1. <**4 body**> Predpokladajte, že máte štandardný Solowov model s Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou a rastom produktivity zvyšujúcej pracovnú silu a rastom populácie. Centrálna rovnica modelu je:

$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)} \left[sA\widehat{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\widehat{k}_t \right]$$

Spotreba na efektívnu jednotku práce je:

$$\widehat{c}_t = (1-s)A\widehat{k}_t^{\alpha}$$

(a) Odvoďte výraz pre kapitál na efektívnu jednotku práce v stálom stave.
Riešenie: Predpokladajme stacionárny stav a vyriešme pre $\hat{k}^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{k}^* &= \frac{1}{(1+z)(1+n)} \left[sA\hat{k}^{*\alpha} + (1-\delta)\hat{k}^* \right] \\
\hat{k}^*(1+n)(1+z) &= sA\hat{k}^{*\alpha} + (1-\delta)\hat{k}^* \\
\hat{k}^* \left((1+n)(1+z) - (1-\delta) \right) &= sA\hat{k}^{*\alpha} \\
\hat{k}^*(n+z+\delta) &= sA\hat{k}^{*\alpha} \\
\hat{k}^* &= \left(\frac{As}{n+z+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

kde predposledný riadok využíva aproximáciu $nz \approx 0$.

(b) Použite svoju odpoveď z predchádzajúcej časti na odvodzenie výrazu pre hodnotu spotreby na efektívneho pracovníka v stálom stave.

Riešenie: Výstup na jedného efektívneho pracovníka je

$$\hat{y}^* = A \left(\frac{As}{n+z+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Spotreba na jedného efektívneho pracovníka je $(1-s)\hat{y}^*$ alebo

$$\hat{c}^* = (1-s)A \left(\frac{As}{n+z+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

(c) Použite kalkulus na odvodzenie výrazu pre hodnotu s, ktorá maximalizuje spotrebu v stálom stave na pracovníka. Závisí tento výraz s od hodnôt z alebo n?

Riešenie: Optimalizačný problém je

$$\max_s (1-s)A \left(\frac{As}{n+z+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Je v skutočnosti jednoduchšie riešiť to v logaritmoch (čo platí, keďže logaritmus je monotóna transformácia).

$$\max_s \ln(1-s) + \ln A + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s + \ln\left(\left(\frac{A}{n+z+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$$

Prvá derivácia a podmienka prvého rádu určuje

$$-\frac{1}{1-s} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{s} = 0.$$

Riešením je $s^* = \alpha$. Zlaté pravidlo úspor je nezávislé od n a z.

2. **Excel Úloha - Príklad <3 body>** Predpokladajte, že máte štandardný Solowov model s rastom produktivity upravujúcej pracovnú silu a rastom populácie. Produkčná funkcia je Cobb-Douglas. Centrálna rovnica Solowovho modelu, vyjadrená na efektívne jednotky práce, je daná:

$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)}\left[sA\widehat{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\widehat{k}_t\right]$$

Ostatné premenné modelu sú riadené rovnicami:

$$\widehat{i}_t = s\widehat{y}_t \tag{1}$$

$$\widehat{y}_t = Af\left(\widehat{k}_t\right) \tag{2}$$

$$\widehat{y}_t = \widehat{c}_t + \widehat{i}_t \tag{3}$$

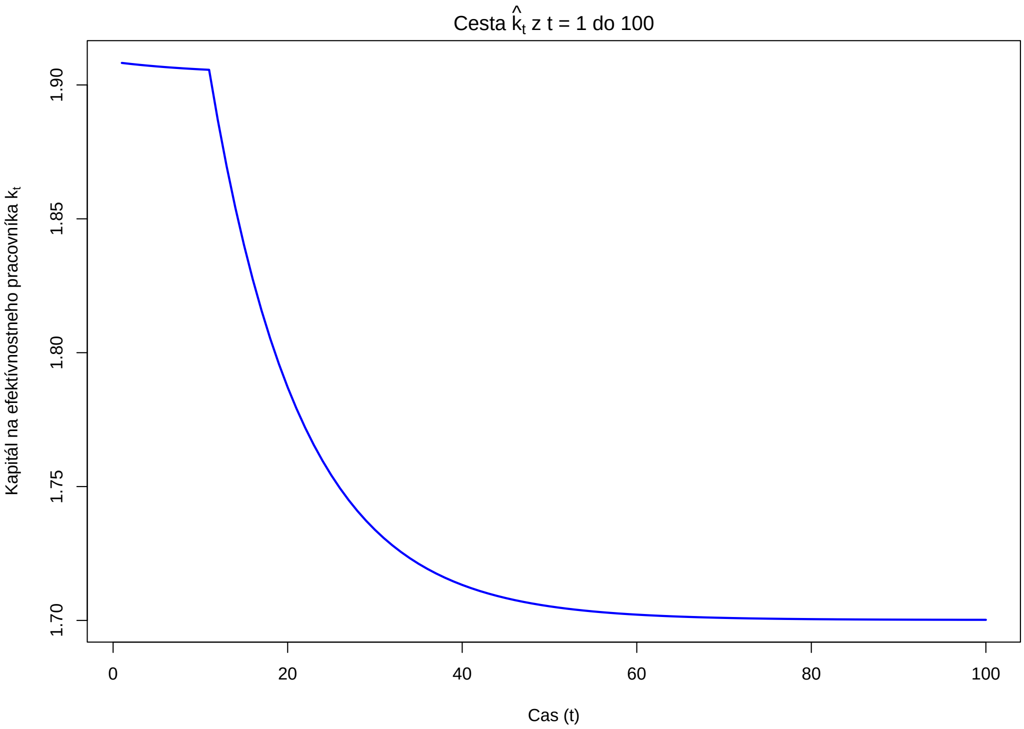
$$R_t = Af'\left(\widehat{k}_t\right) \tag{4}$$

$$w_t = Z_t\left[Af\left(\widehat{k}_t\right) - Af'\left(\widehat{k}_t\right)\widehat{k}_t\right] \tag{5}$$

(a) Vytvorte súbor Excel. Predpokladajte, že úroveň produktivity je fixovaná na $A = 1$. Predpokladajte, že $s = 0.2$ a $\delta = 0.1$. Predpokladajte, že $\alpha = 1/3$. Nech $z = 0.02$ a $n = 0.01$. Vypočítajte číselnú hodnotu kapitálu v stálom stave na efektívnu jednotku práce.
Riešenie: Rovnovážny stav kapitálu na jedného efektívneho pracovníka je približne 1,91.

(b) Predpokladajte, že kapitál na pracovníka spočiatku leží v období 1 v stálom stave. Vytvorte stĺpec období od obdobia 1 do obdobia 100. Použite centrálnu rovnicu modelu na získanie hodnoty $\widehat{k}$ v období 2, za predpokladu, že $\widehat{k}$ je rovný svojmu stálemu stavu v období 1. Pokračujte v iterácii a nájdite hodnoty $\widehat{k}$ v nasledujúcich obdobiach až do obdobia 9. Čo platí o kapitáli na efektívnu jednotku práce v obdobiach 2 až 9?
Riešenie: Zostane približne na 1.91, napriek tomu že sa pohybuje mierne okolo tejto hodnoty kvôli chybe aproximácie pri predpoklade $g_n = 0$.

(c) V období 10 predpokladajte, že dôjde k zvýšeniu miery rastu populácie z $n = 0.01$ na $n = 0.02$. Všimnite si, že kapitál na efektívnu jednotku práce v období 10 závisí od premenných z obdobia 9 (t. j. starej, nižšej hodnoty n), aj keď bude závisieť od novej hodnoty n v období 11 a ďalej. Použite túto novú hodnotu n, existujúcu hodnotu kapitálu na efektívnu jednotku práce, ktorú ste našli pre obdobie 9, a centrálnu rovnicu modelu na výpočet hodnôt kapitálu na efektívnu jednotku práce v obdobiach 10 až 100. Vytvorte



