Semaine 2, cours 1

1. Cours

1.1. Analyse

1.1.1. L'exponentielle

L'exponentielle se note e^x, et est une fonction très sympathique, au même titre que x^2 par exemple. Elle possède quelques propriétés très cool.

1.1.1.1. Propriétés

Pour faire simple, l'exponentielle = règles des puissances. Concrètement :

$e^a * e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^b = e^{a*b}$
$e^0 = 1$
$e^1 = e$

Les deux dernières lignes proviennent du fait que, au même titre que 1, −1, π, $\sqrt{2}$, les nombres présentés par l'exponentielle sont des nombres réels. Très concrètement, e est "le nombre d'Euler" et est très utile partout en mathématique (genre dans les nombres complexes, qui permettent de faire de l'électricité), on a donc $e^2, e^{17}, e^\pi, e^{14.1355}$ ou e^{-12} qui sont des nombres réels.

1.1.1.2. Exemple

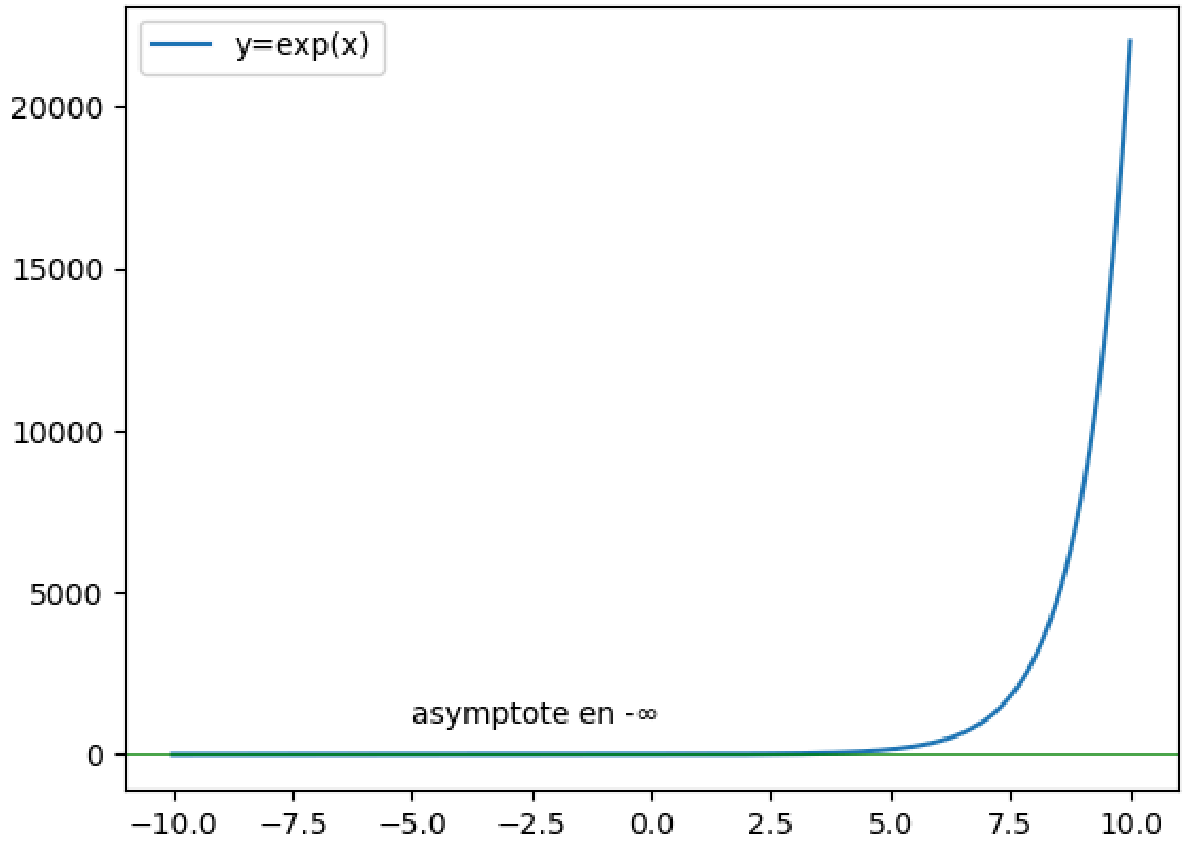
Très concrètement, on peut donc trouver l'exponentielle sous forme de fonction (composée ou non), ou sous forme de nombres. Par exemple :

