Základný Solowov model

Ekonomický rast v dlhom období. Odvodenie Solowovho modelu. Grafická analýza modelu.

Tomáš Oleš
Katedra hospodárskej politiky
NHF

March 9, 2025

Agenda

- Úvod do diferenčných rovníc (lineárnych a nelineárnych).
- Úvod do jednoduchého Solowovho modelu (bez rastu populácie a technologického pokroku).
- Odvodenie Solowovho modelu.
- Grafická rovnováhy a prechodnej dynamiky v Solowovom modeli.
- Zlaté pravidlo a priestor pre hospodársku politiku.

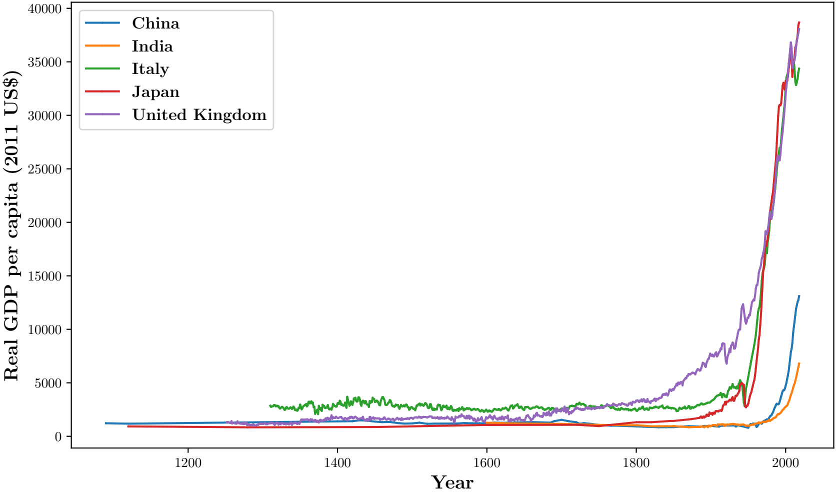
Prečo študovať ekonomický rast?

"Is there some action a government of India could take that would lead the Indian economy to grow like Indonesia's or Egypt's? If so, what, exactly? If not, what is it about the nature of India that makes it so? The consequences for human welfare involved in questions like these are simply staggering: *Once one starts to think about them, it is hard to think about anything else.*"

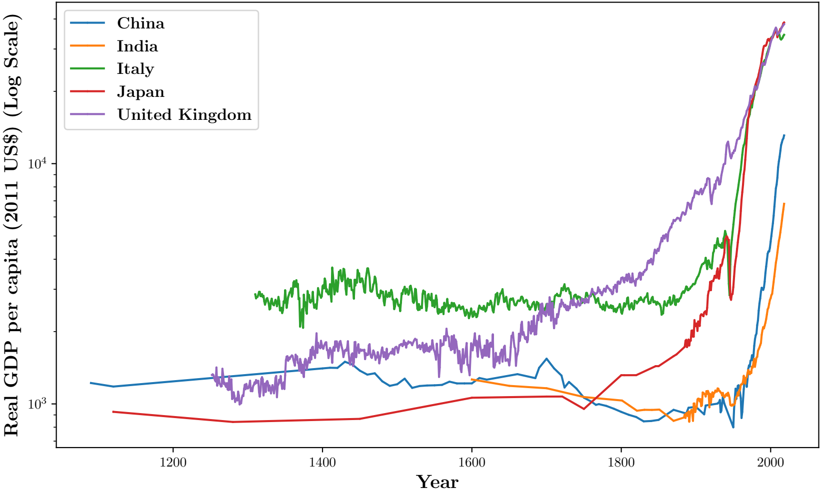
Robert E. Lucas Jr., 1995 Nobel Prize Winner

Figure: HDP na obyvateľa Nemecko a Spojené štáty, 1900-2020

Ekonomický rast medzi krajinami v skutočne dlhom období



Ekonomický rast medzi krajinami v skutočne dlhom období



Úvod do diferenčných rovníc

Diferenčné rovnice sú základným nástrojom matematickej ekonómie. Sú to rovnice, ktoré popisujú vývoj nejakej veličiny v čase. Príkladom môže byť:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t, \quad \text{kde} \quad y_t \quad \text{je veličina v čase} \quad t. \tag{1}$$

Rád diferenčnej rovnice

- Rád je určený najvyšším rádom diferencie v rovnici.
- **Prvého rádu**: obsahuje iba prvú diferenciu premennej:

$$y_{t+1} - y_t$$

- **Druhého rádu**: obsahuje druhú diferenciu premennej:

$$y_{t+2} - y_t$$

- Všeobecne, diferenčná rovnica n-tého rádu obsahuje premenné s rozdielom maximálne n období.

Autonómne a neautonómne rovnice

- Rovnica je **neautonómna**, ak závisí explicitne od času t.
- Príklad neautonómnej rovnice:
$$y_{t+1} = f(y_t, t)$$
- Rovnica je **autonómna**, ak nezávisí explicitne od t.
- Príklad autonómnej rovnice:
$$y_{t+1} = f(y_t)$$

Lineárne a nelineárne diferenčné rovnice

- Rovnica je **nelineárna**, ak obsahuje nelineárne členy v y_t, y_{t+1}, atď.
- Príklad nelineárnej autonómnej rovnice prvého rádu:

$$y_{t+1} = y_t^2 + 3y_t$$

- Rovnica je **lineárna**, ak žiadny y člen nie je umocnený na iný exponent ako 1.
- Príklad lineárnej neautonómnej rovnice:

$$y_{t+1} = 3y_t + 2t$$

- Lineárna autonómna rovnica druhého rádu:

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0$$

V našom prípade bude linearita/nelinearita závisieť od predpokladu produkčnej funkcie.

Ako je to s produkčnými funkciami?

- Ak je $F(K_t, N_t)$ lineárna funkcia, napríklad:

$$F(K_t, N_t) = aK_t + bN_t$$

  potom je rovnica lineárna.
- Väčšina rastových modelov používa Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu:

$$F(K_t, N_t) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

  kde $0 < \alpha < 1$.
- Keďže K_t^{α} obsahuje mocninu, rovnica sa stáva nelineárnou.
- To znamená, že akumulácia kapitálu nezávisí lineárne od vstupov, ale vykazuje klesajúce výnosy, čo už viete z Mikroekonómie.

