

# Rozšířený Solowov model

Zavedenie produktivity a rastu populácie. Komparatívna statika a prechodná dynamika modelu. Zlaté pravidlo.

Tomáš Oleš

Department of Economic Policy  
Faculty of Economics and Finance

March 2, 2025

- Pochopiť implikácie zavedenia produktivity a rastu populácie do Solowovho modelu.
- Komparatívna statika a prechodná dynamika na zmeny exogénnych premenných v rozšírenom Solowovom modeli.
- Zlaté pravidlo.

# Rozšířený Solowov model

## Motivácia:

- Základný Solowov model predpovedá konvergenciu k stálemu stavu bez dlhodobého rastu produktu.
- Rozšírenie modelu o exogénny rast produktivity a populácie umožňuje zachytiť dlhodobý rast.
- Model predpovedá správanie premenných v súlade s Kaldorovými faktami.

## Hlavné výsledky:

- Dlhodobý rast vychádza z rastu produktivity a populácie.
- Zvýšenie miery úspor nevedie k trvalému rastu na pracovníka.
- Produktivita je kľúčovým faktorom trvalého rastu.

## Otázky na ďalšiu analýzu:

- Čo presne je produktivita?
- Ako môžeme podporiť jej rast?
- Bude rast produktivity pokračovať navždy?

## Produkčná funkcia:

$$Y_t = AF(K_t, Z_t N_t) \quad (1)$$

- $A$  – Hiksovo neutrálna produktivita (upravujúca kapitál aj prácu).
- $Z_t$  – Prácu upravujúca produktivita (zvyšuje len efektívnosť práce).
- $N_t$  – zásoba práce.
- $Z_t N_t$  – efektívne jednotky práce.

## Interpretácia:

- Vyššie  $Z_t$  znamená, že rovnaký počet pracovníkov je produktívnejší.
- $A$  ovplyvňuje úroveň produktivity, zatiaľ čo  $Z_t$  kontroluje jej rast v čase.

# Hlavné rovnice rozšíreného Solowovho modelu

## Kapitálová akumulácia:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - s)K_t \quad (2)$$

$$I_t = sY_t \quad (3)$$

## Ceny výrobných faktorov:

$$R_t = AF_K(K_t, Z_t N_t) \quad (4)$$

$$w_t = AZ_t F_N(K_t, Z_t N_t) \quad (5)$$

## Dôležité poznámky:

- Reálna mzda zahŕňa efektívnosť jednotku práce cez  $Z_t$ .
- Reťazové pravidlo umožňuje správnu interpretáciu hraničného produktu práce.

# Exogénny rast populácie a produktivity

## Predpoklady o vývoji práce a produktivity:

- Práca je ponúkaná nepružne, avšak jej množstvo rastie exogénne s mierou rastu  $n$ :

$$N_t = (1 + n)N_{t-1}, \quad n \geq 0 \quad (6)$$

- Normalizujeme  $N_0 = 1$ , takže:

$$N_t = (1 + n)^t \quad (7)$$

- Produktivita práce rastie exogénne s mierou rastu  $z$ :

$$Z_t = (1 + z)Z_{t-1}, \quad z \geq 0 \quad (8)$$

- Po normalizácii  $Z_0 = 1$ :

$$Z_t = (1 + z)^t \quad (9)$$

# Súhrn hlavných rovníc rozšíreného Solowovho modelu

## Kapitálová akumulácia:

$$K_{t+1} = sAF(K_t, Z_t N_t) + (1 - \delta)K_t \quad (10)$$

## Ostatné hlavné rovnice:

$$I_t = sY_t \quad (11)$$

$$Y_t = AF(K_t, Z_t N_t) \quad (12)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (13)$$

$$R_t = AF_K(K_t, Z_t N_t) \quad (14)$$

$$N_t = (1 + n)^t \quad (15)$$

$$Z_t = (1 + z)^t \quad (16)$$

$$w_t = AZ_t F_N(K_t, Z_t N_t) \quad (17)$$

## Dôležité závery:

- Rast populácie a produktivity ovplyvňuje dlhodobý rast výstupu.
- Akumulácia kapitálu závisí od miery úspor a dynamiky efektívnej práce.