$f(x) = e^{x^2+3x+3}$ est une fonction et
$f(0) = e^{0^2+3*0+3} = e^3$

La fonction est donc exprimée avec une exponentielle, et on se sert également de l'exponentielle (ou plus précisemment du nombre d'Euler) pour exprimer $f(0)$. Le problème qui va se poser maintenant, c'est de savoir comment trouver des antécédents de notre fonction, par exemple on veut x tel que $f(x) = 9$. Actuellement, on pourrait tester tous les nombres réels pour trouver le résultat, mais on risque de ne pas y arriver. Pour cela, il va nous falloir introduire une nouvelle fonction, $\ln(x)$ (voir plus tard)

1.1.1.3. Calcul de limites

L'exponentielle ressemble à ça :



Quand x va vers +∞, alors elle tend vers +∞, et ce très très rapidement, vu qu'elle "bat" toutes les autres fonctions existantes (donc $\frac{e^x}{x^{1000}}$ tend vers ∞).
En revanche, quand x va vers -∞, alors elle tend vers 0. Pour calculer sa limite, on fait comme avec x, on factorise par le terme le plus élevé. Par exemple, calculons la limite de $f(x) = \frac{e^{2x}-3}{e^x-5}$ en +∞ et -∞.

$\lim_{\infty} f(x) = \lim_{\infty} \frac{e^{2x}-3}{e^x-5} = \lim_{\infty} \frac{e^x\left(e^x-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{5}{e^x}\right)} = \lim_{\infty} \frac{e^x-\frac{3}{e^x}}{1-\frac{5}{e^x}}$

Comme $\lim_{\infty} \frac{A}{e^x} = 0$, on a

$\lim_{\infty} f(x) = \lim_{\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{\infty} e^x = \infty$

Si nécessaire, on peut s'aider d'un changement de variable, en faisant $e^x = X$, et en remplaçant dans la fonction.

Pour -∞, on a

$f(x) = \frac{e^{2x}-3}{e^x-5} = \frac{0-3}{0-5} = \frac{3}{5}$

(car en -∞, l'exponentielle tend vers 0)

1.1.2. Logarithme

Pour cette partie, nous allons différencier deux fonctions qui sont souvent confondues, à savoir $\ln(x)$, le logarithme népérien et $\log(x)$, le logarithme décimal. Les deux sont liées par la formule : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, avec $\ln(10)$ une constante. Cette formule n'est, je pense, pas à retenir pour l'examen. Il faut simplement savoir que, lorsqu'on parle de logarithme, on sous-entend logarithme népérien, donc $\ln(x)$, et on précisera quand on parle de $\log(x)$.

1.1.2.1. Propriétés

Le logarithme a quelques propriétés très sympa aussi, surtout avec l'exponentielle :

$\ln(e^x) = x$
$e^{\ln(x)} = x$

$\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$\ln\left(a^b\right) = b * \ln(a)$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln(1) = 0$
$\ln(e) = 1$

On peut retrouver les deux dernières à l'aide des propriétés de l'exponentielle :

$\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$

1.1.2.2. Exemple

$f(x) = \ln(x^2 + 4x + 3)$, retrouver x tel que $f(x) = 3$

Résoud grâce aux propriétés

$f(x) = 3$
$\ln(x^2 + 4x + 3) = 3$
$e^{\ln(x^2+4x+3)} = e^3$
$x^2 + 4x + 3 = e^3$
$x^2 + 4x + 3 - e^3 = 0$

On résoud avec a = 1, b = 4, c = $3 - e^3$

On obtient :

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4*(3 - e^3)}}{2}$

(On peut calculer le determinant, pour vérifier que ce qu'il y a en-dessous de la racine, et on voit qu'il est bien positif, donc les solutions existent)

On peut avoir un autre exemple. Par exemple $f(x) = e^{3x}$, trouver x tel que $f(x) = 3$

