

# Pochopenie príjmových rozdielov medzi krajinami

Rastové účtovníctvo. Konvergencia - absolútna a podmienená. Môžu rozdiely v miere úspor vysvetliť veľké rozdiely vo výstupe na obyvateľa? Úloha produktivity.

Tomáš Oleš

Katedra hospodárskej politiky  
NHF

March 10, 2025

# Agenda

- Pochopenie rozdielov medzi krajinami
- Rastové účtovníctvo
- Empirický odhad Solowovho modelu a konvergenzie

Krajina	HDP na obyvateľa (\$)
<b>Vysokopríjmové krajiny</b>	
USA	42 426
Kanada	35 180
Nemecko	34 383
Japonsko	30 232
Singapur	59 149
<b>Stredne príjmové krajiny</b>	
Mexiko	12 648
Thajsko	9 567
<b>Nízkopríjmové krajiny</b>	
India	1 636
Keňa	1 157
Mali	81
Nepál	81

# Úvod do konvergencie

- Uvažujeme dve krajiny a jednoduchý Solowov model, označené indexmi 1 a 2.
- Kapitál na obyvateľa v krajine 1 v čase  $t$  je  $k_{1,t}$ .
- Obe krajiny majú Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu s rovnakým  $\alpha$ .
- Kapitál sa amortizuje rovnakou mierou v oboch krajinách.
- Rozdiely medzi krajinami môžu byť v:
  - Produktivite:  $A_1 \neq A_2$  (konštantné v čase)
  - Miere úspor:  $s_1 \neq s_2$
  - Počiatočnom kapitáli na pracovníka:  $k_{1,t} \neq k_{2,t}$

- Výstup na obyvateľa v krajine 1:

$$y_{1,t} = A_1 k_{1,t}^\alpha \quad (1)$$

- Výstup na obyvateľa v krajine 2:

$$y_{2,t} = A_2 k_{2,t}^\alpha \quad (2)$$

$$\frac{y_{1,t}}{y_{2,t}} = \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{k_{1,t}}{k_{2,t}} \right)^\alpha \quad (3)$$

- Rôzne úrovne výstupu môžu byť spôsobené:
  - Rôznymi úrovňami produktivity ( $A_1 \neq A_2$ )
  - Rôznymi zásobami kapitálu na obyvateľa ( $k_{1,t} \neq k_{2,t}$ )

- Chudobnejšia krajina s nižším počiatočným kapitálom rastie rýchlejšie.
- Nakoniec dosiahne rovnakú úroveň kapitálu na pracovníka ako bohatšia krajina.
- Solowov model predpovedá konvergenciu, ak sú miery úspor a produktivita rovnaké.

