Macroeconomia I

Modelo Novo-Keynesiano

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

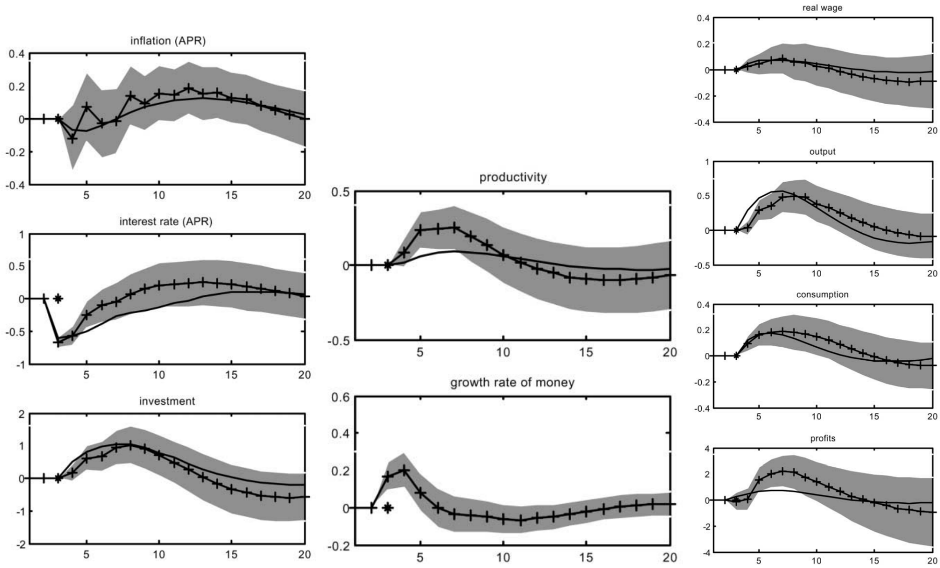
Introdução

- Modelo RBC:
  - Quase toda persistência gerada pelo choque de tecnologia.
  - Não tem espaço para o lado monetário.
  - Não está de acordo com as flutuações no mercado de trabalho.
- Novas evidências mostram que:
  - Choques monetários tem efeitos reais (Cristiano, Eichenbaum and Evans, 1999, 2005).
  - Horas trabalhadadas diminuem com um choque tecnológico positivo (Galí, 1999).
- $\Rightarrow$ modelo Novo-Keynesiano (*New-Keynesian Model*).

Evidência I: Christiano, Eichenbaum and Evans (2005)

- Usando um VAR, CEE mostram que após um choque monetário:
  (i) Produção, consumo e investimento respondem positivamente em forma *hump-shaped*;
  (ii) Inflação responde em forma *hump-shaped*, com um pico após cerca de dois anos;
  (iii) A taxa de juros cai por cerca de um ano;
  (iv) Lucros reais, os salários reais e a produtividade do trabalho aumentam;
  (v) A taxa de crescimento do dinheiro aumenta imediatamente.
- Restrições do VAR:
  - PIB real, consumo real, consumo real, deflator do PIB, investimento real, salário real e produtividade do trabalho não respondem imediatamente a um choque monetário.

Evidência I: Christiano, Eichenbaum and Evans (2005)



Evidência II: Galí (1999)

- **Evidência Empírica:** Co-movimento entre PIB e horas trabalhadas.
  - RBC: gera o comovimento via choque tecnológico $\Rightarrow$ choque tecnológico positivo aumenta horas trabalhada.

- **Galí (1999)**, usando um VAR estrutural em países do G7:
  (i) Horas trabalhadas respondem negativamente a um choque tecnológico positivo.
  (ii) Correlações condicionais de horas são positivas para choques não tecnológicos.

- Consistente com um modelo simples com **rigidez de preços**.

- Restrições de identificação do VAR:
  - Choques tecnológicos podem ter efeitos permanentes na produtividade de trabalho da economia.
  - Outros choques (inclusive de demanda) tem apenas efeitos temporários na produtividade do trabalho via oferta de trabalho.