On résoud avec les propriétés qu'on connait

$f(x) = 3$
$e^{3x} = 3$
$\ln\left(e^{3x}\right) = \ln(3)$
$3x = \ln(3)$
$x = \frac{\ln(3)}{3}$

1.2. Equations trigonométriques

1.2.1. Concept et méthode de résolution

Une équation trigonométrique va faire intervenir les fonctions trigonométriques, de type $\cos(x), \sin(x)$ ou $\tan(x)$. Il faut absolument réussir à la ramener à quelque chose qu'on sait résoudre, comme $\cos(x) = \sin(x)$, ou $\cos(x) = b$, avec b une valeure réelle.

1.2.2. Fonctions inverses

Avec les fonctions trigonométrique viennent les fonctions inverses telles que :

$\arccos(x)$ pour que $\arccos(\cos(x)) = x$
$\arcsin(x)$ pour que $\arcsin(\sin(x)) = x$
$\arctan(x)$ pour que $\arctan(\tan(x)) = x$

il existe d'autres propriétés, qui ne nous intéressent pas pour la maturité.
Ces fonctions sont notées $\cos(x)^{-1}, \sin(x)^{-1}, \tan(x)^{-1}$ sur la calculatrice.

1.2.3. Exemple de maturité

On peut avoir une équation de type :

$\cos(x)^2 - 3\cos(x) + 2 = 0$

La première chose à faire est de remplacer le $\cos(x)$ dans notre équation. On pose donc $\cos(x) = X$. Maintenant notre équation devient

$X^2 - 3X + 2 = 0$

Or on connait très bien ce type d'équations, on sait les résoudre.

Donc on a $X = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4*2}}{2}$ donc $X = 2$ ou $X = 1$.

Or, on a dit au début que $X = \cos(x)$, donc on a, dans le premier cas

$\cos(x) = 2$, ce qui n'est pas possible, car $\cos(x)$ est compris entre −1 et 1.

Dans le deuxième cas, on a

$\cos(x) = 1$, ce qui n'est possible que lorsque $x = \frac{\pi}{2} + 2k * \pi$ (pour le trouver, on met la calculatrice en radian, et on fait $\arccos(1)$, ce qui nous donne $\frac{\pi}{2}$). Attention cependant, on peut avoir une seule (comme ici), plusieurs, ou aucune solutions à $\cos(x) = a$, en fonction de a, mais ça c'est de la trigonométrie pure, on verra une autre fois.

L'important est de simplement comprendre qu'il faut faire ce qu'on appelle un changement de variable, en posant $X = \cos(x)$, pour ensuite avoir des équations qu'on connait

1.3. Dénombrement

1.3.1. Formule des pommes, bananes, kiwi

Pour cette partie, je me dois de reprendre le cours du grand Joachim Favre, que je vais néanmoins traduire en français avant.

Cours de Joachim Favre

Définition : Une combinaison r avec répétition d'éléments d'un ensemble est une sélection non ordonnée de r éléments de l'ensemble, où les éléments peuvent apparaître plusieurs fois.

Exemple : Supposons que nous voulions compter le nombre de façons de sélectionner quatre morceaux de pommes, d'oranges et de poires si l'ordre n'a pas d'importance et que les fruits sont indiscernables. La taille de l'ensemble est n = 3, et nous voulons sélectionner r = 4 éléments avec des répétitions. Nous pouvons représenter cela sous la forme de 3 compartiments : un pour chaque fruit. Nous pouvons faire le dessin suivant où les points à gauche des deux barres sont des pommes, ceux qui sont entre deux barres sont des oranges, et ceux qui sont à l'extrémité droite sont des poires. Sur chaque ligne, il y a quatre points, représentant le fait qu'il y a 4 fruits :

| |• • • •
| • | • • •
| • • | • •
| • • • | •
| • • • • |
• | | • • •
• | • | • •
• | • • | •
• | • • • |
• • | | • •
• • | • | •
• • | • • |
• • • | | •
• • • | • |
• • • • | |

