Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Matemática Superior

Unidad 11: Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Ejercicios resueltos

Tomás Moreira

Noviembre 2021

Índice

1. Ejercicio 1

¿Es posible determinar si el problema de valor inicial $y'(t) = f(x,y)$ con $x \in [a,b] \wedge y(a) = \alpha$ tiene solución y si está bien planteado?

a) $y' = y\cos(x) \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 1$

b) $y' = \frac{2}{x}y + e^x x^2 \quad x \in [1,2] \;\; y(1) = 0$

c) $y' = 1 - y \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 0$

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y} \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 1$

e) $y' = x^2 y + 1 \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 1$

Un problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$ $t \in [a;b]$ está bien planteado si cumple con las siguientes condiciones:

- $f(t,y)$ es continua en $R = \{(t,y)/t \in [a;b] \wedge y \in [c;d]\}$
- Cumple con la condición de Lipschitz en R

La condición de Lipschitz para una función $f(t,y)$ se cumple si $\exists L, L > 0 \; / \; |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. Donde L es la constante de Lipschitz.

Propiedad: $L = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left| \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$

a) $y' = y\cos(x) \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 1$

Planteamos la definición:

$|y_1\cos(x) - y_2\cos(x)| \leq |y_1 - y_2||\cos(x)|$, como $x \in [0,1]$, y estamos acotando, el coseno es máximo para $x = 0$: $|y_1 - y_2||\cos(x)| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2|$. Se cumple la condición de Lipschitz, ya que encontramos un L.

b) $y' = \frac{2}{x}y + e^x x^2 \quad x \in [1,2] \;\; y(1) = 0$

Vamos a usar la propiedad para encontrar el L en este caso:

$$L = \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| = \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{\partial(\frac{2}{x}y + e^x x^2)}{\partial y} \right| = \max_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{2}{x} \right| = 2 \implies L = 2$$

c) $y' = 1 - y \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 0$

$|1 - y_1 - 1 + y_2| \leq |-y_1 + y_2| \leq |-1| \cdot |y_1 - y_2| \implies L = 1$

Por derivada parcial:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\partial(1-y)}{\partial y} \right| = \max_{0 \leq x \leq 1} |-1| = 1 \implies L = 1$$

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y} \quad x \in [0,1] \;\; y(0) = 1$

Por derivada parcial: $\max_{0\leq x\leq 1}\left|\dfrac{\partial(-xy+\frac{4x}{y})}{\partial y}\right| = \max_{0\leq x\leq 1}\left|-x-\dfrac{4x}{y^2}\right| = ???$

La derivada parcial depende de y, pero no tenemos definido ningún rango de valores para y, no sabemos por donde acotar. No es posible encontrar una L, por ende el problema no está bien planteado.

Por definición:

$$\left|-xy_1+\frac{4x}{y_1}+xy_2-\frac{4x}{y_2}\right| \leq \left|-x(y_1-y_2)+\frac{4x}{y_1}-\frac{4x}{y_2}\right| \leq ????$$

No hay forma de despejar L, ya que tengo las y en numerador y denominador.

e) $y' = x^2y+1 \quad x\in[0,1] \;\; y(0)=1$

Por derivada parcial:

$$\max_{0\leq x\leq 1}\left|\frac{\partial(x^2y+1)}{\partial y}\right| = \max_{0\leq x\leq 1}\left|x^2\right| = 1 \implies L=1$$

Como pudimos encontrar un L, el problema está bien planteado.

2. Ejercicio 2

Marque la opción correcta:

La Ecuación diferencial $y'(t) = -ty$ con $y(0)=1$ en $R=\{(t,y)\in\mathbb{R} \;/\; 0\leq t\leq 3 \wedge 0\leq y\leq 2\}$

a) Cumple la condición de Lipschitz con $L=2$

b) Cumple la condición de Lipschitz con $L=3$

c) Cumple la condición de Lipschitz con $L=6$

d) No cumple la condición de Lipschitz en $\mathbb{R}$

Calculamos la derivada parcial:

$$\max_{0\leq t\leq 3}\left|\frac{\partial(-ty)}{\partial y}\right| = \max_{0\leq t\leq 3}|-t| = 3 \implies L=3$$

La respuesta correcta es la b.