# Transformácia do efektívnych jednotiek práce

## Motivácia:

- Transformujeme premenné na jednotky efektívnosti práce:

$$\hat{x}_t = \frac{X_t}{Z_t N_t} \quad (18)$$

- Týmto spôsobom premenné konvergujú k stálemu stavu.

## Prepis kapitálovej akumulácie:

$$\frac{K_{t+1}}{Z_t N_t} = sAf(\hat{k}_t) + (1 - \delta)\hat{k}_t \quad (19)$$

$$\frac{K_{t+1}}{Z_{t+1} N_{t+1}} \frac{Z_{t+1} N_{t+1}}{Z_t N_t} = sAf(\hat{k}_t) + (1 - \delta)\hat{k}_t \quad (20)$$

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)} \left[ sAf(\hat{k}_t) + (1 - \delta)\hat{k}_t \right] \quad (21)$$



## Ostatné transformované rovnice na jednotky efektívnej práce

$$\hat{i}_t = s\hat{y}_t \quad (22)$$

$$\hat{y}_t = Af(\hat{k}_t) \quad (23)$$

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t + \hat{i}_t \quad (24)$$

$$R_t = Af'(\hat{k}_t) \quad (25)$$

$$w_t = Z_t \left[ Af(\hat{k}_t) - Af'(\hat{k}_t)\hat{k}_t \right] \quad (26)$$

### Kľúčový výsledok:

- V jednotkách efektívnej práce systém konverguje k stálemu stavu, pričom rast výstupu na pracovníka je riadený rastom produktivity.

# Grafická analýza rozšíreného Solowovho modelu

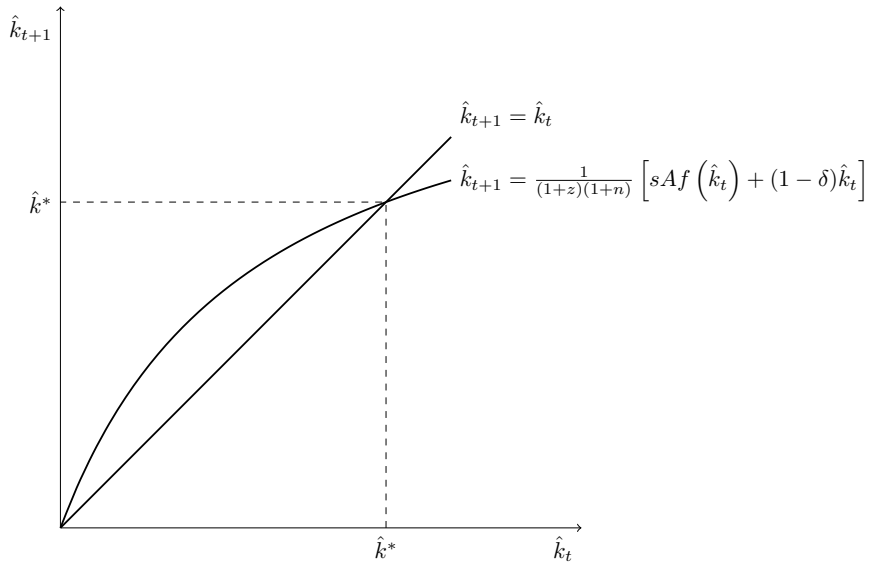
## Hlavná myšlienka:

- Analyzujeme kapitálovú zásobu na efektívnosť jednotiek práce,  $\hat{k}_t$ .
- Grafická analýza je analogická s kapitálom na pracovníka v základnom Solowovom modeli.

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)} \left[ sAf(\hat{k}_t) + (1 - \delta)\hat{k}_t \right]$$

- Graf bude znázorňovať  $\hat{k}_{t+1}$  proti  $\hat{k}_t$ .
- Funkcia bude začínať v počiatku, rastie s klesajúcou mierou.
- Prava strana bude škálovaná faktorom  $\frac{1}{(1+z)(1+n)}$ , ktorý je  $\leq 1$ .