Nous pouvons voir que nous voulons en fait choisir $n-1=2$ positions pour la barre parmi les $r+n-1=6$ possibles. Une autre façon de voir cela est que nous voulons choisir r positions pour les fruits parmi les $r+n-1=6$ possibles. Ainsi, nous avons : $C(n+r-1, n-1) = C(n+r-1, r) = C(6, 2) = 6!4!2! = 15$

Le nombre de combinaisons r à partir d'un ensemble de n éléments lorsque la répétition des éléments est autorisée est : $C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$

Ainsi, à chaque fois on a besoin de trouver le nombre de type de fruit disponible, qui va être n. Après, il faut qu'on trouve le nombre d'éléments à sélectionner, donc ici 4.
Attention cependant, pour le nombre d'éléments à sélectionner, il faut que ce soit le nombre de truc à distribuer, donc il peut être nul.

1.3.2. Exemple

On lance 4 dés différents, et on veut savoir combien de lancers différents il existe pour que quand on additionne les nombres, ça donne 6.
Là c'est typiquement une situation de pomme-banane-kiwi, puisque on peut modéliser en faisant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Donc, ici on a $n = 4$, car 4 endroit où mettre le superflu. Ensuite, on voit que x_1, x_2, x_3, x_4 valent minimum 1, donc enfait, il faut qu'on trouve le nombre de manières différentes d'avoir $x_1 + x_2, +x_3 + x_4 = 2$, avec x_1, x_2, x_3, x_4 qui peuvent valoir 0 ou plus.

Donc ça, on a $n = 4$, $r = 2$, donc on a $C(4 + 2 - 1, 2) = C(5, 2) = 10$.

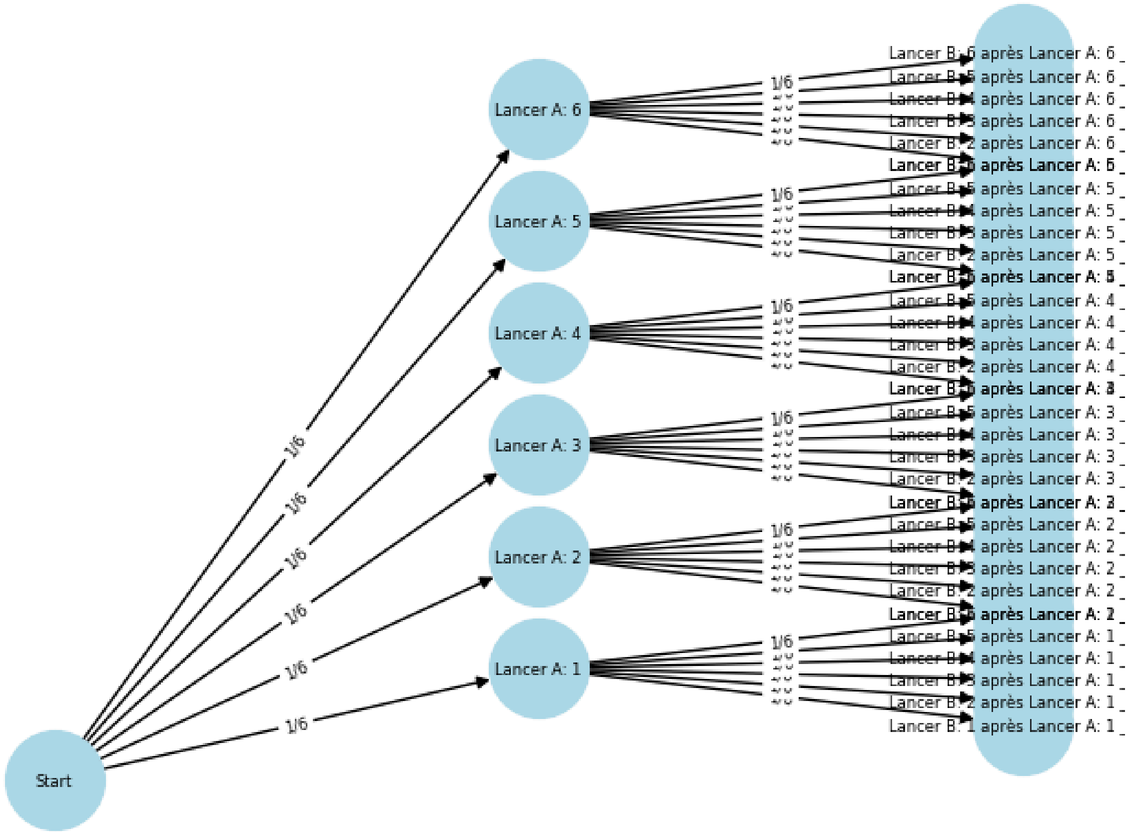
Note : Si on a une inégalité de type $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$, on introduit une nouvelle variable x_5, qui va prendre la valeur manquante pour atteindre 6. Donc ici enfait, comme les dés valent 1, il faut trouver le nombres de valeur différentes pour que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$, donc le nombre de valeurs différentes pour que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$, ce qui fait $C(5 + 2 - 1, 2) = C(6, 2) = 15$

