Macroeconomia I

Fundações de Modelos Dinâmicos de Equilíbrio Geral

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Nosso objetivo final será resolver o "equilíbrio" do modelo.
- Resolver os preços e as alocações.
- Logo podemos estudar contrafactuais, mecanismos, efeitos de diferentes políticas.

Como resolver o modelo?

(i) Quais as condições necessárias para a existência de uma solução em um problema dinâmico de equilíbrio geral?

(ii) Como definir e encontrar o equilíbrio?

(iii) Como podemos fazer afirmações sobre o bem-estar?

Referências

- Notas do Dirk Krueger Cap. 2 e 3.
- Acemoglu Cap. 2.
- Per Krusell Cap. 4 e 5.

Um Modelo (macro)econômico

Construindo um modelo (macro)econômico

- **Preferências:** função utilidade.
- **Tecnologia**: função de produção.
- **Governo:** instrumento de políticas, função objetivo.
- **"Environment"**: Informação, estrutura de mercado, bens, população, etc.
- **Endowments**: Dotações dos agentes.
- **Conceito de equilíbrio:** como os preços são definidos, ou alternativamente, como ocorrem as interações entre os agentes da economia.

Com essas informações podemos definir os preços e alocações da economia.

Equilíbrio Competitivo

Em geral vamos focar em um equilíbrio competitivo.

Definition (Equilíbrio Competitivo)

Um equilíbrio competitivo são alocações (uma lista/vetor de quantidades) e preços (lista/vetor de preços) dado que:

(i) Dado os preços, as quantidades solucionam o problema dos agentes;

(ii) As quantidades respeitam as restrições de recursos da economia (ou seja, são alocações *factíveis*).

- Um conjunto de equações que descrevem as ações dos agentes e as restrições da economia de maneira que os preços descrevem um equilíbrio (não há excesso de demanda ou oferta).
- A segunda condição, em geral, implica que todos os mercados estão em equilíbrio (i.e. market clearing).

Solucionando o Modelo

Passo a passo:

1. Descrever o *"environment"*.
2. Solucionar o problema individual de cada agente
   - Escrever o problema de maximização e o conjunto de equações que determinam a solução.
   - Consumo das famílias (em função da renda e preço), $c = f(y, p)$; demanda por trabalho das firmas (em função do salário/juros), $n = h(w, r)$, etc.
3. Indicar as condições de equilíbrio (*market clearing conditions*).
   - A demanda agregada de banana tem que ser igual a oferta agregada de banana, a mesma coisa para maçãs, etc.
4. Descrever o equilíbrio competitivo.
   - Escrever todos os objetos endógenos (preços, alocações, etc) e todas as equações (f.o.c dos agentes, market clearing, etc), e eventualmente políticas do governo.
   - Sistema de N equações e N objetos endógenos.

Solucionando o Modelo

Vantagens desta abordagem

- Relações agregadas respeitam as restrições individuais.
- **Transparência:** Mapa claro do que é preferência/tecnologia, e do que é decisão endógena dos agentes.
- A expectativa dos agentes é consistente com o modelo.
- **Micro** $\Rightarrow$ **Macro**.
- Mudanças de políticas alteram o bem-estar de cada agente individualmente.
- Implicações testáveis sobre o comportamento individual.

Exemplo: Economia de dotações com 2 agentes

- **Environment:** 2 agentes ($i = 1, 2$) consumidores de um único bem que vivem infinitos períodos.
- **Preferências:**

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

- **Dotações:** Sequências determinísticas $\{e^i\}_{t=0}^{\infty}$, sendo que:

$$e_t^1 = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } t \text{ é par.} \\ 0, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \qquad e_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é par.} \\ \hat{e}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{2}$$

  e $\hat{e} > 0$.
- **"Tecnologia":** A dotação pode ser transformada em bem de consumo final sem custo: $c_t = \hat{e}$

Digressão: Uma nota sobre o horizonte infinito

Em macro é comum resolvermos problemas dinâmicos de soma infinita. **Intuição**: $T = \infty$?

(i) **Altruísmo**: Derivamos utilidade pelo bem-estar dos nossos descendentes. Um agente que vive um período e desconta a utilidade de seus filhos com β:

$$U(c_\tau) = u(c_\tau) + \beta U(c_{\tau+1}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} u(c_t) \tag{3}$$

(ii) **Simplificação**: Quando T é suficientemente alto, o comportamento do modelo é semelhante a $T = \infty$. Modelos com $T = \infty$ são estacionários e mais fáceis de trabalhar.

Digressão: Uma nota sobre o horizonte infinito

- Ao lidar com horizonte infinito temos que nos preocupar se:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4}$$

  é limitada (*bounded*).
- Como comparar duas sequências de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que produzem U infinito?
- Dependendo do problem isso impõe restrições nos parâmetros e formas funcionais.
- Se $c_t = \bar{c}$ for constante, a condição para que a série seja convergente é $\beta < 1$.
- Mas se a sequência for do tipo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty} = \{c_0(1+\gamma)^t\}_{t=0}^{\infty}$, irá depender de γ, β e $u(.)$.