# Dynamika rastového procesu

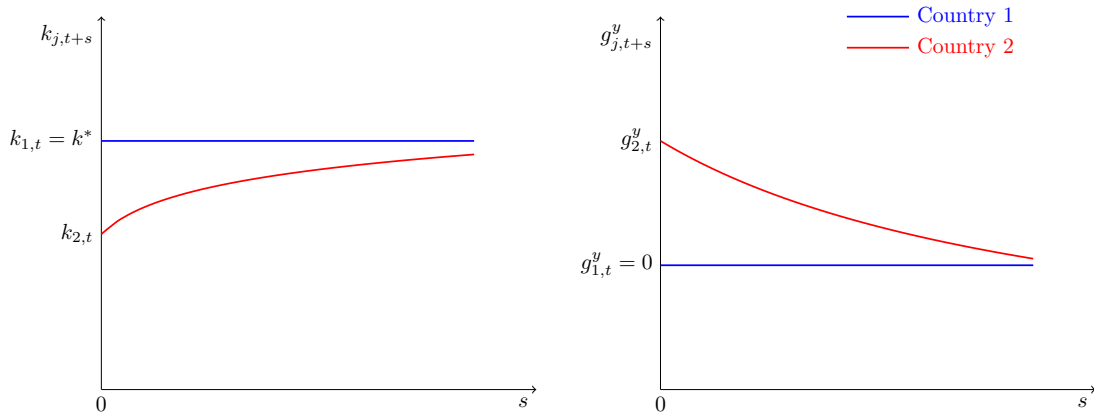
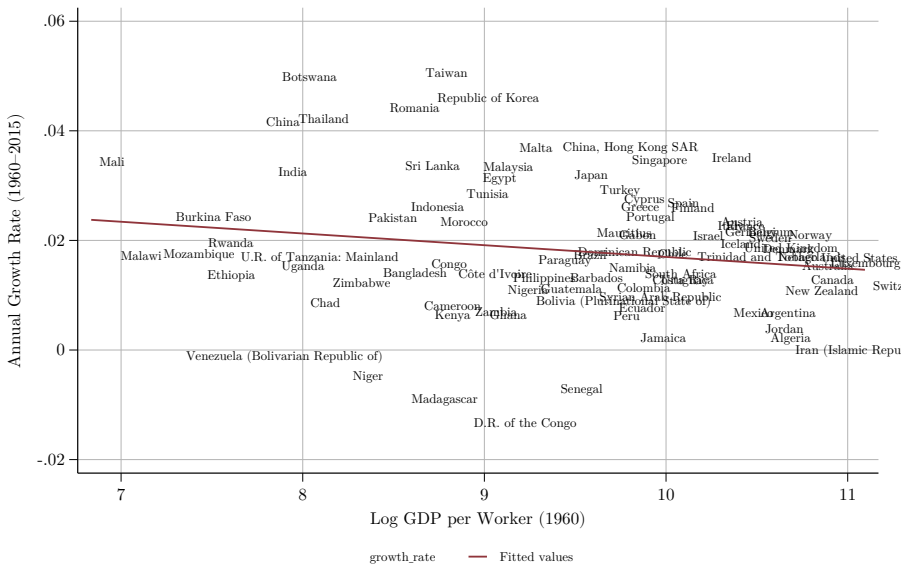


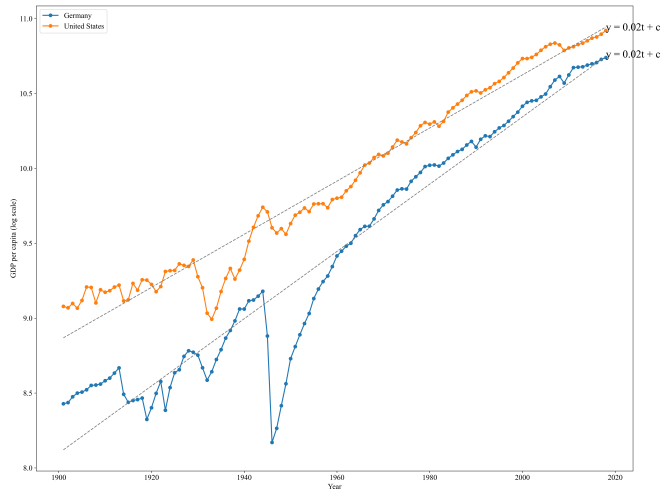
Figure: Vývoj kapitálu a rastu výstupu v krajine 1 a 2



# Absolútna konvergenca



Na niečo nám však ten Solowov model musí byť...



Vráťme sa ešte raz o krok späť a podrobnejšie aby sme pochopili rozdiel medzi  $s$  a  $A$

Výstup na obyvateľa v stálom stave, je daný:

$$y_j^* = A_j^{\frac{1}{1-\alpha}} \left( \frac{s_j}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{pre } j = 1, 2 \quad (4)$$

Pomer výstupu dvoch krajín v stálom stave:

$$\frac{y_1^*}{y_2^*} = \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left( \frac{s_1}{s_2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (5)$$

