Macroeconomia I

Fundações de Modelos Dinâmicos de Equilíbrio Geral

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Teoria Macro $\Rightarrow$ Modelo $\Rightarrow$ Objetivo final será encontrar a "solução" do modelo.
- $\Rightarrow$ Resolver os preços e as alocações.
- Logo estudamos contrafactuais, mecanismos, efeitos de diferentes políticas.

Como resolver o modelo?

(i) Quais as condições necessárias para a existência de uma solução em um problema dinâmico de equilíbrio geral?

(ii) Como definir e encontrar o equilíbrio?

(iii) Como podemos fazer afirmações sobre o bem-estar?

Referências

- Notas do Dirk Krueger Cap. 2 e 3.
- Acemoglu Cap. 2.
- Per Krusell Cap. 4 e 5.

Um Modelo (macro)econômico

Construindo um modelo (macro)econômico

- **Preferências:** função utilidade.
- **Tecnologia**: função de produção.
- **Governo:** instrumento de políticas, função objetivo.
- **“Environment”**: Informação, estrutura de mercado, bens, população, etc.
- **Endowments**: Dotações dos agentes.
- **Conceito de equilíbrio:** como os preços são definidos, ou alternativamente, como ocorrem as interações entre os agentes da economia.

Com essas informações podemos definir os preços e alocações da economia.

Equilíbrio Competitivo

Em geral vamos focar em um equilíbrio competitivo.

Definition (Equilíbrio Competitivo)

Um equilíbrio competitivo são alocações (uma lista/vetor de quantidades) e preços (lista/vetor de preços) dado que:

(i) Dado os preços, as quantidades solucionam o problema dos agentes;

(ii) As quantidades respeitam as restrições de recursos da economia (ou seja, são alocações *factíveis*).

- Um conjunto de equações que descrevem as ações dos agentes e as restrições da economia de maneira que os preços descrevem um equilíbrio (não há excesso de demanda ou oferta).
- A segunda condição, em geral, implica que todos os mercados estão em equilíbrio (i.e. market clearing).

Solucionando o Modelo

Passo a passo:

1. Descrever o "*environment*".
2. Solucionar o problema individual de cada agente
   - Escrever o problema de maximização e o conjunto de equações que determinam a solução.
   - Consumo das famílias (em função da renda e preço), $c = f(y, p)$; demanda por trabalho das firmas (em função do salário/juros), $n = h(w, r)$, etc.
3. Indicar as condições de equilíbrio (*market clearing conditions*).
   - A demanda agregada de banana tem que ser igual a oferta agregada de banana, a mesma coisa para maçãs, etc.
4. Descrever o equilíbrio competitivo.
   - Escrever todos os objetos endógenos (preços, alocações, etc) e todas as equações (f.o.c dos agentes, market clearing, etc), e eventualmente políticas do governo.
   - Sistema de N equações e N objetos endógenos.

Solucionando o Modelo

Vantagens desta abordagem

- Relações agregadas respeitam as restrições individuais.
- **Transparência:** Mapa claro do que é preferência/tecnologia, e do que é decisão endógena dos agentes.
- A expectativa dos agentes é consistente com o modelo.
- **Micro** $\Rightarrow$ **Macro**.
- Mudanças de políticas alteram o bem-estar de cada agente individualmente.
- Implicações testáveis sobre o comportamento individual.

Modelo (macro)econômico

Modelos macro são...

- **D** ynamic
- **S** tochastic
- **G** eneral
- **E** equilibrium

Exemplo: Economia de dotações com 2 agentes

- **Environment:** 2 agentes ($i = 1, 2$) consumidores de um único bem que vivem infinitos períodos.
- **Preferências:**

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

- **Dotações:** Sequências determinísticas $\{e^i\}_{t=0}^{\infty}$, sendo que:

$$e_t^1 = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } t \text{ é par.} \\ 0, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \qquad e_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é par.} \\ \hat{e}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{2}$$

  e $\hat{e} > 0$.
- **"Tecnologia":** A dotação pode ser transformada em bem de consumo final sem custo: $c_t = \hat{e}$

Digressão: Uma nota sobre o horizonte infinito

Em macro é comum resolvermos problemas dinâmicos de soma infinita. **Intuição**: $T = \infty$?

(i) **Altruísmo**: Derivamos utilidade pelo bem-estar dos nossos descendentes. Um agente que vive um período e desconta a utilidade de seus filhos com β:

$$U(c_\tau) = u(c_\tau) + \beta U(c_{\tau+1}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} u(c_t) \tag{3}$$

(ii) **Simplificação**: Quando T é suficientemente alto, o comportamento do modelo é semelhante a $T = \infty$. Modelos com $T = \infty$ são estacionários e mais fáceis de trabalhar.

