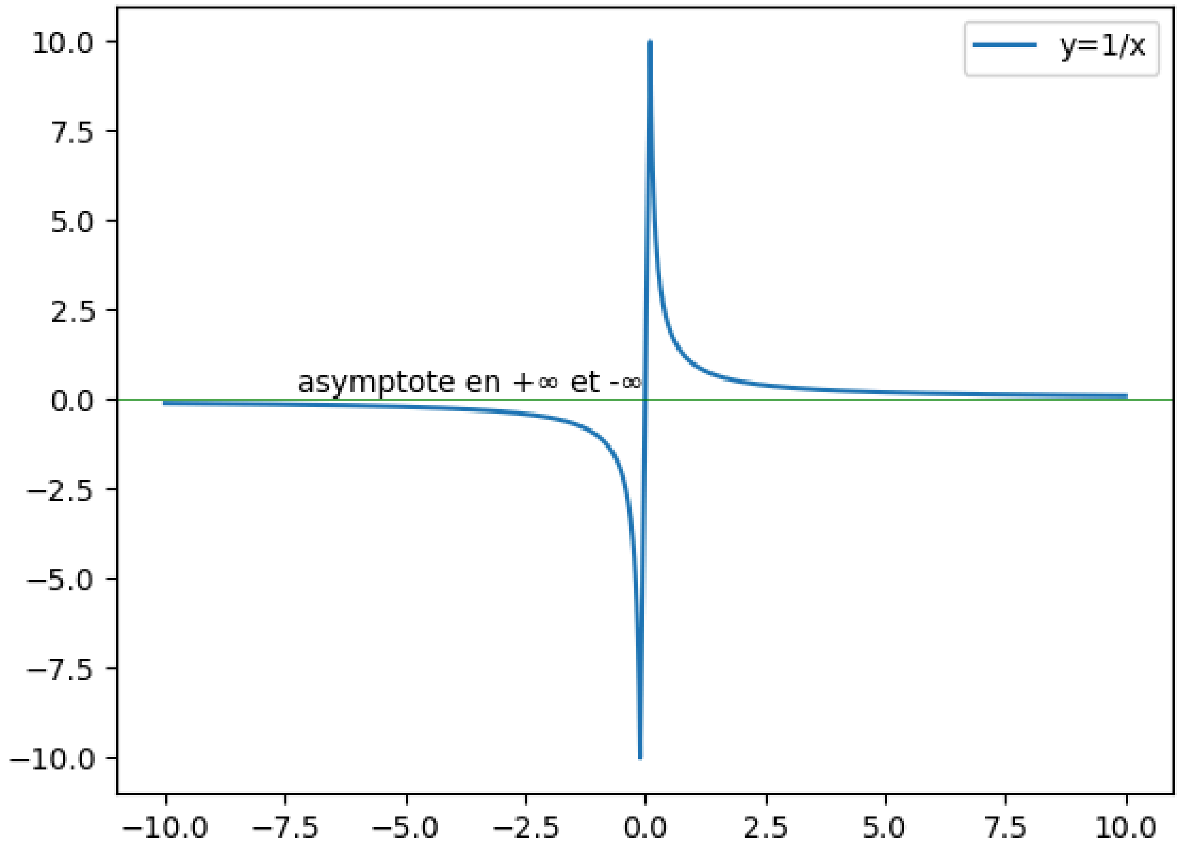
Semaine 1, Cours 1

1. Cours

1.1. 1. Analyse

1.1.1. Calcul d'une limite en +∞ et en -∞ :

Type d'énoncé : "Calculer les asymptotes horizontales de la fonction"
Une asymptote horizontale est enfait une valeur vers laquelle la fonction tend vers l'infini.



L'objectif de ces exercices est de voir quelle est la valeur de l'asymptote.
Dans la majorité des cas, cette valeur est identique pour +∞ et -∞ mais ce n'est pas toujours le cas

Comment la calculer :
Généralement, on demande de la calculer avec un quotient de polynômes, de type

f(x) = $\frac{3x^2+4x+2}{4x^2+2x+3}$

A ce moment là, il faut simplement factoriser par le terme de plus grand degré, puis calculer le quotient. Mais concrètement, qu'est ce que ça veut dire ? On va le voir dans cet exemple :

Note : normalement, la notation est la première, mais dans ce cours, pour des raisons des simplicités lors de l'écriture, nous allons noter la deuxième. Merci de noter qu'il faut absolument utiliser la première en examen.

$$\lim_{x \to \infty} = \lim_{\infty}$$

Pour calculer la limite de notre précédente fonction, on peut tenter de remplacer x par une valeur très grande (voire carrément l'infini) et voir ce que ça donne :

$f(\infty) = \frac{3\infty^2+4\infty+2}{4\infty^2+2\infty+3} = \frac{\infty}{\infty}$

Problème donc, lequel de ces deux ∞ croit le plus vite ? (ou alors ils croient à la même vitesse ???)