Evidência II: Galí (1999)

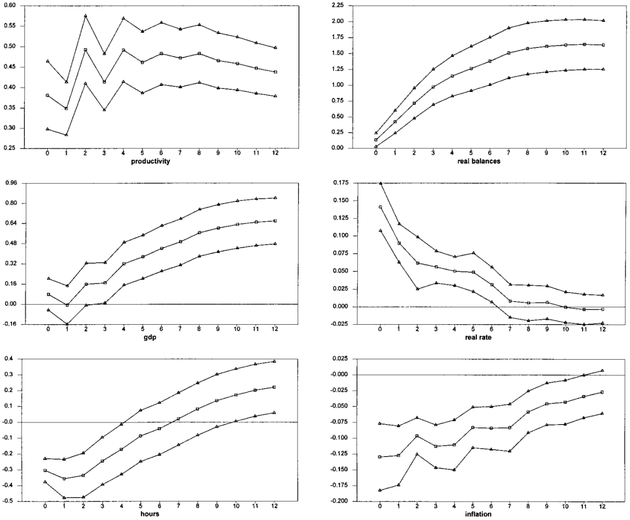


FIGURE 4. ESTIMATED IMPULSE RESPONSES FROM A FIVE-VARIABLE MODEL: U.S. DATA, FIRST-DIFFERENCED HOURS (POINT ESTIMATES AND ±2 STANDARD ERROR CONFIDENCE INTERVALS)

Modelo Base

[Galí, Cap 3]

Modelo Novo-Keynesiano

- Modelo Novo-Keynesiano "canônico". Arcabouço para entender:
  - Transmissão da política monetária.
  - Regras para a condução da política monetária.
- "Core" do Modelo:
  - Concorrência monopolística.
  - Rigidez nominal (preços ou salários).
- Produção será determinada pela demanda.
- Vamos ignorar capital para simplificar o problema.
  - Incluir não altera os resultados qualitativos (mas terá efeitos quantitativos).
  - Produção é uma função apenas da tecnologia e do trabalho.

Famílias

- Família escolhe quanto do bem final, C_t, vai consumir, quanto trabalhar, N_t, e quantos títulos livre de risco, B_t, comprar:

$$\max_{C_t, N_t, B_t} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi} - 1}{1+\varphi} \right)$$

$$\text{s.t.} \qquad P_t C_t + \frac{B_t}{1+i_t} \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t \quad \forall t$$

  onde $\beta \in (0,1)$, P_t o preço do bem final, D_t é o dividendo (lucro) distribuído pela firma e i_t a taxa de juros nominal paga pelo título. Inclua também uma condição no-Ponzi.

- É uma economia *cashless*. Para incluir dinheiro basta incluir saldos reais na função utilidade.

- É comum escrever o preço do título como $Q_t \equiv 1/(1+i_t)$.

Famílias

- Solução padrão:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi} - 1}{1+\varphi} \right) + \lambda_t \left(W_t N_t + D_t + B_{t-1} - P_t C_t + \frac{B_t}{1+i_t} \right)$$

- c.p.o
  - $\beta^t C_t^{-\sigma} = P_t \lambda_t \qquad \forall t;$
  - $\beta^t N_t^{\varphi} = \lambda_t W_t \qquad \forall t;$
  - $\lambda_t = \mathbb{E}_t (1+i_t) \lambda_{t+1} \qquad \forall t.$
- Implicando nas condições (em todo t):

$$Q_t \equiv 1/(1+i_t) = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^{\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \qquad \text{(EE)}$$

$$N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} = W_t / P_t \qquad \text{(LS)}$$

- A EE também define o fator de desconto estocástico.

Firmas

- Para simplificar o problema vamos separar o problema da firma em dois.
- Firma (representativa) que produz o bem final $C_t = Y_t$:
  - Produz o bem final agregando insumos intermediários indexados por j em uma função de produção com elasticidade de substituição entre insumos constante (CES).

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}, \qquad \epsilon > 1 \quad \text{(substitutos brutos).}$$

  - Mercardo competitivo.
- Continuum de produtores intermediários indexadas por $j \in [0,1]$ que produzem os insumos intermediários $Y_t(j)$ a um preço $P_t(j)$.
  - Bens diferenciados. Cada firma produz sua própria "variedade".
  - Competência monopolística. Firmas intermediárias tem poder de mercado.
  - Rigidez nominal: não podem ajustar os preços instantâneamente.

Produtor Final

- Produtor final maximiza lucro escolhendo a quantidade de insumos intermediários:

$$\max_{Y_t(j)} \quad P_t \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

e a c.p.o para uma variedade j:

$$\left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} Y_t(j)^{-\frac{1}{\epsilon}} = \frac{P_t(j)}{P_t} \qquad \forall j$$

$$\left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} \qquad \forall j$$

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t \qquad \forall j$$

onde $Y_t(j)$ é a demanda relativa da firma pelo insumo intermediário j.