Digressão: Uma nota sobre o horizonte infinito

- Ao lidar com horizonte infinito temos que nos preocupar se:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4}$$

  é limitada (*bounded*).
- Como comparar duas sequências de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que produzem U infinito?
- Dependendo do problem isso impõe restrições nos parâmetros e formas funcionais.
- Se $c_t = \bar{c}$ for constante, a condição para que a série seja convergente é $\beta < 1$.
- Mas se a sequência for do tipo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty} = \{c_0(1+\gamma)^t\}_{t=0}^{\infty}$, irá depender de γ, β e $u(.)$.

Estrutura de Mercado

- O que é um equilíbrio descentralizado? Alocações suportadas por preços que equilibram todos os mercados.
- Basicamente resolver a oferta e demanda em $N-1$ mercados (pela lei de Walras o N-nésimo mercado estará em equilíbrio).
- Escolher alocações quase sempre implica em resolver um problema dinâmico.

Duas maneiras de representar um equilíbrio competitivo de uma economia dinâmica

1. **Arrow-Debreu**: Trocas ocorrem no período 0.
2. **Mercados Sequenciais**: Mercados abrem a cada período.

Arrow-Debreu

Estrutura Arrow-Debreu

- Agentes “trocam” no período 0 (ou assinam um contrato de compra e venda com “perfect commitment”).
- Nos períodos seguintes eles apenas entregam as quantidades acertadas no período 0.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t. Vamos normalizar $p_0 = 1$.
- Intuitivamente, um bem de consumo em t é uma commodity diferente em $t-1$ (e por isso tem um preço diferente).
- Em *mercados completos*, T períodos é equivalente a ter T bens diferentes diferentes em um mesmo período.
- Restrição orçamentária do agente i no período 0: $\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i$.

Arrow-Debreu

Definição. Um equilíbrio competitivo Arrow-Debreu é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ e preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \tag{5}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \tag{6}$$

2. O mercado de bens está em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{7}$$

Já descrevemos o ambiente da economia e a definição de equilíbrio competitivo, vamos direto ao problema de otimização dos agentes $i = 1, 2$.

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Suponha $u(c) = \log(c)$ $\beta \in (0,1)$. Para um agente arbitrário $i = 1, 2$:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log\left(c_t^i\right) + \lambda_i \left(\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i - \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \right) \tag{8}$$

  onde λ_i é o multiplicador de lagrange da restrição orçamentária para um agente i.

  - A solução é interior: $c_t > 0$ para todo t ($\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$).
  - A restrição orçamentária se mantém com igualdade (u é estritamente crescente).

- c.p.o: $\dfrac{\beta^t}{c_t^i} = \lambda_i p_t$ para $t = 0, 1, .., \infty$.
- Resolvendo por λ_i em dois períodos arbitrários:

$$\frac{1}{c_t^i} = \frac{p_t}{p_{t+1}} \frac{\beta}{c_{t+1}^i} \quad \text{para todo } t \text{ e } i = 1, 2 \tag{9}$$

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Ok, um sistema com infinitas equações, e agora? Note que: $c_t^i = c_0^i \frac{p_0}{p_t} \beta^t$.
- Substituindo na restrição orçamentária e normalizando $p_0 = 1$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{c_0^i}{1-\beta} \tag{10}$$

- Que nos dá a sequência de alocações em função dos preços.
- Para complentar a solução, precisamos encontrar os preços que suportam o equilíbrio: equação de equlíbrio no mercado de bens!

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Equilíbrio no mercado de bens:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{11}$$

- Somando a c.p.o dos dois agentes:

$$c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2 = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} (c_t^1 + c_t^2) \quad \forall t \tag{12}$$

- Que implica em $\hat{e} = \beta \dfrac{p_t}{p_{t+1}} \hat{e} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{p_{t+1}}{p_t}$. Com a normalização de $p_0 = 1$:

$$p_t = \beta^t \quad \forall t \tag{13}$$

- O que significa que $c_{t+1}^i = c_t^i = c_0^i$ para ambos i.

Resolvendo um Problema Dinâmico

- A princípio já temos a resolução do equlíbrio, mas podemos ir adiante e mostrar a sequência de consumo como função dos parâmetros.
- O agente 1 recebe a dotação primeiro, logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^1 = \hat{e} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \frac{\hat{e}}{1-\beta^2} \tag{14}$$

- De maneira semelhante podemos demostrar que para o agente 2:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1-\beta^2} \tag{15}$$

- Finalmente, as alocações de eq. são dadas:

$$c_t^1 = c^1 = \frac{\hat{e}}{1+\beta} > \frac{\hat{e}}{2} \quad \text{e} \quad c_t^2 = c^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1+\beta} < \frac{\hat{e}}{2} \tag{16}$$

- O agente 1 consome mais porque ele recebe o dote primeiro.

Mercados Sequenciais

Estrutura de Mercado Sequencial

- Agentes "trocam" todos os períodos e podem tomar empréstimos de $1-$período (ou emprestar) a uma taxa de juros r_t.
- Defina a_t como a posição líquida do agente, ou seja a poupança do período $t-1$.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t. Vamos normalizar $p_t = 1$ *em todos os períodos*.
- Restrição orçamentária do agente i no período t:

$$c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i. \tag{17}$$

- Alternativamente, podemos utilizar como o preço de um título de um período como $q_t \equiv 1/(1 + r_t)$.

