Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Matemática Superior

Unidad 1: Números complejos

Ejercicios resueltos

Tomás Moreira

Marzo 2020

Índice

1. Introducción

¡Hola! Bienvenido a esta guía que busca mostrar la resolución de algunos ejercicios de la primera unidad de la materia: Números Complejos. El documento está hecho al 100 % con $\mathcal{AMS}$-LaTeX. Esperemos que te sea de utilidad, y no dudes en consultar cualquier duda.
Como repaso de álgebra, vemos las operaciones más importantes y tratamos con estos números en sus distintas formas. Estos nos van a servir en futuras unidades, como Serie de Fourier y Función de transferencia.

2. Forma binómica

2.1. Ejercicio 1d

Resuelva la siguiente operación en forma binómica:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{(4+7\mathrm{j})\cdot(6-2\mathrm{j})}{2\mathrm{j}}\right]+4\mathrm{j}=$$

Para resolver este ejercicio necesitamos resolver primero todo lo que se encuentre dentro del operador 'Im'. Entonces, realizamos primero la multiplicación en el numerador:

$$(4+7\mathrm{j})\cdot(6-2\mathrm{j})=$$

$$4\cdot 6+4\cdot(-2\mathrm{j})+7\mathrm{j}\cdot 6+7\mathrm{j}\cdot(-2\mathrm{j})=$$

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}-14\mathrm{j}^2$$

Recordemos que $\mathrm{j}^2=-1$, entonces aplicando esta igualdad, podemos reemplazar donde corresponde:

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}-14\cdot(-1)=$$

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}+14=$$

$$\boxed{38-34\mathrm{j}}$$

Esta es la expresión resultante, por lo que la reemplazamos en la original:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{38-34\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right]+4\mathrm{j}=$$

El paso siguiente es realizar la división de los números complejos, para eso multiplicamos y dividimos por j:

$$\frac{38-34\mathrm{j}}{\mathrm{j}}=$$

$$\frac{(38-34\mathrm{j})\cdot\mathrm{j}}{2\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}}=$$

$$\frac{38\mathrm{j}+34}{-2}=\boxed{-17-19\mathrm{j}}$$

Volvemos a reemplazar lo obtenido en la expresión original:

$$\mathrm{Im}\left[-17-19\mathrm{j}\right]+4j=\cdots$$

Ahora, si tenemos a un número complejo de la forma $z=a+b\mathrm{j}$, definimos $\mathrm{Im}(z)=b$, **SIN** la j.

Entonces, aplicando esto a la expresión obtenemos el resultado final:

$$\boxed{-19+4\mathrm{j}}$$

2.2. Ejercicio 5a

Determine el conjunto de los complejos que cumplan las siguientes condiciones:

Que su cuadrado sea igual a su conjugado

Para resolver este ejercicio vamos a traducir lo que dice el enunciado en notación literal.

Consideremos un número complejo $z=x+y\mathrm{j}$

Lo que nos piden, entonces es:

$$z^2=\overline{z}$$

Recordemos la definición del conjugado de un número complejo:

$$\text{Sea } z=x+y\mathrm{j}, \text{ entonces } \overline{z}=x-y\mathrm{j}$$

Es decir, dado un número complejo, su conjugado es el resultado de cambiarle el signo a su parte imaginaria.

Con esto dicho, empecemos a operar:

$$(x+y\mathrm{j})^2=x-y\mathrm{j}$$

$$x^2+2xy\mathrm{j}+y^2\mathrm{j}^2=x-y\mathrm{j}$$

Recordemos que $\mathrm{j}^2=-1$ y acomodemos un poco la ecuación:

$$x^2-y^2+2xy\mathrm{j}=x-y\mathrm{j}$$

Ahora bien, para que esta igualdad se cumpla, hay que recordar la igualdad de números complejos:

Sean $r=a+b\mathrm{j}\wedge s=c+d\mathrm{j}$ entonces, estos dos números complejos son iguales sí y solo sí $a=c\wedge b=d$

Aplicamos lo previamente mencionado y vamos a obtener dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy=-y \end{cases}$$

Si consideramos que $y \neq 0$	Si consideramos que $y = 0$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2x\cancel{y} = -\cancel{y} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2x = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - 0 = x \\ y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Finalmente, las soluciones son:

$$\boxed{z = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee z = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee z = (1,0) \vee z = (0,0)}$$

3. Forma polar

4. Raíces n-ésimas

5. Logaritmo natural y exponenciales complejas

6. Ejercicios combinados

7. Superposición de señales senoidales de igual frecuencia