Produtor Final

- O indíce de Preço do bem final é dado por:

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} P_t^{\epsilon} Y_t dj$$

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj$$

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Produtor Intermediário

- É no produtor intermediário que toda a "ação" acontece. Por enquanto vamos ignorar a rigidez nominal.

- Seja A_t o choque tecnológico. Função de produção de um produtor j:

$$Y_t(j) = A_t N_t(j)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in [0,1).$$

- Firmas monopolísticas com variedades diferenciadas: escolhem o preço para maximizar o lucro (ou alternativamente a quantidade) tomando a demanda pela sua variedade como dada.

$$\max_{Y_t(j),\ P_t(j),\ N_t(j)} \quad \{P_t(j)Y_t(j) - W_t N_t(j)\}$$

$$\text{s.t.} \quad Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Produtor Intermediário

- Dividiremos em dois sub-problemas, decisão de preço/quantidade e decisão de trabalho (que será independente da rigidez de preços).
- Minimização da função custo dado um nível de produção $Y_t(j)$:

$$\min_{N_t(j)} -W_t N_t(j) \qquad \text{s.t.} \quad Y_t(j) = A_t N_t(j)^{1-\alpha}$$

- Defina $\Psi_t(j)$ como o custo marginal nominal de uma unidade extra de $Y(j)$:

$$\mathcal{L} = -W_t N_t(j) + \Psi_t(j)(A_t N_t(j)^{1-\alpha} - Y_t(j))$$

- c.p.o:

$$W_t = \Psi_t(j)(1-\alpha)A_t N_t^*(j)^{-\alpha}$$
$$\Psi_t(j) = \frac{W_t}{(1-\alpha)A_t N_t^*(j)^{-\alpha}} = \frac{W_t}{MPN_t(j)}$$

onde $MPN_t(j)$ é o produto marginal do trabalho.

Produtor Intermediário

- A decisão do produtor intermediário (sem rigidez de preços) é:

$$D_t(j) = \max_{Y_t(j),\ P_t(j)} \{P_t(j)Y_t(j) - \Psi_t(j)Y_t(j)\} \qquad \text{s.t.} \quad Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

$$= \max_{P_t(j)} \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t[P_t(j) - \Psi_t(j)]$$

- O que implica que o preço ótimo:

$$(1-\epsilon)P_t(j)^{-\epsilon} + \epsilon P_t(j)^{-\epsilon-1}\Psi_t(j) = 0$$

$$P_t(j) = \underbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}}_{markup} \Psi_t(j) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{W_t}{MPN_t(j)}$$

- Otimalidade: preço = markup $\times$ custo marginal.
- Quando $\varepsilon \to \infty \Rightarrow$ mercados competitivos!

Rigidez Nominal

Já temos o nosso benchmark de preços flexível, como introduzir rigidez nominal? Principais abordagens:

(i) ***Calvo Staggering Pricing (1982)***

- Cada período uma fração constante de firmas $1-\theta$ é selecionada aleatoriamente e pode ajustar os seus preços.
- Com probabilidade θ, a firma não pode ajustar o preço: $P_t(j) = P_{t-1}(j)$.

(ii) ***Rotemberg Price Adjustment Cost (1983)***

- Ajuste de preço requer o pagamento de um custo de ajuste quadrático (em termos do bem $Y_t(j)$):

$$\text{Adj. Cost} = \frac{\phi}{2}\left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} - 1\right)^2 Y_t(j) \tag{1}$$

- Vamos utilizar rigidez nominal a la Calvo.
- As duas abordagens são idênticas na aproximação linear de primeira ordem e sem tendência inflacionária no estado estacionário.

Rigidez Nominal

- Com rigidez nominal a decisão da firma passa a ser dinâmica. Escolhe o preço em t para maximizar o fluxo de lucro descontado

$$\max_{P_t^*(j)} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} D_{t+k|t}(j) + \Upsilon_t$$

  - $Q_{t,t+k} \equiv \beta^k \left(\frac{C_t}{C_{t+k}}\right)^{\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}}$ é o fator de desconto estocástico.
  - $D_{t+k|t}(j)$ é o lucro da firma que alterou o preço pela última vez em t.
  - Υ_t representa os termos do lucro nos períodos em que a firma pode alterar o preço e portanto não depende do preço decidido em t. Vamos ignorá-lo.

$$\max_{P_t^*(j)} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} [P_t^*(j) Y_{t+k|t}(j) - \Psi_{t+k|t}(j) Y_{t+k|t}(j)] \quad \text{s.t. } Y_{t+k|t}(j) = \left(\frac{P_t^*(j)}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} Y_{t+k}$$