Mercados Sequenciais

Definição. Um equilíbrio competitivo com Mercados Sequenciais é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^{\infty}$ e preços $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de juros $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i > 0, a_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \tag{18}$$

$$s.t. \quad c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i \quad \forall t,\ a_0^i = 0 \tag{19}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}}{\Pi_{t=0}^{T}(1 + r_t)} \geq 0 \quad \textit{(No-Ponzi-game)} \tag{20}$$

2. O mercado de bens e de ativos (títulos) estão em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \tag{21}$$

$$a_{t+1}^1 + a_{t+1}^2 = 0 \quad \forall t \tag{22}$$

Mercados Sequenciais

- Note que há uma condição de equilíbrio extra no mercado de ativos e que existem infinitas restrições

- Se os mercados são **completos** e restrição de ***no-Ponzi game*** for satisfeita, um equilíbrio Arrow-Debreu sempre tem um equivalente em Mercado Sequenciais.
  - Veja o teorema e a prova nas notas do DK.

- O que significa a restrição de ***no-Ponzi game***?
  - Para dar intuição, vamos resolver o problema sequencial em **tempo finito** e substituir a NPG por uma restrição $a_{T+1} \geq 0$.

Mercados Sequenciais em Tempo Finito

Kuhn-Tucker do agente i:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left[\beta^t u(c_t^i) + \lambda_t \left(e_t^i + a_t^i(1+r_t) - c_t^i - a_{t+1}^i\right)\right] + \mu_T a_{T+1}^i \tag{23}$$

- Condições de Kuhn-Tucker:
  - $a_{T+1} \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ e $\mu_t \geq 0$.
  - Folga complementar (complementary slackness): $a_{T+1}\mu_T = 0$

Condições de primeira ordem...

$$u'(c_t)\beta^t = \lambda_t \quad \text{e} \quad \lambda_t = (1+r_{t+1})\lambda_{t+1} \quad \text{para} \quad t = 0, ..., T-1$$

$$u'(c_T)\beta^T = \lambda_T \quad \text{e} \quad \lambda_T = \mu_T \quad \text{para} \quad t = T$$

Mercados Sequenciais em Tempo Finito

- **Utilizando as CPOs**:

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad t = 0, 1, ..., T - 1$$

- Essa é a ***Euler Equation*** $\Rightarrow$ equação mais importante da macro moderna.
  - Descreve o trade-off entre consumo e poupança da família.
- **No período T**:

$$\beta^T u'(c_T) = \lambda_T = \mu_T > 0$$

  - Por hipótese $c_T > 0$ e $u'(c_T)$ temos que $\mu_T > 0$.
  - Pela folga complementar do KT $\Rightarrow a_T = 0! \Rightarrow$ agente não quer morrer com "dinheiro no bolso".
  - O que aconteceria se não tivessemos a restrição $a_T \geq 0$? O que isso nos diz sobre a No-Ponzi game?

No-Ponzi Game

- Condição de *no-Ponzi game*: sem ela o agente sempre poderia rolar a dívida e conseguir uma sequência de consumo maior.
- Substituindo as restrições orçamentárias até T (suponha igualdade):

$$\frac{c_0 - e_0}{(1 + r_0)} + \frac{a_1}{(1 + r_0)} = a_0$$

$$\frac{c_1 - e_1}{(1 + r_1)} + \frac{a_2}{(1 + r_1)} = a_1 \ldots$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t - e_t}{\Pi_{j=0}^{t}(1 + r_j)} + \underbrace{\frac{a_{T+1}}{\Pi_{t=0}^{T}(1 + r_t)}}_{=0 \text{ No-Ponzi-game}} = a_0$$

- Alternativamente a esta condição, podemos impor um limite inferior de forma que:

$$a_{t+1} \geq -\overline{A}, \tag{24}$$

desde que este limite inferior seja alto o suficiente para não restringir a escolha de a_{t+1}.

Mercados Sequenciais em Tempo Infinito

- Em tempo infinito não temos a condição final. Utilizando a **Equação de Euler** (e assuming $\log$):

$$\frac{1}{c_t^i} = (1 + r_{t+1})\beta \frac{1}{c_{t+1}^i} \quad \forall t \text{ e } i = 1, 2.$$

- Note que:

$$\begin{aligned}
& c_1^i = (1 + r_1)\beta c_0^i \quad \& \quad c_2^i = (1 + r_2)\beta c_1^i \quad \rightarrow \quad c_2^i = (1 + r_2)(1 + r_1)\beta^2 c_0^i \\
\Rightarrow \quad & c_t^i = c_0^i \beta^t \left[\Pi_{j=1}^t (1 + r_j)\right] \\
& c_t^i = c_0^i \frac{\beta^t}{1 + r_0} \left[\Pi_{j=0}^t (1 + r_j)\right]
\end{aligned}$$