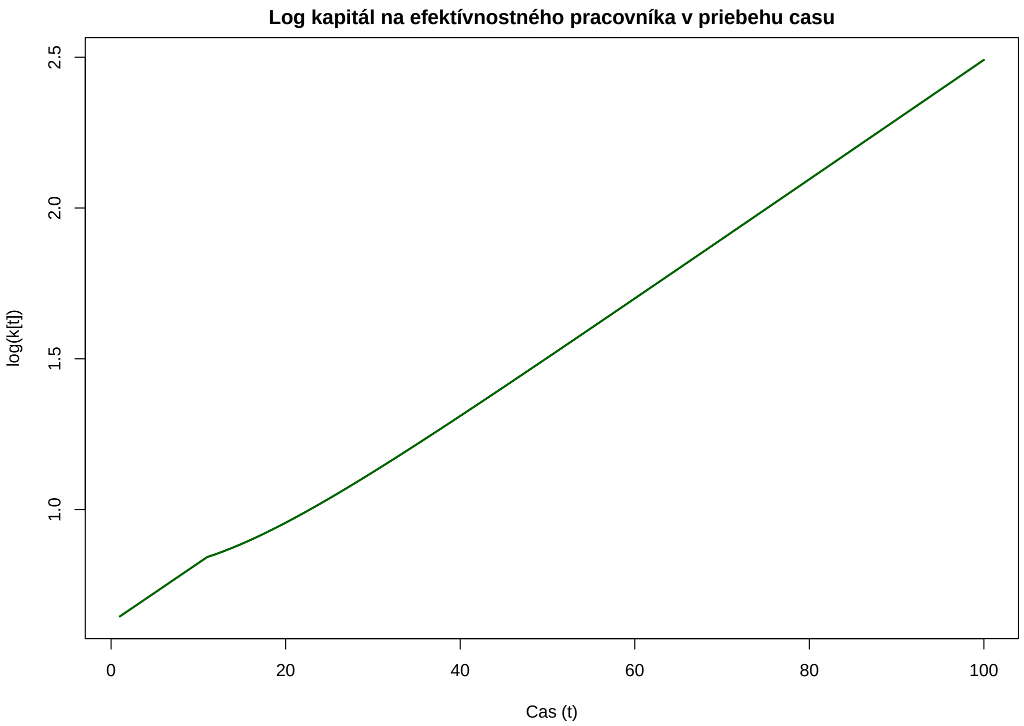
Obr. 1: Grafické riešenie úlohy (b) a (c)

graf, ktorý ukazuje cestu kapitálu na efektívnu jednotku práce od obdobia 1 do obdobia 100.

Riešenie:

(d) Predpokladajte, že počiatočné úrovne N a Z v období 1 sú obe 1. To znamená, že následné úrovne Z a N sú riadené rovnicami $N_t = (1+n)^t$ a $Z_t = (1+z)^t$. Vytvorte stĺpce vo vašom Excel súbore na meranie úrovní N a Z v obdobiach 1 až 100.
Riešenie: Triviálne a je ponechané ako cvičenie na riešiteľku/ľa.

(e) Použite tieto úrovne Z a N a časový rad $\widehat{k}$, ktorú ste vytvorili vyššie, na vytvorenie časového radu kapitálu na pracovníka, t. j. $k_t = \widehat{k}_t Z_t$. Zoberte prirodzený logaritmus výsledného časového radu a zakreslite ho v čase.



Obr. 2: Grafické riešenie úlohy (e)

(f) Ako ovplyvňuje zvýšenie miery rastu populácie dynamickú cestu kapitálu na pracovníka?
Riešenie: V niekoľkých obdobiach po šoku prebieha prechodná dynamika, potom kapitál v čase rastie pomalšie. To znamená, že sklon krivky kapitálu na pracovníka v prvých deviatich obdobiach je väčší ako v nasledujúcich obdobiach.

