Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Matemática Superior

Unidad 1: Números complejos

Ejercicios resueltos

Tomás Moreira

Marzo 2020

Índice

1. Introducción

¡Hola! Bienvenido a esta guía que busca mostrar la resolución de algunos ejercicios de la primera unidad de la materia: Números Complejos. El documento está hecho al 100 % con $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX. Esperemos que te sea de utilidad, y no dudes en consultar cualquier duda.
Como repaso de álgebra, vemos las operaciones más importantes y tratamos con estos números en sus distintas formas. Estos nos van a servir en futuras unidades, como Serie de Fourier y Función de transferencia.

2. Forma binómica

2.1. Ejercicio 1d

Resuelva la siguiente operación en forma binómica:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{(4+7\mathrm{j})\cdot(6-2\mathrm{j})}{2\mathrm{j}}\right]+4\mathrm{j}=$$

Para resolver este ejercicio necesitamos resolver primero todo lo que se encuentre dentro del operador 'Im'. Entonces, realizamos primero la multiplicación en el numerador:

$$(4+7\mathrm{j})\cdot(6-2\mathrm{j})=$$

$$4\cdot 6+4\cdot(-2\mathrm{j})+7\mathrm{j}\cdot 6+7\mathrm{j}\cdot(-2\mathrm{j})=$$

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}-14\mathrm{j}^2$$

Recordemos que $\mathrm{j}^2=-1$, entonces aplicando esta igualdad, podemos reemplazar donde corresponde:

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}-14\cdot(-1)=$$

$$24-8\mathrm{j}+42\mathrm{j}+14=$$

$$\boxed{38-34\mathrm{j}}$$

Esta es la expresión resultante, por lo que la reemplazamos en la original:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{38-34\mathrm{j}}{2\mathrm{j}}\right]+4\mathrm{j}=$$

El paso siguiente es realizar la división de los números complejos, para eso multiplicamos y dividimos por j:

$$\frac{38-34\mathrm{j}}{\mathrm{j}}=$$

$$\frac{(38-34\mathrm{j})\cdot\mathrm{j}}{2\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}}=$$

$$\frac{38\mathrm{j}+34}{-2}=\boxed{-17-19\mathrm{j}}$$

Volvemos a reemplazar lo obtenido en la expresión original:

$$\operatorname{Im}[-17-19\mathrm{j}]+4j=\cdots$$

Ahora, si tenemos a un número complejo de la forma $z=a+b\mathrm{j}$, definimos $\operatorname{Im}(z)=b$, **SIN** la j.

Entonces, aplicando esto a la expresión obtenemos el resultado final:

$$\boxed{-19+4\mathrm{j}}$$

2.2. Ejercicio 5a

Determine el conjunto de los complejos que cumplan las siguientes condiciones:

Que su cuadrado sea igual a su conjugado

Para resolver este ejercicio vamos a traducir lo que dice el enunciado en notación literal.

Consideremos un número complejo $z=x+y\mathrm{j}$

Lo que nos piden, entonces es:

$$z^2=\overline{z}$$

Recordemos la definición del conjugado de un número complejo:

Sea $z=x+y\mathrm{j}$, entonces $\overline{z}=x-y\mathrm{j}$

Es decir, dado un número complejo, su conjugado es el resultado de cambiarle el signo a su parte imaginaria.

Con esto dicho, empecemos a operar:

$$(x+y\mathrm{j})^2=x-y\mathrm{j}$$

$$x^2+2xy\mathrm{j}+y^2\mathrm{j}^2=x-y\mathrm{j}$$

Recordemos que $\mathrm{j}^2=-1$ y acomodemos un poco la ecuación:

$$x^2-y^2+2xy\mathrm{j}=x-y\mathrm{j}$$

Ahora bien, para que esta igualdad se cumpla, hay que recordar la igualdad de números complejos:

Sean $r=a+b\mathrm{j}\wedge s=c+d\mathrm{j}$ entonces, estos dos números complejos son iguales sí y solo sí $a=c\wedge b=d$

Aplicamos lo previamente mencionado y vamos a obtener dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-y^2=x & (1) \\ 2xy=-y & (2) \end{cases}$$

Resolvamos primero para (2)

$$2xy=-y$$

$$2x\cancel{y}=-\cancel{y}$$

¡¡Un momento!! ¿Está bien simplificar esas y?

Claro que sí, pero es importante tener la consideración de que y NO puede ser cero.
Por lo que nuestro ejercicio se va a dividir en dos. Una parte considerando que y sea cero y la otra, en la que vamos a considerar que **no** sea cero.

Si $y \neq 0$:

$$2x\cancel{y} = -\cancel{y}$$

$$2x = -1$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

Reemplacemos este resultado en 1

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$$

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Por lo que finalmente para este camino, tenemos dos soluciones:

$$\boxed{\left(x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(x = -\frac{1}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Ahora consideremos el otro camino.

Si $y = 0$:

En 1:

$$x^2 - 0^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = 0 \vee x = 1}$$

Recapitulando, en total obtenemos cuatro soluciones, que escritas en notación de par ordenado son:

$$\boxed{z = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee z = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee z = (1,0) \vee z = (0,0)}$$

2.3. Ejercicios 7cdh

Describa y construya la gráfica del lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones: (considere $z = x + y\mathrm{j}$)

2.3.1. 7c

c) $z\,(\overline{z} + 2) = 3$

Empecemos aplicando propiedad distributiva:

$$z\overline{z} + 2z = 3$$

Teniendo en cuenta que $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 + 2(x + y\mathrm{j}) = 3$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y\mathrm{j} = 3$$

Nuevamente debemos usar la igualdad entre complejos para resolver, entonces obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 3 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Como $y = 0$, reemplazamos en la otra ecuación:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

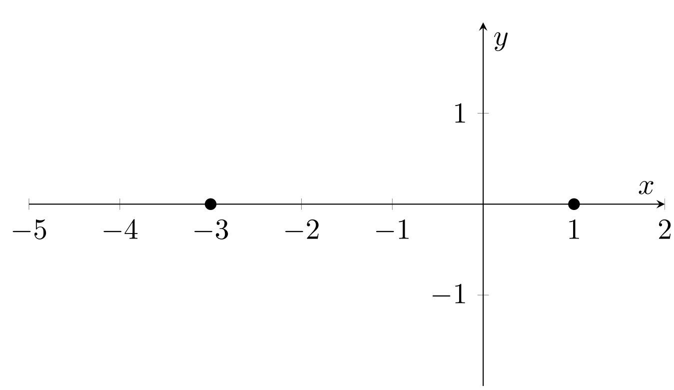
Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos:

$$x = 1 \vee x = -3$$

Por lo que nuestras soluciones son:

$$\boxed{z = (1, 0) \vee z = (-3, 0)}$$

La gráfica sería, entonces:



3. Forma polar

4. Raíces n-ésimas

5. Logaritmo natural y exponenciales complejas

6. Ejercicios combinados

7. Superposición de señales senoidales de igual frecuencia