Mercados Sequenciais em Tempo Infinito

- Substituindo $c_t^i = c_0^i \dfrac{\beta^t}{1+r_0}\left[\Pi_{j=0}^t (1+r_j)\right]$ na restrição orçamentária intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t^i}{\Pi_{j=0}^t (1+r_j)} + \lim_{T\to\infty} \frac{a_{T+1}}{\Pi_{t=0}^T (1+r_t)} = a\hat{\ }_0^i + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e_t^i}{\Pi_{j=0}^t (1+r_j)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_0^i \frac{\beta^t}{(1+r_0)} = a_0^i + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e_t}{\Pi_{j=0}^t (1+r_j)}$$

$$\frac{c_0^i}{(1-\beta)} = a_0^i (1+r_0) + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e_t}{\Pi_{j=1}^t (1+r_j)}$$

- Por hipótese $a_0^i = 0$ (poderia ser positivo ou negativo, não faria diferença).
- Sem a NPG, a restrição orçamentária intertemporal não é limitada.

Preços

- Somando a equação de euler dos dois agentes: $c_t^1 + c_t^2 = (1 + r_{t+1})\beta(c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2)$
- Utilizando a equação de eq. no mercado de bens: $c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e}$ para todo t:

$$\hat{e} = (1 + r_{t+1})\beta\hat{e} \quad \Rightarrow \quad 1 + r_t = \frac{1}{\beta} \quad \forall t > 0.$$

  - Note que $1/(1 + r_{t+1}) = p_{t+1}/p_t$ da estrutura Arrow-Debreu.
- Além disso $c_t^i = c_0^i \quad \forall t$.

Solução

- Finalmente, utilizando $\beta = 1/(1+r_t)$:

$$\frac{c_0^i}{(1-\beta)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{e_t}{\Pi_{j=1}^{t}(1+r_j)} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^i$$

  substituindo pelas sequências do dote e_t^i de cada agente i, encontramos as mesmas alocações do mercado Arrow-Debreu.

- Uma vez que temos o consumo de cada agente em cada período c_t^i, podemos utilizar as restrições orçamentárias e calcular a sua poupança!

- Lembre-se que equilíbrio no mercado de ativos: $a_t^1 + a_t^2 = 0$ para todo o t.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Modelo de Crescimento Neoclássico

- O modelo de crescimento neoclássico é o arcabouço padrão para estudo de crescimento, ciclos reais de negócios, e muitas outras subáreas da macro.
- É semelhante ao modelo de Solow, mas com decisão de consumo e poupança endógena.
  - Satisfaz os Fatos de Kaldor!
- Vamos ver a sua versão mais básica em tempo discreto e se debruçar sob suas hipóteses.

Modelo de Crescimento Neoclássico

- **Preferências:** $U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$
- **Governo:** Não há.
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$. Não há crescimento populacional.
- **Endowments**: k_0 dado.
- **Conceito de equilíbrio:** Competitivo.

Solução: Sequências $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$.

Preferências

- Agentes principais de um modelo de equilíbrio geral: indivíduos, famílias, consumidores, etc.
- A definição das suas preferências são importantes porque formam a base de avaliação de bem-estar do modelo:
  - Noções de otimalidade e ordenamento de políticas só são possíveis se conhecermos as preferências dos agentes.
- A maior parte dos modelos macroeconômicos utiliza o conceito de agente representativo (*Representative Household*).
  - Vamos primeiro generalizar e supor que existem h agentes na economia.
  - Depois entenderemos quando podemos supor um agente representativo.

Utilidade

- Assumindo um fator de desconto exponencial $\beta \in (0,1)$ (específico ao indivíduo h), a função de utilidade é dada

$$U^h(c_1^h, c_2^h, ..., c_T^h) \equiv \sum_{t=0}^{T} (\beta^h)^t u^h(c_t^h), \tag{25}$$

onde U é a função utilidade definida sobre uma sequência de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{T}$.

- Uma interpretação simples é que c_t em períodos diferentes são "bens" diferentes.
- Desconto exponencial implica que independentemente do período t, o desconto entre t e $t+1$ é sempre o mesmo.
- T pode ser finito ou infinito (no modelo de crescimento neoclássico $T = \infty$).

Utilidade por período: Pressupostos

Iremos assumir que $u()$:

- é uma função duas vezes derivável, estritamente crescente $(u'(c) > 0)$, estritamente côncava $(u''(c) < 0)$, não se altera ao longo do tempo, e não depende da decisão dos outros indivíduos.
- é *time-separable*.
- definida sobre $c > 0$.
- E que utilidade marginal satisfaz:

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{c \to \infty} u'(c) = 0 \tag{26}$$

  - Isto garante que a escolha de um agente seja sempre $c \in (0, \infty)$.
  - Mais consumo é sempre melhor, mas uma unidade adicional de c aumenta $\Rightarrow$ Utilidade marginal é decrescente.