3. **Excel Úloha - Príklad <3 body>** Predpokladajte, že máte dve krajiny, nazvime ich 1 a 2. Každú riadi Solowov model s Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou, ale každá krajina môže mať potenciálne rôzne hodnoty s a A. Predpokladajme, že hodnota A pre každú krajinu je v čase fixná. Centrálna rovnica modelu je:

$$k_{i,t+1} = s_i A_i k_{i,t}^{\alpha} + (1-\delta)k_{i,t}, \quad i = 1,2$$

Výstup v každej krajine je daný:

$$y_{i,t} = A_i k_{i,t}^{\alpha}$$

(a) Riešte pre kapitál na pracovníka v stálom stave pre všeobecnú krajinu i (i je index rovný buď 1 alebo 2).
Riešenie: Toto je opakovanie. Riešenie pre kapitál v rovnovážnom stave je

$$k_i^{\star} = \left(\frac{s_i A_i}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(b) Použite toto riešenie na výstup na pracovníka v stálom stave v krajine i.
Riešenie: Tiež opakovanie.

$$y_i^\star = A_i \left(\frac{s_i A_i}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s_i}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(c) Použite svoje odpovede z predchádzajúcich častí na napísanie výrazu pre pomer výstupu v stálom stave v krajine 1 k krajine 2 ako funkcie príslušných mier úspor, úrovní produktivity a spoločných parametrov modelu.

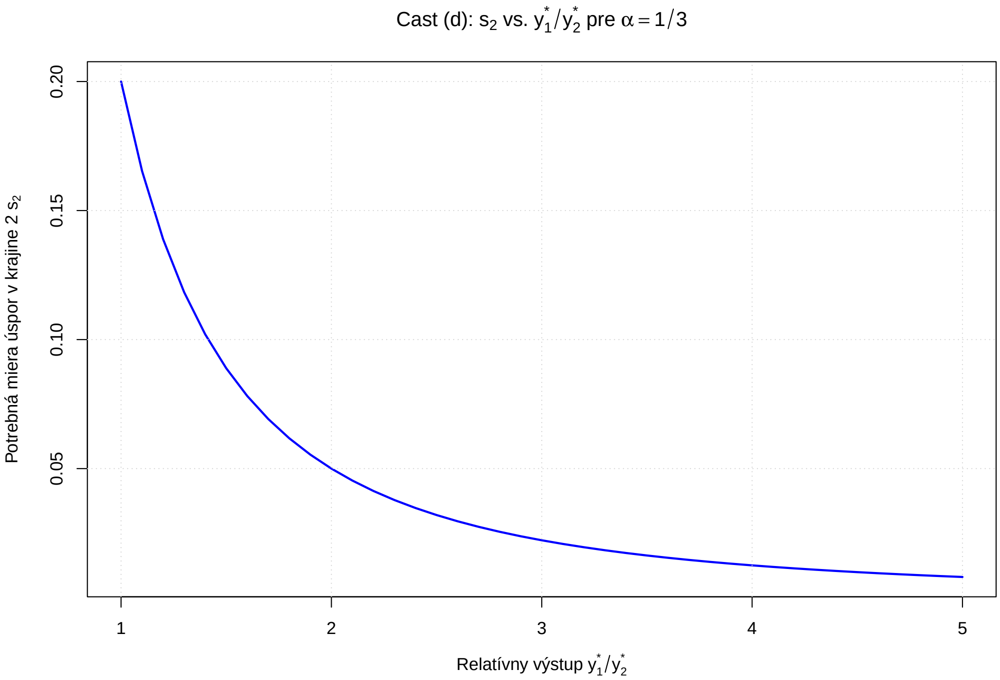
Riešenie: Pomer medzi krajinami z úlohy (b).

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(d) Predpokladajte, že každá krajina má rovnakú hodnotu A, teda $A_1 = A_2$. Predpokladajte, že $\alpha = 1/3$ a $\delta = 0.1$. Predpokladajte, že miera úspor v krajine 1 je $s_1 = 0.2$. V Excelovom hárku vypočítajte rôzne hodnoty relatívnych výstupov v stálom stave (t.j. $\frac{y_1^*}{y_2^*}$) v rozmedzí od 1 do 5, s medzerou 0.1 medzi položkami (t.j. mali by ste vytvoriť stĺpec s hodnotami 1, 1.01, 1.02, 1.03 atď.). Pre každú hodnotu $\frac{y_1^*}{y_2^*}$ riešte pre hodnotu s_2 potrebnú na to, aby bola konzistentná s touto hodnotou. Vytvorte graf tejto hodnoty s_2 proti hodnotám $\frac{y_1^*}{y_2^*}$. Komentujte, či je pravdepodobné, že rozdiely v mierach úspor by mohli vysvetliť veľké rozdiely v relatívnych HDP.
Riešenie: Mierna úprava predchádzajúcej rovnice v úlohe (c).