Estrutura de Mercado

- O que é um equilíbrio descentralizado? Alocações suportadas por preços que equilibram todos os mercados.
- Basicamente resolver a oferta e demanda em $N-1$ mercados (pela lei de Walras o N-nésimo mercado estará em equilíbrio).
- Escolher alocações quase sempre implica em resolver um problema dinâmico.

Duas maneiras de representar um equilíbrio competitivo de uma economia dinâmica

1. **Arrow-Debreu**: Trocas ocorrem no período 0.
2. **Mercados Sequenciais**: Mercados abrem a cada período.

Arrow-Debreu

Estrutura Arrow-Debreu

- Agentes "trocam" no período 0 (ou assinam um contrato de compra e venda com "perfect commitment").
- Nos períodos seguintes eles apenas entregam as quantidades acertadas no período 0.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t. Vamos normalizar $p_0 = 1$.
- Intuitivamente, um bem de consumo em t é uma commodity diferente em $t - 1$ (e por isso tem um preço diferente).
- Em *mercados completos*, T períodos é equivalente a ter T bens diferentes diferentes em um mesmo período.
- Restrição orçamentária do agente i no período 0: $\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i$.

Arrow-Debreu

Definição. Um equilíbrio competitivo Arrow-Debreu é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ e preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \tag{5}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \tag{6}$$

2. O mercado de bens está em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{7}$$

Já descrevemos o ambiente da economia e a definição de equilíbrio competitivo, vamos direto ao problema de otimização dos agentes $i = 1, 2$.

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Suponha $u(c) = \log(c)$ $\beta \in (0,1)$. Para um agente arbitrário $i = 1,2$:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log\left(c_t^i\right) + \lambda_i \left(\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i - \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \right) \tag{8}$$

  onde λ_i é o multiplicador de lagrange da restrição orçamentária para um agente i.
  - A solução é interior: $c_t > 0$ para todo t ($\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$).
  - A restrição orçamentária se mantém com igualdade (u é estritamente crescente).
- c.p.o: $\dfrac{\beta^t}{c_t^i} = \lambda_i p_t$ para $t = 0, 1, .., \infty$.
- Resolvendo por λ_i em dois períodos arbitrários:

$$\frac{1}{c_t^i} = \frac{p_t}{p_{t+1}} \frac{\beta}{c_{t+1}^i} \qquad \text{para todo } t \text{ e } i = 1,2 \tag{9}$$

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Ok, um sistema com infinitas equações, e agora? Note que: $c_t^i = c_0^i \frac{p_0}{p_t} \beta^t$.
- Substituindo na restrição orçamentária e normalizando $p_0 = 1$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{c_0^i}{1-\beta} \tag{10}$$

- Que nos dá a sequência de alocações em função dos preços.
- Para complentar a solução, precisamos encontrar os preços que suportam o equilíbrio: equação de equlíbrio no mercado de bens!

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Equilíbrio no mercado de bens:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{11}$$

- Somando a c.p.o dos dois agentes:

$$c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2 = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} (c_t^1 + c_t^2) \quad \forall t \tag{12}$$

- Que implica em $\hat{e} = \beta \dfrac{p_t}{p_{t+1}} \hat{e} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{p_{t+1}}{p_t}$. Com a normalização de $p_0 = 1$:

$$p_t = \beta^t \quad \forall t \tag{13}$$

- O que significa que $c_{t+1}^i = c_t^i = c_0^i$ para ambos i.

Resolvendo um Problema Dinâmico

- A princípio já temos a resolução do equlíbrio, mas podemos ir adiante e mostrar a sequência de consumo como função dos parâmetros.
- O agente 1 recebe a dotação primeiro, logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^1 = \hat{e} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \frac{\hat{e}}{1-\beta^2} \tag{14}$$

- De maneira semelhante podemos demostrar que para o agente 2:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1-\beta^2} \tag{15}$$

- Finalmente, as alocações de eq. são dadas:

$$c_t^1 = c^1 = \frac{\hat{e}}{1+\beta} > \frac{\hat{e}}{2} \quad \text{e} \quad c_t^2 = c^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1+\beta} < \frac{\hat{e}}{2} \tag{16}$$

- O agente 1 consome mais porque ele recebe o dote primeiro.

Mercados Sequenciais

Estrutura de Mercado Sequencial

- Agentes "trocam" todos os períodos e podem tomar empréstimos de $1-$período (ou emprestar) a uma taxa de juros r_t.
- Defina a_t como a posição líquida do agente, ou seja a poupança do período $t-1$.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t. Vamos normalizar $p_t = 1$ *em todos os períodos*.
- Restrição orçamentária do agente i no período t:

$$c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i. \tag{17}$$

- Alternativamente, podemos utilizar como o preço de um título de um período como $q_t \equiv 1/(1 + r_t)$.

