Macroeconomia Microfundamentada

Ciclos Reais de Negócios

Tomás R. Martinez

INSPER

Referências

- Celso José Costa Junior: Cap. 2.
- Mario Solís-Garia: Lec. 2, Lec. 4, Lec. 5.
- Kurlat: Cap. 12, 13.
- Referências mais avançadas: notas de aula do Eric Sims.

Introdução

- Uma das primeiras perguntas na macroeconomia:
  - Porque existem ciclos econômicos?
  - Como eles funcionam (quais são os mecanismos de propagação)?
  - Podemos fazer algo a respeito?
- Iremos pensar sobre isso sob a perspectiva do Modelo de Ciclos Reais de Negócios ou **Real Business Cycles (RBC) Model**.

Introdução

- Década de 50-70:
  - Modelos Keynesianos estimados via equações simultâneas com dados agregados eram a alternativa para estudar ciclos econômicos.
  - Modelos Neoclássicos eram utilizados para crescimento de longo prazo
- No início da década de 70:
  - Os modelos Keynesianos falharam em lidar com os choques de oferta.
  - Metodologicamente não sobreviviam à Crítica de Lucas e com a revolução das expectativas racionais.
- Crítica de Lucas requer consistência interna (i.e., equilíbrio geral).
  - Em modelos com choques estocásticos as expectativas racionais garantem consistência interna.

Introdução

- Ao garantir consistência interna e ao mesmo tempo ter relativo sucesso quantitativo, a teoria de RBC de Kydland and Prescott (1982) se tornou o grande sucessor da *Rational Expectations Revolution*.
  - **De Vroey (2015)**: Kydland and Prescott foi para Lucas o que Hicks and Modigliani (IS-LM) foi para Keynes.
  - O modelo de Ciclos Reais garantiu a **Kydland and Prescott o Nobel de 2004**.
  - O RBC foi o responsável pelo nascimento dos modelos DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*).
- Modelo explica as flutuações dos ciclos utilizando o Resíduo de Solow: $Y_t = Z_t F(K_t, N_t)$.
- Modelo básico é eficiente: **zero** espaço para políticas fiscal/monetária.
  - Ciclos são apenas respostas endógenas dos agentes a choques tecnológicos.

Sucesso Inicial do RBC

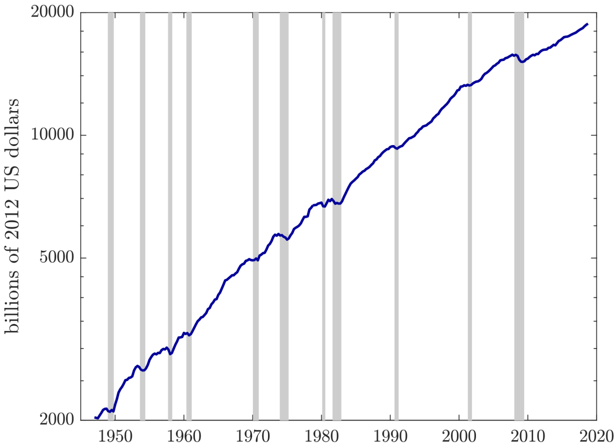
- Como um modelo de ciclos sem espaço para política econômica teve tanto sucesso inicial?
- Era extremamente difícil ter sucesso **quantitativo** em replicar os ciclos de negócios com um modelo internamente consistente.
- Até então as tentativas teóricas focavam em choques monetários e não tinham tido sucesso empírico.
- Após inúmeros refinamentos, os choques monetários foram descartados e apenas com o choque tecnológico eles replicaram os ciclos econômicos (ou 70% deles).
- Juntaram em um só arcabouço crescimento de longo prazo e ciclos econômicos.
- Enfatizaram a **avaliação quantitativa** baseada na calibração e solução numérica dos modelos

Sucesso Inicial do RBC

"As state by Plosser, that such a simple model "with no government, no money, no market failures of any kind, rational expectations, no adjustment costs and identical agents could replicate actual experiences this well is most surprising". What made the Kydland and Prescott model stunning was that, while resting on just one shock and six parameters it delivered as much as models containing dozens of equations and many more free parameters."
- De Vroey (2015, p. 266)

Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Tendência vs Ciclos: Estados Unidos



Fonte: Kurlat.

- O que é um **ciclo de negócios**? Movimentos no PIB ao redor da tendência de crescimento.

Definição de Business Cycles

"Business cycles are a type of fluctuation found in the aggregate economic activity of nations that organize their work mainly in business enterprises: a cycle consists of expansions occurring at about the same time in many economic activities, followed by similarly general recessions, contractions, and revivals which merge into the expansion phase of the next cycle."
- Burns and Mitchell (1946)

Fatos dos Ciclos de Negócios

- Quais são os fatos estilizados sobra flutuação de curto e médio prazo?
- **Fatos Iniciais:** Burns and Mitchell (1947). Muito criticado por falta de rigor estatístico.
- Hodrick and Prescott (1980) e Kydland and Prescott (1982) estabeleceram mais rigorosamente fatos sobre os ciclos de negócios da economia americana.
- O primeiro desafio é separar o ciclo econômico da tendência de longo prazo.
- O método mais comum é filtrar os dados utilizando o **HP filter** (de Hodrick and Prescott).