Poznámka: Odvodenie 52 a 53 - 2. týždeň

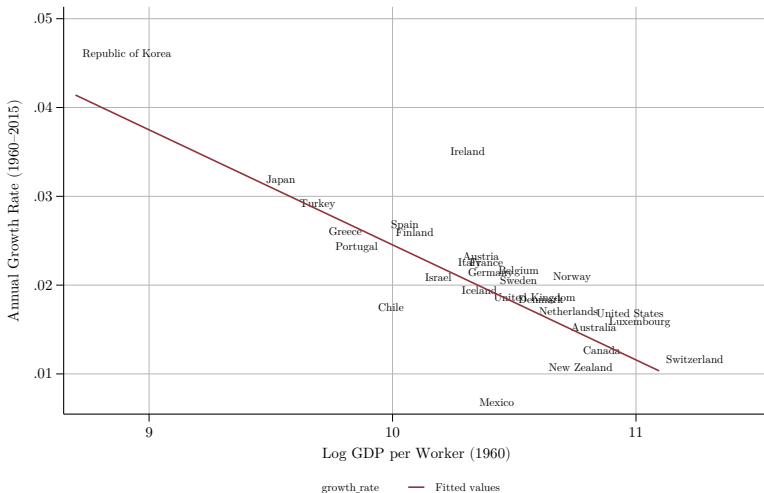
Vieme, že pomer HDP na obyvateľa Spojených štátov a Mexika:

$$s_2 = 4^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} s_1 \quad (6)$$

- Ak  $\alpha = \frac{1}{3}$ , potom  $4^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 0.0625$ .
- To znamená, že krajina s nižším HDP na obyvateľa by musela mať extrémne nízku mieru úspor.
- Ak vezmeme USA a Mexiko, znamenalo by to, že Mexiko sporí len 6% toho, čo USA.

Z toho musí vyplývať, že produktivita musí byť hlavným vysvetlením rozdielu medzi krajinami.

# Pozrime sa na predikciu Solowovho modelu medzi krajinami s podobnou úrovňou produktivity



- Produkčná funkcia Cobb-Douglas:

$$Y_t = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad (7)$$

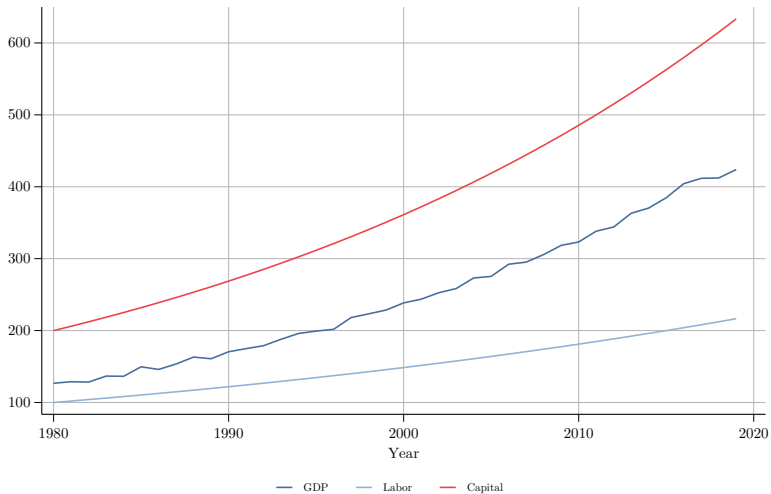
- Logaritmovaním a úpravou dostávame:

$$\ln A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t - (1 - \alpha) \ln N_t \quad (8)$$

- Solowovo reziduum: časť výstupu, ktorú nemožno vysvetliť kapitálom a prácou.
- Celková faktorová produktivita (TFP) meria efektívnosť využitia výrobných faktorov.

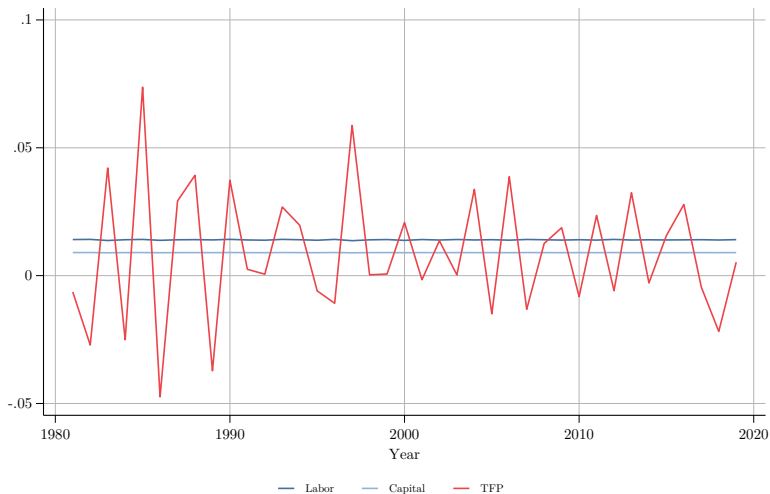
Prejdite si simuláciu `growth_accounting.do`