# Vykreslenie hlavnej rovnice



# Konvergenca k stálemu stavu

- Podobne ako v základnom modeli, vykresľujeme  $45^\circ$  čiaru pre  $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t$ .
- Krivka  $\hat{k}_{t+1}$  proti  $\hat{k}_t$  pretína túto čiaru v jednom bode (okrem počiatku).
- Tento bod nazývame stabilná úroveň kapitálovej zásoby na efektívnosť jednotku práce,  $\hat{k}^*$ .

## **Dynamika konvergenzie:**

- Ekonomia prirodzene konverguje k  $\hat{k}^*$  z akéhokoľvek počiatočného bodu.
- Hoci nás primárne zaujímajú premenné na pracovníka, analýza  $\hat{k}^*$  uľahčuje pochopenie dlhodobého správania celej ekonomiky.

## Konvergenca k stálemu stavu:

- Ekonomia konverguje k stabilnej úrovni kapitálu na efektívnosť jednotku práce,  $\hat{k}^*$ .
- Keď  $\hat{k}_t \rightarrow \hat{k}^*$ , môžeme odvodiť dlhodobé miery rastu ostatných premenných.
- Kľúčová otázka: Čo sa deje s premennými na pracovníka a reálnymi premennými, keď ekonomika dosiahne stály stav v premenných na efektívnu jednotku práce?

# Stabilný stav v jednotkách efektívnej práce

- V stabilnom stave platí  $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t$ .

- Definície:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{Z_{t+1}N_{t+1}}, \quad \hat{k}_t = \frac{K_t}{Z_t N_t}$$

- Ich porovnanie:

$$\frac{K_{t+1}}{Z_{t+1}N_{t+1}} = \frac{K_t}{Z_t N_t}$$

- Zjednodušenie:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1+z)(1+n)$$

- Miera rastu kapitálu:

$$1 + g_K = (1+z)(1+n) \implies g_K \approx z + n$$

# Miera rastu kapitálu na pracovníka

- Úprava:

$$\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = \frac{Z_{t+1}}{Z_t} \frac{K_t}{N_t}$$

- Miera rastu kapitálu na pracovníka:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = 1 + z \implies g_k = z$$

- Záver: Kapitál na pracovníka rastie tempom technologického pokroku,  $z$ .

# Miery rastu produkcie, spotreby a investícií

- Rast produkcie:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1 + z)(1 + n) \implies g_Y \approx z + n$$

- Rast spotreby:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = (1 + z)(1 + n) \implies g_C \approx z + n$$

- Rast investícií:

$$\frac{I_{t+1}}{I_t} = (1 + z)(1 + n) \implies g_I \approx z + n$$

- Verzie na pracovníka:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = 1 + z \implies g_y = z$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1 + z \implies g_c = z$$

$$\frac{i_{t+1}}{i_t} = 1 + z \implies g_i = z$$



# Implikácie pre ceny výrobných faktorov

- Prenájomná sadzba kapitálu:

$$R_t = Af'(\hat{k}_t)$$

- V stabilnom stave:

$$R^* = Af'(\hat{k}^*)$$

- Nájomná sadzba kapitálu je časovo konštantná:

$$\frac{R_{t+1}}{R_t} = 1$$

- Reálna mzda:

$$w_t = Z_t \left[ Af(\hat{k}^*) - Af'(\hat{k}^*)\hat{k}^* \right]$$

- Miera rastu reálnej mzdy:

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = 1 + z \implies g_w = z$$

## **Záverečné zistenia:**

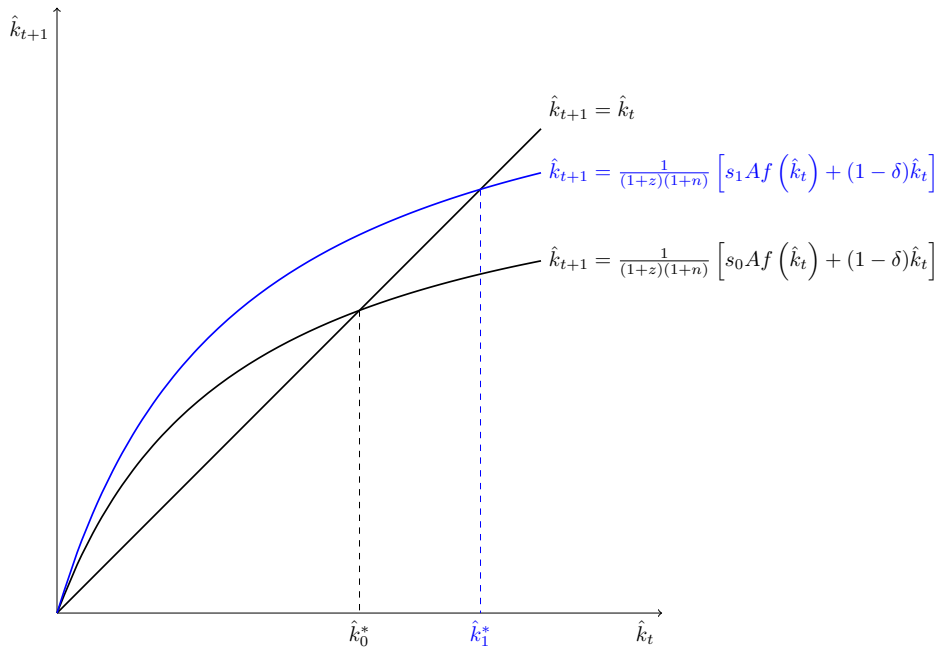
- Ekonomia prirodzene konverguje k stálemu stavu v efektívnych jednotkách práce.
- Výstup na pracovníka a mzdy rastú konštantným tempom  $z$ .
- Model konzistentne vysvetľuje štylizované fakty dlhodobého rastu.

## **Kvalita predpovedí modelu:**

- Model predpovedá stabilný pomer kapitálu k výstupu.
- Miera návratnosti kapitálu je v čase stabilná.
- Rast miezd a výstupu na pracovníka sa riadi rastom produktivity.
- Model ponúka dobré vysvetlenie dlhodobého ekonomického rastu.

### Zvýšenie miery úspor $s$ :

- Ekonomia začína v stálom stave spojenom s  $s_0$ .
- V období  $t$  sa  $s$  zvýši na  $s_1 > s_0$  a zostane na novej úrovni.
- Stabilná kapitálová zásoba na efektívnosť jednotky práce  $\hat{k}^*$  sa zvýši.



## **Vývoj premenných na efektívnosť jednotky práce:**

- Kapitálová zásoba na efektívnosť jednotky práce sa prispôsobuje novému stavu.
- Rast miezd je dočasne vyšší, ale vráti sa k pôvodnému trendu.

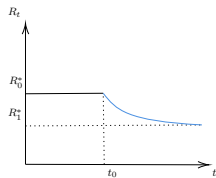
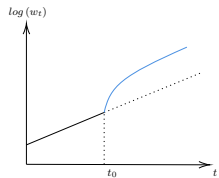
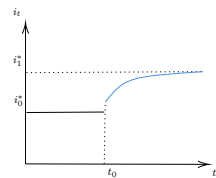
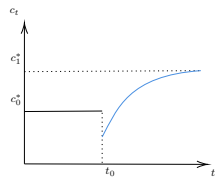
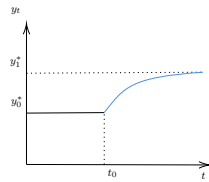
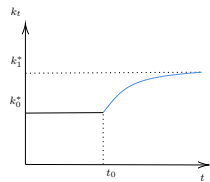


Figure: Dynamická odozva na nárast v s

## Transformácia na jednotky na pracovníka:

- $x_t = \hat{x}_t Z_t$  umožňuje prepočet na premenné na pracovníka.
- Dočasne rýchlejšia rast po zvýšení miery úspor.
- Dlhodobu sa premenné vracajú k rastovej miere  $z$ .

