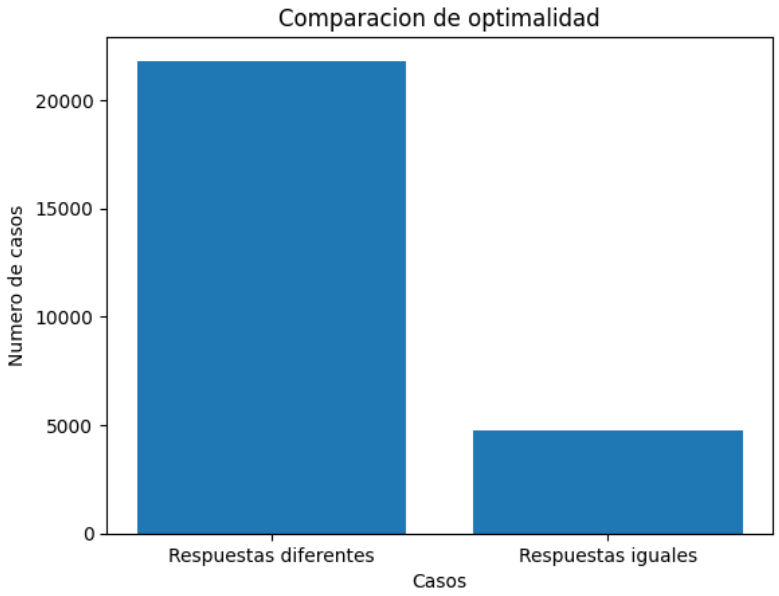
Dando un tick si el resultado era el correcto y una cruz si el resultado no era el esperado. Despues para el algoritmo de programacion dinamica, decidimos probar cada uno de los resultados de un set de datos era exacto, utilizando [3,5,8,10,13,15] para las unidades de los cigarrillos y haciendo una fuerza bruta para cada uno de los posibles resultados entre la suma de sus miembros, y luego comparando con el resultado de la suma de los miembros de la respuesta de programacion dinamica, para ver que efectivamente estuviesemos devolviendo un resultado correcto. Estos son algunas pruebas:

```
chequeo si es optimo con 16
chequeo si es optimo con 10
chequeo si es optimo con 13
chequeo si es optimo con 15
chequeo si es optimo con 18
chequeo si es optimo con 18
chequeo si es optimo con 21
chequeo si es optimo con 23
chequeo si es optimo con 26
chequeo si es optimo con 13
chequeo si es optimo con 16
chequeo si es optimo con 18
chequeo si es optimo con 21
chequeo si es optimo con 21
chequeo si es optimo con 24
chequeo si es optimo con 26
chequeo si es optimo con 29
chequeo si es optimo con 23
chequeo si es optimo con 26
chequeo si es optimo con 28
```

Por ultimo, utilizamos un programa que verificase la optimalidad de ambas soluciones. Es por esto, que utilizando el set anterior, fuimos por cada uno de los numeros hasta el 54, que es el resultado de la suma de todos los elementos, y verificamos si la respuesta de cada uno de los algoritmos era la misma:



Podemos ver que la diferencia de los casos aca no pareciese mucho, pero esto es porque no tenemos tantos elementos como para elegir, se podria aumentar la cantidad de elementos que nos traemos de contrabando para ampliar la diferencia y demostrar cuan optimo es el algoritmo de programacion dinamica. Para eso, utilizamos un set de datos de 100 elementos, donde esos elementos pueden tener un valor entre 1 y 500. Luego para cada uno de los valores de 1 hasta la suma de todos esos 100 elementos, decidimos probar y ver cuan diferentes eran los resultados de los algoritmos, y recibimos esto:



Utilizamos otra prueba de volumen para el caso donde se nos pida dos tipos de sobornos, cigarrillos y coca, utilizando la misma tecnica previa a esto Por ultimo, si bien el algoritmo de programación dinámica siempre da una solución óptima, los tiempos de ejecución y de complejidad entre los algoritmos son muy diferentes, siendo el algoritmo greedy mucho mas rápido que el de programación dinámica.Ya con las pruebas de volumen nos podemos dar cuenta que se toma mucho tiempo para hallar la forma óptima, dando un tiempo de 4hs para correr la prueba del programa con los dos algoritmos. Es por ello, que antes de ejecutar o el algoritmo greedy o el de programación dinámica, debemos pensar si si o si necesitamos una solución óptima o una solución que puede entrar en el marco de óptimo en algunos casos, como es en el algoritmo greedy.