# Vývoj faktorů v čase



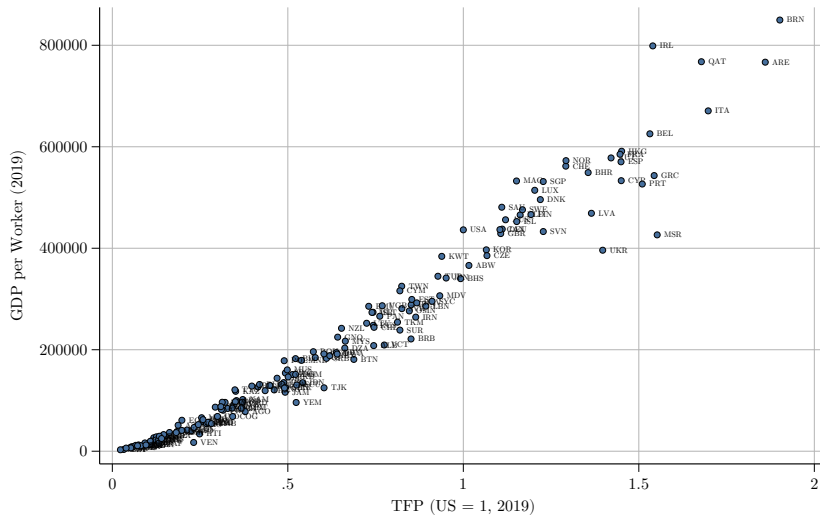


# Vývoj príspevkov k rastu - toto je hlavný dôvod, prečo vznikli RBC modely



Empirické zistenie TFP z PWT a korelácia z rastom produktu v roku  
2019 - growth\_accounting\_PWT.do

# Korelácia TFP a úroveň produktu na obyvateľa



Corr = 0.97

Empirický odhad Solowovho modelu - Mankiw, Romer and Weil  
(1992) "A Contribution to the Empirics of Economic Growth" -  
MRW\_contribution.do

# Mankiw, Romer and Weil (1992)

Model začína s Cobb-Douglas produkčnou funkciou:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha}$$

Vývoj kapitálu na efektívneho pracovníka je daná rovnicou:

$$\dot{k}(t) = sk(t)^\alpha - (n + g + \delta)k(t)$$

Stály stav kapitálu:

$$k(t)^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Rovnica pre logaritmus produktu na pracovníka:

$$\log(Y/L) = a + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \log(s) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \log(n + g + \delta) + \epsilon$$

kde  $\alpha$  je podiel kapitálu,  $s$  miera úspor,  $n$  rast populácie,  $g$  rast TFP a  $\delta$  amortizácia kapitálu (Rovnica (6) [Mankiw et al. \(1992\)](#)). Všimnite si, že produkt je na pracovníka nie na efektívneho pracovníka.

# Neobmedzené vs. obmedzené regresie

## Neobmedzené regresie:

- Použité nezávislé premenné:
  - $\log(I/GDP)$  (log miera investícií na produkte)
  - $\log(n + g + \delta)$  (log rastu populácie + 5%)
- Regresná rovnica:

$$\log(GDP/L)_{1985} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log(I/GDP) + \beta_2 \cdot \log(n + g + \delta) + \epsilon$$

- Bez obmedzení: Koeficienty pre  $\log(I/GDP)$  a  $\log(n + g + \delta)$  sa odhadujú nezávisle.

## Obmedzené regresie:

- V obmedzenom modeli je nová premenná definovaná ako:

$$\log(I/GDP) - \log(n + g + \delta) = \log(I/GDP) - \log(n + g + \delta)$$

- Regresná rovnica sa stáva:

$$\log(GDP/L)_{1985} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log(I/GDP) - \log(n + g + \delta) + \epsilon$$

- Obmedzenie:  $\log(I/GDP) - \log(n + g + \delta)$  kombinuje účinky  $\log(I/GDP)$  a  $\log(n + g + \delta)$ .