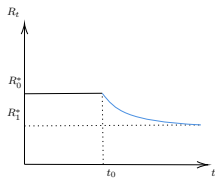
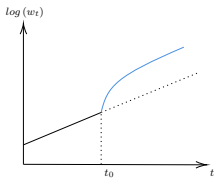
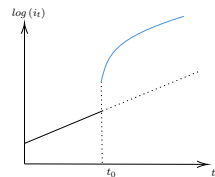
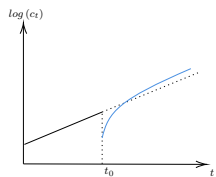
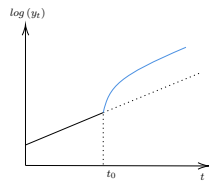
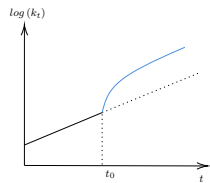


Figure: Dynamická odozva na nárast v  $s$ , vyjadrenie v jednotkách na pracovníka



## Časový priebeh rastu výstupu na pracovníka:

- Dočasné zrýchlenie rastu po zvýšení  $s$ .
- Dlhodobu sa rast výstupu na pracovníka stabilizuje na úrovni  $z$ .

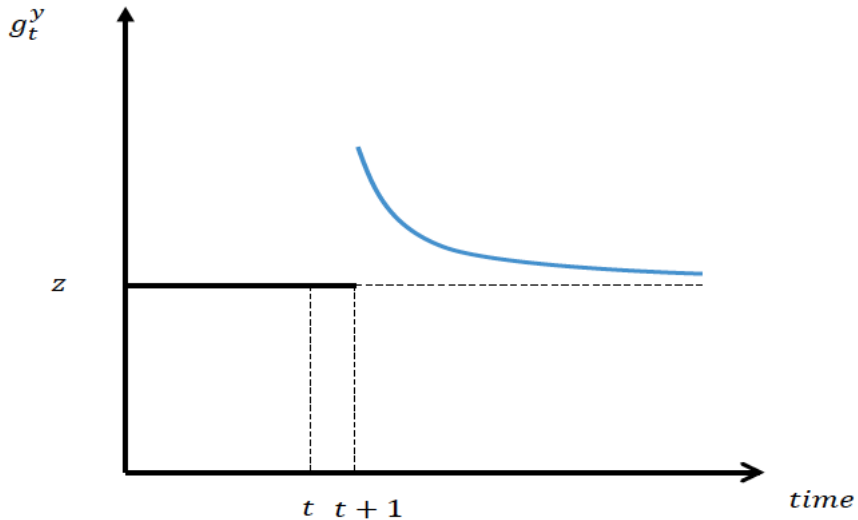
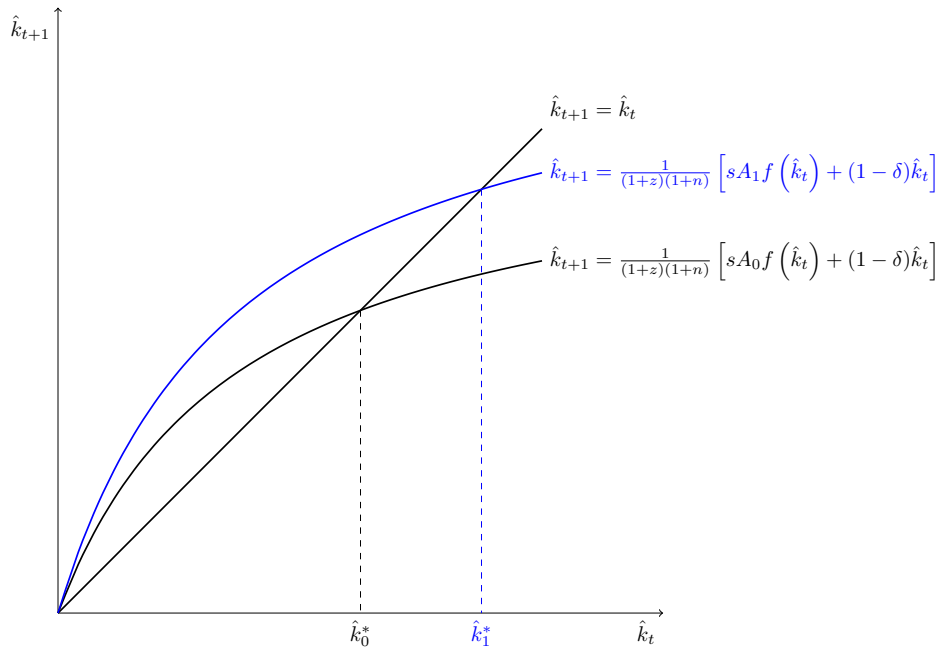


