Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Matemática Superior

Unidad 2: Series y Transformadas de Fourier

Ejercicios resueltos de final

Tomás Moreira

Abril 2020

Índice

1. Introducción

Esta recopilación está tomada de algunos finales que están disponibles en el aula virtual general de la materia, y algunos son de finales más nuevos (2018-2020). Las soluciones aquí planteadas cuentan con un mayor nivel de detalle.

2. Ejercicio 1

Final 19/12/2017. *Elegir la respuesta correcta*:
Dada la función $f(x) = e^x - 1$ en $[0, 1)$, para que tenga simetría de media onda con período $T = 2$ hay que definirla en $[1, 2)$:

a) $f(x) = -e^x + 1$

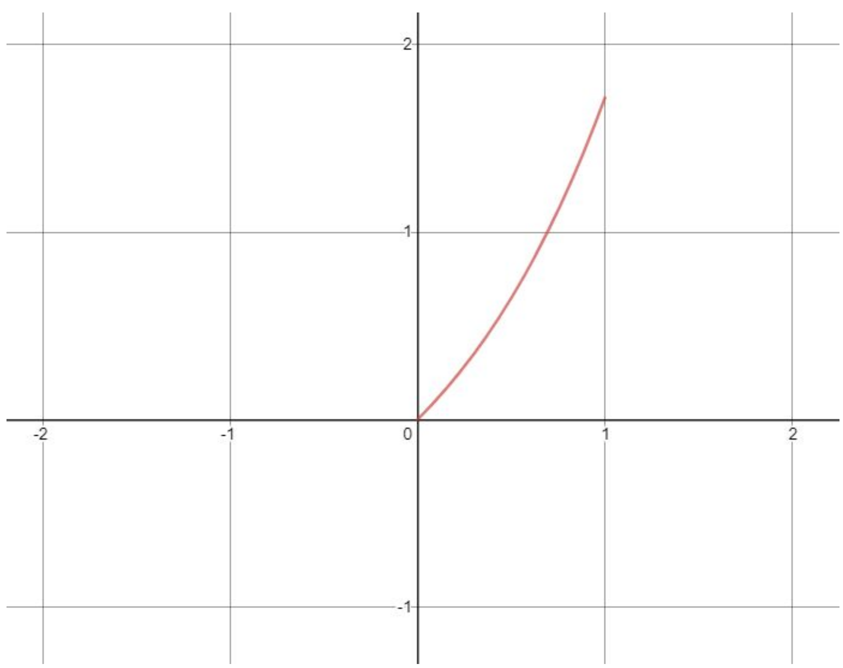
b) $f(x) = -e^{x-1} + 1$

c) $f(x) = -e^{x-1} - 1$

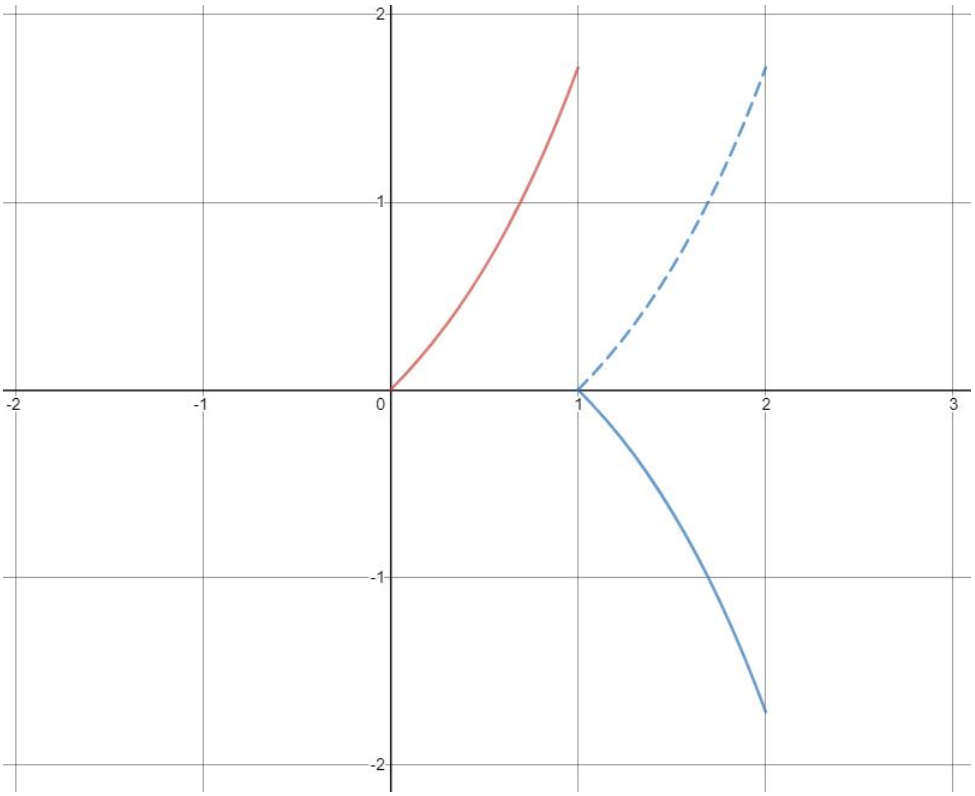
d) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