Digressão: Agente Representativo

- Modelos macros assumem uma *família representativa*. O que isso quer dizer?
- Suponha que em vez de uma família representativa, existe um continuum de famílias h representadas pelo intervalo $[0, 1]$.
  - Vantagem de utilizar população unitária: valor agregado = média.
  - De maneira geral $u()$ e β podem depender da família h
  - As famílias também podem ser heterogêneas em suas dotações: renda, riqueza...
- Estamos interessados em estudar as variáveis agregadas $\Rightarrow$ eventualmente temos que agregar as decisões de todos os indivíduos da economia.
- Isto é, a demanda agregada, C_t, é definida como:

$$C_t = \int_0^1 c_t^h dh \tag{27}$$

onde c_t^h é o consumo ótimo do agente h.

Digressão: Agente Representativo

- **Problema:** Agregar agentes heterogênos pode ser complicado.
- Implica em resolver a decisão de cada agente individualmente.
- **Solução:** Assumir a existência de um agente representativo.
  - A demanda agregada da economia pode ser representada por um agente representativo tomando a decisão sujeita à restrição orçamentária agregada.
  - Quando podemos fazer isso?
  - O que nós perdemos?
- **Solução trivial:** Assumir que as preferências e as dotações são iguais para todo o h:
  - $u^h() = u(), \quad \beta^h = \beta$ e dotações iguais $\Rightarrow c^h = c$.
- Nem sempre precisamos assumir que todos os agentes são iguais, para que nosso modelo seja representado por uma família representativa.

Teorema de Agregação de Gorman

Theorem (Teorema de Agregação de Gorman)

Considere uma economia com $N < \infty$ bens e um conjunto H de agentes com riqueza w^h. Suponha que as preferências de cada família $h \in H$ são representadas pela utilidade indireta

$$v^h(p, w^h) = a^h(p) + b(p)w^h, \tag{28}$$

então as preferências podem ser agregadas e representadas por um agente com utilidade indireta

$$v(p, w) = a(p) + b(p)w, \tag{29}$$

onde $a(p) = \int_{h \in H} a^h(p)dh$ e $w = \int_{h \in H} w^h dh$.

- **Prova:** Utilize a identidade de Roy para encontrar a demanda individual e tome a integral sobre h.

Teorema de Agregação de Gorman

- Se as preferências levam a utilidades indiretas lineares na riqueza com o mesmo $b(p)$ para todos os agentes, podemos representar a demanda individual para um bem arbitrário:

$$c^h(p, w^h) = \alpha^h(p) + \kappa(p)w^h \tag{30}$$

- Relação **linear** entre a demanda e a riqueza!
- **Intuição**:
  - Se todos os agentes tem a mesma propensão marginal a consumir, a demanda agregada apenas depende da riqueza agregada!
  - Ao realocarmos riqueza de um agente para o outro, a demanda agregada não se altera.

Um Exemplo Simples

- Suponha 2 agentes com utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.
  - Capitalista recebe lucro $y^c = \pi$.
  - Trabalhador recebe salário $y^w = w$.
  - Renda agregada $Y = w + \pi$.

- Demandas individuais: $x_1^i = \alpha y^i / p_1$ e $x_2^i = (1-\alpha) y^i / p_2$ para $i = c, w$.

- Utilidade indireta:

$$v^i(p, y^i) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = \left(\alpha \frac{y^i}{p_1}\right)^{\alpha} \left((1-\alpha)\frac{y^i}{p_2}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha} y^i$$

- Utilidade indireta do agente representativo com renda Y:

$$v(p, Y) = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha} Y$$

Função Utilidade

Outros Exemplos

(i) Utilidades quasi-homotéticas:

$$u(x_1^h, ..., x_N^h) = \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - \xi_j^h)^{(\sigma-1)/\sigma} \right]^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{31}$$

defina $\tilde{x}_j^h = x_j - \xi$. Desde que a solução seja interior, a utilidade admite um agente representativo com $\xi_j \equiv \int_h \xi_j^h dh$.

(ii) Utilidades quasi-lineares

$$u(c, l) = u(c) + \phi l \tag{32}$$

Agente Representativo

- Existem versões do Teorema de Agregação de Gorman para economias dinâmicas.
- Utilizaremos utilidades que admitem agentes representativos!
- A partir de agora iremos representar as famílias com uma só família representativa: $U(c_t^h) = U(c_t)$.
- **Exercício**: Encontre o agente representativo da economia com dois agentes seção anterior.