HP Filter

- Seja y_t uma série de tempo (em log). Queremos decompor a série em uma tendência, y_t^g, e um componente cíclico (resíduo), y_t^c, $y_t = y_t^g + y_t^c$:

$$\min_{\{y_t^g\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^{T-1} \underbrace{(y_t - y_t^g)^2}_{\text{diferença entre a série e a tendência}} + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \underbrace{[(y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g)]^2}_{\text{diferença na tx. de crescimento da tendência}}$$

  - Quanto mais alto é o λ, maior é o peso dado para a variações na taxa de crescimento do componente de tendência.
  - Se $\lambda = 0$, y_t^g é igual a y_t. Se $\lambda = \infty$, y_t^g é uma tendência linear.
  - A regra de Hodrick e Prescott é escolher $\lambda = 1600$ para séries trimestrais e $\lambda = 400$ para anuais.
  - Muitas críticas e alternativas ao HP filter. Ver Stock and Watson (1999, Handbook of Macroeconomics).

HP Filter

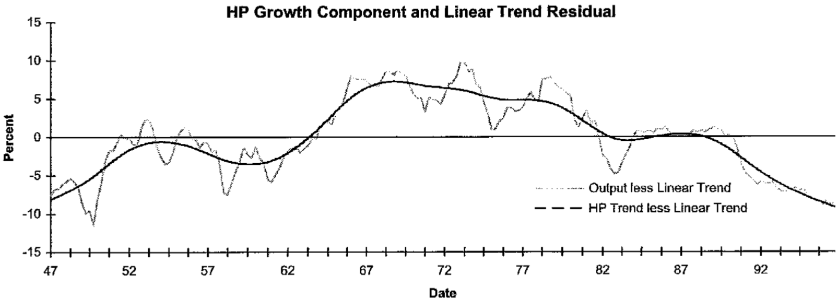
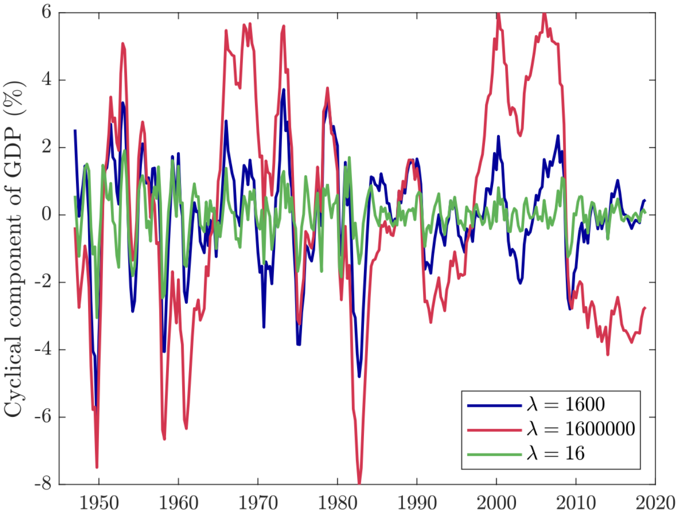


Fig. 1. Trend and business cycle in US real output. Sample period is 1947:1–1996:4.

Fonte: King and Rebelo (1999).

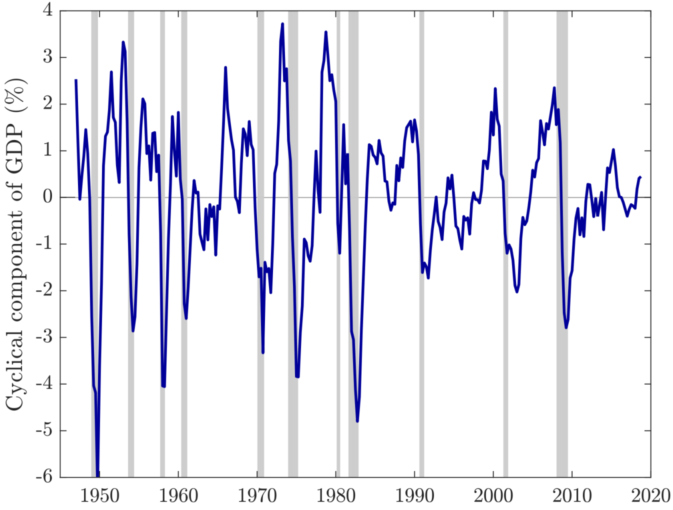
- HP filter extrai muito mais informações de baixa frequência que uma simples tendência linear.
- Elimina componentes da série com periodicidades superiores a cerca de 8 anos.

HP Filter: Escolha do Lambda



Fonte: Kurlat.

Ciclos tem que Capturar as Recessões



Fonte: Kurlat.

Fatos dos Ciclos de Negócios

Volatility (desvio padrão em %)

1. Consumo é menos volátil que a produção. Consumo de bens duráveis é mais volátil.
2. Investimento é três vezes mais volátil que a produção.
3. Gastos do governo é menos volátil que a produção.
4. Horas trabalhadas é igualmente volátil a produção.
   - A maior parte decorre do emprego (margem extensiva) do que das horas por trabalhador (margem intensiva).
5. Produtividade do trabalho é menos volátil que a produção.
   - Evidência que os salários reais não se ajustam instantaneamente (*sticky wages*).

Fatos dos Ciclos de Negócios

Table 1
Business cycle statistics for the US Economy

	Standard deviation	Relative standard deviation	First-order autocorrelation	Contemporaneous correlation with output
Y	1.81	1.00	0.84	1.00
C	1.35	0.74	0.80	0.88
I	5.30	2.93	0.87	0.80
N	1.79	0.99	0.88	0.88
Y/N	1.02	0.56	0.74	0.55
w	0.68	0.38	0.66	0.12
r	0.30	0.16	0.60	–0.35
A	0.98	0.54	0.74	0.78

[a] All variables are in logarithms (with the exception of the real interest rate) and have been detrended with the HP filter. Data sources are described in Stock and Watson (1999), who created the real rate using VAR inflation expectations. Our notation in this table corresponds to that in the text, so that Y is per capita output, C is per capita consumption, I is per capita investment, N is per capita hours, w is the real wage (compensation per hour), r is the real interest rate, and A is total factor productivity.