Empecemos graficando nuestra función:



Podemos realizar el ejercicio en forma gráfica. Para ello, como sabemos que nuestro período de la nueva función será $T = 2$, tenemos que desplazar nuestra función medio período (es decir, graficarla en el $(1, 2)$) y luego espejarla con respecto al eje de abscisas, de la siguiente manera:



Luego, sería cuestión de deducir la forma de la función.

En forma analítica, podemos usar la definición de función con simetría de media onda:

$$f(x) = -f(x + L)$$

Donde L es el semiperiodo, es decir $T/2$.

En nuestro caso sabemos que $T = 2$, por ende $L = 1$, aunque como el otro trozo de función lo piden en un desplazamiento hacia la derecha, vamos a tomarnos el atrevimiento de usar $f(x) = -f(x-L)$. En nuestro caso, $f(x) = -f(x - 1)$

Reemplazamos: $f(x) = -\left(e^{(x-1)} - 1\right)$

Distribuimos y sacamos los paréntesis redundantes, llegando a la función en forma analítica: $\boxed{f(x) = -e^{x-1} + 1}$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la $\boxed{\text{b}}$.

3. Ejercicio 2

Final 22/02/2018. *Indicar verdadero o falso*:

La función $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < |x| < 3 \end{cases} \;\wedge\; f(x) = f(x + 6)$ tiene valor medio 4.

4. Ejercicio 3

Final 15/02/2018. *Indicar verdadero o falso*:
Al desarrollar la función $f(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ si $t \in (0,1) \wedge f(t) = f(t+1)$ en Serie Exponencial de Fourier sólo hay términos con coeficientes reales.

5. Ejercicio 4

Final 12/12/2017. *Indicar la respuesta correcta*:
La Serie Exponencial de Fourier de $f(x) = 4-x$ si $x \in (0,2) \wedge f(x) = f(x+2)$ tiene los coeficientes:

a) Todos reales.

b) Todos imaginarios.

c) Uno real y resto imaginarios.

d) Ninguna de los anteriores.

6. Ejercicio 5

Final 07/10/2016. *Desarrollar*:
El desarrollo de $f(x) = x+3$ si $x \in (-1,1) \wedge f(x) = f(x+2)$ en Serie Trigonométrica de Fourier es:
$S(x) =$ ....

7. Ejercicio 6

Final 12/05/2015. *Desarrollar*:
Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ k & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases} \quad \wedge \quad f(x) = f(x+6)$:

a) Calcule el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el valor medio de $f(x)$ sea 3.

b) Con $k = 0$, obtenga la Serie Trigonométrica de Fourier.

c) En base al punto anterior, obtenga la Serie Exponencial de Fourier.

8. Ejercicio 7

Final 27/02/2020. *Indicar la respuesta correcta*:
Sea la función $f(x)$ tal que $f(x) = f(x+T) \wedge f(x) = 2x \cdot g(x)$ con $g(x) \neq 0 \wedge g(x)$ par. La Serie Trigonométrica de Fourier es:

a) Solo de senos.

b) Solo de cosenos.

c) Con senos y cosenos.

d) Constante.