Mercados Sequenciais

Definição. Um equilíbrio competitivo com Mercados Sequenciais é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^{\infty}$ e preços $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de juros $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i > 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \tag{18}$$

$$s.t. \quad c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i \quad \forall t,\ a_0^i = 0 \tag{19}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{a_{T+1}}{\Pi_{t=0}^{T}(1 + r_t)} = 0 \quad \textit{(No-Ponzi-game)} \tag{20}$$

2. O mercado de bens e de ativos (títulos) estão em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{21}$$

$$a_{t+1}^1 + a_{t+1}^2 = 0 \quad \forall t \tag{22}$$

No-Ponzi Game

- Note a condição de *no-Ponzi game*: sem ela o agente sempre poderia rolar a dívida e conseguir uma sequência de consumo maior.
- Substituindo as restrições orçamentárias até T:

$$\frac{c_0 - e_0}{(1+r_0)} + \frac{a_1}{(1+r_0)} \leq a_0$$
$$\frac{c_1 - e_1}{(1+r_1)} + \frac{a_2}{(1+r_1)} \leq a_1 ...$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0} \frac{c_t - e_t}{(1+r_t)} + \underbrace{\frac{a_{T+1}}{\Pi_{t=0}^{T}(1+r_t)}}_{=0 \text{ No-Ponzi-game}} \leq a_0$$

- Alternativamente a esta condição, podemos impor um limite inferior de forma que:

$$a_{t+1} \geq -\overline{A}, \tag{23}$$

desde que este limite inferior seja alto o suficiente para não restringir a escolha de a_{t+1}.

Mercados Sequenciais

- Se os mercados são completos, um equilíbrio Arrow-Debreu sempre tem um equivalente em Mercado Sequenciais.
  - Veja o teorema e a prova nas notas do DK.
- Qual a relação entre $(1 + r_t)$ e os preços p_t e p_{t+1}?
- **Exercício:** Suponha $u() = \log()$ e resolva o problema supondo mercados sequenciais.
  - Note a condição de equilíbrio extra no mercado de ativos!

Modelo de Crescimento Neoclássico

Modelo de Crescimento Neoclássico

- O modelo de crescimento neoclássico é o arcabouço padrão para estudo de crescimento, ciclos reais de negócios, e muitas outras subáreas da macro.
- É semelhante ao modelo de Solow, mas com decisão de consumo e poupança endógena.
  - Satisfaz os Fatos de Kaldor!
- Vamos ver a sua versão mais básica em tempo discreto e se debruçar sob suas .

Modelo de Crescimento Neoclássico

- **Preferências:** $U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$
- **Governo:** Não há.
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$. Não há crescimento populacional.
- **Endowments**: k_0 dado.
- **Conceito de equilíbrio:** Competitivo.

Solução: Sequências $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$.

Preferências

- Agentes principais de um modelo de equilíbrio geral: indivíduos, famílias, consumidores, etc.

- A definição das suas preferências são importantes porque formam a base de avaliação de bem-estar do modelo:
  - Noções de otimalidade e ordenamento de políticas só são possíveis se conhecermos as preferências dos agentes.

- A maior parte dos modelos macroeconômicos utiliza o conceito de agente representativo (*Representative Household*).
  - Vamos primeiro generalizar e supor que existem h agentes na economia.
  - Depois entenderemos quando podemos supor um agente representativo.

Utilidade

- Assumindo um fator de desconto exponencial $\beta \in (0,1)$ (específico ao indivíduo h), a função de utilidade é dada

$$U^h(c_1^h, c_2^h, ..., c_T^h) \equiv \sum_{t=0}^{T} (\beta^h)^t u^h(c_t^h), \tag{24}$$

  onde U é a função utilidade definida sobre uma sequência de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{T}$.

- Uma interpretação simples é que c_t em períodos diferentes são "bens" diferentes.
- Desconto exponencial implica que independentemente do período t, o desconto entre t e $t+1$ é sempre o mesmo.
- T pode ser finito ou infinito (no modelo de crescimento neoclássico $T = \infty$).

Utilidade por período: Pressupostos

Iremos assumir que $u()$:

- é uma função duas vezes derivável, estritamente crescente $(u'(c) > 0)$, estritamente côncava $(u''(c) < 0)$, não se altera ao longo do tempo, e não depende da decisão dos outros indivíduos.
- é *time-separable*.
- definida sobre $c > 0$.
- E que utilidade marginal satisfaz:

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{c \to \infty} u'(c) = 0 \tag{25}$$

  - Isto garante que a escolha de um agente seja sempre $c \in (0, \infty)$.
  - Mais consumo é sempre melhor, mas uma unidade adicional de c aumenta $\Rightarrow$ Utilidade marginal é decrescente.

Digressão: Agente Representativo

- Modelos macros assumem uma *família representativa*. O que isso quer dizer?

- Suponha que em vez de uma família repreentativa, existe um continuum de famílias h representadas pelo intervalo $[0, 1]$.
  - Vantagem de utilizar população unitária: valor aggregado = média.
  - De maneira geral $u()$ e β podem depender da família h
  - As famílias também podem ser heterogêneos em suas dotações: renda, riqueza...

- Estamos interessados em estudar as variáveis agregadas $\Rightarrow$ eventualmente temos que agregar as decisões de todos os indivíduos da economia.