Rigidez Nominal

$$\max_{P_t^*(j)} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} [P_t^*(j) \left(\frac{P_t^*(j)}{P_{t+k}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+k} - \Psi_{t+k|t} \left(\frac{P_t^*(j)}{P_{t+k}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+k}]$$

- c.p.o:

$$\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon} ((1-\epsilon) P_t^*(j)^{-\epsilon} + \epsilon P_t^*(j)^{-\epsilon-1} \Psi_{t+k|t}(j)) = 0$$

$$P_t^*(j) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon} \Psi_{t+k|t}(j)}{\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon}}$$

- Ótimalidade: preço = markup $\times$ custo marginal ponderado pela probabilidade de mudança de preço, desconto estocástico e demanda agregada futura.

Equilíbrio e Agregação

- Tecnologia:

$$\log A_t = \rho^a \log A_{t-1} + \varepsilon_t^a$$

- Eq. no mercado de bens (demanda agregada = oferta agregada):

$$C_t = Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}$$

- Condições de equilíbrio no mercado de títulos e trabalho (p/ todo t):

$$B_t = 0$$

$$N_t = \int_0^1 N_t(j)dj = \int_0^1 \left(\frac{Y_t(j)}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} dj = \left(\frac{Y_t}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{\frac{-\epsilon}{1-\alpha}} dj$$

Equilíbrio e Agregação

- Podemos escrever produção agregada como:

$$Y_t = \frac{A_t N_t^{1-\alpha}}{\nu_t} \qquad \text{onde} \quad \nu_t = \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

- $\nu_t \geq 1$ é uma medida de dispersão de preços. Quando existe dispersão de preços ($\nu_t > 1$), a alocação de trabalho é distorcida e a produção diminui.

- Dividendos agregados:

$$D_t = \int_0^1 D_t(j)dj = \int_0^1 [P_t(j)Y_t(j) - W_t N_t(j)]dj$$

Equilíbrio e Agregação

- Utilizando o fato que todas as firmas que mudam preços em t, mudam para o mesmo preço, e o indíce de preço P_t, a lei de movimento dos preços:

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj$$

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^\theta P_{t-1}(j)^{1-\epsilon} dj + \int_\theta^1 (P_t^*)^{1-\epsilon} dj$$

$$P_t^{1-\epsilon} = \theta \int_0^1 P_{t-1}(j)^{1-\epsilon} dj + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon}$$

$$P_t^{1-\epsilon} = \theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon}$$

- O que implica na dinâmica da inflação bruta:

$$\Pi_t \equiv 1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} = \left[\theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon}\right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

- **Inflação:** Resultado da dinâmica de ajuste de preços das firmas!

Equações de Equilíbrio

O que falta para determinar o equilíbrio?

$$Q_t \equiv 1/(1+i_t) = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^{\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right]$$

$$N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} = W_t / P_t$$

$$\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}} = \left[\theta + (1-\theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

$$\log A_t = \rho^a \log A_{t-1} + \sigma^a \varepsilon_t$$

$$C_t = Y_t = \frac{A_t N_t^{1-\alpha}}{\nu_t}$$

$$P_t^* = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon} \Psi_{t+k|t}}{\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon}}$$

$$\Psi_{t+k|t} = \frac{W_{t+k}}{(1-\alpha) A_{t+k} N_{t+k|t}^{-\alpha}}$$

Equilíbrio com Preços Flexíveis

- No caso de preços flexíveis ($\theta = 0$), a variações nominais não afetam as variáveis reais e com o sistema:

$$N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} = W_t / P_t$$
$$C_t = Y_t = A_t N_t^{1-\alpha}$$
$$P_t = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{W_t}{(1-\alpha) A N^{-\alpha}}$$

- podemos encontrar $(C_t, Y_t, N_t, W_t/P_t)$ em função do choque A_t. Resolvendo:

$$N_t^n = \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} (1-\alpha) A_t^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}}$$
$$Y_t^n = \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} (1-\alpha) \right]^{\frac{1-\alpha}{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}} A_t^{\frac{1+\varphi}{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}}$$

- Esse é **nível natural do produto** (*natural level of output*).

Equilíbrio com Preços Flexíveis

- Do mesmo conjunto de equações podemos encontrar o estado estacionário determinístico $A_t = A_{t+1} = \bar{A} = 1$ e com inflação zero.

- Uma equação extra (EE):

$$1 + i = \frac{1}{\beta} \tag{2}$$

- O nível de preço é indeterminado.