Figure: Dynamická odozva rastu produkcie na jedného pracovníka

### **Zvýšenie $A$ z $A_0$ na $A_1$ :**

- Kvalitatívne podobný efekt ako zvýšenie miery úspor.
- Rýchlejší rast výstupu na pracovníka v krátkodobom horizonte.



## Efekty zvýšenia $A$ :

- Vyššia produktivita vedie k vyššiemu výstupu a mzdám.
- Kapitál sa prispôsobuje novému rovnovážnemu stavu.

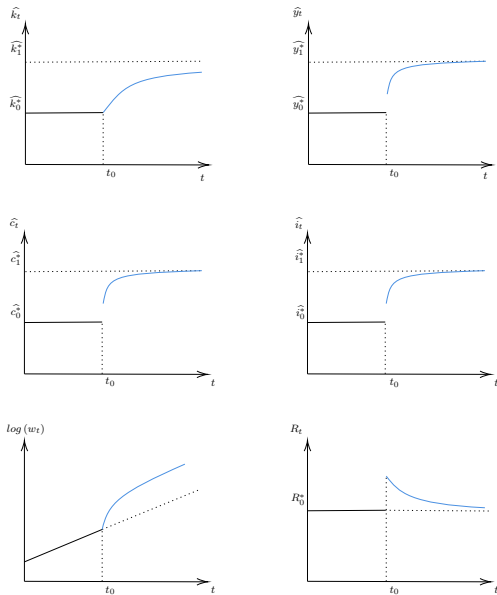


Figure: Dynamická odozva rastu produkcie na jedného pracovníka

## Transformácia trajektórií:

- Podobne ako pri  $s$ , trajektórie premenných na pracovníka získame vynásobením  $Z_t$ .

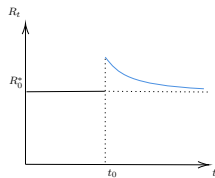
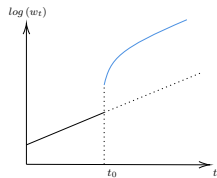
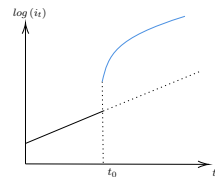
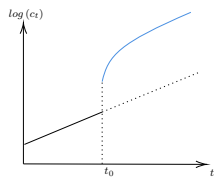
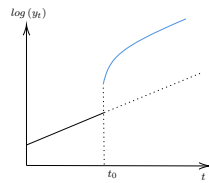
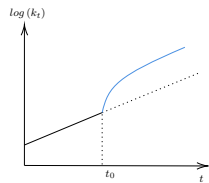


Figure: Dynamická odozva rastu produkcie na jedného pracovníka



# Zlaté pravidlo v rozšírenom Solowovom modeli

## Definícia:

- Miera úspor, ktorá maximalizuje  $\hat{c}^*$  (spotrebu na efektívnosť jednotku práce v stálom stave).
- Zlaté pravidlo nastáva, keď hraničný produkt kapitálu sa rovná súčtu rastových mier populácie a technologického poproku a miery amortizácie:

$$Af'(\hat{k}^*) = z + n + \delta \quad (27)$$

## Vyrovňavacie (break-even) investície:

$$\hat{i}_t = (z + n + \delta)\hat{k}_t \quad (28)$$

- Pokrýva (i) amortizáciu kapitálu  $\delta$ , (ii) rast populácie  $n$ , (iii) rast produktivity  $z$ .