$$s_2 = s_1 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Graf je uvedený nižšie. Na dosiahnutie rozdielu v príjme vo pomere 2 musí miera úspor v krajine 2 klesnúť na 5 percent. To je nepravdepodobne nízke vzhľadom na skutočný výskyt miery úspor medzi krajinami, ktorú vidíme v údajoch.

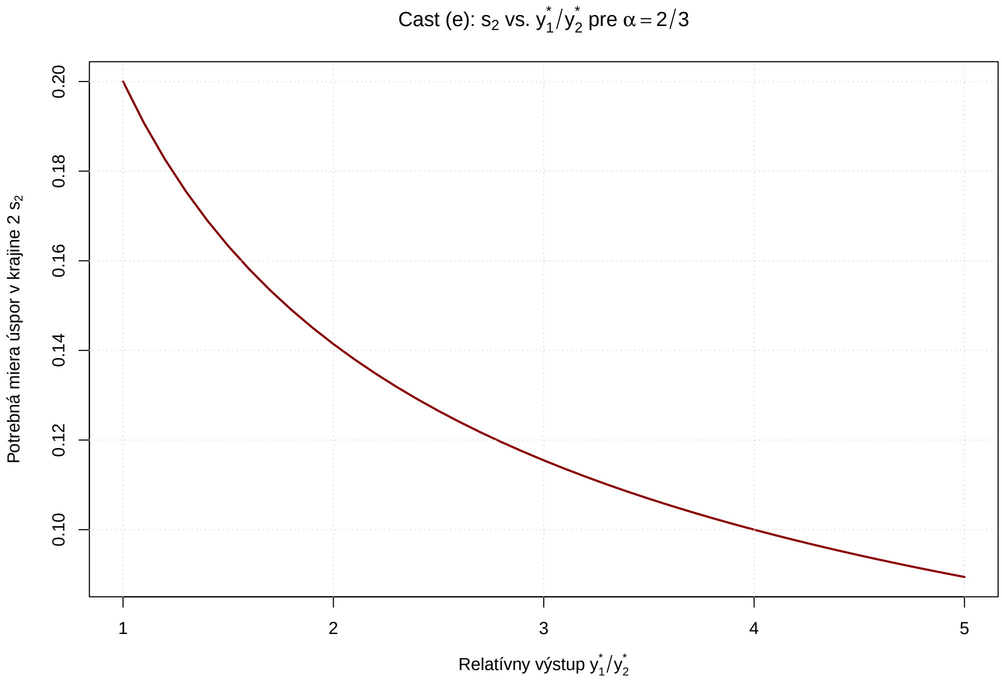


Obr. 3: Grafické riešenie úlohy (d)

(e) Prepracujte túto úlohu, ale tentokrát predpokladajte, že $\alpha = 2/3$. Porovnajte grafy medzi sebou. Komentujte, ako vyššia hodnota α zvyšuje alebo nezvyšuje pravdepodobnosť, že rozdiely v mierach úspor môžu vysvetliť veľké rozdiely vo výstupe na obyvateľa.

Riešenie: Na to, aby sme dosiahli rozdiel v pomere príjmu vo výške 2, musí byť miera úspor v krajine 2 približne 0,15. Na dosiahnutie rozdielu v pomere príjmu vo výške 5 musí byť miera úspor v krajine 2 o trochu nižšia než 0.1.

V dôsledku toho sa zdá byť pravdepodobnejšie, že rozdiely v mierach úspor sú kvantitatívne významnými činiteľmi rozdielov v príjmoch na obyvateľa — platí však, že čím väčšia je hodnota α, tým výraznejší je tento vplyv.



Obr. 4: Grafické riešenie úlohy (e)

4. **R/STATA Úloha - Empirické zadanie <5 bodov>**
   Individuálne posúdenie.