3. Ejercicio 4

Resuelva las siguientes E.D. por medio de Euler, con el tamaño de paso indicado en cada una:

a) $y' = y+1$ con $y(0)=0$ $y(0.1)=?$ con $h=0.02$

b) $y' = 2(y-1)/t$ con $y(1)=2$ $y(1.5)=?$ con $h=0.1$

c) $y'-y = 2t-t^2$ con $y(0)=1$ $y(1)=?$ con $h=0.2$

El método de Euler proviene de la serie de Taylor de orden 1.

Teniendo en cuenta un problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(t; y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2!}(t - t_i)^2 + \frac{y'''(t_i)}{3!}(t - t_i)^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(t_i)}{n!}(t - t_i)^n + \ldots$$

Si nos quedamos con los primeros dos términos:

$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i)$

Donde, por notación de método numérico reemplazamos a las y por w. Por convención, las w indican que es una solución aproximada, quedando la fórmula:

$w_{i+1} = w_i + f(t_i, w_i)(t_{i+1} - t_i)$
$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$

a) $y' = y + 1$ con $y(0) = 0$ $y(0.1) = ?$ con $h = 0.02$

Para resolverlos, hay que aplicar sucesivamente la fórmula de Euler, evaluada en los valores del ejercicio.

Entonces, primero hay que evaluar para obtener w_1. Para eso usamos los valores iniciales:

$w_1 = w_0 + h \cdot f(t_0, w_0) = 0 + 0.02 \cdot (0 + 1) = 0.02$

Para calcular los siguientes, usamos los valores que calculamos.

$w_2 = w_1 + h \cdot f(t_1, w_1) = 0.02 + 0.02 \cdot (0.02 + 1) = 0.0404$

$w_3 = w_2 + h \cdot f(t_2, w_2) = 0.0404 + 0.02(0.0404 + 1) = 0.061208$

Y asi sucesivamente.

i	t_i	w_i	w_{i+1}
0	0	0	0.02
1	0.02	0.02	0.0404
2	0.04	0.0404	0.061208
3	0.06	0.061208	0.08243216
4	0.08	0.08243216	0.1040808032

4. Ejercicio 5

De las siguientes afirmaciones sobre métodos de resolución numérica de ED, indique cual de ellas es verdadera:

a) En cualquier método, al reducir el h a la mitad, el error global se reduce a la mitad.

FALSO. Esto ocurre solamente en el método de Euler, para los otros métodos no necesariamente siempre la relación es lineal.

b) Es preferible utilizar el método de Taylor de orden 2 en vez de Heun.

FALSO. Para el método de Taylor hay que calcular derivadas de dos variables (es decir implícitas) de segundo orden, cosa que puede complicarse. En cambio con Heun logramos una precisión bastante buena sin necesidad de calcular derivadas.

c) Si $y(t)$ es lineal, al resolver $y'(t) = f(t, y)$ por Euler se obtiene resultado exacto, para todo h.

VERDADERO. Como vimos, el método de Euler proviene el desarrollo en serie de Taylor de orden 1. Para el caso de una función $y(t)$ lineal, se anularían todas las derivadas de orden 2 en adelante, quedando el desarrollo de Taylor exactamente igual a la fórmula de Euler.

$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i)$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

5. Ejercicio 7

Sea el problema de valor inicial: $y' = x/y$ siendo $y(0) = 1$

Calcule $y(0.2)$ por el método de HEUN tomando $h = 0.1$

El método de Heun (o Euler modificado) en esencia consiste en aplicar el método de Euler dos veces. La fórmula es la siguiente:

$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w^*_{i+1})]$, donde $w^*_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$

Es decir que, con el método de Euler predecimos un valor para w y luego con Heun corregimos dicho valor.

