Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Matemática Superior

Repaso segundo parcial

Tomás Moreira

Noviembre 2021

Índice

Parcial tomado en junio de 2017

1. Ejercicio Raíces de ecuaciones no lineales

Dada la ecuación $\operatorname{sen}(3x) - x^2 + 3 = 0$

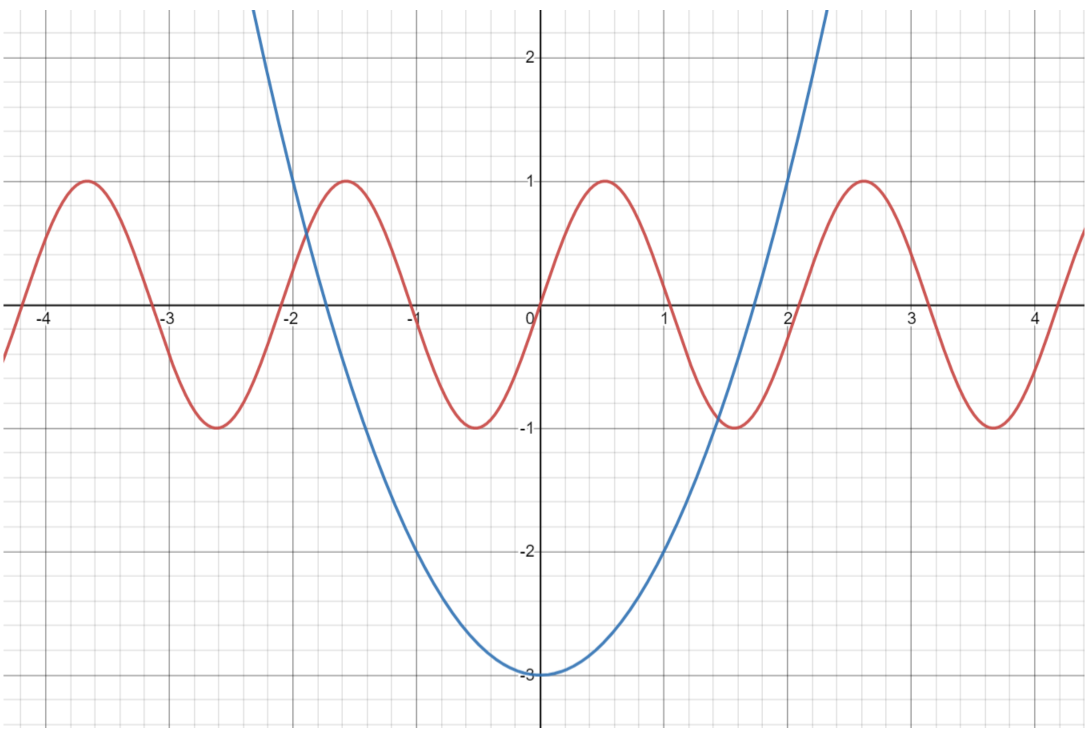
a) Indique un intervalo de longitud menor o igual a 1 para cada una de las raíces de la ecuación.

b) Sabiendo que una de las raíces es negativa, se proponen 2 valores iniciales: $x_0 = -1.3$ y $x_0 = -1,9$. Calcule dicha raíz con $\varepsilon < 10^{-5}$ utilizando el método de Newton-Raphson, utilizando uno de los valores iniciales propuestos. Justifique su elección del valor inicial de modo que se minimicen la cantidad de iteraciones.

Inciso a

Recordemos, para resolver esta parte del ejercicio habría que hacer un gráfico de las funciones:

$\operatorname{sen}(3x) = x^2 - 3$



Vemos que hay dos raíces, ubicadas en el $[-2; -1]$ y el $[1; 2]$

Inciso b

Vamos a derivar nuestra función asociada a la ecuación: $f(x) = \operatorname{sen}(3x) - x^2 + 3$

$f'(x) = 3\cos(3x) - 2x$

Si evaluamos los dos puntos en esta derivada, obtenemos:

$f'(-1.9) = 6.304138355$

$f'(-1.3) = 0.4222030874$

Vemos que para $x = -1.3$ la derivada está peligrosamente cercana a 0, por lo que es muy probable que cerca se encuentre un extremo local. En cambio, para $x = -1.9$ tenemos un número grande (que nos viene excelente). Así que vamos a usar $x_0 = -1.9$