Lineárne autonómne diferenčné rovnice

Definícia 1

Všeobecná forma lineárnej autonómnej diferenčnej rovnice prvého rádu je daná rovnicou:

$$y_{t+1} = ay_t + b \tag{2}$$

kde a a b sú známe konštanty.

Postup riešenia

- Ak je počiatočná podmienka y_0 známa, vypočítame ďalšie hodnoty iteratívne.
- **Krok 1:** Pre $t = 0$

$$y_1 = ay_0 + b$$

- **Krok 2:** Pre $t = 1$

$$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b$$

- Po úprave:

$$y_2 = a^2 y_0 + b(a + 1)$$

- **Krok 3:** Pre $t = 2$

$$y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + b(a + 1)) + b$$

- Po úprave:

$$y_3 = a^3 y_0 + b(a^2 + a + 1)$$

Vzorový vzorec

Vzorový tvar riešenia:

$$y_t = a^t y_0 + b(a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1) \tag{3}$$

- Výraz v zátvorke je suma t členov geometrického radu.
- Po dosadení vzorca pre súčet geometrického radu dostaneme

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1} = \frac{1 - a^t}{1 - a}, \quad \text{pre } a \neq 1$$

Výsledné riešenie

Všeobecné riešenie diferenčnej rovnice:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{ak } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{ak } a = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Ak $a \neq 1$, riešenie obsahuje súčet geometrického radu.
- Ak $a = 1$, riešenie má lineárny tvar $y_t = y_0 + bt$.

Nelineárne diferenčné rovnice

Definícia 2:

Nelineárna, autonómna, diferenčná rovnica prvého rádu:

$$y_{t+1} = f(y_t) \tag{5}$$

kde f je nelineárna funkcia. Rovnovážne stavy sa nachádzajú tam, kde $y_{t+1} = y_t$.

Nelineárne rovnice nemôžu byť vo všeobecnosti vyriešené analyticky. Preto sa používajú iné (kvalitatívne) metódy. Jednou z nich je fázový diagram a analýza stabilita rovnavážnych bodov.

Fázový diagram

Metóda analýzy stability:

- Rovnica pre dynamiku: $y_{t+1} = y_t^\alpha$, kde $\alpha = 0.5$.
- Rovnovážny stav nastáva, keď $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$, teda:

$$\bar{y} = \bar{y}^\alpha.$$

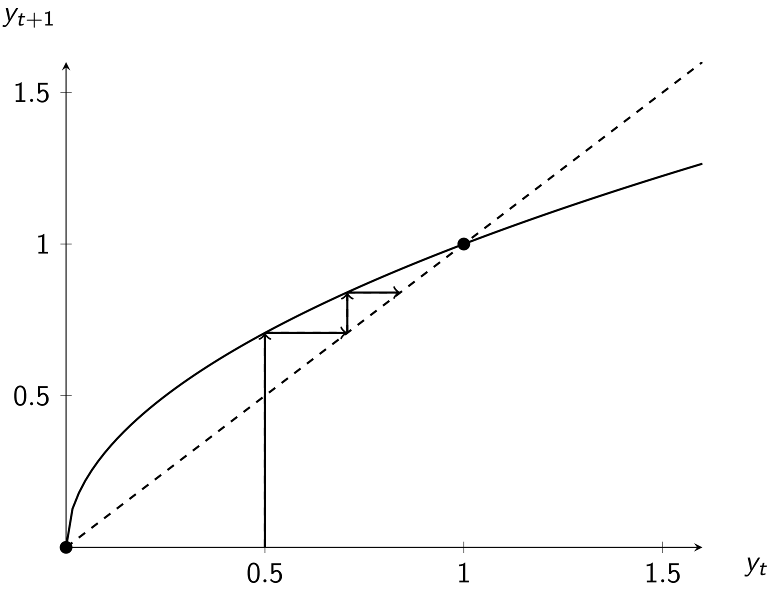
- Po odčítaní $\bar{y}$ na jednu stranu:

$$\bar{y} - \bar{y}^\alpha = 0.$$

- Faktorizácia (vyňatie pred zátvorku):

$$\bar{y}(1 - \bar{y}^{\alpha-1}) = 0.$$

- Riešenia:
  - $\bar{y} = 0$.
  - $\bar{y}^{\alpha-1} = 1 \Rightarrow \bar{y} = 1$.
- Rovnovážne body sú teda $\bar{y} = 0$ a $\bar{y} = 1$.


y_{t+1}
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
y_t

Fázový diagram pre $y_{t+1} = y_t^2$

Analýza stability (opäť):

- Rovnica pre dynamiku: $y_{t+1} = y_t^2$.
- Rovnovážny stav nastáva, keď $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$, teda:

$$\bar{y} = \bar{y}^2.$$

- Po odčítaní $\bar{y}$ na jednu stranu:

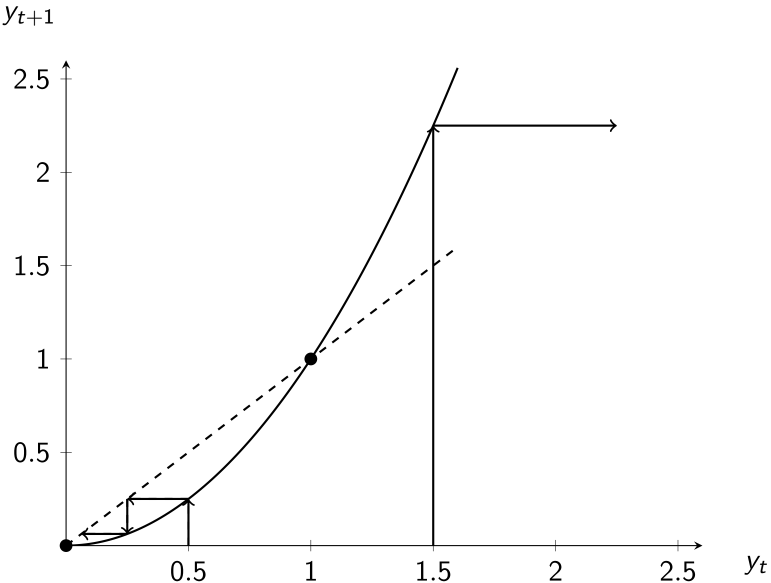
$$\bar{y} - \bar{y}^2 = 0.$$

- Faktorizácia:

$$\bar{y}(1 - \bar{y}) = 0.$$

- Riešenia:
  - $\bar{y} = 0$.
  - $\bar{y} = 1$.
- Rovnovážne body sú teda $\bar{y} = 0$ a $\bar{y} = 1$.