En examen, le plus difficile est de comprendre combien de type de fruit on a, et combien de fruit doit-on choisir.

1.3.3. Probabilité

1.3.3.1. Arbre de probabilité

Un arbre de probabilité est un arbre qui montre toutes les issues possibles d'un évènement, par exemple voici l'arbre de probabilité de lorsque je lance 2 dés différents, l'un après l'autre.



Une fois qu’on a l’arbre de probabilité, on peut ensuite, lors de questions de type “calculez la probabilité que la somme de dés soit 4”, voir le nombre de chemin qui valident la condition, calculer leur probabilité, et ensuite les additionner (ici on a le cas particulier où tous les chemins sont équiprobables (= ils ont la même probabilité), mais ce n’est pas toujours le cas). Pour avoir la probabilité d’un chemin, on se place au noeud de départ, et on multiplie les probabilités qu’on rencontre sur le chemin.

1.3.4. Loi binomiale non-officielle

1.3.4.1. Définition

Une loi binomiale, c’est quand on a un évènement qui a deux issues : succès ou échec. Par exemple, lancer une pièce est une loi binomiale, elle a deux issues possibles, on associe succès et échec à pile et face, ou l’inverse. Dans les exemples qui vont suivre, on va prendre une pièce truquée (20% de chance d’avoir pile, donc 80% de chance d’avoir face), qu’on lance plusieurs fois, et on note quand est-ce qu’on tombe sur pile.

1.3.4.2. Question typique 1)

On fait 10 fois l'expérience (à savoir tirer la pièce), et on veut savoir la probabilité d'avoir 5 fois pile et 5 fois face (donc 5 fois succès et 5 fois échec de l'évènement)

Pour ça, on utilise la formule :

$C(\text{nombre\_de\_succès}, \text{nombre\_d\_echecs} + \text{nombre\_de\_succes}) * (\text{proba\_succes})^{\text{nombre\_de\_succes}} * (\text{proba\_echec})^{\text{nombre\_echecs}}$

Ici, on aurait donc $C(5, 10) * 0.2^5 * 0.8^5$. Il suffit de calculer.

1.3.4.3. Question typique 2)

Trouver le nombre de lancer minimum pour que la probabilité d'avoir au moins 1 pile soit supérieure à 0.99.

Là on veut calculer la proba d'avoir au moins 1 pile lors de n lancers donc on pose tout simplement 1 - worst_case_scenario, concrètement, cela donne ici $1 - (\text{probaechec})^n = 1 - (0.8)^n$.

Ensuite, on pose l'inéquation et on résoud.

$1 - 0.8^n \geq 0.99$
$0.01 \geq 0.8^n$

Et là, c'est la catastrophe, on a une puissance, et on n'a aucune idée de comment faire, et c'est là qu'on va utiliser la puissance du logarithme naturel. On applique $\ln$ des deux côtés, et on a

$\ln(0.01) \geq \ln(0.8^n)$
$\ln(0.01) \geq n * \ln(0.8)$

Et là, il faut faire attention quand on divise par $\ln(0.8)$, car $\ln(a) < 0$ quand $a < 1$ comme c'est le cas quand on fait des probabilités, donc le signe de l'inéquation s'inverse.

Donc on a

$\frac{\ln(0.01)}{\ln(0.8)} \leq n$
$20.63770 \leq n$

Donc on arrondit à l'entier le plus proche, ce qui donne n = 21.