Tecnologia e Produção

- Agente responsável pela produção $\Rightarrow$ Firmas.
- Na maior parte dos modelos (mas não todos!) vamos assumir:
  - que existe uma firma representativa com uma função de produção representativa (ou agregada) que produz um único bem final;
  - que o lucro (quando houver) é redistribuído para todas as famílias igualmente;
  - que utiliza como insumos (ou fatores) capital, K, e/ou trabalho, N. Esses insumos são contratados no "spot market" (problema da firma é estático).
- **Intuição**: A função de produção agregada representa o valor adicionado total (PIB) da economia e não um bem específico.
  - Capital e trabalho são insumos utilizados por todos os setores em maior ou menor proporção.
  - Bens intermediários não são incluídos e o custo de materais básicos não é relevante quantitativamente.

Tecnologia e Produção

- Com um único bem final y, se
  - os mercados forem competivos;
  - não existirem externalidades na produção;

  a economia admite uma firma representativa (incluindo se as firmas da economia tiverem funções de produção heterogêneas).
- **Teorema e prova**: Acemoglu p. 158.
- Mesmo com múltiplos bens/setores, se a função de produção for a mesma e os fatores completamente móveis entre setores é possível demonstrar que existe uma função agregada.

Função de Produção

Função de Produção Agregada

$$Y_t = F(K_t, N_t, A_t) \tag{33}$$

Onde: K: Capital; N: Trabalho; A: *Shifter* tecnológico, viésado ou não para um determinado fator.

(Típicas) Suposições Neoclássicas:

(i) $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ é duas vezes diferenciável, é estritamente crescente e côncava em K e L.
- $F_K > 0$; $F_N > 0$;
- $F_{KK} < 0$; $F_{NN} < 0$ (rendimentos marginais decrescentes)

(ii) F exibe retornos constantes de escala em K e N
- F é homogênea de grau 1: $zF(K, N, A) = F(zK, zN, A)$.

(iii) Condições Inada.

Função de Produção

Retornos Constante de Escala

Theorem (Teorema de Euler)

Suponha que $f : \mathbb{R}^{K+2} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $x \in \mathbb{R}$ *e* $y \in \mathbb{R}$*, com derivadas parciais* f_x *e* f_y*, e é homogênea de grau* m*. Logo:*

$$mf(x,y,z) = f_x(x,y,z)x + f_y(x,y,z)y \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \textit{ e } z \in \mathbb{R}^K. \tag{34}$$

Além disso, f_x *e* f_y *são homogênea de grau* $m-1$ *em* x *e* y*.*

- Note que retornos constante de escala somado a equilíbrio competitivo (preço igual ao produto marginal) implica que as firmas tem lucro zero.
- Em particular, isso implica *Produção = Renda Total dos Fatores*:

$$Y_t = w_t N_t + r_t K_t \tag{35}$$

Função de Produção

Condições de Inada

F satisfaz:

$$\lim_{K\to 0} F_K(K,N,A) = \infty \qquad \lim_{K\to\infty} F_K(K,N,A) = 0$$
$$\lim_{N\to 0} F_L(K,N,A) = \infty \qquad \lim_{N\to\infty} F_L(K,N,A) = 0$$

Para todo $N > 0$, $K > 0$.

- Suponha também: $F(0,N,A) = 0$.

Resolvendo o Modelo

- Já temos as suposições sobre as preferências e a tecnologia.
- **Objetivo final:** Encontrar as alocações de equilíbrio (e os preços). Como fazer:
  (i) **Equilíbrio descentralizado**: encontrar o preço que equlíbria a oferta de capital/consumo com a sua demanda.
  (ii) **Planejador social**: Resolver o problema do **planejador central benevolente** $\Rightarrow$ Também é a solução ótima/eficiente do modelo.
- Dado certas suposições a solução dos dois problemas são iguais,
- **Social Planner's Problem**:
  - Maximiza a utilidade dado as restrições tecnológicas e de recursos da economia (não está sujeito a restrição orçamentária dos consumidores - mas sim aos recursos TOTAIS da economia).

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
  - $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; Condições de Inada; $\beta \in (0, 1)$.
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$
  - F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l, CRS, condições de Inada).
  - Depreciação do capital $\delta \in [0, 1]$
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
  - População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments**: k_0 dado.

Problema do Social Planner

Passo 2: Resolver o problema do planejador social benevolente:

- Vamos assumir um consumidor representativo $\Rightarrow$ planejador escolhe a alocação $\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que maximiza a utilidade deste consumidor.
- Trade-off de consumo presente vs consumo futuro.

$$\max_{\{k_{t+1} \geq 0, \quad c_t \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{36}$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq y_t = F(k_t, n_t) \quad \forall t; \tag{37}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \quad \forall t; \tag{38}$$

$$k_0 > 0 \text{ dado}; \tag{39}$$

- Para simplificar, substituimos a lei de movimento do capital em i_t e $n_t = 1$.
- E escrever: $f(k_t) \equiv F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$.