Vamos a resolver el ejercicio paso a paso:

$w_0 = 1, t_0 = 0, h = 0.1$

$w_1 = w_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, w_0) + f(t_1, w^*_1)]$

$w^*_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = 1 + 0.1\left(\frac{0}{1}\right) = 1$

$w_1 = 1 + \frac{0.1}{2}\left[f(0, 1) + f(0.1, 1)\right] = 1 + \frac{0.1}{2}\left[\frac{0}{1} + \frac{0.1}{1}\right] = 1.005$

$w_2 = w_1 + \frac{0.1}{2}\left[f(t_1, w_1) + f(t_2, w^*_2)\right]$

$w^*_2 = 1.005 + 0.1(\frac{0.1}{1.005}) = 1.014950249$

$w_2 = 1.005 + \frac{0.1}{2}\left[\frac{0.1}{1.005} + \frac{0.2}{1.014950249}\right] = 1.019827824$

6. Ejercicio 8

Dado el problema: $y'(t^2 + t) - y = 0$ con $y(1) = 0.5$

a) Halle $y(2)$ con $h = 0.1$ mediante Euler.

b) Halle $y(2)$ con $h = 0.5$ mediante RK 4° orden.

c) ¿Cuál es más precisa?

Para resolver el problema, primero hay que lograr $y' = f(t, y)$

$$y' = \frac{y}{t^2 + t}$$

Con esta ecuación, podemos empezar a resolver.

Los métodos de Runge-Kutta son métodos que logran mucha precisión sin necesidad de calcular derivadas. En nuestro caso vamos a ver el Runge-Kutta de orden 4:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + h, w_i + k_3\right)$$

7. Ejercicio 10

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

a) Con el método de Euler se puede lograr siempre muy buena precisión

   Falso. Depende de la función y también depende que nosotros consideremos como "buena precisión"

b) Los métodos de Runge-Kutta son de paso simple.

   Verdadero. Ya que solo usamos los w_i para calcular w_{i+1}

c) El método de Euler es un método de paso simple.

   Verdadero. Por la misma razón que el item b.

d) La ventaja de los métodos de Runge Kutta es que obtienen la misma precisión que Taylor de orden superior sin necesidad de calcular derivadas de orden superior.

Verdadero. Está demostrado que RK de 4to orden tiene la misma precisión que Taylor de 4to grado, y la ventaja es que RK no calcula derivadas.

8. Ejercicio 12

La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4}{3}h[2f(t_i; w_i) - f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}; w_{i-2})]$, corresponde a:

a) método de paso simple

b) método de 2 pasos

c) fórmula explícita

d) ninguna de las anteriores

Es un método de 4 pasos (usa $w_i, w_{i-1}, w_{i-2}, w_{i-3}$) y es explícita porque no usa w_{i+1} en el cálculo. Por ende es correcta solo la afirmación c.

9. Ejercicio 13

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

a) Una fórmula implícita no puede usarse como etapa predictora

   Verdadero. Debido a que las fórmulas explícitas deben usarse como predictoras.

b) La fórmula: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}; w_{i+1}) + 19f(t_i; w_i) - 5f(t_{i-1}; w_{i-1}) + f(t_{i-2}; w_{i-2})]$ corresponde a un método de paso múltiple. (Si es así, indique de cuántos pasos).

   Verdadero. Es una fórmula de 3 pasos.
   MUCHO CUIDADO. La w_{i+1} no cuenta como paso, solo cuentan como paso desde la w_i para atrás. La w_{i+1} solo da la condición de implícita y de que la fórmula se puede usar en etapa correctora.

c) La fórmula anterior solamente puede usarse como etapa correctora.

   Verdadero, porque es implícita.

10. Ejercicio 15

La velocidad de emisión de radioactividad de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia remanente. La ecuación diferencial que describe este fenómeno es:

$$y' = -ky$$

donde el signo menos refleja el hecho de que la radioactividad disminuye con el tiempo. Supongamos que $k = 0.01$ y que hay $100g$. del material al tiempo $t = 0$. ¿Cuánto material queda cuando $t = 100$?

a) Halle la respuesta en forma analítica.

b) Halle la respuesta numéricamente con Euler ($h = 25, h = 10, h = 5, h = 1$)

c) Halle la respuesta numéricamente con Heun ($h = 20, h = 10$)

d) Halle la respuesta numéricamente con Runge-Kutta de 4to orden ($h = 100, h = 50$)

Inciso a

Volviendo al primer parcial, resolvamos por Transformada de Laplace:

$y' = -0.01y \quad , \quad y(0) = 100$

$sY(s) - y(0) = -0.01Y(s)$

$Y(s) = \dfrac{100}{s + 0.01}$

$y(t) = 100e^{-0.01t}$

$y(100) = 36.78794412$

Incisos bcd en Excel