

# Análise Macro I

## Lista de Exercícios 4

### Prazo de Entrega: 09 de Agosto

1. **(Restrição Orçamentária no Tempo Contínuo).** Considere um consumidor em tempo contínuo que pode poupar a uma taxa de juros constante  $r$ , recebe um salário determinístico mas *time-varying*,  $w_t$ , e escolhe uma taxa de consumo  $c_t$ .
  - (a) Escreva a restrição orçamentária em um intervalo tempo  $[t, t + \Delta t]$  dado o estoque de ativos  $a_t$ . Ao contrário do que fizemos na aula, suponha que o consumo e o salário sejam retirados do estoque de ativos no final do intervalo de tempo (ou seja, em  $t + \Delta t$ ) e não no início (em  $t$ ).
  - (b) Desta equação, derive a restrição orçamentária em forma diferencial, isto é, encontre  $\dot{a}_t = da/dt$ .
  - (c) Explique por que essa é a mesma restrição orçamentária derivada na aula.
2. **(Modelo de Ben Porath).** Considere o problema de acumulação de capital humano no ciclo de vida de um indivíduo. O indivíduo dispõe de um unidade de tempo que pode ser usado para trabalhar no mercado ou para acumular capital humano. Suponha que  $h_t$  seja o capital humano do indivíduo na idade  $t$ , e que  $n_t$  é o tempo dedicado para acumular capital humano. A função de produção utilizada para acumular capital humano é dada por  $f(h_t, n_t) = (h_t n_t)^\alpha$ , onde  $\alpha \in (0, 1)$ . Logo, a lei de movimento do capital humano é:

$$\dot{h} = (h_t n_t)^\alpha - \delta h_t,$$

onde  $\delta$  é a taxa de depreciação do capital humano. Seja a renda do indivíduo como  $wh_t(1 - n_t)$ , onde  $w$  é o salário em unidades de capital humano, o indivíduo escolhe a função  $n_t$  para maximizar o valor presente de sua renda permanente (i.e. a renda total entre a idade 0 e  $T$  anos). O problema do agente é dado por:

$$\begin{aligned} \max_{n_t} \quad & \int_0^T e^{-rt} [wh_t(1 - n_t)] dt + e^{-rT} V_T(h_T), \\ \text{s.t.} \quad & \dot{h} = (h_t n_t)^\alpha - \delta h_t, \\ & n_t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad h_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

onde  $r$  é a taxa de desconto. Suponha a condição terminal  $V(h_T) = 0$  (capital humano não tem valor na aposentadoria!).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>O Modelo de Ben-Porath (1967) é utilizado tanto na macroeconomia, para computar o estoque de capital humano entre países (Manuelli e Seshadri (2014), Erosa et al (2010)), quanto em economia do trabalho, como fundamentação teórica para a equação minceriana.

- (a) Defina o Hamiltoniano do problema e escreva as condições necessárias do Princípio Máximo de Pontryagin (defina o coestado associado como  $\mu_t$ ).
- (b) Suponha que  $n_t$  seja interior em todo  $t \in [0, T)$  (i.e.  $0 < n_t < 1$ ). Mostre que o coestado é dado por<sup>2</sup>

$$\mu_t = \frac{w}{r + \delta} m_t, \quad \text{onde } m_t = (1 - e^{-(r+\delta)(T-t)}),$$

o investimento em capital humano é dado por

$$n_t h_t = \left( \frac{\alpha}{r + \delta} m_t \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Interprete brevemente. O coestado é crescente ou decrescente com a idade? Como o capital humano evolui durante o ciclo de vida do indivíduo (observe  $\dot{h}_t$ )? Como isso é relacionado com o benefício e o custo marginal de aumentar o capital humano?

3. **(Problema de poupança de Merton).** Considere uma família com ativos iniciais  $a_0 > 0$  que podem investir a uma taxa de juros  $r$ . Tempo é contínuo e infinito. A família não tem nenhuma outra fonte de renda aparte da poupança, e maximiza:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt$$

onde  $\gamma > 0$  e  $\rho > 0$ . A equação HJB para este problema é:

$$\rho V(a) = \max_{c \geq 0} \left\{ \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (ra - c)V'(a) \right\}.$$

Iremos supor que a função valor herda a forma da função utilidade:  $V(a) = Ba^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ , onde  $B$  é um coeficiente indeterminado.<sup>3</sup>

- (a) Mostre que uma função valor deste tipo é uma solução para a HJB. Encontre o coeficiente  $B$ .
- (b) Encontre a regra de consumo ótima e interprete-a (ou seja, faça a estática comparativa em relação aos parâmetros: como as mudanças de  $\rho$ ,  $\gamma$  e  $r$  alteram a taxa de consumo *ceteris paribus*? Distinga entre diferentes casos de  $\gamma$  se necessário.)

---

<sup>2</sup>Dica: para resolver a pergunta você terá que resolver uma equações diferencial de primeira ordem não homogêneas. A solução geral de uma equação diferencial linear do tipo  $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$  é dada por  $y(t) = [\int_{t_0}^t u(s)f(s)ds + C]/u(t)$ , onde  $u(t)$  é o fator de integração  $u(t) = \exp(\int_{t_0}^t a(s)ds)$ , e  $C$  é uma constante arbitrária. Utilize a condição inicial/terminal para encontrar a constante.

<sup>3</sup>O problema original de Merton considera a escolha de portfólio entre um ativo de risco (ações) e um ativo livre de risco (títulos); o método de coeficientes indeterminados também funciona neste caso desde que a renda seja proporcional à riqueza.

4. **(Crescimento com processo Poisson).** [Não precisa entregar] Considere um modelo de crescimento em tempo contínuo com a função de produção:

$$y_t = A_t k^\alpha,$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$  e  $A_t \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ .  $A_t$  segue um processo Poisson com taxa de transição entre os estados dado por  $\eta_{ij} > 0$ , para  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $i \neq j$ . Acumulação de capital segue:

$$\dot{k}_t = y_t - c_t - \delta k_t,$$

onde  $c_t \geq 0$  é o consumo em  $t$ . O planejador social maximiza a utilidade:

$$\mathbb{E}_0 \int_0^T e^{-\rho t} \ln(c_t) + e^{-\rho T} W(k_T) dt,$$

onde  $\rho > 0$  é a taxa de desconto, e  $W(k_T)$  uma função estritamente crescente e diferenciável.

- (a) Escreva a função valor de um intervalo de tempo arbitrário  $\Delta t$ . Derive a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.
- (b) Encontre a condição de primeira ordem para a escolha de consumo ótimo e interprete-a brevemente
- (c) Para uma função arbitrária  $f(t, k_t, A_t)$  diferenciável em  $k_t$  e  $t$ , derive o *infinitesimal generator*

$$\mathcal{A}f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \frac{f(t + \Delta t, k_{t+\Delta t}, A_{t+\Delta t}) - f(t, k_t, A_t)}{\Delta t} \right].$$

- (d) Escreva a equação de Euler e a HJB para o caso  $T = \infty$ .