- Poderia ser determinado caso houvesse eq. de demanda por saldos reais (ad-hoc ou derivada da utilidade) + eq. de oferta de dinheiro.

Equilíbrio Log-linearizado

Log-Linearização

- Resolveremos o modelo na vizinhança do estado estacionário com zero inflação.
- Defina $\hat{x}_t \equiv \log X_t - \log \bar{X}$ e $x_t \equiv \log X_t$.

$$
\begin{aligned}
(EE) \quad & \hat{c}_t = \mathbb{E}_t \hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}) && (3)\\
\Leftrightarrow \quad & c_t = \mathbb{E}_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho) \qquad \text{(onde} \quad \bar{i} = -log\beta \equiv \rho) && (4)\\
(LS) \quad & \hat{w}_t - \hat{p}_t = \sigma \hat{c}_t + \varphi \hat{n}_t && (5)\\
(agg\ PF) \quad & \hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t \qquad \text{(aprox. de primeira ordem} \Rightarrow \log \nu_t = 0) && (6)\\
(Mkt\ clearing) \quad & \hat{c}_t = \hat{y}_t && (7)\\
(Choque) \quad & \hat{a}_t = \rho^a \hat{a}_{t-1} + \sigma^a \varepsilon && (8)
\end{aligned}
$$

Log-Linearização

- Definindo custo marginal real $MC_t = \Psi_t / P_t$

$$(MC\ real) \quad \hat{mc}_t \equiv \hat{\psi}_t - \hat{p}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t - \log MPN_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t - \frac{1}{1-\alpha}(\hat{a}_t - \alpha \hat{y}_t)$$

- Custo marginal real de uma firma que escolheu preços pela última vez em t (e usando o fato que $\hat{y}_{t+k|k} = -\epsilon(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t+k}) + \hat{y}_{t+k}$):

$$\hat{mc}_{t+k|t} = \hat{w}_{t+k} - \hat{p}_{t+k} - \frac{1}{1-\alpha}(\hat{a}_{t+k} - \alpha \hat{y}_{t+k|k})$$

$$\hat{mc}_{t+k|t} = \hat{mc}_{t+k} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\hat{y}_{t+k|k} - \hat{y}_{t+k})$$

$$\hat{mc}_{t+k|t} = \hat{mc}_{t+k} - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t+k})$$

Log-Linearização

- Utilizando $X_t = \bar{X}e^{\hat{x}_t} \approx \bar{X}(1+\hat{x}_t)$, a inflação agregada (lembre que $\Pi_t = 1+\pi_t$ e no SS com inflação zero $\bar{\Pi} = 1$):

$$\begin{aligned}
&\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} \\
&\bar{\Pi}^{1-\epsilon} e^{(1-\epsilon)\pi_t} = \theta + (1-\theta)(\bar{P}/\bar{P})^{(1-\epsilon)} e^{(1-\epsilon)(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1})} \\
&1 + (1-\epsilon)\pi_t = 1 + (1-\theta)(1-\epsilon)(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}) \\
(\mathit{Price\ Dynamics}) \quad &\pi_t = (1-\theta)(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1})
\end{aligned}$$

- Para entender inflação, precisamos entender o motivo que faz as firmas ajustar os preços.
- Quando os preços são flexíveis: $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$.

Log-Linearização

- Substituindo a definição de $Q_{t,t+k} \equiv \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+k}}\right)$:

$$\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k (C_{t+k})^{-\sigma} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon-1} P_t^* = \frac{\epsilon}{\epsilon-1} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k (C_{t+k})^{-\sigma} Y_{t+k} P_{t+k}^{\epsilon-1} \Psi_{t+k|t}$$

- utilizando $(1+\hat{x}_t)\bar{X} = X_t$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \bar{C}^{-\sigma} \bar{Y} \bar{P}^{\epsilon-1} \bar{P}^* [1 - \sigma\hat{c}_{t+k} + \hat{y}_{t+k} + (\epsilon-1)\hat{p}_{t+k} + \hat{p}_t^*] \\ =& \frac{\epsilon}{\epsilon-1} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \bar{C}^{-\sigma} \bar{Y} \bar{P}^{\epsilon-1} \bar{\Psi} [1 - \sigma\hat{c}_{t+k} + \hat{y}_{t+k} + (\epsilon-1)\hat{p}_{t+k} + \hat{\psi}_{t+k|t}] \end{aligned}$$

Log-Linearização

- Utilizando $\bar{P}^* = \epsilon/(1-\epsilon)\bar{MC}$ e eliminando as variáveis no SS:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k \hat{p}_t^* = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_{t+k|t}$$

$$\hat{p}_t^* = (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k \hat{\psi}_{t+k|t}$$

$$(\textit{Price Setting Eq.}) \quad \hat{p}_t^* = (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k [\hat{mc}_{t+k|t} - \hat{p}_{t+k}]$$

O Modelo NK Canônico

- Uma vez que temos as equações log-linearizadas é comum escrever o modelo em um sistema de três equações:

  (i) IS Dinâmica (DIS) $\Rightarrow$ Determina o **hiato do produto** em função de fatores reais e inflação esperada.