Fázový diagram pre $y_{t+1} = y_t^2$

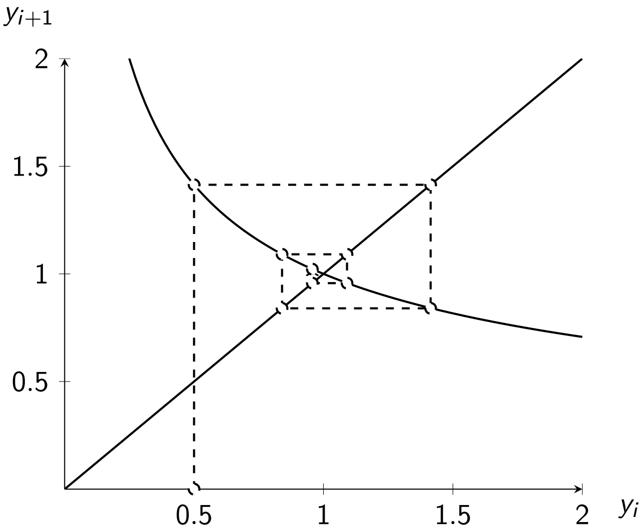


Stabilita rovnovážnych bodov

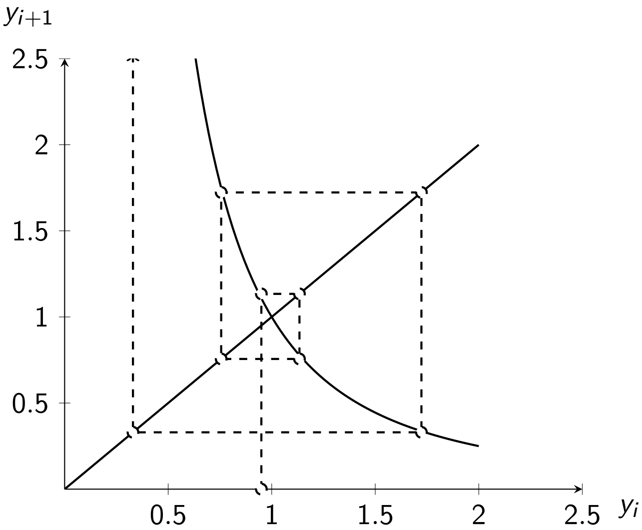
- Ak začneme napravo od bodu $\bar{y} = 1$, napríklad pri $y_0 = 1.5$, sledujeme vývoj v čase.
- Použitím diagramu vidíme, že hodnoty y_t rastú monotónne.
- Z toho vyplýva, že bod $\bar{y} = 1$ je **nestabilný rovnovážny bod**.
- Naopak, ak začneme s $y_0 = 0.5$, hodnota y_t sa postupne zmenšuje smerom k nule.
- Preto bod $\bar{y} = 0$ je **lokálne stabilný rovnovážny bod**.

Uvažujme diferenčnú rovnicu v rovnakej forme, ale teraz predpokladajme, že $\alpha = -\frac{1}{2}$ a $\alpha = -2$

Fázový diagram pre $\alpha = -\frac{1}{2}$ (Stabilné ekvilibrium)



Fázový diagram pre $\alpha = -2$ (Nestabilné ekvilibrium)



Stabilita rovnovážnych bodov vo všeobecnosti

- Diferenčná rovnica: $y_{t+1} = y_t^{\alpha}$
- Derivácia funkcie f:

$$f'(y_t) = \alpha y_t^{\alpha-1}$$

- Stacionárny bod $\bar{y} = 1$:

$$f'(1) = \alpha$$

- Podmienka stability (Veta 1):
  - Bod $\bar{y} = 1$ je lokálne stabilný, ak $-1 < \alpha < 1$.
  - Inak je nestabilný.

Príklad stability pre $\bar{y} = 1$

Veta 1

Rovnovážny bod autonómnej nelineárnej diferenčnej rovnice je lokálne stabilný, ak absolútna hodnota derivácie $|f'(\bar{y})| < 1$. Inak je nestabilný.

- Aplikácia na príklad:
  - Pre $\bar{y} = 1$: $f'(1) = \alpha$.
  - Ak $-1 < \alpha < 1$, bod je stabilný.
  - Inak je nestabilný.

Ďalšie stacionárne body

- Stacionárny bod $\bar{y} = 0$:
  - Pre $\alpha > 1$: $f'(0) = 0$ (lokálne stabilný)
  - Pre $0 < \alpha < 1$: $f'(0)$ nie je definované (nestabilný)
- Globálna stabilita:
  - Bod $\bar{y} = 0$ nie je globálne stabilný, pretože konvergencia závisí od počiatočnej hodnoty y_t.

Oscilácie a monotónny pohyb

Veta 2.

Diferenčná rovnica spôsobí oscilácie v y_t, ak je derivácia f' záporná pre všetky $y_t > 0$. Ak je derivácia f' kladná pre všetky $y_t > 0$, y_t sa pohybuje monotónne.

- Príklady:
  - Pre $\alpha = -\frac{1}{2}$ a $\alpha = -2$: oscilácie.
  - Pre $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = 2$: monotónny pohyb.
- Stabilita závisí od hodnoty α:
  - Pre $-1 < \alpha < 1$ je bod $\bar{y} = 1$ stabilný.
  - Pre $\alpha > 1$ je bod $\bar{y} = 0$ lokálne stabilný, ale nie globálne.
- Oscilácie vs. monotónny pohyb:
  - Záporná derivácia spôsobí oscilácie.
  - Kladná derivácia spôsobí monotónny pohyb.

Agenda

Solowov model je základným nástrojom na pochopenie dlhodobého ekonomického rastu a rozdielov v príjmoch medzi krajinami.

- Vyvinutý Robertom Solowom (1956), neskôr ocenený Nobelovou cenou.
- Model zahŕňa:
  - **Agregátnu produkčnú funkciu**
  - **Funkciu spotreby/úspor**
  - **Rovnicu akumulácie kapitálu**
- Predpovede modelu dobre korešpondujú s reálnymi dátami.