- Isto é, a demanda agregada, C_t, é definida:

$$C_t = \int_0^1 c_t^h dh \tag{26}$$

onde c_t^h é o consumo ótimo do agente h.

Digressão: Agente Representativo

- **Problema:** Agregar agentes heterogênos pode ser complicado.
- Implica em resolver a decisão de cada agente individualmente.
- **Solução:** Assumir a existência de um agente representativo.
  - A demanda agregada da economia pode ser representada por um agente representativo tomando a decisão sujeita à restrição orçamentária agregada.
  - Quando podemos fazer isso?
  - O que nós perdemos?
- **Solução trivial:** Assumir que as preferências e as dotações são iguais para todo o h:
  - $u^h() = u(), \quad \beta^h = \beta$ e dotações iguais $\Rightarrow c^h = c$.
- Podemos colocar restrições na utilidade para assumir a existência do agente representativo.

Teorema de Agregação de Gorman

Theorem (Teorema de Agregação de Gorman)

Considere uma economia com $N < \infty$ bens e um conjunto H de agentes com riqueza w^h. Suponha que as preferências de cada família $h \in H$ são representadas pela utilidade indireta

$$v^h(p, w^h) = a^h(p) + b(p)w^h, \tag{27}$$

então as preferências podem ser agregadas e representadas por um agente com utilidade indireta

$$v(p, w) = a(p) + b(p)w, \tag{28}$$

onde $a(p) = \int_{h \in H} a^h(p)dh$ e $w = \int_{h \in H} w^h dh$.

- **Prova:** Utilize a identidade de Roy para encontrar a demanda individual e tome a integral sobre h.

Teorema de Agregação de Gorman

- Se as preferências levam a utilidades indiretas lineares na riqueza com o mesmo $b(p)$ para todos os agentes, podemos representar a demanda individual para um bem arbitrário:

$$c^h(p, w^h) = \alpha^h(p) + \kappa(p)w^h \tag{29}$$

- Relação **linear** entre a demanda e a riqueza!
- **Intuição**:
  - Se todos os agentes tem a mesma propensão marginal a consumir, a demanda agregada apenas depende da riqueza agregada!
  - Ao realocarmos riqueza de um agente para o outro, a demanda agregada não se altera.

Um Exemplo Simples

- Suponha 2 agentes com utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.
  - Capitalista recebe lucro $y^c = \pi$.
  - Trabalhador recebe salário $y^w = w$.
  - Renda agregada $Y = w + \pi$.

- Demandas individuais: $x_1^i = \alpha y^i / p_1$ e $x_2^i = (1-\alpha) y^i / p_2$ para $i = c, w$.

- Utilidade indireta:

$$v^i(p, y^i) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = \left(\alpha \frac{y^i}{p_1}\right)^{\alpha} \left((1-\alpha) \frac{y^i}{p_2}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha} y^i$$

- Utilidade indireta do agente representativo com renda Y:

$$v(p, Y) = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha} Y$$

Função Utilidade

Exemplos

(i) Utilidades quasi-homotéticas:

$$u(x_1^h, ..., x_N^h) = \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - \xi_j^h)^{(\sigma-1)/\sigma}\right]^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{30}$$

defina $\tilde{x}_j^h = x_j - \xi$. Desde que a solução seja interior, a utilidade admite um agente representativo com $\xi_j \equiv \int_h \xi_j^h dh$.

(ii) Utilidades quasi-lineares

$$u(c, l) = u(c) + \phi l \tag{31}$$

Agente Representativo

- Existem versões do Teorema de Agregação de Gorman para economias dinâmicas.
- Utilizaremos utilidades que admitem agentes representativos!
- A partir de agora iremos representar as famílias com uma só família representativa: $U(c_t^h) = U(c_t)$.
- **Exercício**: Encontre o agente representativo da economia com dois agentes seção anterior.

Tecnologia e Produção

- Agente responsável pela produção $\Rightarrow$ Firmas.
- Na maior parte dos modelos (mas não todos!) vamos assumir:
  - que existe uma firma representativa com uma função de produção representativa (ou agregada) que produz um único bem final;
  - que o lucro (quando houver) é redistribuído para todas as famílias igualmente;
  - que utiliza como insumos (ou fatores) capital, K, e/ou trabalho, N. Esses insumos são contratados no "spot market" (problema da firma é estático).
- **Intuição**: A função de produção agregada representa o valor adicionado total (PIB) da economia e não um bem específico.
  - Capital e trabalho são insumos utilizados por todos os setores em maior ou menor proporção.
  - Bens intermediários não são incluídos e o custo de materais básicos não é relevante quantitativamente.

Tecnologia e Produção

- Com um único bem final y, se
  - os mercados forem competivos;
  - não existirem externalidades na produção;

  a economia admite uma firma representativa (incluindo se as firmas da economia tiverem funções de produção heterogêneas).
- **Teorema e prova**: Acemoglu p. 158.
- Mesmo com múltiplos bens/setores, se a função de produção for a mesma e os fatores completamente móveis entre setores é possível demonstrar que existe uma função agregada.