Resolvendo um Problema Dinâmico

- Ok, como resolver um problema dinâmico com soma infinita?
- Resolveremos primeiro com um T finito utilizando métodos de otimização com restrição (Kuhn-Tucker).
- As condições de Kuhn-Tucker são suficientes se a função objetiva for côncava e as restrições convexas.
- As suposições que fizemos sobre u e f garantem que essas condições são garantidas:
  - $u(c_t)$ é crescente logo a restrição de recursos se mantém com igualdade.
  - $u(c_t)$ é côncava, logo a soma de $u(c_t)$ também é côncava.
  - A restrição é convexa: $0 \leq k_t \leq f(k_t)$.
  - Condições de Inada garantem que a solução seja interior $c > 0$ e $k > 0$.
  - Exceto para o último T onde $k_{T+1} = 0$.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left[\beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(f(k_t) - c_t - k_{t+1}\right) + \mu_t k_{t+1}\right] \tag{40}$$

- Condições de Kuhn-Tucker:
  - $k_{t+1} \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ e $\mu_t \geq 0$.
  - Folga complementar (complementary slackness): $k_{t+1}\mu_t = 0$

Condições de primeira ordem...

- Note que $k_{t+1} > 0$ e $\mu_t = 0$, para todo $t = 0, .., T-1$:

$$u'(c_t)\beta^t = \lambda_t \quad \text{e} \quad \lambda_t = f'(k_{t+1})\lambda_{t+1} \quad t = 0, ..., T-1 \tag{41}$$

- E encontramos a *Euler Equation*:

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad t = 0, 1, ..., T-1 \tag{42}$$

Euler Equation

- A Equação de Euler conecta a decisão de consumo de hoje com a de amanhã. Explicíta o trade-off entre consumo e poupança (ou no caso do planejador alocar uma unidade em c_t ou em i_t).
$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \tag{43}$$
- Custo marginal de deixar de consumir uma unidade do bem final em t é igual ao benefício marginal descontado de consumir $f'(k_{t+1})$ unidades do bem final em $t+1$.
- Concavidade (estrita) na função utilidade implica que as famílias gostariam de suavizar o consumo ao longo da vida.
- Note que poupança extra altera o retorno futuro via $f'(k_{t+1})$.

Solução do Problema: Tempo Finito

- Note que a equação de Euler só é válida até o período $T-1$. As c.p.o no período T:

$$u'(c_T)\beta^T = \lambda_T \quad \text{e} \quad \lambda_T = \mu_T \quad t = 0, ..., T-1 \tag{44}$$

- O que implica que $\mu_T = \lambda_T > 0$ e $k_{T+1} = 0$!

- Resultado intuitivo, já que não faz sentido levar capital para $T+1$...

Solução do Problema: Tempo Finito

- As sequências que maximizam a utilidade precisam satisfazer o sistema de equações de diferenças (para $t = 0, ..., T-1$):

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad \text{(Equação de Euler)} \tag{45}$$

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \quad \text{(Restrição de Recursos)} \tag{46}$$

- Alternativamente podemos substituir c_t e escrever o problema como uma equação de diferença de segunda ordem.
- Duas equaçãos de diferenças (de primeira ordem) necessitam de duas condições iniciais/terminais.
- Essas condições são: k_0 dado e $k_{T+1} = 0$.

Tempo Infinito

- Em tempo finito $k_{T+1} = 0$. Mas em tempo infinito qual é a condição terminal que garante que o sistema de equações tenha uma solução única? *Condição de Transversalidade* (TVC).
- Note que em tempo finito: $\lambda_T k_{T+1} = 0$.
- A **Condição de Transversalidade**:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda_T k_{T+1} = \lim_{T \to \infty} \beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0 \tag{47}$$

- Intuitivamente diz que o valor sombra (*shadow value*) do capital converge para zero (não necessariamente o estoque de capital).
- Sem a TVC é possível encontrar infinitas sequências de c_t e k_{t+1} que satisfaçam a EE.
- **Prova** para a suficiência da TVC em PK ou SL.

Tempo Infinito

- Com a TVC e o k_0 dado e as duas equações de diferenças (EE e restrições de recursos) podemos encontrar as alocações ótimas que solucionam o problema do planejador central.
- Na grande parte das aplicações não é possível resolver o problema analíticamente.
  - Aproximações lineares.
  - Resolver o problema no computador (utilizando programação dinâmica).
- **Exemplo**: Suponha $u(c) = \log(c)$ e $f(k) = k^{\alpha}$ (i.e., $F()$ é Cobb-Douglas e $\delta = 1$) e resolva para política ótima (i.e. k_{t+1} em função de k_t e os parâmetros).

Bem-Estar e Equilíbrio

- Ok, encontramos a solução do **planejado social benevolente**.
- Relação próxima entre resolver o problema do planejador central e o equilíbrio competitivo descentralizado.
- Sob certas condições os dois problemas resultam nas mesmas alocações $\Rightarrow$ Teoremas do Bem-Estar.
  - **1^{o} Teorema do Bem-Estar:** Eq. competitivo $\Rightarrow$ Alocações Pareto ótimo.
  - **2^{o} Teorema do Bem-Estar:** Alocações Pareto ótimo $\Rightarrow$ Eq. competitivo.
- Neste caso também podemos dizer que a economia é Pareto eficiente.