Institute Professor Emeritus Robert Solow, pathbreaking economist, dies at age 99
Nobel-winning scholar changed his field, taught generations of students, and helped make MIT a global leader in economics research.
Peter Dizikes — MIT News, 2023

Produkcia, spotreba a investície

Solowov model predpokladá existenciu celkovej produkčnej funkcie, ktorá transformuje kapitál a prácu na výstup. Kapitál a práca sa líšia:

- Kapitál je *stavový* (stock) pojem, možno ho akumulovať.
- Práca je *tokový* (flow) koncept, čas na prácu je obmedzený.

Príklad:

- Kosačka = kapitál
- Čas kosenia = práca

Kapitál akumulujeme, zatiaľ čo práca je daná exogénne.

Matematická definícia produkčnej funkcie

Produkčná funkcia:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \tag{6}$$

kde:

- A_t - exogénna produktivita,
- K_t - kapitál,
- N_t - pracovná sila.

Predpoklady:

- $F_K > 0$, $F_N > 0$ - viac vstupov znamená viac výstupu,
- $F_{KK} < 0$, $F_{NN} < 0$ - klesajúce hraničné produkty,
- $F_{KN} > 0$ - viac kapitálu zvyšuje hraničný produkt práce,
- Konštantné výnosy z rozsahu: $F(\gamma K_t, \gamma N_t) = \gamma F(K_t, N_t)$,
- Produkcia nie je možná bez kapitálu a práce: $F(0, N_t) = F(K_t, 0) = 0$.

Cobb-Douglasova produkčná funkcia

Špecifická forma produkčnej funkcie:

$$F(K_t, N_t) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \quad \text{kde} \quad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

Táto funkcia zachováva vyššie uvedené vlastnosti a bude používaná v celom kurze.

Prvé parciálne derivácie:

$$F_K(K_t, N_t) = \alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

$$F_N(K_t, N_t) = (1-\alpha) K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

Keďže $0 < \alpha < 1$, hraničné produkty kapitálu a práce sú pozitívne.
Druhé derivácie:

$$F_{KK}(K_t, N_t) = \alpha(\alpha-1) K_t^{\alpha-2} N_t^{1-\alpha}$$

$$F_{NN}(K_t, N_t) = -\alpha(1-\alpha) K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha-1}$$

$$F_{KN}(K_t, N_t) = (1-\alpha)\alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{-\alpha}$$

Klesajúce hraničné produkty sú splnené ($F_{KK} < 0$, $F_{NN} < 0$) a $F_{KN} > 0$.

Konštantné výnosy z rozsahu a podmienky optimalizácie

Overenie konštantných výnosov z rozsahu:

$$F(\gamma K_t, \gamma N_t) = \gamma K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Súčet exponentov sa rovná jednej, čo znamená konštantné výnosy.
Nevyhnutnosť oboch vstupov:

$$F(0, N_t) = 0, \quad F(K_t, 0) = 0$$

Produkcia bez jedného vstupu nie je možná.

Optimalizačný problém firmy

Firma maximalizuje zisk:

$$\max_{K_t, N_t} \Pi_t = AF(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t \tag{8}$$

kde w_t je reálna mzda a R_t je návratnosť kapitálu.
Podmienky prvého rádu:

$$w_t = AF_N(K_t, N_t) \tag{9}$$

$$R_t = AF_K(K_t, N_t) \tag{10}$$

Firma optimalizuje vstupy tak, aby sa hraničný produkt rovnal cene faktora.

Reprezentatívna domácnosť v ekonomike

Existuje jedna reprezentatívna domácnosť, ktorá má v čase t stavový veličinu kapitálu K_t a pracovnú silu N_t. Jej príjem je získaný z dodávania kapitálu a práce firme:

$$Y_t = w_t N_t + R_t K_t$$

Tento príjem môže byť použitý na spotrebu C_t alebo investície I_t, pričom rozpočtové obmedzenie je:

$$C_t + I_t \leq w_t N_t + R_t K_t + \pi_t \tag{11}$$

kde π_t predstavuje dividendové platby. Ak platí rovnosť, celkové výdavky sa rovnajú celkovému príjmu a výstupu:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{12}$$

Akumulácia kapitálu

Budúce úrovne kapitálu sú ovplyvnené investíciami. Kapitál sa akumuluje podľa rovnice:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \tag{13}$$

kde $0 < \delta < 1$ je miera opotrebenia kapitálu. Táto rovnica vyjadruje tzv. *'zákon pohybu'* kapitálu. Predpokladáme jedno obdobie oneskorenia medzi investíciou a produktivitou nového kapitálu.

Príklad: Kosačky na trávu

Predpokladajme, že stavová veličina kapitálu je $K_t = 10$ kosačiek na trávu a miera opotrebenia je $\delta = 0.1$. Ak vyprodukujete 3 jednotky výstupu, $Y_t = 3$:

- Ak spotrebujete všetok výstup ($C_t = 3$), potom $I_t = 0$ a v ďalšom období $K_{t+1} = 9$.
- Ak spotrebujete dve jednotky výstupu ($C_t = 2$), potom $I_t = 1$ a $K_{t+1} = 10$.
- Ak spotrebujete jednu jednotku výstupu ($C_t = 1$), potom $I_t = 2$ a $K_{t+1} = 11$.

Rozhodnutie o investovaní je intertemporálne rozhodnutie medzi súčasnou a budúcou spotrebou. Viac kapitálu v budúcnosti znamená vyšší budúci výstup a možnosť vyššej spotreby.

Solowov model úspor a práce

Solowov model predpokladá, že investície sú konštantným podielom výstupu. Nech $0 < s < 1$ označuje mieru úspor:

$$I_t = sY_t \tag{14}$$

Kombináciou s rovnicou (12) dostávame:

$$C_t = (1 - s)Y_t \tag{15}$$

Ekonomika teda každé obdobie spotrebuje konštantnú časť svojho výstupu a investuje zvyšok.
Predpokladáme tiež, že domácnosť ponúka prácu neelasticky, teda celkové množstvo práce N_t je exogénne a fixné v čase. Tento predpoklad je v súlade s dlhodobými trendmi pracovných hodín na obyvateľa.

Základné rovnice Solowovho modelu

Solowov model je charakterizovaný nasledujúcimi rovnicami:

$$Y_t = AF(K_t, N_t) \tag{16}$$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{17}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \tag{18}$$

$$I_t = sY_t \tag{19}$$

$$w_t = AF_N(K_t, N_t) \tag{20}$$

$$R_t = AF_K(K_t, N_t) \tag{21}$$

Tieto rovnice opisujú dynamiku ekonomiky v čase.