  (ii) Curva de Phillips Novo-Keynesiana (NKPC) $\Rightarrow$ Determina a inflação em termos de inflação esperada e hiato do produto.

  (iii) Regra de política monetária.

IS Dinâmica

- Utilizando a EE linearizada e a condição de equilíbrio $c_t = y_t$:

$$y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho)$$

- Defina o **hiato do produto** (*output gap*): $\tilde{y}_t \equiv \hat{y}_t - \hat{y}_t^n = y_t - y_t^n$, onde y_t^n é o logaritmo do nível natural do produto e

$$\hat{y}_t^n = \frac{1+\varphi}{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}\hat{a}_t = \psi_{ya}^n \hat{a}_t,$$

- e a taxa de juros natural $r_t^n \equiv \rho + \sigma(\mathbb{E}_t y_{t+1}^n - y_t^n) = \rho + \sigma \psi_{ya}^n E_t \Delta a_{t+1}$.
- Re-escrevendo:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \underbrace{-\rho - \sigma \mathbb{E}_t \Delta y_{t+1}^n}_{-r_t^n})$$

IS Dinâmica

- A IS Dinâmica (DIS):

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n)$$

- O hiato do produto depende de
  - Fatores reais: r_t^n (neste modelo choques tecnológicos);
  - Taxa de juros real, $r_t \equiv i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}$, que inclui juros nominal e inflação esperada.
- Iterando a equação para frente e assumindo $\lim_{T \to \infty} E_t \tilde{y}_T = 0$:

$$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (r_{t+k} - r_{t+k}^n)$$

- O hiato do produto é inversamente relacionado a soma dos desvios entre a taxa de juros real e taxa de juros natural:
  - Equação *forward looking*: desvios futuros também são penalizados.

NKPC

- Usando a *price setting equation* e substuindo $\hat{mc}_{t+k|t}$ e resolvendo por $\hat{p}_t^*$:

$$\hat{p}_t^* = (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k [\hat{mc}_{t+k|t} - \hat{p}_{t+k}]$$

$$\hat{p}_t^* = (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k [\hat{mc}_{t+k} - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t+k})]$$

$$\hat{p}_t^* = (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k [\Theta\hat{mc}_{t+k} + \hat{p}_{t+k}],$$

  onde $\Theta \equiv \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\epsilon}$.
- A escolha do preço de hoje é uma função dos custos marginais futuros e dos preços futuros.

NKPC

- Quebrando a soma entre dois termos e subtraindo $\hat{p}_{t-1}$ em ambos os lados:

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_t^* &= (1-\theta\beta)[\Theta \hat{mc}_t + \hat{p}_t] + (1-\theta\beta)\mathbb{E}_t \sum_{k=1}^{\infty} (\theta\beta)^k [\Theta \hat{mc}_{t+k} + \hat{p}_{t+k}] \\
\hat{p}_t^* &= (1-\theta\beta)[\Theta \hat{mc}_t + \hat{p}_t] + \theta\beta \mathbb{E}_t \hat{p}_{t+1}^* \\
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} &= (1-\theta\beta)\Theta \hat{mc}_t + \theta\beta \mathbb{E}_t [\hat{p}_{t+1}^* - \hat{p}_t] + \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}
\end{aligned}
$$

- Usando $\pi_t = (1-\theta)(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1})$ e $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi_t}{1-\theta} &= (1-\theta\beta)\Theta \hat{mc}_t + \theta\beta \mathbb{E}_t \frac{\pi_{t+1}}{1-\theta} + \pi_t \\
\pi_t &= \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)\Theta}{\theta} \hat{mc}_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1}
\end{aligned}
$$

NKPC

- Iterando a equação para frente e $\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t \pi_T = 0$:

$$\pi_t = \lambda \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \hat{mc}_{t+k},$$

  onde $\lambda \equiv \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)\Theta}{\theta}$.
- **Inflação é *forward looking***:
  - Soma descontada dos desvios do custo marginal real médio do seu valor "desejável".
  - Se as firmas esperam que a custo marginal médio for mais alto (ou mark-up médio for mais baixo) que o SS, elas aumentam o preço para re-alinhar com o valor desejável.
  - Inflação não é um fenômeno monetário, e sim resultado da decisão de preço das firmas.
  - $\uparrow \theta \Rightarrow$ menos oportunidades para ajustar preço: peso maior para o custo marginal futuro.