2. Exercises

2.1. Exponentielle

2.1.1.

Calculer la limite en +∞ et -∞ des fonctions suivantes :

2.1.1.1.

$f(x) = \frac{e^{2x}+e^{x}+1}{e^{2x}-e^{x}+2}$

2.1.1.2.

$f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{2x}}$

2.1.1.3.

$f(x) = \frac{e^{3x}+e^{x}-6}{e^{3x}-e^{2x}-1}$

2.1.2.

Résoudre les équations suivantes

2.1.2.1.

$e^{x}-3=0$

2.1.2.2.

$e^{x}-5=0$

2.1.2.3. (Plus compliquée)

$e^{2x}-7e^{x}+10=0$

2.2. Equations trigonométriques

Résoudre les équations trigonométriques suivantes

2.2.1.

$\cos(x)^2-3\cos(x)+2=0$

2.2.2.

$2\sin(x)^2-3\sin(x)+2=0$

2.2.3.

$\tan(x)^2-8\tan(x)+12=0$

2.3. Probabilités

2.3.1. Arbre de probabilité

Nous sommes à l'EPFL. Au premier semestre, un étudiant a 30% de chance d'aller à la MAN. Une fois à la MAN, il a 50% de chance de continuer, et 50% de chance de faire un échec définitif. En revanche, si il ne va pas à la MAN, il a 10% de faire un éhcec définitif.

Faire un arbre de probabilité traduisant la situation.

2.3.2. Loi binomiale

Nous sommes à l'EPFL. Pour rappel, 30% des étudiants vont à la MAN, et tout le monde vient de recevoir ses résultats. On cherche le nombre minimum d'étudiants à sélectionner pour avoir une probabilité supérieure à 0.99 d'avoir **au moins** un étudiant qui va à la MAN permis eux.

2.4. Dénombrement

2.4.1.

Trouver le nombre de solution des équations suivantes avec $x_i \geq 0$:

2.4.1.1.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 14$

2.4.1.2.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 14$

2.4.2.

Vous lancez 4 dés différents, quel est le nombre de combinaisons qui vous permettent que la somme de dés valent 9

2.4.3.

Vous lancez 4 dés différents, quel est le nombre de combinaisons qui vous permettent d'obtenir une somme inférieure à 9

3. Solutions

3.1. Exponentielle

3.1.1.

(les solutions sont d'abord pour +∞, et après pour -∞)

3.1.1.1.

on factorise par e^{2x} et on trouve 1.
la limite des exponentielle vaut 0, donc $\frac{1}{2}$

3.1.1.2.

on factorise par e^{x} et on trouve A/∞ donc 0
on a A/0 donc ∞

3.1.1.3.

on factorise par e^{3x} et on trouve 1.
Les exponentielles valent 0, donc $\frac{-6}{-1} = 6$

3.1.2.

Les résultats des équations sont à exprimer avec $\ln$

3.1.2.1.

$\ln(3)$

3.1.2.2.

$\ln(5)$

3.1.2.3.

On fait le changement de variable $X = e^{x}$, on obtient $X^2 - 7X + 10$, on a X = 5, 2, donc $e^{x} = 5$ ou $e^{x} = 2$ donc $x = \ln(5)$ et $x = \ln(2)$

3.2. Equations trigonométriques

J'ai créé et résolu les équations de tête, donc je suis seulement 80% sûr du résultat.