Dynamika kapitálu na pracovníka

Kombináciou rovníc (16), (18) a (19) dostávame:

$$K_{t+1} = sAF(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t. \tag{22}$$

Definujme kapitál na pracovníka $k_t = \frac{K_t}{N_t}$ a využívame predpoklad konštantných výnosov z rozsahu:

$$k_{t+1} = sAf(k_t) + (1-\delta)k_t. \tag{23}$$

Výstup, spotreba a investície na pracovníka:

$$y_t = Af(k_t) \tag{24}$$

$$c_t = (1-s)Af(k_t) \tag{25}$$

$$i_t = sAf(k_t) \tag{26}$$

Eulerova veta nám umožňuje vyjadriť mzdu a sadzbu prenájmu kapitálu:

$$R_t = Af'(k_t) \tag{27}$$

$$w_t = Af(k_t) - k_t Af'(k_t) \tag{28}$$

Solowov model s Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou

Predpokladajme, že produkčná funkcia má tvar Cobb-Douglas. Centrálnu rovnicu modelu môžeme zapísať ako:

$$k_{t+1} = sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t. \tag{29}$$

Ostatné premenné sú určené ako funkcie k_t:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}, \tag{30}$$

$$c_t = (1-s)Ak_t^{\alpha}, \tag{31}$$

$$i_t = sAk_t^{\alpha}, \tag{32}$$

$$R_t = \delta Ak_t^{\alpha-1}, \tag{33}$$

$$w_t = (1-\delta)Ak_t^{\alpha}. \tag{34}$$

Tieto vzťahy popisujú produkciu, spotrebu, investície, ročnú sadzbu a mzdu ako funkcie kapitálu na pracovníka k_t.

Grafická analýza Solowovho modelu

Uvažujme centrálnu rovnicu Solowovho modelu, (23). Graficky zobrazíme k_{t+1} ako funkciu k_t (ktorý je v predchádzajúcom období t a preto exogénny).

- Ak $k_t = 0$, potom $k_{t+1} = 0$, keďže predpokladáme, že kapitál je nevyhnutný pre výrobu. To znamená, že v grafe s k_t na horizontálnej osi a k_{t+1} na vertikálnej osi, graf začína v počiatku.
- Ako sa bude meniť k_{t+1} s meniacim sa k_t? Vezmime deriváciu k_{t+1} podľa k_t:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = sAf'(k_t) + (1 - \delta). \tag{35}$$

Rovnica (35) vyjadruje výraz pre sklon grafu k_{t+1} voči k_t. Veľkosť tohto sklonu závisí od hodnoty k_t.

- Keďže $f'(k_t)$ je kladné a $\delta < 1$, sklon je kladný, takže k_{t+1} rastie s k_t.
- Keďže $f''(k_t) < 0$, výraz $sAf'(k_t)$ sa zmenšuje s rastúcim k_t. To znamená, že k_{t+1} je rastúca funkcia k_t, ale rastová rýchlosť sa znižuje.

Predpokladajme dve dodatočné podmienky, ktoré sa niekedy nazývajú *Inadove podmienky*:

$$\lim_{k_t \to 0} f'(k_t) = \infty, \tag{36}$$

$$\lim_{k_t \to \infty} f'(k_t) = 0. \tag{37}$$

Slovne:

- Rovnica (36) hovorí, že hraničný produkt kapitálu je nekonečný, keď nie je žiadny kapitál.
- Rovnica (37) hovorí, že hraničný produkt kapitálu sa blíži k nule, keď kapitálová zásoba na pracovníka rastie do nekonečna.

Tieto podmienky spolu implikujú, že sklon $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$ začína v kladnom nekonečne až sa ustáli na výraze $1 - \delta$, čo je kladné číslo, menšie však ako jeden.

Cobb-Douglasova produkčná funkcia

Predpokladajme, že produkčná funkcia je Cobb-Douglasovho typu, takže centrálna rovnica Solowovho modelu na pracovníka je daná (29). Výraz pre sklon centrálnej rovnice je:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \alpha s A k_t^{\alpha-1} + (1-\delta). \tag{38}$$

To môžeme ekvivalentne zapísať ako:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \alpha s A \left(\frac{1}{k_t}\right)^{1-\alpha} + (1-\delta). \tag{39}$$

Ak $k_t = 0$, potom $\frac{1}{k_t^{1-\alpha}} = \infty$. Keďže $1-\alpha > 0$, a mocnina nekonečna s kladným exponentom je nekonečno, sklon je teda nekonečný. Podobne, ak $k_t \to \infty$, potom $\frac{1}{k_t^{1-\alpha}} = 0$. Preto Inadove podmienky platia pre produkčnú funkciu Cobb-Douglasoveho typu.

Graf centrálnej rovnice Solowovho modelu

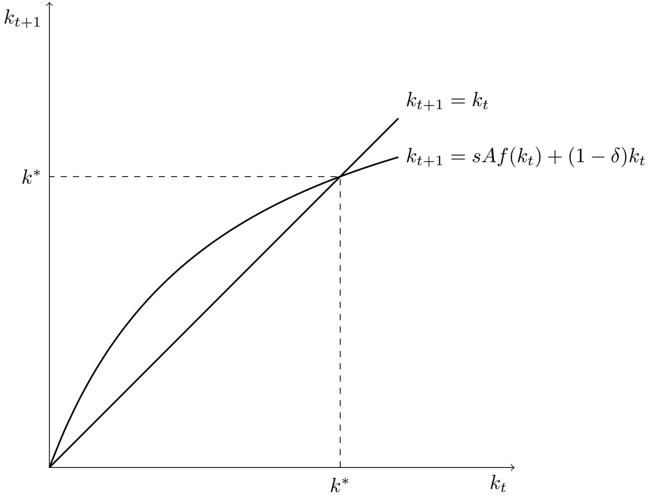
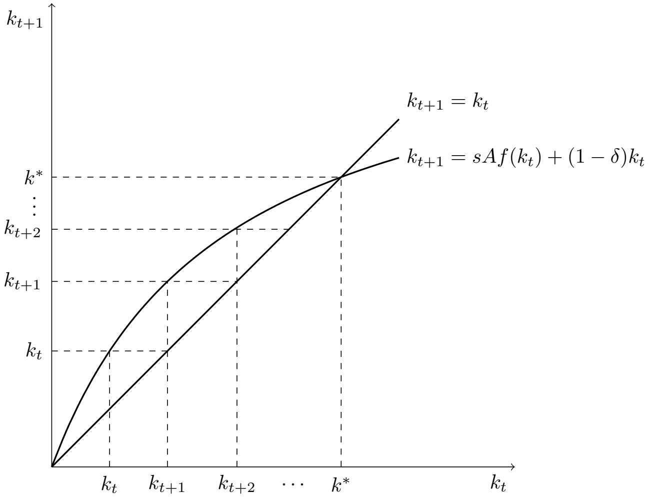