NKPC

- Note que existe uma relação entre $\hat{mc}_t$ e o hiato do produto $\tilde{y}_t$. Utilizando a equação LS e a fun. de produção:

$$\hat{mc}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t - \frac{1}{1-\alpha}(\hat{a}_t - \alpha\hat{y}_t)$$
$$\hat{mc}_t = \sigma\hat{y}_t + \varphi\hat{n}_t - \frac{1}{1-\alpha}(\hat{a}_t - \alpha\hat{y}_t)$$
$$\hat{mc}_t = \sigma\hat{y}_t + \frac{\varphi}{1-\alpha}(\hat{y}_t - \hat{a}_t) - \frac{1}{1-\alpha}(\hat{a}_t - \alpha\hat{y}_t)$$
$$\hat{mc}_t = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{y}_t - \frac{1+\varphi}{1-\alpha}\hat{a}_t$$

- Utilizando o nível natural do produto: $\hat{y}_t^n(\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha) = (1+\varphi)\hat{a}_t$:

$$\hat{mc}_t = \frac{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}{1-\alpha}\underbrace{(\hat{y}_t - \hat{y}_t^n)}_{\equiv\tilde{y}_t}.$$

- Quando a economia está "aquecida" o custo marginal da produção é alto.

NKPC

- Utilizando a equação anterior temos a ***New-Keynesian Phillips Curve*** (NKPC):

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t$$

onde $\kappa \equiv \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\epsilon} \frac{\varphi+\sigma(1-\alpha)+\alpha}{1-\alpha} > 0$.

  - A inflação depende do hiato do produto: se $\tilde{y}_t > 0$, o custo marginal médio está alto (salário real está alto).
  - Firmas vão aumentar os preços para re-alinhar com os custos gerando inflação.
  - Inflação é correlacionada positivamente com o produto futuro. Se o produto futuro for alto, firmas vão antecipar e aumentar os preços hojes (via Calvo pricing).
  - Inflação passada não é relevante.

Regra de Política Monetária

- Para fechar o modelo precisamos determinar i_t com uma regra de política monetária.
- Duas abordagens:
  (i) Definir uma função de demanda por dinheiro (ad-hoc ou via dinheiro na utilidade):

  $$\hat{m}_t - \hat{p}_t = \hat{c}_t - \eta i_t$$

  e escolher uma regra monetária de crescimento monetário Δm_t que determina i_t.

  (ii) Escolher uma regra para i_t e ignorar o dinheiro (na prática imagine que o Banco Central escolhe m_t para seguir a regra i_t):

  $$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t + v_t$$

- Em geral é mais intuitivo pensar na segunda forma (e podemos manter nossa economia *cashless*).

Regra de Política Monetária

- A regra de política monetária será do estilo "**Regra de Taylor**"

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + v_t$$

  onde $v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v$ é um choque monetário.

- O Banco Central reage a desvios da meta da inflação (neste caso zero) e ao hiato do produto. Os parâmetros ϕ_y e ϕ_π governam a reação.

- Choque monetário exógeno: uma realização positiva de ε_t^v representa uma contração monetária, ou seja, um aumento dos juros dado a inflação e o produto.

- Outras regras monetárias podem ser implementadas. Uma popular é utilizar $\mathbb{E}_t \pi_{t+1}$ em vez de π_t.

Dinâmica do Modelo

- Equações que determinam a o equilíbrio do modelo:

$$
\begin{aligned}
(DIS) \quad & \tilde{y}_t = \mathbb{E}_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n) \\
(NKPC) \quad & \pi_t = \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t \\
(Regra\ de\ Poltica\ Mon.) \quad & i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t^n + v_t
\end{aligned}
$$

  onde $v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v$ e $\kappa \equiv \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta} \frac{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}{1 - \alpha + \alpha\epsilon}$.
- As duas primeiras equações são o bloco independente da política do modelo.
- Note que a trajetória de equilíbrio NÃO pode ser determinada independentemente da política monetária $\Rightarrow$ Política monetária é não-neutra.
- Os parâmetros de resposta do Banco Central irão determinar o modelo.