Fonte: King and Rebelo (1999).

Fatos dos Ciclos de Negócios

Comovement: (correlação entre duas séries)

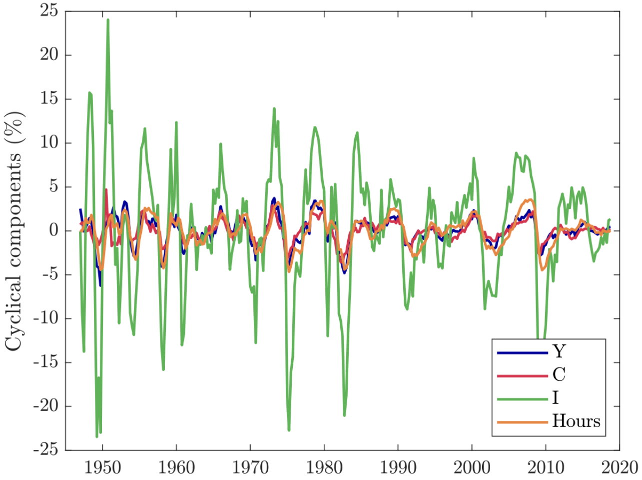
1. A maior parte das variáveis são procíclicas, ou seja, exibem correlação contemporânea positiva com a produção.

2. Salários (reais), gastos do governo e estoque de capital são basicamente acíclicas.

Persistence: (autocorrelação)

1. A maior parte das variáveis são bastante persistentes: $\rho = 0.8 \sim 0.9$.

Fatos dos Ciclos de Negócios



Fonte: Kurlat.

Fatos dos Ciclos de Negócios

TABLE 1
EMERGING VS. DEVELOPED MARKETS (Averages)

	Emerging Markets	Developed Markets
$\sigma(Y)$	$\boxed{2.74}$ (.12)	1.34 (.05)
$\sigma(\Delta Y)$	1.87 (.09)	.95 (.04)
$\rho(Y)$	.76 (.02)	.75 (.03)
$\rho(\Delta Y)$	.23 (.04)	.09 (.03)
$\sigma(C)/\sigma(Y)$	$\boxed{1.45}$ (.02)	.94 (.04)
$\sigma(I)/\sigma(Y)$	3.91 (.01)	3.41 (.01)
$\sigma(TB/Y)$	$\boxed{3.22}$ (.17)	1.02 (.03)
$\rho(TB/Y, Y)$	−.51 (.04)	−.17 (.04)
$\rho(C, Y)$	.72 (.04)	.66 (.04)
$\rho(I, Y)$	.77 (.04)	.67 (.04)

NOTE.—This table lists average values of the moments for the group of emerging (13) and developed (13) economies. The values for each country separately are reported in table 2. Data are Hodrick-Prescott filtered using a smoothing parameter of 1,600. The standard deviations are in percentages. The standard errors for the averages were computed assuming independence across countries. The definition of an emerging market follows the classification in Standard & Poor's (2000).

Fonte: Aguiar and Gopinath (2007).

Fatos dos Ciclos de Negócios

Table 1
Standard deviation of filtered series

Variable	USA	Brazil I	Brazil II	Brazil III	Standard	Working capital
Output	1.7	3.1	2.9	2.7	2.8	2.8
Consumption	1.3	2.2	2.2	2.1	2.0	2.1
Investment	5.3	7.2	7.2	7.0	7.3	7.6
Labor	1.6	–	–	–	2.7	2.9
Labor-PIM	–	3.7	3.7	3.8	–	–
Labor-PME	–	1.3	1.3	1.4	–	–
Interest rate	0.43	4.1	4.6	4.3	5.5	5.5

Table 2
Contemporaneous correlation with output of filtered series

Variable	USA	Brazil I	Brazil II	Brazil III	Standard	Working capital
Consumption	0.83	0.82	0.92	0.91	0.98	0.97
Investment	0.90	0.78	0.86	0.85	0.95	0.93
Labor	0.86	–	–	–	1.0	0.98
Labor-PIM	–	0.64	0.46	0.45	–	–
Labor-PME	–	0.40	0.45	0.46	–	–
Interest rate	−0.23	−0.24	−0.34	−0.32	0.05	−0.21

Fonte: Kanczuk (2004).

Modelo Básico

Modelo Básico

- A versão mais básica do modelo RBC tem:
  - Família representativa que vive infinitos período e realiza decisões de consumo-poupança e trabalho-lazer.
  - Família dona do capital (alternativamente a firma pode ser dona do capital).
  - Mercados competitivos.
  - Não há governo.
  - **Flutuações estocásticas tecnológicas**: $y_t = z_t F(k_t, n_t)$

Preferências

- A família representativa valoriza consumo, c_t, e lazer, l_t e tem utilidade esperada:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, l_t),$$

onde $\beta \in (0,1)$, e u é crescente, côncava, duas vezes diferenciável em ambos argumentos e satisfaz as condições de Inada.

- Dotação temporal: uma unidade de tempo que pode ser dividida em trabalho,n_t , e lazer, l_t:

$$l_t + n_t = 1 \qquad \text{p/ todo } t$$

- Restrição orçamentária (padrão):

$$c_t + a_{t+1} \leq (1 + r_t)a_t + w_t n_t \qquad \text{p/ todo } t$$

juntamente com uma condição no-Ponzi e ativos iniciais positivos $a_0 > 0$.