Função de Produção

Função de Produção Agregada

$$Y_t = F(K_t, N_t, A_t) \tag{32}$$

Onde: K: Capital; N: Trabalho; A: *Shifter* tecnológico, viésado ou não para um determinado fator.

(Típicas) Suposições Neoclássicas:

(i) $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ é duas vezes diferenciável, é estritamente crescente e côncava em K e L.
  - $F_K > 0$; $F_N > 0$;
  - $F_{KK} < 0$; $F_{NN} < 0$ (rendimentos marginais decrescentes)

(ii) F exibe retornos constantes de escala em K e N
  - F é homogênea de grau 1: $zF(K, N, A) = F(zK, zN, A)$.

(iii) Condições Inada.

Função de Produção

Retornos Constante de Escala

Theorem (Teorema de Euler)

Suponha que $f : \mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $x \in \mathbb{R}$ *e* $y \in \mathbb{R}$, *com derivadas parciais* f_x *e* f_y, *e é homogênea de grau* m. *Logo:*

$$mf(x, y, z) = f_x(x, y, z)x + f_y(x, y, z)y \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,, y \in \mathbb{R}, \text{ e } z \in \mathbb{R}^K. \tag{33}$$

Além disso, f_x *e* f_y *são homogênea de grau* $m-1$ *em* x *e* y.

- Note que retornos constante de escala somado a equilíbrio competitivo (preço igual ao produto marginal) implica que as firmas tem lucro zero.
- Em particular, isso implica *Produção = Renda Total dos Fatores*:

$$Y_t = w_t N_t + r_t K_t \tag{34}$$

Função de Produção

Condições de Inada

F satisfaz:

$$\lim_{K\to 0} F_K(K,N,A) = \infty \qquad \lim_{K\to\infty} F_K(K,N,A) = 0$$

$$\lim_{N\to 0} F_L(K,N,A) = \infty \qquad \lim_{N\to\infty} F_L(K,N,A) = 0$$

Para todo $N > 0$, $K > 0$.

- Suponha também: $F(0,N,A) = 0$.

Resolvendo o Modelo

- Já temos as suposições sobre as preferências e a tecnologia.
- **Objetivo final:** Encontrar as alocações de equilíbrio.
- Existe uma maneira mais simples para encontrar as alocações? $\Rightarrow$ Resolvendo o problema de um **planejador central benevolente**!
- **Social Planner's Problem**:
  - Maximiza a utilidade dado as restrições tecnológicas e de recursos da economia (não está sujeito a restrição orçamentária dos consumidores - mas sim aos recursos TOTAIS da economia).
- Logo mostraremos que a solução do planejador social é igual ao equilíbrio competitivo dado certas suposições.

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
  - $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; Condições de Inada; $\beta \in (0,1)$.
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$
  - F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l, CRS, condições de Inada).
  - Depreciação do capital $\delta \in [0,1]$
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
  - População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments**: k_0 dado.

Problema do Social Planner

Passo 2: Resolver o problema do planejador social benevolente:

- Vamos assumir um consumidor representativo $\Rightarrow$ planejador escolhe a alocação $\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que maximiza a utilidade deste consumidor.
- Trade-off de consumo presente vs consumo futuro.

$$\max_{\{k_{t+1} \geq 0, \quad c_t \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{35}$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq y_t = F(k_t, n_t) \quad \forall t; \tag{36}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \quad \forall t; \tag{37}$$

$$k_0 > 0 \text{ dado}; \tag{38}$$

- Para simplificar, substituimos a lei de movimento do capital em i_t e $n_t = 1$.
- E escrever: $f(k_t) \equiv F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$.

Resolvendo um Problema Dinâmico

- Ok, como resolver um problema dinâmico com soma infinita?
- Resolveremos primeiro com um T finito utilizando métodos de otimização com restrição (Kuhn-Tucker).
- As condições de Kuhn-Tucker são suficientes se a função objetiva for côncava e as restrições convexas.
- As suposições que fizemos sobre u e f garantem que essas condições são garantidas:
  - $u(c_t)$ é crescente logo a restrição de recursos se mantém com igualdade.
  - $u(c_t)$ é côncava, logo a soma de $u(c_t)$ também é côncava.
  - A restrição é convexa: $0 \leq k_t \leq f(k_t)$.
  - Condições de Inada garantem que a solução seja interior $c > 0$ e $k > 0$.
  - Exceto para o último T onde $k_{T+1} = 0$.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left[\beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(f(k_t) - c_t - k_{t+1}\right) + \mu_t k_{t+1}\right] \tag{39}$$

- Condições de Kuhn-Tucker:
  - $k_{t+1} \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ e $\mu_t \geq 0$.
  - Folga complementar (complementary slackness): $k_{t+1}\mu_t = 0$

Condições de primeira ordem...

- Note que $k_{t+1} > 0$ e $\mu_t = 0$, para todo $t = 0, .., T-1$:

$$u'(c_t)\beta^t = \lambda_t \quad \text{e} \quad \lambda_t = f'(k_{t+1})\lambda_{t+1} \quad t = 0, ..., T-1 \tag{40}$$

- O que implica na *Euler Equation*:

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad t = 0, 1, ..., T-1 \tag{41}$$

- Provavelmente a equação mais importante na macro moderna.