Figure: Graf centrálnej rovnice Solowowho modelu

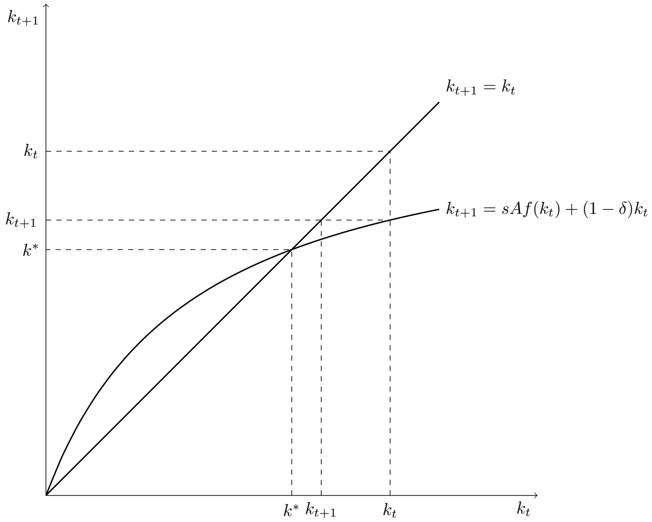
Konvergencia ku stálemu stavu: $k_t < k^*$

Ak $k_t = 0$, potom $\frac{1}{k_t^{1-\alpha}} = \infty$. Keďže $1 - \alpha > 0$, sklon je nekonečný.



Konvergencia ku stálemu stavu: $k_t > k^*$

Ak $k_t > k^*$, kapitálová zásoba sa bude postupne znižovať, až kým nedosiahne stály stav.



Konvergencia ku stálemu stavu

Stály stav je bod rovnováhy, ku ktorému sa ekonomika približuje bez ohľadu na počiatočné k_t.

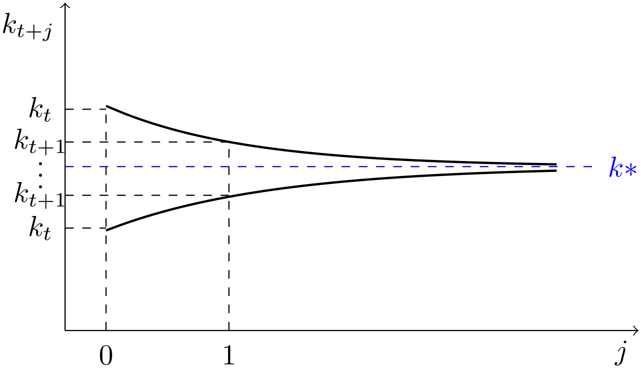
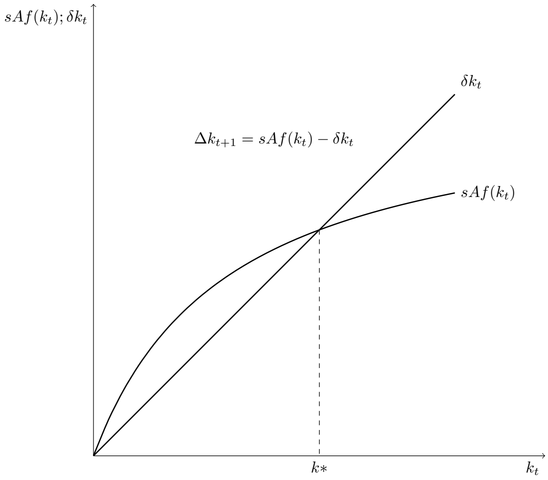


Figure: Konvergencia ku stálemu stavu

Alternatívne zobrazenie Solowovho modelu

Transformácia kapitálovej zásoby na jej prvé diferencie sa rovná rozdielu medzi investíciami a opotrebením:$\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t = sAf(k_t) - \delta k_t$



Algebra stáleho stavu s Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou

Predpokladajme, že produkčná funkcia má tvar Cobb-Douglasovej funkcie, takže základná rovnica modelu je daná rovnicou (29) a ostatné premenné sú určené podľa rovnice (30). Aby sme algebraicky vyriešili kapitálovú zásobu v stálom stave, vezmeme rovnicu (29) a nastavíme $k_{t+1} = k_t = k^*$:

$$k^* = sA(k^*)^\alpha + (1-\delta)k^*$$

Toto je rovnica s jednou neznámou. k^*:

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{40}$$

Pozorujeme, že k^* rastie so zvyšovaním s a A a klesá so zvyšovaním δ. Všetky ostatné premenné v modeli môžu byť zapísané ako funkcie k_t a parametrov. Preto bude existovať stály stav aj vo vyjadrení v týchto premenných. Dosadením rovnice (40) všade, kde sa vyskytuje k_t, dostávame:

$$y^* = A(k^*)^\alpha \tag{41}$$

$$c^* = (1 - s)A(k^*)^\alpha \tag{42}$$

$$i^* = sA(k^*)^\alpha \tag{43}$$

$$R^* = \alpha A(k^*)^{\alpha - 1} \tag{44}$$

$$w^* = (1 - \alpha)A(k^*)^\alpha \tag{45}$$

Experimet: zmena s

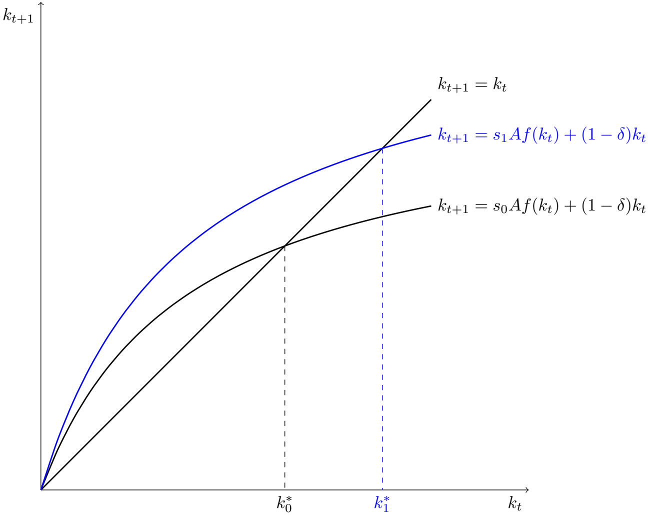


Figure: Exogénne zvýšenie v s, $s_1 > s_0$

Dynamické odozvy na exogénne zvýšenie miery úspor

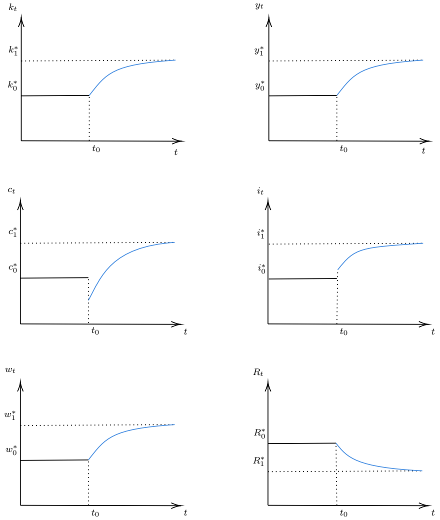


Figure: Dynamická odozva na exogénne zvýšenie s

Dynamická odozva g_y^t na exogénne zvýšenie miery úspor

$$g_{y,t} = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

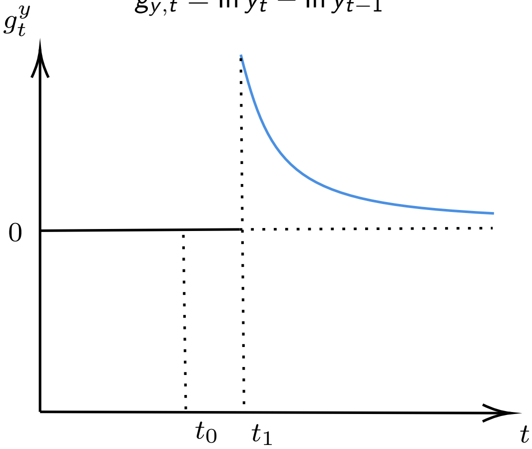


Figure: Dynamická odozva na rýchlosť rastu výstupu

Experimet: zmena A

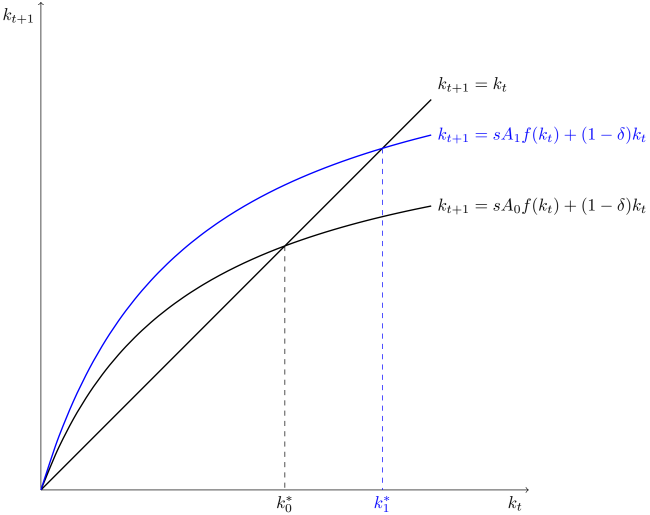


Figure: Exogénny nárast v A, $A_1 > A_0$

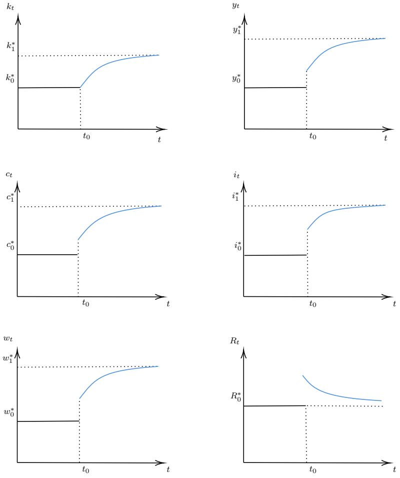


Figure: Dynamická odozva na rast výstupu v A

Dynamická odozva g_y^t na exogénne zvýšenie miery úspor

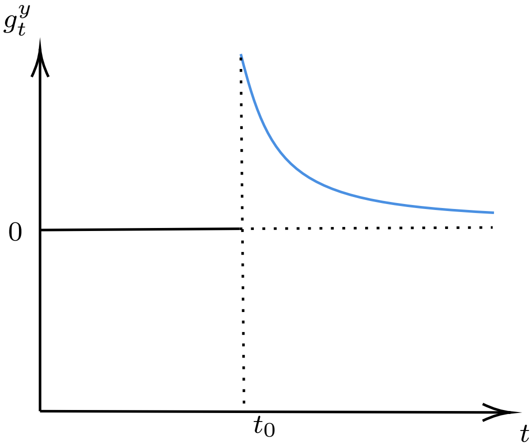


Figure: Dynamická odozva na rýchlosť rastu výstupu

Udržateľný rast v Solowovom modeli

- Základný model ukazuje, že udržateľný rast nemôže pochádzať len z akumulácie kapitálu.
- Zvýšenie miery úspor s vyvolá dočasný rast, ale ten sa postupne zníži na nulu.
- Opakované zvyšovanie s nemôže generovať dlhodobý rast, pretože $s \leq 1$.
- Jednorazová zmena v technologickej úrovni A spôsobí dočasný rast, ale neexistuje limit pre opakované zvyšovanie produktivity.

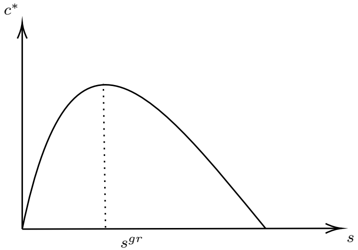
Model môže byť upravený tak, aby existoval rast v stálom stave (nasledujúca hodina).