Problema da Família

- Para simplificar vamos assumir que a utilidade é: $u(c,l) = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \dfrac{\theta(1-l)^{1+\psi}}{1+\psi}$.
- Em vez de construir a restrição orçamentária intertemporal, vamos considerar as retrições orçamentária período-a-período. O problema da família é:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, a_{t+1}, l_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\theta(1-l_t)^{1+\psi}}{1+\psi} \right) \\
\text{s.à} \quad & c_t + a_{t+1} = (1+r_t)a_t + w_t(1-l_t) \qquad \text{p/} \quad t = 0, 1, ...\infty \\
& a_0 > 0
\end{aligned}
$$

- Note:
  - A esperança $\mathbb{E}_t$ indica que a família forma expectativas sobre o futuro dado a informação disponível em t.
  - A família escolhe os ativos do próximo período a_{t+1}. Assumiremos que os ativos iniciais são exógenos (e não uma escolha).

Problema da Família

- Para simplificar vamos assumir que a utilidade é: $u(c,l) = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \dfrac{\theta(1-l)^{1+\psi}}{1+\psi}$.
- Em vez de construir a restrição orçamentária intertemporal, vamos considerar as retrições orçamentária período-a-período. O problema da família é:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, a_{t+1}, l_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\theta(1-l_t)^{1+\psi}}{1+\psi} \right) \\
\text{s.à} \quad & c_t + a_{t+1} = (1+r_t)a_t + w_t(1-l_t) \qquad \text{p/} \quad t = 0, 1, ...\infty \\
& a_0 > 0
\end{aligned}
$$

- Note:
  - A esperança $\mathbb{E}_t$ indica que a família forma expectativas sobre o futuro dado a informação disponível em t.
  - A família escolhe os ativos do próximo período a_{t+1}. Assumiremos que os ativos iniciais são exógenos (e não uma escolha).

Problema da Família

- Para simplificar vamos assumir que a utilidade é: $u(c,l) = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \dfrac{\theta(1-l)^{1+\psi}}{1+\psi}$.
- Em vez de construir a restrição orçamentária intertemporal, vamos considerar as retrições orçamentária período-a-período. O problema da família é:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, a_{t+1}, l_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\theta(1-l_t)^{1+\psi}}{1+\psi} \right) \\
\text{s.à} \quad & c_t + a_{t+1} = (1+r_t)a_t + w_t(1-l_t) \qquad \text{p/} \quad t = 0, 1, \ldots\infty \\
& a_0 > 0
\end{aligned}
$$

- Note:
  - A esperança $\mathbb{E}_t$ indica que a família forma expectativas sobre o futuro dado a informação disponível em t.
  - A família escolhe os ativos do próximo período a_{t+1}. Assumiremos que os ativos iniciais são exógenos (e não uma escolha).

Problema da Família

- O Lagrangeano tem um multiplicador λ_t para cada restrição orçamentária:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\theta(1-l_t)^{1+\psi}}{1+\psi} \right) + \lambda_t \left(w_t(1-l_t) + (1+r_t)a_t - a_{t+1} - c_t \right)$$

- As condições de primeira ordem para um período arbitrário t:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1+r_{t+1}) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t} = \beta^t \theta(1-l_t)^{\psi} - \lambda_t w_t = 0 \tag{3}$$

Problema da Família

- Combinando a primeira equação com a segunda encontramos a equação de Euler.
- Combinando a segunda com a terceira, encontramos a equação de oferta de trabalho:

$$c_t^{-\sigma} = \beta(1 + r_{t+1})c_{t+1}^{-\sigma}$$
$$\frac{\theta(1 - l_t)^{\psi}}{c_t^{-\sigma}} = w_t$$

- Essas duas equações **são válidas para todos os períodos** $t = 0, 1, ...\infty$!
- Ou seja, na prática temos infinitas equações que definem toda a sequência de consumo e trabalho: $\{c_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Problema da Firma

- O problema da firma é igual aos anteriores. Iremos assumir uma função produção Cobb-Douglas: $y_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$.

- A firma apenas aluga o capital da família (i.e., a poupança). O problema é estático e igual em cada período:

$$\max_{n_t, k_t} \quad z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - w_t n_t - (r_t + \delta) k_t$$

- Condições de primeira ordem implicam para todos períodos, t

$$\alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} = r_t + \delta \qquad \text{e} \qquad (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} = w_t$$

- A única diferença substancial é que a produção flutua por choques tecnológios: $y_t = \color{red}{z_t} k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$

Choques Tecnológicos

- O processo estocástico do choque tecnológico segue um processo AR(1):

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_z)$$

- Onde:
  - $-1 < \rho < 1$ representa a persistência do choque;
  - $\sigma > 0$ captura a variância;

- Média incondicional do processo é $\mathbb{E}[\ln(z_t)] = 0$ (poderia ser outra, não é tão importante).

- Suponha que o choque inicial é $\log(Z_0)$ e é igual a média incondicional.

Condições de Equilíbrio

- Equilíbrio requer que em todos os períodos, t:
  - Mercado de bens está em equilíbrio:

$$y_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} = c_t + i_t \qquad \forall t$$

    onde i_t é dado pela lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$.