Ce qu'on peut essayer de faire, c'est de factoriser par l'infini au carré (vu que c'est l'infini "le plus grand"), en le considérant comme un nombre, et voir ensuite ce qui se passe :

$f(\infty) = \frac{3\infty^2+4\infty+2}{4\infty^2+2\infty+3} = \frac{\infty^2\left(3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}\right)}{\infty^2\left(4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)}$

On peut maintenant supprimer les termes identiques de la fraction, donc ici on enlève ∞^2, et on obtient donc

$f(\infty) = \frac{3\infty^2+4\infty+2}{4\infty^2+2\infty+3} = \frac{\infty^2\left(3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}^2\right)}{\infty^2\left(4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}$

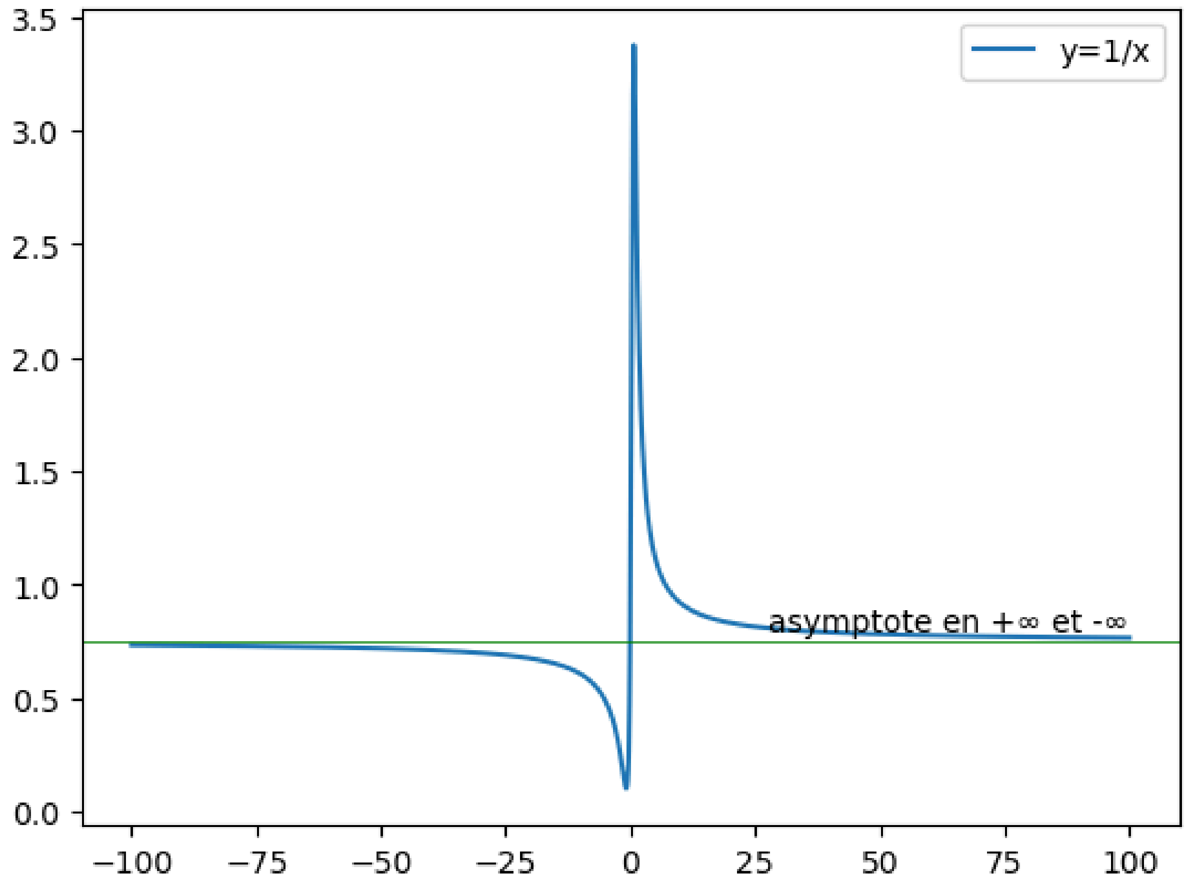
Comme noté dans le formulaire, on connait les limites qui sont actuellement ici.
En effet, $\frac{A}{\infty}$ vaut 0, lorsque A est un nombre réel (comme c'est le cas ici)
Donc on peut noter

$f(\infty) = \frac{3\infty^2+4\infty+2}{4\infty^2+2\infty+3} = \frac{\infty^2\left(3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}^2\right)}{\infty^2\left(4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}} = \frac{3+0+0}{4+0+0}$

Ce qui fait au final

$f(\infty) = \frac{3\infty^2+4\infty+2}{4\infty^2+2\infty+3} = \frac{\infty^2\left(3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}^2\right)}{\infty^2\left(4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{4+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}} = \frac{3+0+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}$

On vient donc de voir que lorsque x tendait vers l'infini (devenait très très grand), la fonction tendait vers $\frac{3}{4}$.
Concrètement, le graphe ressemble à ça (il faut éviter de regarder le grand trait au milieu, les ordinateurs n'aiment pas ça) :



On voit qu'il y a un problème autour de 0, mais ce sera pour une autre fois.