Zlaté pravidlo

- Vyššia miera úspor s vedie k vyššiemu k^* a tým aj k vyššiemu y^*.
- Avšak, vyššia miera úspor znamená menší podiel spotreby na pracovníka.
- Rovnovážna spotreba na pracovníka je daná vzťahom:

$$c^* = (1 - s)Af(k^*(s)) \tag{46}$$

- Ak $s = 0$, potom $c^* = 0$ (žiadne úspory, žiadny kapitál).
- Ak $s = 1$, potom tiež $c^* = 0$ (všetko je investované, nič sa nespotrebúva).
- Optimálna úroveň s maximalizuje c^* – označovaná ako Zlaté pravidlo úspor s_{gr}.



Zlaté pravidlo úspor je definované podmienkou:

$$Af'(k^*) = \delta \tag{47}$$

To znamená, že hraničný produkt kapitálu musí byť rovný miere odpisov kapitálu. Viď. matematickú odbočku Garın et al. (2021) pp. 64-65 pre dôkaz.

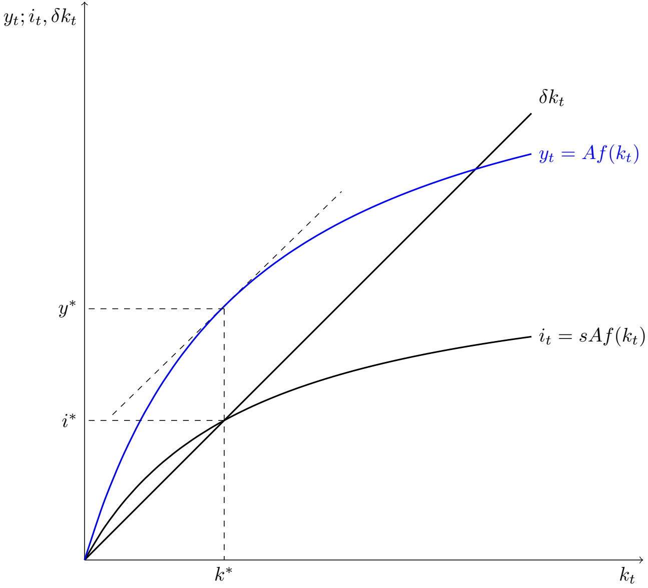


Figure: Miera úspor v Zlatom pravidle

Intuícia Zlatého pravidla

Aká je intuícia pre podmienku $Af'(k^*) = \delta$?

- Ak $Af'(k^*) > \delta$, zvýšenie s vedie k rastu výstupu viac než rastú investície, čo znamená vyššiu spotrebu.
- Ak $Af'(k^*) < \delta$, zvýšenie s vedie k nižšiemu rastu výstupu oproti investíciám, čo znamená pokles spotreby.
- Len ak $Af'(k^*) = \delta$, je s optimálne pre maximálnu ustálenú spotrebu.

Dynamické účinky zvýšenia s:

- Zvýšenie s vždy vedie k okamžitému poklesu spotreby c_t (viac príjmu je alokované na úspory).
- Následne c_t začne rásť v dôsledku vyššej kapitálovej zásoby.
- Ak $s < s_{\text{gr}}$, vyššia s vedie k vyššej spotrebe v dlhodobom horizonte.
- Ak $s > s_{\text{gr}}$, vyššia s vedie k nižšej dlhodobej spotrebe.

Hypotetický priebeh spotreby c_t po zmene miery úspor

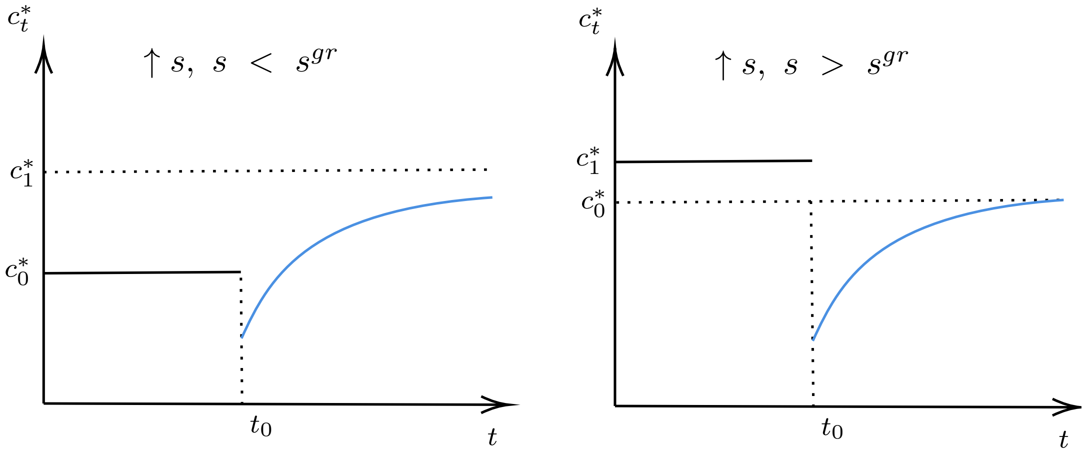


Figure: Efekt zvýšenia s pod a nad Zlatým pravidlom

Zhrnutie

- Produkčná funkcia kombinuje kapitál a prácu do výstupu, pričom predpokladá:
  - nevyhnutnosť oboch vstupov pre výrobu,
  - pozitívne, ale klesajúce hraničné produkty,
  - stále výnosy z rozsahu.
- Kapitál je výrobný faktor, ktorý musí byť vyrobený, pomáha produkovať výstup a nie je úplne spotrebovaný pri výrobe.
- Investície sú výdavky na nový fyzický kapitál, ktorý sa stane produktívnym v budúcnosti.
- Solowov model predpokladá:
  - Domácnosti spotrebúvajú a šetria stálu časť príjmu.
  - Práca je ponúkaná neelasticky.
  - Vývoj kapitálovej akumulácie na pracovníka je daný centrálnou rovnicou modelu.
- Kapitálová zásoba konverguje k jedinečnému stálemu stavu.
  - Zvýšenie miery úspor alebo produktivity vedie k dočasne vyššiemu rastu výstupu, nie však trvalému.

References I

Garın, J., Lester, R., and Sims, E. (2021). Intermediate macroeconomics. *This Version*, 3(0.1).