  - Os preços, $(r_t,\ w_t)$, são os que equilibram a oferta e demanda no mercado de capital e trabalho:

$$a_t = k_t \qquad \text{em todos os } t$$
$$n_t^s = 1 - l_t = n_t^d \qquad \text{em todos os } t$$

Equilíbrio

- O equilíbrio combina optimização da família/firmas e as condições de equilíbrio. Para todos $t = 0, 1, ..\infty$, o sistema de equações é:

$$
\begin{aligned}
c_t^{-\sigma} &= \beta(1 + r_{t+1})c_{t+1}^{-\sigma} && \text{Eq. de Euler} \\
\frac{\theta(1 - l_t)^{\psi}}{c_t^{-\sigma}} &= w_t && \text{Oferta de trabalho} \\
l_t + n_t &= 1 && \text{Restrição temporal} \\
r_t + \delta &= \alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} && \text{Demanda por capital} \\
w_t &= (1 - \alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} && \text{Demanda por trabalho} \\
y_t &= c_t + i_t && \text{Demanda por bem final} \\
k_{t+1} &= i_t + (1 - \delta)k_t && \text{Lei de movimento do capital} \\
y_t &= z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} && \text{Produção (oferta) do bem final} \\
\ln(z_t) &= \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t && \text{Choque}
\end{aligned}
$$

Equilíbrio

- Note que podemos reduzir o sistema substituindo algumas equações dentro de outras:

$$
\begin{aligned}
c_t^{-\sigma} &= \beta(1 + \alpha z_{t+t} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} - \delta) c_{t+1}^{-\sigma} \\
\frac{\theta n_t^{\psi}}{c_t^{-\sigma}} &= (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \\
z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} &= c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t \\
\ln(z_t) &= \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

- Note que a solução do sistema são sequências: $\{c_t, k_{t+1}, n_t\}_{t=0}^{\infty}$.
- Como **resolver um sistema de infinitas equações e infinitas incógnitas?**

Estado estacionário

- Vamos resover o sistema fazendo uma aproximação linear ao redor de um estado estacionário.
  - Mais sobre isso mais tarde.
  - Alternativamente, podemos resolver o sistema não-linear. No apêndice você encontra um pouco mais sobre isso. Aqui

- Para aproximar o sistema precisamos primeiro encontrar um **estado estacionário** do modelo.

- O **estado estacionário** (ou steady state) é o estado em que **todas as variáveis são constantes ao longo do tempo**: $k_t = k_{t+1} = k_{ss}$, $c_t = c_{t+1} = c_{ss}$, e etc.
  - O nosso modelo vai estar flutuando enquanto receber choques tecnológicos z_t.
  - Se tirarmos os choques, ele vai convergir para o estado estacionário e as variáveis econômicas ficarão constantes.

Estado Estacionário: Equações

- Lembre-se que no estado estacionário temos que $c_t = c_{t+1} = c_{ss}$, logo a equação de euler implica:

$$\begin{aligned} c_{ss}^{-\sigma} &= \beta(1 + \alpha z_{ss} k_{ss}^{\alpha-1} n_{ss}^{1-\alpha} - \delta) c_{ss}^{-\sigma} \\ 1 &= \beta(1 + \alpha z_{ss} k_{ss}^{\alpha-1} n_{ss}^{1-\alpha} - \delta) \end{aligned}$$

- De maneira similar, a equação de oferta de trabalho e de produção:

$$\begin{aligned} \frac{\theta n_{ss}^{\psi}}{c_{ss}^{-\sigma}} &= (1-\alpha) z_{ss} k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{-\alpha} \\ z_{ss} k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{1-\alpha} &= c_{ss} + \delta k_{ss} \end{aligned}$$

- Ou seja, é um sistema de 3 equações e 3 incógnitas (k_{ss}, n_{ss}, c_{ss}), e pode ser resolvido com papel e caneta (lembre-se que no steady state $z_{ss} = 1$).
  - Fique a vontade para resolver caso não tenha nada melhor para fazer...

Avaliando o Modelo Quantitativamente

- Já temos um sistema de equações que define o comportamento do modelo no estado estacionário e fora dele.
  - As variáveis endógenas no estado estacionário, (k_{ss}, n_{ss}, c_{ss}), são funções dos parâmetros do modelo (α, β, etc).
  - As equações de equilíbrio fora do estado estacionário também dependem dos parâmetros.
- Para podermos avaliar o modelo quantitativamente precisamos escolher os parâmetros.
- Vamos escolher os parâmetros que são consistente com as variáveis macroeconômicas e os estudos microeconômicos.
  - Esse processo é conhecido como **calibração** do modelo
  - Alternativamente, poderiamos tentar estimar o modelo diretamente nas séries macroeconômicas (mais ou menos como uma regressão). Isso é mais complicado já que o modelo é altamente não-linear.

Calibração

- Os parâmetros que temos que escolher são:
  - β: fator de desconto das famílias.
  - σ: elasticidade de substituição intertemporal do consumo.
  - θ e ψ: nível e elasticidade de substituição em relação ao trabalho.
  - δ: taxa de depreciação do capital.
  - α: elasticidade da produção com relação ao capital.
  - ρ e σ_z: persistência e desvio padrão dos choques tecnológicos (lembre-se que já estamos supondo $z_{ss} = 1$).
- Primeiramente, temos que escolher a frequência do modelo. Em geral os dados macroeconômicos são anuais ou trimestrais, logo essas são as escolhas naturais. Vamos escolher trimestral.

Calibração: Utilidade

- A equação de Euler no estado estacionário implica que:

$$\beta = \frac{1}{1 + r_{ss}}$$

- Nos EUA, a taxa de juros real média é cerca de 2%. Ajustando para trimestral $r = 0.02/4 = 0.005$.