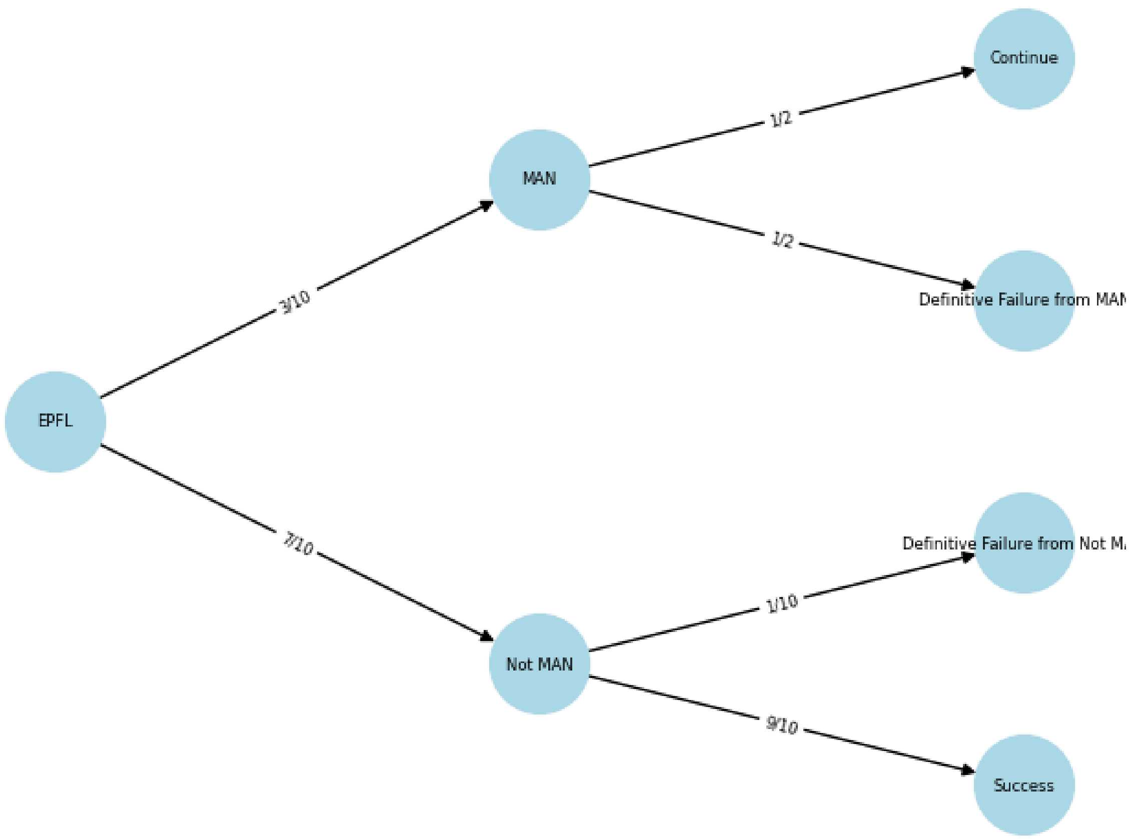
3.2.1.

$\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = 2$, donc $x = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$ donc $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ $\tan(x) = 2$ ou $\tan(x) = 6$ donc $x = \arctan(2)$ ou $x = \arctan(6)$

Attention, ces résultats ne sont que dans l'intervalle $[0;\pi]$ ou $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ en fonction des fonctions utilisées, donc pour être beaucoup plus précis, et exact, il faudrait indiquer les autres résultats possibles, (mais je n'ai aucune idée de à quel point la trigonométrie est maîtrisée donc on verra ça une prochaine fois).

3.3. Probabilités

3.3.1. Arbre de probabilité



3.3.2. Loi binomiale

$\frac{\ln(0.01)}{\ln(0.7)} = 12.9$ donc $n = 13$

3.4. Dénombrement

3.4.1.

On peut utiliser $C(n+r-1, n-1)$ ou $C(n+r-1, r)$ pour r

3.4.1.1.

$C(8+14-1, 8-1) = C(21, 7) = C(21, 14) = 116280$appel

3.4.1.2.

On ajoute x_6 pour le overflow
$C(6+14-1,6-1)=C(19,5)=C(19,14)=11628$

3.4.2.

on a $x_1+x_2+x_3+x_4=9$, avec les dés qui valent tous minimum 1, donc on a $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ pour que nos variables puissent prendre la valeur 0.
Ce qui donne $C(5+4-1,4-1)=C(8,3)=C(8,5)=56$

3.4.3.

On met nos variables pour qu'elles puissent prendre la valeur 0,
donc $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 5$
Puis on introduit x_5 pour "l'overflow" (le superflu)
donc $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$
On rappelle qu'on cherche le nombre de possibilités pour l'équation, pas la résolution en soit.
$C(5+5-1,5-1)=C(9,4)=C(9,5)=126$