Euler Equation

- A Equação de Euler conecta a decisão de consumo de hoje com a de amanhã. Explicíta o trade-off entre consumo e poupança (ou no caso do planejador alocar uma unidade em c_t ou em i_t).

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \tag{42}$$

- Custo marginal de deixar de consumir uma unidade do bem final em t é igual ao benefício marginal descontado de consumir $f'(k_{t+1})$ unidades do bem final em $t+1$.

- Concavidade (estrita) na função utilidade implica que as famílias gostariam de suavizar o consumo ao longo da vida.

- Note que poupança extra altera o retorno futuro via $f'(k_{t+1})$.

Solução do Problema: Tempo Finito

- Note que a equação de Euler só é válida até o período $T-1$. As c.p.o no período T:

$$u'(c_T)\beta^T = \lambda_T \quad \text{e} \quad \lambda_T = \mu_T \quad t = 0, ..., T-1 \tag{43}$$

- O que implica que $\mu_T = \lambda_T > 0$ e $k_{T+1} = 0$!
- Resultado intuitivo, já que não faz sentido levar capital para $T+1$...

Solução do Problema: Tempo Finito

- As sequências que maximizam a utilidade precisam satisfazer o sistema de equações de diferenças (para $t = 0, ..., T-1$):

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad \text{(Equação de Euler)} \tag{44}$$

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \quad \text{(Restrição de Recursos)} \tag{45}$$

- Alternativamente podemos substituir c_t e escrever o problema como uma equação de diferença de segunda ordem.
- Duas equações de diferenças (de primeira ordem) necessitam de duas condições iniciais/terminais.
- Essas condições são: k_0 dado e $k_{T+1} = 0$.

Tempo Infinito

- Em tempo finito $k_{T+1} = 0$. Mas em tempo infinito qual é a condição terminal que garante que o sistema de equações tenha uma solução única? *Condição de Transversalidade* (TVC).
- Note que em tempo finito: $\lambda_T k_{T+1} = 0$.
- A **Condição de Transversalidade**:

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_T k_{T+1} = \lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0 \tag{46}$$

- Intuitivamente diz que o valor sombra (*shadow value*) do capital converge para zero (não necessariamente o estoque de capital).
- Sem a TVC é possível encontrar infinitas sequências de c_t e k_{t+1} que satisfaçam a EE.
- **Prova** para a suficiência da TVC em PK ou SL.

Tempo Infinito

- Com a TVC e o k_0 dado e as duas equações de diferenças (EE e restrições de recursos) podemos encontrar as alocações ótimas que solucionam o problema do planejador central.
- Na grande parte das aplicações não é possível resolver o problema analíticamente.
  - Aproximações lineares.
  - Resolver o problema no computador (utilizando programação dinâmica).
- **Exemplo**: Suponha $u(c) = \log(c)$ e $f(k) = k^\alpha$ (i.e., $F()$ é Cobb-Douglas e $\delta = 1$) e resolva para política ótima (i.e. k_{t+1} em função de k_t e os parâmetros).

Bem-Estar e Equilíbrio

- Ok, encontramos a solução do **planejado social benevolente**.
- Relação próxima entre resolver o problema do planejador central e o equilíbrio competitivo descentralizado.
- Sob certas condições os dois problemas resultam nas mesmas alocações $\Rightarrow$ Teoremas do Bem-Estar.
  - $\mathbf{1^o}$ **Teorema do Bem-Estar:** Eq. competitivo $\Rightarrow$ Alocações Pareto ótimo.
  - $\mathbf{2^o}$ **Teorema do Bem-Estar:** Alocações Pareto ótimo $\Rightarrow$ Eq. competitivo.
- Neste caso também podemos dizer que a economia é Pareto eficiente.

Ótimalidade de Pareto

- Suponha uma economia arbitrária:
  1. N bens indexados por j;
  2. H famílias indexados por h que consomem x_j^h com utilidade U^h e dotações e^h;
  3. F firmas indexados por f que produzem y_j^f.
- A fração da propriedade da firma é dado por θ_h^f, onde $\sum_h^H \theta_h^f = 1$.
- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f\in F,\ h\in H,\ j\in N}$ é "feasible" se para todo $j \in N$:

$$\sum_h^H x_j^h \leq \sum_h^H e_j^h + \sum_f^F y_j^f \tag{47}$$

- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f\in F,\ h\in H,\ j\in N}$ é Pareto ótimo se:
  1. é "feasible";
  2. não existe nenhuma outra alocação "feasible" $\{\hat{x}_j^h, \hat{y}^f\}$ que

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j\in N}) \geq U^h(\{x_j^h\}_{j\in N}) \quad \text{para todo } h \tag{48}$$

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j\in N}) > U^h(\{x_j^h\}_{j\in N}) \quad \text{para pelo menos um } \ h. \tag{49}$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar

Theorem (First Welfare Theorem)

Suponha que $\{x_j^h, y_j^f, p_j\}$ seja um equilíbrio competitivo e que todas U^h sejam localmente não saciada (locally nonsatiated). Então $\{x_j^h, y_j^f\}$ é Pareto ótimo.