- Isso implica em: $\beta = 0.99$, aproximadamente.

- Existe muita incerteza sobre o parâmetro de aversão ao risco/elasticidade substituição, σ. Estudos microeconômicos apontam para algo entre 0.5-2.

- Vamos escolher $\sigma = 1$ (utilidade log), mas podemos fazer alguns testes de robustez com outros valores.

Calibração: Produção

- Lembre-se que a renda agregada da economia tem que ser igual a produção. No nosso modelo isso implica que:

$$
\begin{aligned}
y_t =& w_t n_t + (r_t + \delta) k_t \\
1 =& \underbrace{\frac{w_t n_t}{y_t}}_{\text{\% da renda do trabalho}} + \underbrace{\frac{(r_t + \delta) k_t}{y_t}}_{\text{\% da renda do capital}}
\end{aligned}
$$

- Substituindo: $w_t = (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha}$ e $y_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$ pela função de produção, temos que:

$$
\text{\% da renda do trabalho} = \frac{w_t n_t}{y_t} = 1 - \alpha
$$

- Nos dados, a renda do trabalho em relação ao total equivale a cerca de 66% do PIB. Logo, temos que $\alpha = 1/3$.

Calibração: Investimento

- A taxa de depreciação é 8% ao ano (2% trimestral) $\Rightarrow \delta = 0.02$. Isso também nos diz a fração de investimento do PIB no modelo: i/y.

- No estado estacionário: $i_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta) \Rightarrow i_{ss} = \delta k_{ss}$.

- Dividindo por y, e usando a função de produção $y_{ss} = k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{1-\alpha}$, temos que:

$$\frac{i_{ss}}{y_{ss}} = \delta \frac{k_{ss}}{y_{ss}} = \delta \frac{k_{ss}}{k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{1-\alpha}} = \delta \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{1-\alpha}$$

- Utilizando a condição da firma: $r_{ss} + \delta = \alpha k_{ss}^{\alpha-1} n_{ss}^{1-\alpha} \Rightarrow \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{r_{ss}+\delta}$

- Substituindo os valores de $\alpha,\ \delta,\ \beta$, temos que $i/y \approx 22.15\%$ (dependendo da sua aprox. do β). Consistente com a fração de investimento/PIB dos EUA.

Calibração: Choque Tecnológico

- O choque tecnológico z segue um $AR(1)$.
- Primeiro temos que estimar o resíduo de Solow (SR, ou seja a produtividade total de fatores) usando dados do PIB, K_t e N_t, supondo uma produção Cobb-Douglas (em log):

$$\ln Y_t = \ln SR_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln N_t$$

- Depois remova a tendência de longo prazo do resíduo de Solow para encontrar as flutuações de curto prazo, z_t. Isso pode ser feito com uma tendência linear ou o filtro HP.
- Logo estime um $AR(1)$ com z_t: $\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t$.
- O processo do choque é bastante persistente: $\rho = 0.979$ e $\sigma_z = 0.009$ (valores do Eric Sims).

Calibração: Oferta de Trabalho

- Dois parâmetros que determinam a oferta de trabalho: θ e ψ. São os mais controversos.

- Vamos selecionar $\psi = 1$, que é consistente com os estudos microeconômicos que olham para a resposta das horas trabalhada a variações de renda (ver Chetty et al (2011)).

- θ será selecionado para que as horas trabalhadas das famílias no estado estacionário, n, sejam igual $1/3$ do tempo total.

- Note que n é apenas uma função dos parâmetros, logo podemos escolher θ que seja consistente com os parâmetros já escolhidos e com $n = 1/3$:

$$\theta = \frac{1}{(\underbrace{n}_{=1/3})^{\psi+\sigma}} \underbrace{(1-\alpha)\left(\frac{c}{n}\right)^{-\sigma}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}}_{\text{parâmetros}}$$

- Dados os parâmetros escolhidos (α, δ, e etc), temos que $\theta \approx 7$.

Derivação aqui

Calibração

- Os parâmetros escolhidos são:
  - $\beta = 0.99$: fator de desconto das famílias.
  - $\sigma = 1$: elasticidade de substituição intertemporal do consumo.
  - $\theta \approx 7$ e $\psi = 1$: nível e elasticidade de substituição em relação ao trabalho.
  - $\delta = 0.02$: taxa de depreciação do capital.
  - $\alpha = 1/3$: elasticidade da produção com relação ao capital.
  - $\rho = 0.979$ e $\sigma_z = 0.009$: persistência e desvio padrão dos choques tecnológicos.

Avaliação Quantitativa

- Um dos grandes sucessos iniciais do modelo de ciclos reais foi apresentar um modelo **quantitativo** (e não puramente teórico) de equilíbrio geral.

- Como avaliar se o modelo tem boa aderência aos dados?

- Replicando os fatos estilizados da volatilidade, persistência, correlação entre as variáveis macro.
    - Para isso, simulamos uma sequência de choques $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_z)$, e utilizamos as equações de equilíbrio para simular variáveis endógenas do modelo (PIB, investimento, consumo,etc).

- Podemos também plotar as funções impulso resposta do modelo.
    - Para isso, damos um choque inicial de 1% em ε e vemos como o modelo responde.