	log GDP per working age person in 1985		
	Non-oil	Intermediate	OECD
<b>Unrestricted regression</b>			
$\log(I/GDP)$	1.42***	1.32***	0.50
$\log(n + g + \delta)$	-1.99***	-2.02***	-0.74
Constant - A(0)	5.43***	5.35***	8.02***
<i>N</i>	98	75	22
<b>Restricted regression</b>			
$\log(I/GDP) - \log(n + g + \delta)$	1.49***	1.43***	0.55
Constant - A(0)	6.87***	7.09***	8.62***
Implied $\alpha$	0.59	0.58	0.35
R <sup>2</sup>	0.597	0.592	0.103
<i>N</i>	98	75	22

Problém je, že  $\alpha$  je vyššia ako predpokladá model a aj empirické dôkazy o jeho pozorovaní. Tento odhad však vypovedá o tom, že úspory, populačný rast, depreciaácia sú vysoko korelované s rastom HDP.

# Rozšírenie Solowovho modelu

Mankiw et al. (1992) rozšíril Solowov model o ľudský kapitál.

S tým sa Cobb-Douglasova produkčná funkcia stáva:

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\beta (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}$$

Vývoj ekonomiky je určený rovnicami:

$$\dot{k}(t) = s_k y(t) - (n + g + \delta)k(t)$$

$$\dot{h}(t) = s_h y(t) - (n + g + \delta)h(t)$$

kde  $s_k = K/Y$  a kde  $s_h = H/Y$ .

Potom stály stav kapitálu a ľudského kapitálu sú:

$$k^* = \left( \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{n + g + \delta} \right)^{1/1-\alpha-\beta} ; h^* = \left( \frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n + g + \delta} \right)^{1/1-\alpha-\beta}$$

Čo sú to endogénne modely rastu? Štandardne  $\alpha + \beta < 1$ ; endogénne  $\alpha + \beta = 1$ .



Tieto rovnice môžeme použiť na výpočet stálych stavov pre  $k$  a  $h$  nastavením  $\dot{k}(t)$  a  $\dot{h}(t)$  na 0 a dosadením daných výrazov do produkčnej funkcie.

Použitím týchto hodnôt môžeme získať rovnicu, ktorú chceme odhadnúť:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right) = & \log(A(0)) + gt + \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \log(s_k) \\ & - \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \log(n + g + \delta) + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \log(s_h) \end{aligned} \quad (9)$$

## Porovnanie so štandardným Solowovým modelom

Táto rovnica je veľmi podobná rovnici v štandardnom Solowovom modeli, ktorý sme odhadli predtým, okrem posledného člena.

Môžeme považovať posledný člen za chybový člen v našej predchádzajúcej špecifikácii. To by nebol problém samo o sebe, ale keďže  $s_h$  je určený  $s_k$  a  $n$ , tento fakt by spôsobil skreslenie našich koeficientov v predchádzajúcej špecifikácii.

	log GDP per working age person in 1985		
	Non-oil	Intermediate	OECD
<b>Unrestricted regression</b>			
$\log(I/GDP)$	0.697***	0.700***	0.276
$\log(n + g + \delta)$	-1.745***	-1.500***	-1.076
$\log(SCHOOL)$	0.654***	0.731***	0.768**
Constant - A(0)	3.831***	4.427***	5.102*
<i>N</i>	98	75	22
<b>Restricted regression</b>			
$\log(I/GDP) - \log(n + g + \delta)$	0.738***	0.709***	0.283
$\log(SCHOOL) - \log(n + g + \delta)$	0.657***	0.733***	0.769**
Constant - A(0)	4.827***	4.590***	5.177***
Implied $\alpha$	0.30	0.29	0.13
Implied $\beta$	0.27	0.30	0.37
$R^2$	0.784	0.781	0.352
<i>N</i>	98	75	22

Koeficienty  $\alpha$  a  $\beta$ , ktoré sme získali z regresíí, sú oveľa bližšie k očakávaným hodnotám. To znamená, že pridanie ľudského kapitálu zjavne zlepšilo výkon Solowovho modelu.  $R^2$  je taktiež podstatne vyššie.

Avšak existuje veľký problém, ktorý by sme mali riešiť – **endogenita**.

Mankiw et al. (1992) sa touto otázkou endogenity v týchto regresiách nevysporiadavajú  
Acemoglu (2008).