Aplicando la fórmula de Newton:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\operatorname{sen}(3x_i) - x_i^2 + 3}{3\cos(3x_i) - 2x_i}$$

$$x_1 = -1.9 - \frac{\operatorname{sen}(3 \cdot (-1.9)) - (-1.9)^2 + 3}{3\cos(3 \cdot (-1.9)) - 2 \cdot (-1.9)} = -1.890591187$$

$$x_2 = -1.890591187 - \frac{\operatorname{sen}(3 \cdot (-1.890591187)) - (-1.890591187)^2 + 3}{3\cos(3 \cdot (-1.890591187)) - 2 \cdot (-1.890591187)} = -1.890541327$$

$$x_3 = -1.890541327 - \frac{\operatorname{sen}(3 \cdot (-1.890541327)) - (-1.890541327)^2 + 3}{3\cos(3 \cdot (-1.890541327)) - 2 \cdot (-1.890541327)} = -1.890541325 \rightarrow \text{PARO.}$$

Cabe destacar que no es necesario aclarar uno por uno los valores y las iteraciones en cada paso. Lo hago nomás a modo de repaso, en el parcial alcanza con poner la fórmula que se va a usar y luego hacer una tabla con los x_i sucesivos que se van obteniendo. A lo sumo especificar el primer paso.

2. Ejercicio Interpolación + Diferenciación numérica

Dada la siguiente tabla de valores:

x	y
1	1
2	k
3	23
5	61
6	86

a) Determine, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio interpolante que pasa por todos los puntos sea de grado 2.

b) En el caso de que $k = 30$, determine de que grado es el polinomio sin realizar las tablas de diferencia.

c) Hallar la primera diferencia en $x = 4$

Inciso a

Nos piden un polinomio de grado 2, por ende vamos a usar 3 puntos para calcularlo.

x_i	y_i	O1	O2
1	1		
		11	
3	23		2
		19	
5	61		

El polinomio interpolante, usando el progresivo es:

$p(x) = 1 + 11(x-1) + 2(x-1)(x-3)$

Si usaramos el regresivo sería:

$p(x) = 61 + 19(x-5) + 2(x-5)(x-3)$

Usamos el progresivo porque tiene números "más lindos".

Primero hay que verificar que el polinomio pase por los puntos que no consideramos al hacer la tabla reducida: ¿$p(6) = 86$?

$p(6) = 1 + 11(6-1) + 2(6-1)(6-3) = 86 \rightarrow$ VERIFICA.

Entonces, para hallar k basta con hacer $p(2)$

$p(2) = k \rightarrow k = 1 + 11(2-1) + 2(2-1)(2-3) = 10$

Por ende si $k = 10$, por los puntos pasa un polnimoio de grado 2.

Inciso b

Si fuera $k = 30$, el polinomio se sale del patrón de los puntos, que forman parte de un polinomio de grado 2. Cuando pasa esto, el polinomio se va al máximo grado posible. **Como tenemos 5 puntos, entonces el polinomio será de grado 4**.

Inciso c

Para hallar la primera diferencia en $x = 4$ solo lo podemos hacer con la fórmula central, con $h = 1$.

$f'(4) = \dfrac{61-23}{2 \cdot 1} = \dfrac{38}{2} = 19$

3. Ejercicio Integración numérica

Dada la integral $\displaystyle\int_1^3 x^3 \ln(x)dx$ indique la mínima cantidad de subintervalos en el $[1;3]$ de modo que al resolver la integral por Método de Simpson se asegure un $\varepsilon < 10^{-2}$. Usando el resultado anterior calcula la integral por Simpson.

Para resolver el ejercicio, debemos acotar el error. En este caso tenemos el método de Simpson, entonces primero vamos a derivar la función:

$f(x) = x^3 \ln(x)$

$f'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln(x) + x^2$

$f''(x) = 6x \ln(x) + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x = 6x \ln(x) + 5x$

$f'''(x) = 6 \ln(x) + 6x \cdot \frac{1}{x} + 5 = 6 \ln(x) + 11$

$f^{(IV)} = \frac{6}{x}$

El máximo de esta función está en $x = 1$, considerando nuestro intervalo de trabajo.