Plus concrètement, afin d'avoir tous les points en examen, il faudrait écrire le raisonnement qu'on vient de faire sous cette forme (le mieux pour l'apprendre est de faire les exercices qui suivent en la recopiant) :

Rappelez vous que nous utilisons la notation de droite, alors qu'il faut utiliser celle de gauche (pour des raisons de simplifications d'écriture du pdf)

$$\lim_{x\to\infty} = \lim_\infty$$

On a :

$\lim_\infty f(x) = \lim_\infty \frac{3x^2+4x+2}{4x^2+2x+3} = \frac{x^2\left(3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_\infty \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$

Comme $\lim_\infty \frac{A}{x} = 0$, on a

$\lim_\infty \frac{4}{x} = \lim_\infty \frac{2}{x^2} = \lim_\infty \frac{2}{x} = \lim_\infty \frac{3}{x^2} = 0$

On a donc

$\lim_\infty f(x) = \lim_\infty \frac{3+0+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}$

Cette rédaction est à suivre à la lettre pour avoir tous les points. (en gros on ajoute le $\lim_\infty$ et on remplace le ∞ par x)

Concrètement, en factorisant par "la plus grande puissance de x", on obtient des termes qui valent 0 en haut et en bas, et on sort de la forme indeterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On peut faire le même raisonnement avec -∞, mais la rédaction que nous avons vue reste la même, à l'exception du symbole lim, où il faut mettre

$$\lim_{x \to -\infty}$$

Ceci étant pour les limites en +∞ et en -∞, elle tombent toujours à la maturité dans des questions formulées de type "trouver l'asymptote horizontale de la fonction"

1.2. Probabilitités

Un des énoncés les plus vicieux de ces problèmes est lorsqu'on demande "quelle est la probabilité d'avoir **au moins** ....", dans ce cas là, il faut se demander quel est le "worst case scenario" (en français le "pire scénario") pour cet évènement. par exemple, si sur 4 lancers de dés on demande la probabilité d'avoir **au moins** un 5, on va se demander quelle est la probabilité de ne pas en avoir du tout, elle vaut $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, car la probabilité de ne pas avoir de 5 au premier lancer est de $\frac{5}{6}$, puis il nous faut multiplier par la proba de ne pas avoir un 5 au deuxième lancer, soit aussi $\frac{5}{6}$ et ce 4 fois puisqu'il y a 4 lancers
Ensuite, on fait 1 - probabilité worst case, pour avoir tous les cas ou il y a "au moins" un 5.
En effet la probabilité d'avoir au moins un 5 est la probabilité de tous les évènements, moins la probabilité de ne pas en avoir. donc ici on a 1 - $\left(\frac{5}{6}\right)^4$

2. Exercices

2.1. Niveau 1

2.1.1.

Calculer l'asymptote horizontale de $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$

2.1.2.

Calculer la limite en +∞ de $\frac{x^3+x}{-4x^3+1}$

2.1.3.

Calculer l'asymptote horizontale de $\frac{3x^2+x+1}{6x^2+4x-3}$

2.1.4.

Calculer la limite en +∞ de $\frac{5x^3+100000x}{20x^3+2}$

2.1.5.

Calculer l'asymptote horizontale de $\frac{-20x^2+20x+20}{12x^2-90}$

2.1.6.

Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{4x^3+4x}{-4x^3+2}$

2.2. Niveau 2

2.2.1.

Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+x+3}$

2.2.2.

Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{10000x^8}{x^9+x^2}$

3. Solutions

3.1. Niveau 1

3.1.1.

factoriser par x^2, puis simplifier. On obtient alors 1

3.1.2.

factoriser par x^3, puis simplifier. On obtient alors $-\frac{1}{4}$

3.1.3.

factoriser par x^2, on obtient $\frac{3}{6}$ soit $\frac{1}{2}$

3.1.4.

factoriser par x^3, on obtient $\frac{5}{20}$ = $\frac{1}{4}$

3.1.5.

factoriser par x^2, on obtient $-\frac{20}{12}$ = -$\frac{5}{3}$

3.1.6.

factoriser par x^3, on obtient alors −1

3.2. Niveau 2

3.2.1.

Ici, c'est moins évident, on peut factoriser par x^4, et on va avoir A/0, donc ∞, on on peut factoriser par x^3, et se retrouver avec ∞/A, donc ∞.

3.2.2.

Même chose pour ici, on va soit factoriser par x^9 pour avoir 0/A = 0, ou alors on factorise par x^8 pour avoir A/∞, donc 0.