

Komponenta výukového serveru TI - P-úplné problémy

Component of Teaching Server for Theoretical Computer Science - Pcomplete problems

Tomáš Kirnig

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Martin Kot, Ph.D.

Ostrava, 2025



Zadání bakalářské práce

Student:

Tomáš Kirnig

Studijní program:

B0613A140014 Informatika

Téma:

Komponenta výukového serveru TI - P-úplné problémy

Component of Teaching Server for Theoretical Computer Science - P-
complete problems

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

V rámci diplomových a bakalářských prací vzniká výukový server pro předměty teoretické informatiky. Jedná se o sadu dynamických webových stránek umožňujících studentům pochopení různých typů úloh a problémů. Na rozdíl od běžných výukových textů s pevně daným počtem ukázkových příkladů umí tyto stránky generovat libovolně mnoho ukázků na základě vstupů od uživatele. Cílem této konkrétní bakalářské práce je vytvořit komponentu pro pomoc s výukou tzv. P-úplných problémů.

Vytvořte dynamické webové stránky umožňující uživateli následující:

1. Simulovat výpočet řešení problému Monotone Circuit Value Problem (MCVP) a alespoň 2 dalších P-úplných problémů.
2. Vstupy těchto algoritmů bude moci uživatel zadávat třemi způsoby:
 - a) Vhodným, uživatelsky přívětivým, způsobem ručně.
 - b) Nechat si vstup vygenerovat zcela náhodně podle nastavených parametrů.
 - c) Vybrat z předpřipravené sady vhodně zvolených vstupů.
3. Bude možné si zobrazit převod instance problému MCVP na ty dva zvolené P-úplné problémy. Přitom:
 - a) Instanci MCVP pro převod bude možné zadat kterýmkoliv z výše uvedených způsobů.
 - b) Převod si bude moci uživatel krokovat se zobrazením slovního vysvětlení jednotlivých kroků.
 - c) Na převodem vytvořenou instanci bude opět možné použít výše požadovanou simulaci výpočtu řešení.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Miyano, S., Shiraishi, S., Shoudai, T.: "A List of P-Complete Problems", Kyushu University, RIFIS-TR-CS-17, December 1990, dostupné z URL: https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/3123/rifis-tr-17.pdf
- [2] Sawa, Z.: "Teoretická informatika", podklady pro přednášky, VŠB - Technická univerzita Ostrava, dostupné z URL: <https://www.cs.vsb.cz/sawa/ti/slides/ti-slides-03.pdf>
- [3] Papadimitriou, C.: Computational Complexity, Addison Wesley, 1993
- [4] Arora, S., Barak, B.: Computational Complexity: A Modern Approach, Cambridge University Press, 2009

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Kot, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2024

Datum odevzdání: 30.04.2025

Garant studijního programu: doc. Mgr. Miloš Kudělka, Ph.D.

V IS EDISON zadáno: 30.10.2024 09:50:55

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá vývojem výukové webové aplikace pro demonstraci P-úplných problémů. Cílem je usnadnit studentům pochopení a procvičování těchto problémů. Aplikace se zaměřuje na tři P-úplné problémy: *Monotone Circuit Value Problem* (MCVP), *prázdnou gramatiku* a *kombinatorickou hru*. Práce zahrnuje implementaci modulů pro interaktivní zadávání vstupů (ručně, náhodnou generací nebo výběrem z připravené sady) a simulaci jejich řešení. Uživatel může také sledovat krokový převod instance MCVP na další zmíněné problémy a následně jejich řešení.

Klíčová slova

Teoretická informatika, P-úplné problémy, Monotone Circuit Value Problem, webová aplikace, simulace, převod instancí

Abstract

This bachelor's thesis focuses on the development of a teaching-oriented web application for illustrating P-complete problems. The main goal is to facilitate students' understanding and practice of such tasks. The application focuses on the *Monotone Circuit Value Problem* (MCVP), *Empty Grammar*, and the *Combinatorial Game*. The project implements modules for interactive input of problem instances (manually, via random generation, or by selecting from a pre-defined set) and provides a simulation of their solutions. Users can also observe a step-by-step reduction from an MCVP instance to the other mentioned problems and subsequently explore how those are solved. The resulting application demonstrates key concepts of theoretical computer science, including the notion of P-completeness, and provides a flexible basis for educational use.