Dinâmica do Modelo

- Duas equações *forward looking*. Tanto π_t quanto $\tilde{y}_t$ são *jump variables*.
- Utilizando a regra i_t na DIS e substituindo na $NKPC$, podemos escrever o sistema:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbb{E}_t \tilde{y}_{t+1} \\ \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + B(\hat{r}_t^n - v_t)$$

onde

$$A = \Omega \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta(\sigma + \phi_t) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

e $\Omega \equiv \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}$.

Estabilidade do Sistema

- Duas variáveis não-predeterminadas $\Rightarrow$ condição de Blanchard-Kahn requer que ambos os autovalores de A^{-1} estejam fora do círculo unitário.
  - Alternativamente, ambos os autovalores de A estejam dentro do círculo unitário (< 1 em valor absoluto).
- Após álgebra tediosa a condição se reduz para: $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1 - \beta)\phi_y > 0$.
- **Intuição:**
  - Política monetária tem que ser suficientemente reativa para garantir que a inflação "não exploda".
  - Condição suficiente: $\phi_\pi > 1$ (resposta do juros à inflação é mais que um-pra-um).
  - ***Off-Equilibrium Threat***: os agentes sabem que o BC é *hawkish* contra a inflação e por isso tem expectativas inflacionárias baixas.
  - ***Taylor Rule***: Nos primeiros anos de Greenspan $\phi_\pi = 1.5$ e $\phi_y = 0.125$ (veja também Clarida, Galí and Gertler (2000, QJE)).

Choques Tecnológicos e Monetários

Solução

- Os estados são os choques (não há capital). Funções política do modelo linearizado:

$$\tilde{y}_t = \eta_{yv} v_t + \eta_{ya} a_t$$
$$\pi_t = \eta_{\pi v} v_t + \eta_{\pi a} a_t$$

- Que pode ser solucionado utilizando o método dos coeficientes inderterminados:

$$\eta_{yv} = -\frac{\kappa}{(1-\beta\rho_v)(\sigma(1-\rho_v)+\phi_y)+\kappa(\phi_\pi-\rho_v)} \equiv -\kappa\Lambda_v$$
$$\eta_{ya} = -(1-\beta\rho_v)\Lambda_v$$
$$\eta_{yv} = -\frac{\psi^n_{ya}\kappa}{(1-\beta\rho_v)(\sigma(1-\rho_a)+\phi_y)+\kappa(\phi_\pi-\rho_a)} \equiv -\kappa\Lambda_a$$
$$\eta_{ya} = -(1-\beta\rho_a)\Lambda_a$$

Choques Monetários

- Lembre-se $v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v$.
- Contração monetária $\uparrow v_t \Rightarrow \uparrow i_t \Rightarrow \uparrow r_t$.
- Impacto do choque:
  - Inflação $\downarrow$: $\partial \pi_t / \partial v_t = -\kappa \Lambda_v < 0$.
  - Hiato do produto $\downarrow$: $\partial y_t / \partial v_t = \partial \tilde{y}_t / \partial v_t = -(1 - \beta \rho_v) \Lambda_v < 0$.
  - Emprego $\downarrow$: $\partial n_t / \partial v_t = 1/(1-\alpha) \times \partial y_t / \partial v_t < 0$.
  - Quanto mais agressiva for a política monetária, menor é o impacto.
  - Variáveis "naturais" r_t^n e y_t^n não são afetadas.

Choques Tecnológicos

- Lembre-se $a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a$ e $\hat{r}^n = -\sigma\psi_{ya}^n(1-\rho_a)a_t$.
- Choque tecnológico positivo:
  - Variáveis "naturais" respondem: $\downarrow r^n$ e $\uparrow \hat{y}_t^n$.
  - Inflação $\downarrow$: $\partial\pi_t/\partial a_t = -\kappa\Lambda_a < 0$.
  - Hiato do produto $\downarrow$: $\partial y_t/\partial a_t = -(1-\beta\rho_a)\Lambda_a < 0$.
  - Produto responde positivamente, mas menos que o produto natural: $y_t = \tilde{y}_t + y_t^n \Rightarrow$ Rigidez nominal impede ajuste imediato ao novo custo marginal.
  - Resposta do emprego é ambíguo.

Taking Stock

- Derivamos o modelo base Novo-Keynesiano de três equações.
- Novos elementos:
  - Concorrência monopolística.
  - Rigidez nominal.
- Inflação NÃO é um fenômeno monetário, é resultado da dinâmica de ajuste de preço das firmas.
- Equilíbrio não é determinado independetemente da política monetária.