Volatilidade do Modelo RBC

Figura: Simulação do RBC: Variáveis em Log e Filtradas com HP-filter

VARIABLE	MEAN	STD. DEV.
logY	0.1033	0.0164
logC	-0.1470	0.0066
logI	-1.4041	0.0522
logK	2.5079	0.0038
logN	-1.0986	0.0051
logw	0.7965	0.0114
logZ	-0.0002	0.0130

- **Similar aos dados**:
  - Boa volatilidade do PIB. Investimento é mais volátil que o PIB. Consumo é menos volátil que o PIB. Volatilidade relativa dos salários é semelhante aos dados.
- **Ruim**: O modelo não gera muita volatilidade nas horas trabalhadas. A taxa de juros não é muito volátil (não está na tabela).

Correlação

- O modelo gera boa pro-ciclicalidade das variáveis. Isso tende a ser verdade nos dados, **exceto para os salários e tx. de juros**.
- A pro-ciclicalidade provavelmente é muito alta.

MATRIX OF CORRELATIONS (HP filter, lambda = 1600)

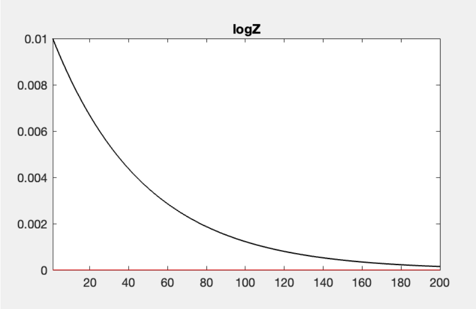
Variables	logY	logC	logI	logK	logN	logw	logZ
logY	1.0000	0.9620	0.9926	0.3272	0.9843	0.9969	0.9987

- O modelo gera boa autocorrelação das variáveis ao longo do tempo:

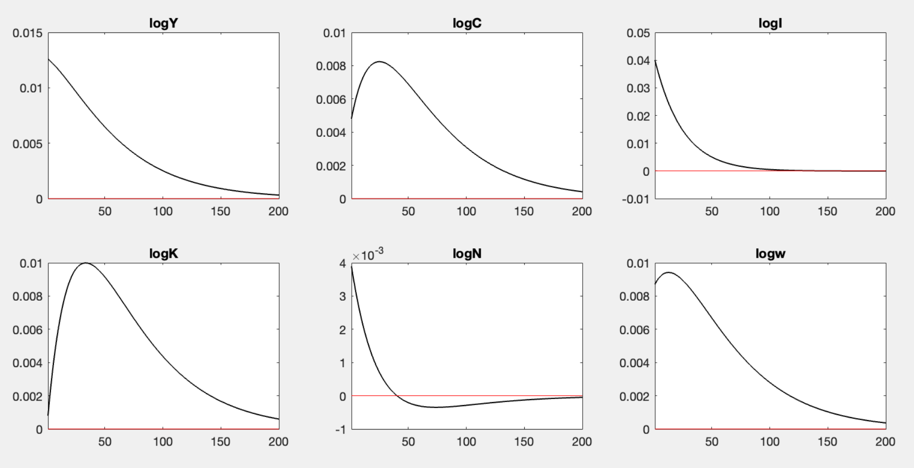
Order	1
logY	0.7240
logC	0.7663
logI	0.7160
logK	0.9612
logN	0.7148
logw	0.7330
logZ	0.7199

Analisando o Mechanismo: A Função Impulso-Resposta

- Vamos analisar a transmissão de um choque no modelo. Vamos dar um choque de 1% no ε em $t = 0$ e ver como o resto das variáveis respondem (sem outros choques).
- Depois do choque no período 0, a produtividade vai seguir o processo: $\log z_t = \rho \log z_{t-1} + \varepsilon_t$.



Função Impulso-Resposta: Variáveis Endógenas



Função Impulso-Resposta: Variáveis Endógenas

- Após um choque de 1% em z, a economia fica mais produtiva temporariamente.
- O investimento aumenta, e as famílias aumentam a quantidade de trabalho (já que os salários estão mais altos temporariamente).
- O consumo sobe, só que menos do que a produção. As famílias estão poupando mais para acumular capital e aproveitar o boom econômico.
- O boom vai diminuindo. O capital e o consumo chegam no seu pico.
- Eventualmente as famílias começam a despoupar e trabalhar menos até a economia eventualmente retornar ao estado estacionário.

Analisando o Mechanismo: Amplificação e Propagação

- Para entender como o modelo funciona é bom separar em dos mecanismos de transmissão do choque:
  - **Amplificação**: a volatilidade extra que o modelo gera além do choque z.
  - **Propagação**: capacidade do modelo gerar flutuações persistentes além do choque.
- Lembre-se que: $y = zk^{\alpha}n^{1-\alpha}$, logo a amplificação da produção vem do aumento dos insumos k e n.
  - O capital demora para acumular e só aumenta a produção depois de vários períodos de investimento.
  - Logo, **a amplificação vem do trabalho**: as famílias respondem trabalhando mais quando os salários são mais altos.

Analisando o Mechanismo: Amplificação

- A resposta de trabalho das famílias dependem da **substituição intertemporal do trabalho**.

- Lembre-se que se utilizarmos a equação de euler e a equação de oferta de trabalho (e $\beta(1+r)=1$), temos:

$$\frac{\theta n_t^{\psi}}{w_t} = \frac{\theta n_{t+1}^{\psi}}{w_{t=1}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n_t}{n_{t+1}}\right)^{\psi} = \frac{w_t}{w_{t+1}}$$

- Ou seja, se o salário hoje (w_t) for muito mais alto do que o de amanhã w_{t+1}, o modelo gerará bastante amplificação.

- Por outro, como o choque z é bastante persistente, os salários são persistentes e o modelo básico tem relativamente pouca amplificação.