Keywords

Theoretical computer science, P-complete problems, Monotone Circuit Value Problem, web application, simulation, instance reduction

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratek	6
Seznam obrázků	7
Seznam tabulek	8
1 Úvod	9
2 Použité technologie a architektura	11
3 Monotone Circuit Value Problem	12
4 Kombinatorické hry na grafu	13
5 Prázdnost bezkontextových gramatik	14
6 Závěr	15
Literatura	16
Přílohy	16
A Dlouhý zdrojový kód	17

Seznam použitých zkrátek a symbolů

MCVP	– Monotone Circuit Value Problem
PC	– P-complete
BFS	– Breadth-First Search
DFS	– Depth-First Search

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Kapitola 1

Úvod

Teoretická informatika poskytuje způsob jak zkoumat, porozumět a optimalizovat možnosti a limity výpočetních systémů. Hlavním bodem tohoto zkoumání je teorie složitosti, která klasifikuje problémy na základě zdrojů potřebných pro jejich vyřešení, jako je čas a paměť. Jednou z nejvýznamnějších složitostních tříd je třída P , zahrnující problémy řešitelné v polynomiálním čase – tedy takové, jejichž časová složitost lze vyjádřit jako $O(n^k)$ pro nějakou konstantu k (například $k = 2$ pro kvadratickou složitost, $k = 3$ pro kubickou), kde n je velikost vstupu – na deterministickém Turingově stroji [1]. Ačkoliv jsou problémy v této třídě tradičně považovány za „efektivně řešitelné“, existují mezi nimi zásadní rozdíly, hlavně jestli uvažujeme o možnostech jejich paralelizace.

V tomto kontextu hraje klíčovou roli koncept *P-úplnosti* (P-completeness). P-úplné problémy představují výpočetně nejnáročnější úlohy v rámci třídy P . Jsou to problémy, na které lze v logaritmickém prostoru redukovat jakýkoliv jiný problém z P . Důležitost této klasifikace spočívá v hypotéze, že P-úplné problémy pravděpodobně nelze efektivně paralelizovat (nepatří do třídy NC), a jejich řešení je tedy inherentně sekvenční [2]. Studium těchto problémů tak umožňuje lépe vymezit hranici mezi úlohami, které lze urychlit paralelním zpracováním, a těmi, které vyžadují striktně sériový postup.

Výuka těchto abstraktních konceptů však představuje značnou výzvu. Porozumění formálním definicím redukcí a složitostních tříd pouze prostřednictvím statického textu může být pro studenty obtížné. Zatímco pro základní algoritmy existuje řada vizualizačních nástrojů, oblast složitostní teorie – a konkrétně P-úplnost – zůstává v edukačním softwaru často opomíjena. Cílem této práce je tuto mezeru zaplnit návrhem a implementací interaktivní výukové komponenty, která umožní dynamickou demonstraci těchto principů.

Jako referenční problém byl zvolen *Monotone Circuit Value Problem* (MCVP), který spočívá ve vyhodnocení logického obvodu složeného z monotonních hradel a přirozeně modeluje tok výpočtu [3]. Pro demonstraci univerzálnosti konceptu P-úplnosti aplikace implementuje také simulace dvou dalších problémů z odlišných domén:

- **Kombinatorické hry na grafu:** Úloha analyzující existenci vítězné strategie v deterministických hrách dvou hráčů.
- **Prázdnost bezkontextových gramatik:** Problém rozhodující, zda daná gramatika generuje neprázdný jazyk [4].

Hlavním přínosem vytvořené aplikace je možnost vizualizace nejen samotného řešení těchto úloh, ale především *převodů* (redukcí) mezi nimi. Uživatel může sledovat krokovou transformaci instance MCVP na instanci hry nebo gramatiky, což názorně ilustruje princip polynomiálních redukcí a vzájemnou převoditelnost P-úplných problémů [2].

Výsledkem práce je moderní webová aplikace navržená jako flexibilní nástroj pro výuku. Umožňuje uživatelům pracovat s vlastními vstupy, generovat náhodné instance pro testování a využívat předpřipravené sady úloh pro řízené studium.

Text práce je členěn do logických celků. Po úvodu následuje kapitola věnovaná použitým technologiím a architektuře aplikace. Jádro práce tvoří tři kapitoly, z nichž každá se detailně věnuje jednomu z implementovaných problémů: nejprve Monotone Circuit Value Problem (MCVP), následně kombinatorické hry na grafu a nakonec problém prázdnosti bezkontextových gramatik. Závěr práce shrnuje dosažené výsledky a navrhuje možnosti dalšího rozšíření.

Kapitola 2

Použité technologie a architektura

Kapitola 3

Monotone Circuit Value Problem

Kapitola 4

Kombinatorické hry na grafu

Kapitola 5

Prázdnost bezkontextových gramatik

Kapitola 6

Závěr

Literatura

1. PAPADIMITRIOU, Christos H. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1993. ISBN 978-0201530827.
2. ARORA, Sanjeev; BARAK, Boaz. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0521424264.
3. MIYANO, S.; SHIRAISHI, S.; SHOUDAI, T. *A List of P-Complete Problems*. 1990. Tech. zpr., RIFIS-TR-CS-17. Kyushu University. Dostupné také z: https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/3123/rifis-tr-17.pdf.
4. SAWA, Zbyněk. *Teoretická informatika – Podklady pro přednášky* [Online]. 2024. Dostupné také z: <https://www.cs.vsb.cz/sawa/ti/slides/ti-slides-03.pdf>.

Příloha A

Dlouhý zdrojový kód