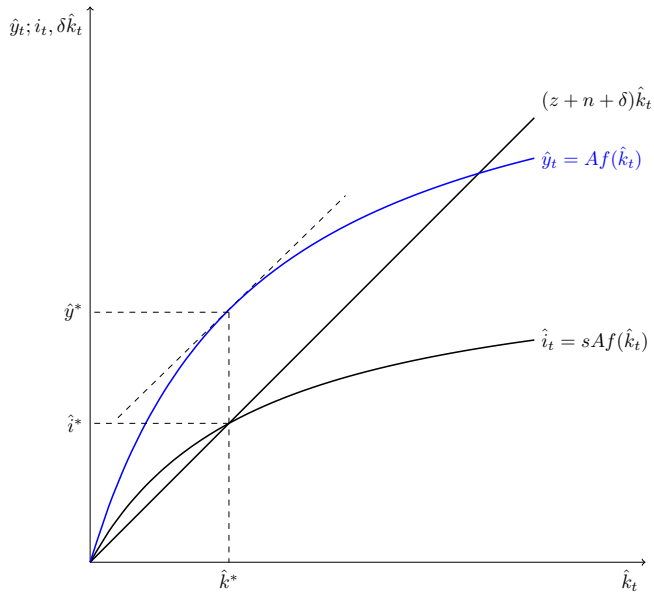


Figure: Miera úspor Zlatého pravidla

# Bude ekonomický rast pokračovať donekonečna?

## Historická perspektíva:

- Pred rokom 1600 bol rast HDP extrémne pomalý (0,1% ročne).
- Od roku 1600 do 2000 sa HDP zrýchlil na približne 1,5% ročne.
- V 20. storočí bol rast ešte vyšší, okolo 3,6% ročne.

## Spomalenie rastu:

- Od 70. rokov zaznamenávame spomalenie rastu produktivity.
- Ekonom Robert Gordon tvrdí, že obdobie 1870-1970 bolo výnimočné.
- Je možné, že veľké technologické inovácie sa už vyčerpali.

## **Bude rast pokračovať?**

- Minulosť ukazuje, že ekonomický rast nie je samozrejmosť.
- Niektorí ekonómovia veria, že technologický pokrok sa môže spomaliť.
- Iní tvrdia, že nemožno predpovedať budúce objavy.

## **Možné scenáre:**

- Trvalé spomalenie rastu.
- Nové prelomové inovácie (AI, kvantová výpočtová technika).
- Nečakané technologické objavy môžu udržať rast.

Ekonomický rast v minulosti nebol stabilný, môže sa meniť aj v budúcnosti. Dlhodobý rast závisí od inovácií a technologického pokroku.

- Rozšírený Solowov model rozširuje základný model o exogénny rast populácie a produktivity zvyšujúcej pracovnú silu, čím umožňuje dlhodobý rast výstupu na obyvateľa.
- Efektívny počet pracovníkov sa zvyšuje, ak rastie buď populácia, alebo produktivita práce, čo ovplyvňuje celkový výstup ekonomiky.
- V stálom stave rastie výstup, kapitál, spotreba a investície tempom daným súčtom rastových mier populácie a produktivity.
- Premenné na pracovníka rastú rýchlosťou zodpovedajúcou rastu produktivity zvyšujúcej pracovnú silu.
- Výnosnosť kapitálu zostáva konštantná, zatiaľ čo reálna mzda rastie rovnakým tempom ako produktivita práce.
- Tieto predikcie modelu sú v súlade s Kaldorovými štylizovanými faktami.

Garin, J., Lester, R., and Sims, E. (2021). Intermediate macroeconomics. *This Version*, 3(0.1).