- **Prova:** Por contradição. Suponha $\{x_j^h, y_j^f\}$ não seja Pareto ótimo (ou seja, existe uma outra alocação feasible que dê mais utilidade para pelo menos um h) e use a definição de eq. competitivo.
- Note que estamos assumindo a existência de um eq. competitivo (que pode não existir dependendo da forma de U^h, e dos conjuntos de x e y).
- Ótimo de Pareto não diz nada sobre equidade (um indivíduo consumindo tudo é eficiente).
- Quando o Primeiro teorema do Bem-Estar não se aplica?
  - Externalidades; Mercados incompletos; Competição Imperfeita; Informação Assimétrica; Tributação Distorciva;

Segundo Teorema do Bem-Estar

Theorem (Second Welfare Theorem)

Considere a alocação Pareto ótimo $\{x_j^h, y_j^f\}$. *Dada certas condições (conjunto de produção e consumo é convexo, utilidade é côncava, contínua e localmente não saciada), existe um equilíbrio competitivo com preços* $\{p_j\}$ *e dotações* $\{e^h, \theta_h^f\}$ *que suportam a alocação* $\{x_j^h, y_j^f\}$.

- **Prova:** A prova é mais complicada já que implicitamente envolve demonstrar a existência de um equilíbrio competitivo. Basicamente envolve mostrar a existência de preços (em um hiperplano) que suportam as alocações.
- Intuitivamente, o 2^{do} Teorema do Bem-Estar nos diz que uma alocação é parte de um eq. competitivo.
- Dado uma redistribuição apropriada das dotações iniciais, podemos selecionar a alocação Pareto ótima que é um eq. competitivo.

Social Planner

- Os Teoremas do Bem-Estar dizem que podemos ir de uma alocação Pareto ótimo para um equilíbrio descentralizado e vice-versa.
- Sob certas condições basta computar as alocações Pareto ótimo resolvendo o problema do *Social Planner* (que em geral é mais simples).
- Com mais de uma família o planejador tem que associar um peso a utilidade de cada família $\Rightarrow$ Existência de um conjunto de alocações Pareto-ótimo.
- **Método de Negishi**: Seleciona o peso apropriado de acordo com as dotações iniciais de cada família para encontrar as alocações do eq. competitivo!
  - **Exercicio**: resolver dois agentes utilizando o método de Negishi.

Crescimento Neoclássico: Equilíbrio Descentralizado

- Já resolvemos para as alocações do crescimento ótimo $\Rightarrow$ Social Planner.
- Sabemos que pelos Teoremas do Bem-Estar as alocações escolhidas pelo planejador são parte de um equilíbrio competitivo.
- Ok, mas e os preços? E se os Teoremas do Bem-Estar não se aplicarem?

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
  - $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; $\beta \in (0, 1)$.
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$
  - F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l, CRS, condições de Inada).
  - Depreciação do capital $\delta \in [0, 1]$
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
  - População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments**: k_0 dado.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 2: Resolver o problema dos agentes (família e firmas).

- O problema da firma é estático - firmas contratam capital e trabalho no spot market. Todo t:

$$\max_{k_t, n_t} \pi_t = F(k_t, n_t) - r_t k_t - w_t n_t \tag{50}$$

- Dado as suposições sobre $F(k_t, n_t)$ as c.p.o são necessárias e suficientes:

$$r_t = F_k(k_t, n_t) = MgPK \quad \forall t \tag{51}$$

$$w_t = F_n(k_t, n_t) = MgPN \quad \forall t \tag{52}$$

- Dependendo da função de produção é possível derivar equações de demanda por trabalho e capital em função dos preços: $k^d = h^k(r, w)$, $n^d = h^k(r, w)$.
- Em muito dos modelos que vamos estudar estaremos interessado na razão k_t/n_t (em função dos preços).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

- Famílias são donas do capital e ofertam trabalho para as firmas.
- Capital é predeterminado: k_t é dado, famílias aumentam capital investindo (e deixando de consumir).

$$\max_{\{k_{t+1},\, c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{53}$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq r_t k_t + w_t n_t; \tag{54}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta) k_t; \tag{55}$$

$$k_0 > 0 \text{ dado}; \tag{56}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k_{T+1}}{\Pi_{t=0}^{T}(1 + r_t - \delta)} = 0. \tag{57}$$

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(w_t + (1 + r_t - \delta)k_t - k_{t+1} - c_t\right) \tag{58}$$

- Dado as suposições que fizemos em F e u sabemos que a solução será interior e a restrição orçamentária se sustenta com igualdade.
- C.p.o: $u'(c_t) = \lambda_t$ e $\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1} - \delta) = \lambda_t$ para todo t.
- Solução do problema é a sequência que satisfaz a Equação de Euler (condições necessárias):

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1} - \delta)u'(c_{t+1}) \quad \forall t \tag{59}$$

juntamente com a condição de *no-Ponzi-game*.