$f^{(IV)}(1) = 6$

Con este valor, usamos la fórmula de error:

$|e_S| = \left|\frac{b-a}{180}\right| h^4 \max_{a \leq \xi \leq b} \left|f^{(IV)}(\xi)\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{3-1}{180}\right| h^4 \max_{1 \leq \xi \leq 3} \left|f^{(IV)}(\xi)\right| < 10^{-2}$

$\frac{2}{180} \cdot h^4 \cdot 6 < 10^{-2}$

$h < \sqrt[4]{\frac{10^{-2} \cdot 180}{6 \cdot 2}}$

$h < 0.6223329773$

$N = \frac{b-a}{h} = \frac{3-1}{0.6223329773} = 3.2137...$

Como es Simpson, debemos tener en cuenta que necesitamos una cantidad PAR de subintervalos. Si probamos con $N = 4$, obtenemos un h muy cómodo:

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2}{4} = \boxed{0.5}$

Con ese h, hacemos la tabla para usar el método de Simpson.

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0
1	1.5	1.36844
2	2	5.54518
3	2.5	14.31704
4	3	29.66253

$I_S = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P)$

$I_S = \frac{0.5}{3}((0 + 29.66253) + 4(1.36844 + 14.31704) + 2(5.54518)) = \boxed{17.249135}$

4. Ejercicio Sistemas de ecuaciones lineales

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x+5y+z=15 \\ 2x-2y+6z=3 \\ 7x+2y-3z=8 \end{cases}$

Ordenar el anterior sistema de modo que se pueda resolver por método iterativo. Realice dos iteraciones por el Método de Gauss-Seidel usando $x_0=(0,2,1)$

Reordenamos de manera que la matriz de coeficientes asociada al sistema sea diagonal dominante:

$$\begin{cases} 7x+2y-3z=8 \\ 2x+5y+z=15 \\ 2x-2y+6z=3 \end{cases}$$

Realizamos el despeje de las ecuaciones y dejamos expresadas las fórmulas iterativas:

$$x_{i+1}=-\frac{2}{7}y_i+\frac{3}{7}z_i+\frac{8}{7}$$

$$y_{i+1}=-\frac{2}{5}x_{i+1}-\frac{1}{5}z_i+\frac{15}{5}$$

$$z_{i+1}=-\frac{2}{6}x_{i+1}+\frac{2}{6}y_{i+1}+\frac{3}{6}$$

Usando el valor inicial que nos dan como dato $x_0=(0,2,1)$ iteramos:

$$x_1=-\frac{2}{7}\cdot 2+\frac{3}{7}\cdot 1+\frac{8}{7}=1$$

$$y_1=-\frac{2}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{15}{5}=2.4$$

$$z_1=-\frac{2}{6}\cdot 1+\frac{2}{6}\cdot 2.4+\frac{3}{6}=0.966667$$

$$\boxed{x_1=(1,2.4,0.966667)}$$

$$x_2=-\frac{2}{7}\cdot 2.4+\frac{3}{7}\cdot 0.966667+\frac{8}{7}=0.871429$$

$$y_2=-\frac{2}{5}\cdot 0.871429-\frac{1}{5}\cdot 0.966667+\frac{15}{5}=2.458095$$

$$z_2=-\frac{2}{6}\cdot 0.871429+\frac{2}{6}\cdot 2.458095+\frac{3}{6}=1.028889$$

$$\boxed{x_2=(0.871429,2.458095,1.028889)}$$

5. Ejercicio Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Dado el problema de valor inicial: $\begin{cases} y'=t^2+\frac{y}{t} \\ y(1)=1 \end{cases} \qquad t\in[1;2]$

a) Calcule, si es posible, la L de la Condición de Lipschitz.

b) Halle $y(1.6)$ usando el Método de Euler, usando $h = 0.2$

Inciso a

Usando la propiedad de la derivada parcial:

$$L = \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right|$$

$$L = \max_{1 \leq t \leq 2} \left| \frac{\partial (t^2 + \frac{y}{t})}{\partial y} \right| = \max_{1 \leq t \leq 2} \left| \frac{1}{t} \right| = 1 \rightarrow \boxed{L = 1}$$

Inciso b

Recordar que la fórmula de Euler es:

$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$, siendo en nuestro caso $w_0 = 1$

$$w_1 = 1 + 0.2 \left(1^2 + \frac{1}{1} \right) = 1.4$$

$$w_2 = 1.4 + 0.2 \left(1.2^2 + \frac{1.4}{1.2} \right) = 1.921333$$

$$\boxed{w_3 = 1.921333 + 0.2 \left(1.4^2 + \frac{1.921333}{1.4} \right) = 2.587809}$$