Analisando o Mechanismo: Propagação

- De maneira similar, a propagação do modelo é dado pela única variável endógena de acumulação do modelo: o capital.

- Em geral, o modelo também tem pouca propagação. A maior parte da persistência das variáveis do modelo vem do choque que é bastante persistente: $\rho \approx 0.95$.

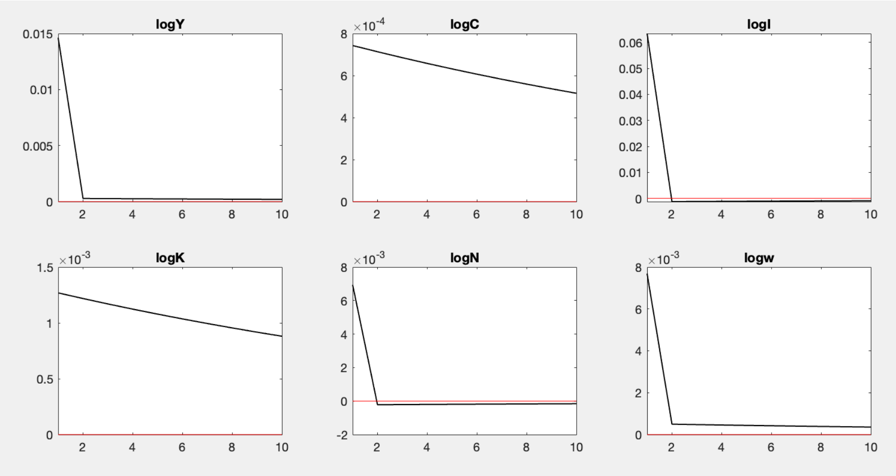
- Se reduzirmos a persistência do choque o modelo perde bastante propagação. Por outro lado, ganha bastante amplificação.

- Vamos replicar as funções impulso resposta quando $\rho = 0$ (choque completamente transitório).

Função Impulso-Resposta: Choque Temporário

- Choque temporário: 1% em ε no período 0. Por outro lado, temos que $\rho = 0$.
- O choque desaparece completamente no segundo período.

Função Impulso-Resposta: Variáveis Endógenas



Apêndice

Digressão: Solução do Sistema Não-linear

- Para simplificar, ignore a equação do mercado de trabalho (a segunda) e o choque (a quarta). Note que n_t pode ser uma função das outras variáveis.
- Considere $z_t = 1$, $n_t = 1$ para todo t para simplificar. Re-arrumando:

$$c_t^{-\sigma} = \beta(1 + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta)c_{t+1}^{-\sigma}$$
$$c_t = k_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t$$

- Substituindo c_t, podemos ver que o sistema é uma equação de segunda diferença em k_t:

$$(k_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)^{-\sigma} = \ldots$$
$$\beta(1 + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta)(k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1})^{-\sigma}$$

- Se soubermos a condição inicial, k_t, e a condição final, k_{t+2}, podemos saber qual a solução k_{t+1}.

Digressão: Solução do Sistema Não-linear

- Com dois períodos temos a condição inicial $a_0 = k_0$ exógena (o capital inicial da economia), e a condição final $k_2 = a_2 = 0$ (o indívíduo não quer morrer com ativos no banco).
- Com dois períodos é fácil de ver:

$$(k_0^\alpha - k_1 + (1-\delta)k_0)^{-\sigma} = \beta(1 + \alpha k_1^{\alpha-1} - \delta)(k_1^\alpha - k_2 + (1-\delta)k_1)^{-\sigma}$$

- Ou seja, temos 1 equação e uma variável endógena k_1. É uma equação não-linear, e não conseguimos resolver "na mão".
- Mas o computador consegue resolver isso facilmente.

Digressão: Solução do Sistema Não-linear

- Com infinitos períodos, a intuição é similar. O truque é pensar que a variável endógena k_{t+1} hoje, vai ser a condição inicial de amanhã. Logo sempre vamos ter uma condição inicial:

$$
\begin{aligned}
&(k_t^\alpha - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)^{-\sigma} = \ldots \\
&\quad \beta(1 + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta)(k_{t+1}^\alpha - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1})^{-\sigma}
\end{aligned}
$$

- Ainda falta a condição final: a **condição de transversalidade**.
- **Condição de transversalidade:** $\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T)k_{T+1} = 0$, e quer dizer que o valor "sombra"do capital futuro vai tender a zero.
  - É semelhante a ideia de que em tempo finito o agente não valoriza dinheiro no banco depois de morto.
  - Em tempo infinito o agente não valoriza o capital em um período extremamente distante.
  - É uma condição extremamente técnica e você não precisa se preocupar com os detalhes.

Back

Calibração: Algébra da Oferta de Trabalho

- A condição da firma implica em: $\frac{k}{n} = \left(\frac{\alpha}{1/\beta - 1 + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$.
- Eq. no mercado de bens: $c = y - i \Rightarrow c = \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} n - \delta k \Rightarrow \frac{c}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} - \delta \frac{k}{n}$
- Oferta de trabalho:

$$\begin{aligned}
\theta n^{\psi} &= \frac{(1-\alpha)}{c^{\sigma}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \\
\theta n^{\psi+\sigma} &= (1-\alpha) \left(\frac{c}{n}\right)^{-\sigma} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \\
n &= \left[\frac{(1-\alpha)}{\theta} \left(\frac{c}{n}\right)^{-\sigma} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\psi+\sigma}}
\end{aligned}$$

- Logo, n no estado estacionário é uma função de apenas parâmetros.

Volta