Problema das famílias: TVC vs no-Ponzi game

- Note que a condição *no-Ponzi game* é semelhante a TVC. No Modelo de Crescimento Neoclássico:

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_T k_{T+1} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_t = \frac{\lambda_{t-1}}{(1+r_t-\delta)} \tag{60}$$

- Iterando: $\lambda_T = \frac{\lambda_0}{\Pi_{t=0}^{T}(1+r_t-\delta)}$ e substituindo chegamos a no-Ponzi.
- Apesar de terem a mesma utilidade, conceitualmente:
  - A *no-Ponzi-game* restringe a escolha da família.
  - A TVC determina a escolha ótima dado um conjunto de possíveis sequências.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 3: Condições de Equilíbrio

- Market clearing para capital e trabalho:

$$n_t^d = 1 \quad \text{e} \quad k_t^d = k_t^* \quad \forall t \tag{61}$$

- Market clearing no mercado de bens (resource constraint):

$$y_t = c_t + i_t \quad \forall t \tag{62}$$

- que é trivialmente satisfeita pela restrição orçamentária das famílias: $y_t = F(k_t, n_t) = r_t k_t + w_t n_t$ e $i_t = k_{t+1} + (1 - \delta)k_t$.
- Pela Lei de Walras com dois mercados em equilíbrio, o terceiro também estará. Note que resolvemos para dois preços todo t: r_t e w_t (o preço do bem final foi normalizado $p_t = 1$).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 4: Descrever o Equilíbrio Competitivo

Definição. Um equilíbrio competitivo é uma sequência de alocações $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ do consumidor e da firma $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$, e preços $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado k_0 e a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da família.
2. Dada a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da firma.
3. Market clear para todo t:

$$\begin{aligned} n_t^d &= 1 \\ k_t^d &= k_t \\ F(k_t, n_t) &= c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

Modelo de Crescimento Neoclássico

- Note que a solução com mercados sequenciais ou Arrow-Debreu é exatamente a mesma.
- Além do mais, neste caso, os Teoremas do Bem Estar garantem que a solução do Planificador Central é a mesma do equilíbrio competitivo.
- Podemos ir mais adiante e caracterizar a solução do problema no **Estado Estacionário**.
- **Estado Estacionário (*Steady State*):** Uma economia encontra-se no estado estacionário quando as suas variáveis assumirem um valor constante no tempo.
- Dado nossas suposições - em especial concavidade de F e retornos constante de escala - a economia convergirá para um estado estacionário: $k_{ss} = k_{t+1} = k_t$ e $c_{ss} = c_{t+1} = c_t$.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Estado Estacionário

- Para que a economia chegue ao estado estacionário basta iniciar com $k_0 > 0$.
- Note que utilizado a EE: $u'(c_{ss}) = (1 + r_{ss} - \delta)u'(c_{ss})$ juntamente com $r_{ss} = F_k(k_{ss}, 1)$ podemos encontrar facilmente k_{ss}.
  - Se $k_0 < k_{ss}$, a economia acumulará capital até chegar no estado estacionário.
  - Se $k_0 > k_{ss}$, a economia desacumulará capital até chegar no estado estacionário.
- **Exemplo:** Encontre k_{ss} dado $F(k, n) = k^{\alpha} n^{\alpha}$
- A acumulação de capital tem que respeitar a sequência ótima de capital via EE e a lei de movimento do capital.
- Vamos estudar com mais detalhes as dinâmicas de acumulação posteriormente.

Estado Estacionário

Estado Estacionário com $F(k,n) = k^{\alpha} n^{\alpha}$

$$u(c_{ss}) = \beta(1 + r_{ss} - \delta)u'(c_{ss}) \tag{63}$$

$$c_{ss} + \delta k_{ss} = r_{ss} k_{ss} + w_{ss} k_{ss} \tag{64}$$

$$r_{ss} = \alpha \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{\alpha - 1} \tag{65}$$

$$w_{ss} = (1 - \alpha) \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{\alpha} \tag{66}$$

- Dado que $n_s s = 1$, é um sistema de 4 equações e 4 variáveis endógenas $\{k_{ss}, c_{ss}, r_{ss}, w_{ss}\}$.
- Não há dinâmica, logo é possível encontrar a solução analítica as variáveis endógenas.
- Pode-se encontrar também: $y_s s = k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{\alpha}$ e $i_t = \delta k_{ss}$.

Taking Stock

- Como resolver um modelo de **Equilíbrio Geral Competitivo**?
  1. Descrever o ambiente da economia;
  2. Resolver o problema dos agentes;
  3. Indicar as condições de equilíbrio;
  4. Descrever o equilíbrio competitivo.
- Como utilizar os **Teoremas do Bem-Estar** para resolver o modelo?
  - Dado certas condições a solução do **Planejador Central** é igual ao eq. descentralizado.
  - Neste caso sabems que o eq. é Pareto eficiente
- Vimos também que a EE + TVC são condições suficientes para problemas de sequência infinita.
- E que dado certas suposições a economia admite uma família/firma representativa.