1. **Skreslenie vynechanej premenennej:** Je chyba v odhadovaných rovniciach ortogonálna k exogénnym premenným a výsledku? Pravdepodobne nie. Napríklad úroveň inštitúcií v krajine by mohla byť korelovaná so mierou úspor a HDP (možná pozitívna korelácia s oboma). To by znamenalo, že naše odhady sú skreslené nahor.
2. **Opačná kauzalita:** Je pravdepodobné, že HDP ovplyvňuje úspory? Áno. Môžeme si predstaviť, že vyššie HDP môže zvýšiť alebo znížiť mierou úspor. V každom prípade to opäť implikuje skreslenie našich odhadov.
3. **Chyba merania:** Je pravdepodobné, že niektoré z našich premenných na pravej strane sú nesprávne merané? Zoberme si napríklad ľudský kapitál. Predpokladali sme, že  $s_h$  je naším proxy ukazovateľom. Avšak ak v tomto prípade dôjde k chybe merania, táto chyba sa objaví v reziduálnych hodnotách v regresii, čo spôsobí koreláciu s premennými na pravej strane a skreslí odhady. [Acemoglu \(2008\)](#)

Zdanlivo by sa dalo pokračovať v týchto regresiách a vyvodiť záver, že Solowov model je správny. Ak tieto regresie považujeme za správne špecifikované, vlastne predpokladáme, že všetky naše premenné na pravej strane sú exogénne, čo je už na polceste k predpokladom Solowovho modelu, kde považujeme úspory a rastové miery za exogénne.

Zaujímavé bude aj zistiť, ako citlivé sú tieto výsledky na to, čo používame ako ukazovateľ ľudského kapitálu. Napríklad nie je úplne jasné, prečo by sme mali obmedzovať ľudský kapitál iba na podiel pracujúcej populácie, ktorá je na strednej škole.

# Solowova miera konvergenencie - s ľudským kapitálom

Predpokladáme logaritmicкую formu rovnice rastu produktu na obyvateľa:

$$\ln(y(t)) = \ln(A(t)) + \alpha \ln(K(t)) + \beta \ln(H(t))$$

Predpokladáme, že  $A(t)$  rastie exponenciálne:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{gt}$$

kde  $g$  je tempo technologického pokroku.

## Aproximácia prvého rádu (Taylorova expanzia)

Technika, ktorá využíva Taylorovu expanziu na aproximáciu nelineárnych funkcií.

Ak máme funkciu  $f(x)$  a  $x$  je malé, môžeme aproximovať  $f(x)$  pomocou prvej derivácie  $f'(x)$  v bode  $x_0$  a získať:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Táto aproximácia je užitočná pre jednoduchšie analýzy, kde potrebujeme zjednodušiť výrazy, ktoré zahŕňajú exponenty alebo iné nelineárne výrazy. Bližšie pozri 3Blue1Brown: Taylor series.

## Rovnice s rýchlosťou konverencie $\lambda$

Na základe Taylorovej aproximácie prvého rádu môžeme získať nasledujúcu rovnicu pre rýchlosť konverencie  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \ln(y(t)) - \ln(y(0)) = & (1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \right) \ln(s_k) + (1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \right) \ln(s_h) \\ & - (1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha + \beta} \right) \ln(n + g + \delta) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y(0)) \end{aligned}$$

potom  $\lambda = \frac{\alpha_1 + 1}{T}$  kde  $T$  je časový horizont (25 rokov) a  $\alpha_1$  je koeficient v regresii.



# Rovnice rýchlosti konvergenencie

Táto rovnica nám tiež umožňuje "kalibrovať" rýchlosť konvergenencie v praxi – čo znamená získať odhad rýchlosti konvergenencie na základe rozumných hodnôt parametrov.

Zamerajme sa na vyspelé ekonomiky. V tomto prípade môžeme použiť nasledujúce hodnoty pre tieto parametre:

- $g \approx 0.02$  (približne 2% rast HDP na obyvateľa ročne),
- $n \approx 0.01$  (približne 1% rast populácie),
- $\delta \approx 0.05$  (približne 5% ročne amortizácia).

