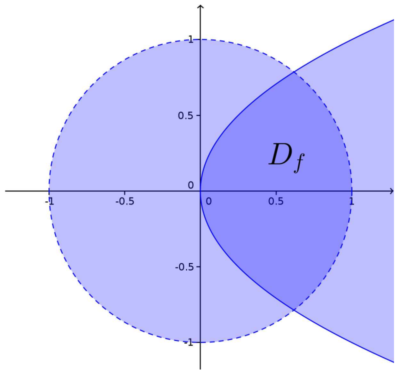
• Funkce více proměnných - definiční obor, vrstevnice, parciální derivace, gradient

Při určování definičního oboru funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hledáme takovou podmnožinu $\mathbb{R}^2$, pro kterou má výraz ve funkčním předpisu funkce f smysl.

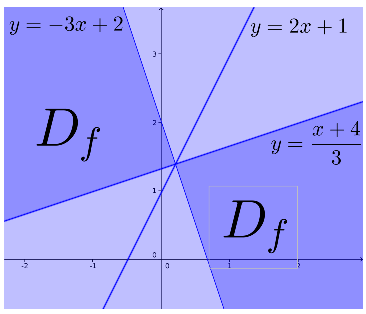
Příklad: Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

Řešení: Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj. $x \geq y^2$. Zároveň můžeme logaritmovat pouze kladná čísla, tj. $x^2 + y^2 < 1$. Definiční obor znázorníme graficky:



Příklad: Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x+2y-3}{2x-y+1}\right)$.

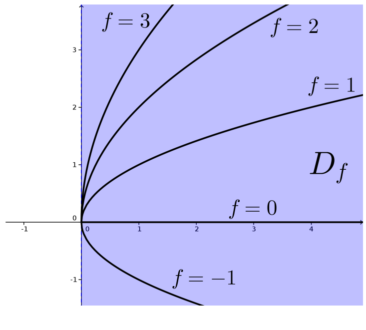
Řešení: Definiční obor funkce arcsin je interval $[-1,1]$, tedy $-1 \leq \frac{x+2y-3}{2x-y+1} \leq 1$. První nerovnost můžeme přepsat jako $0 \leq 1 + \frac{x+2y-3}{2x-y+1} = \frac{3x+y-2}{2x-y+1}$. Čitatel i jmenovatel tedy musejí mít stejná znaménka. Druhá nerovnost lze přepsat jako $0 \geq \frac{x+2y-3}{2x-y+1} - 1 = \frac{-x+3y-4}{2x-y+1}$. Zde musejí mít čitatel a jmenovate různá znaménka. Přímky $3x+y-2=0$, $2x-y+1=0$ a $-x+3y-4=0$ rozdělí rovinu na 6 oblastí. Z každé oblasti dosadíme do nerovnic jeden bod a zjistíme, že vyhovují právě dvě oblasti:



Křivky o rovnicích $f(x,y) = c_i$ tvoří vrstevnice grafu funkce f. Hodnotám $c_i \in H_f$ se říká kóty.

Příklad: Nakreslete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$ o kótách $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$ a $c_5 = 3$.

Řešení: Vrstevnice jsou grafy funkcí $y = c_i\sqrt{x}$, tj.



Obsahuje-li předpis funkce více než jednu proměnnou, můžeme tuto funkci derivovat podle různých proměnných. Při derivování podle jedné proměnné vždy považujeme ostatní proměnné za konstanty. Budeme pracovat pouze s funkcemi 2 a 3 proměnných. Nejčastěji se používají následující typy zápisů parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f_x, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = f_{xy}$$

Příklad: Spočtěte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x, y) = y^2 \ln 2x$.

Řešení:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\big(y^2 \ln 2x\big) \;=\; \frac{y^2}{x} \qquad \text{a} \qquad f_y = \frac{\partial}{\partial y}\big(y^2 \ln 2x\big) \;=\; 2y \ln 2x.$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{x}\right) \;=\; -\frac{y^2}{x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\big(2y \ln 2x\big) \;=\; \frac{2y}{x}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(2y \ln 2x\big) \;=\; 2 \ln 2x.$$

Příklad: Spočtěte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x, y) = x^y$.

Řešení:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^y\big) \;=\; y \cdot x^{y-1} \qquad \text{a} \qquad f_y = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^y\big) \;=\; x^y \cdot \ln x.$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\big(yx^{y-1}\big) \;=\; y(y-1)x^{y-2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(yx^{y-1}\big) \;=\; x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^y \ln x\big) \;=\; x^y \ln^2 x.$$

Platí, že jsou-li všechny druhé derivace spojité, je $f_{xy} = f_{yx}$ a je tedy jedno, v jakém pořadí smíšenou druhou derivaci počítáme (nejdřív x a pak y, nebo obráceně). Vektoru parciálních derivací se říká gradient a značí se

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) \;=\; \nabla f(x, y, z) \;=\; (f_x, f_y, f_z)$$

Příklad: Zjistěte, v kterém bodě roviny má funkce $f(x, y) = x^2 - 6xy + 4y^2 + 2x + 4y - 1$ nulový gradient.

Řešení: Platí, že $\nabla f = (f_x, f_y) = (2x - 6y + 2, -6x + 8y + 4)$. Vyřešením soustavy rovnic $2x - 6y + 2 = 0$ a $-6x + 8y + 4 = 0$ zjistíme, že gradient je nulový v bodě $(x, y) = (2, 1)$.

• Spočítejte a pošlete mi mailem:

Zakreslete definiční obor funkcí

1. $f(x, y) = \frac{\ln(2y+3-x^2-y^2)}{\sqrt{2x-y}}$
2. $g(u, v) = \arcsin \frac{u-1}{v}$

Zakreslete vrstevnice funkcí o pěti vámi zvolených kótách

3. $h(x, y) = \sqrt{(3-x)y}$
4. $\varphi(p, q) = \sin(p - q)$

Spočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu následujících funkcí

5. $\psi(s, t) = \ln(s^3 + t)$
6. $\sigma(x, y, z) = x^3 + 8y^3 - z^2 + 3xy + 2z + 1$ (určete navíc, ve kterých bodech má funkce nulový gradient)