Opäť si pripomeňme, že podiel kapitálu na národnom dôchodku je približne  $\frac{1}{3}$ , takže v prípade Cobb-Douglas produkčnej funkcie by sme mali  $\alpha \approx \frac{1}{3}$ .

Na základe toho môžeme očakávať, že koeficient konvergenencie pred výrazom  $\ln(y(t)) - \ln(y^*(t))$  bude približne 0.054 ( $0.67 \times 0.08$ ).

Empirický odhad je pomocou veľmi jednoduchej lineárnej regresie, ktorá slúži na odhad rýchlosti konvergenzie:

$$\ln(y(t)) - \ln(y(0)) = \beta_0 + \beta_1 \ln(y(0)) + \epsilon$$

Koeficient  $\beta_1$  v tejto rovnici nám poskytuje informácie o rýchlosti konvergenzie medzi počiatočným stavom  $y(0)$  a produktivitou  $y(t)$ .

	$\ln(y(1985)) - \ln(y(1960))$					
		Unconditional			Conditional	
	Non-oil	Intermediate	OECD	Non-oil	Intermediate	OECD
$\log(GDP_{1960})$	0.0943*	-0.00424	-0.341***	-0.288***	-0.366***	-0.398***
[1em] $\log(I/GDP)$				0.524*** (6.03)	0.538*** (5.26)	0.332* (1.91)
$\log(n + g + \delta)$				-0.506* (-1.75)	-0.545* (-1.89)	-0.863** (-2.56)
$\log(SCHOOL)$				0.231*** (3.89)	0.270*** (3.37)	0.228 (1.57)
Constant	-0.267 (-0.70)	0.588 (1.36)	3.686*** (5.38)	1.957** (2.52)	2.464*** (3.07)	1.707 (1.46)
Implied $\lambda$	-0.003	0.000	0.014	0.012	0.014	0.015
R <sup>2</sup>	0.036	0.34	0.485	0.485	0.465	0.718

## Prečo to tak je? ... To už je trochu mimo Solowovho modelu

- **Vedomosti a vzdelanie** Pozitívna korelácia medzi indexom Ľudského kapitálu a reálnym HDP na osobu ([Cubas et al., 2016](#)).
- **Inštitúcie** Dôležitosť ochrany inkluzívnych politických a ekonomických inštitúcií ([Acemoglu et al., 2001](#)).
- **Podnebie a Geografia** Krajiny pri rovníku majú nižšiu produktivitu, vplyv chorôb a horúceho podnebia. ([Henderson et al., 2001](#))
- **Voľný obchod** Otvorené ekonomiky rastú rýchlejšie ([Sachs and Warner, 1995](#)).

- Pochopenie rozdielov v príjmoch medzi krajinami prostredníctvom rastového účtovníctva.
- Solowov model a koncept konvergenzie: absolútna vs. podmienená.
- Hlavné faktory ovplyvňujúce rozdiely vo výstupe na obyvateľa:
  - Miera úspor a investícií.
  - Rozdiely v produktivite (TFP).
  - Dynamika rastu kapitálu a práce.
- Empirické testy Solowovho modelu a analýza reálnych dát.
- Korelácia medzi TFP a rastom HDP na obyvateľa.

**Hlavné ponaučenie: Produktivita je kľúčovým faktorom dlhodobého rastu. To prečo je vysoká, za to môže hlavne vzdelanie a inštitúcie.**

# References I

- Acemoglu, D. (2008). *Introduction to modern economic growth*. Princeton university press.
- Acemoglu, D., Johnson, S., and Robinson, J. A. (2001). The colonial origins of comparative development: An empirical investigation. *American Economic Review*, 91(5):1369–1401.
- Cubas, G., Ravikumar, B., and Ventura, G. (2016). Talent, labor quality, and economic development. *Review of Economic Dynamics*, 21:160–181.
- Garin, J., Lester, R., and Sims, E. (2021). Intermediate macroeconomics. *This Version*, 3(0.1).
- Henderson, J. V., Shalizi, Z., and Venables, A. J. (2001). Geography and development. *Journal of Economic Geography*, 1(1):81–105.
- Mankiw, N. G., Romer, D., and Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2):407–437.
- Sachs, J. D. and Warner, A. (1995). Economic reform and the process of global integration. *Brookings Papers on Economic Activity*, 26(1, 25th A):1–118.