Ótimalidade de Pareto

- Suponha uma economia arbitrária:
  1. N bens indexados por j;
  2. H famílias indexados por h que consomem x_j^h com utilidade U^h e dotações e^h;
  3. F firmas indexados por f que produzem y_j^f.
- A fração da propriedade da firma é dado por θ_h^f, onde $\sum_h^H \theta_h^f = 1$.
- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f \in F,\ h \in H,\ j \in N}$ é "feasible" se para todo $j \in N$:

$$\sum_h^H x_j^h \leq \sum_h^H e_j^h + \sum_f^F y_j^f \tag{48}$$

- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f \in F,\ h \in H,\ j \in N}$ é Pareto ótimo se:
  1. é "feasible";
  2. não existe nenhuma outra alocação "feasible" $\{\hat{x}_j^h, \hat{y}^f\}$ que

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j \in N}) \geq U^h(\{x_j^h\}_{j \in N}) \quad \text{para todo } h \tag{49}$$

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j \in N}) > U^h(\{x_j^h\}_{j \in N}) \quad \text{para pelo menos um } \ h. \tag{50}$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar

Theorem (First Welfare Theorem)

Suponha que $\{x_j^h, y_j^f, p_j\}$ seja um equilíbrio competitivo e que todas U^h sejam localmente não saciada (locally nonsatiated). Então $\{x_j^h, y_j^f\}$ é Pareto ótimo.

- **Prova:** Por contradição. Suponha $\{x_j^h, y_j^f\}$ não seja Pareto ótimo (ou seja, existe uma outra alocação feasible que dê mais utilidade para pelo menos um h) e use a definição de eq. competitivo.
- Note que estamos assumindo a existência de um eq. competitivo (que pode não existir dependendo da forma de U^h, e dos conjuntos de x e y).
- Ótimo de Pareto não diz nada sobre equidade (um indivíduo consumindo tudo é eficiente).
- Quando o Primeiro teorema do Bem-Estar não se aplica?
  - Externalidades; Mercados incompletos; Competição Imperfeita; Informação Assimétrica; Tributação Distorciva;

Segundo Teorema do Bem-Estar

Theorem (Second Welfare Theorem)

Considere a alocação Pareto ótimo $\{x_j^h, y_j^f\}$. Dada certas condições (conjunto de produção e consumo é convexo, utilidade é côncava, contínua e localmente não saciada), existe um equilíbrio competitivo com preços $\{p_j\}$ e dotações $\{e^h, \theta_h^f\}$ que suportam a alocação $\{x_j^h, y_j^f\}$.

- **Prova:** A prova é mais complicada já que implicitamente envolve demonstrar a existência de um equilíbrio competitivo. Basicamente envolve mostrar a existência de preços (em um hiperplano) que suportam as alocações.
- Intuitivamente, o 2^{do} Teorema do Bem-Estar nos diz que uma alocação é parte de um eq. competitivo.
- Dado uma redistribuição apropriada das dotações iniciais, podemos selecionar a alocação Pareto ótima que é um eq. competitivo.

Social Planner

- Os Teoremas do Bem-Estar dizem que podemos ir de uma alocação Pareto ótimo para um equilíbrio descentralizado e vice-versa.

- Sob certas condições basta computar as alocações Pareto ótimo resolvendo o problema do *Social Planner* (que em geral é mais simples).

- Com mais de uma família o planejador tem que associar um peso a utilidade de cada família $\Rightarrow$ Existência de um conjunto de alocações Pareto-ótimo.

- **Método de Negishi**: Seleciona o peso apropriado de acordo com as dotações iniciais de cada família para encontrar as alocações do eq. competitivo!
  - **Exercicio**: resolver dois agentes utilizando o método de Negishi.

Crescimento Neoclássico: Equilíbrio Descentralizado

- Já resolvemos para as alocações do crescimento ótimo $\Rightarrow$ Social Planner.
- Sabemos que pelos Teoremas do Bem-Estar as alocações escolhidas pelo planejador são parte de um equilíbrio competitivo.
- Ok, mas e os preços? E se os Teoremas do Bem-Estar não se aplicarem?

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
  - $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; $\beta \in (0,1)$.
- **Tecnologia**: $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$
  - F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l, CRS, condições de Inada).
  - Depreciação do capital $\delta \in [0,1]$
- **"Environment"**: Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
  - População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments**: k_0 dado.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 2: Resolver o problema dos agentes (família e firmas).

- O problema da firma é estático - firmas contratam capital e trabalho no spot market. Todo t:

$$\max_{k_t, n_t} \pi_t = F(k_t, n_t) - r_t k_t - w_t n_t \tag{51}$$

- Dado as suposições sobre $F(k_t, n_t)$ as c.p.o são necessárias e suficientes:

$$r_t = F_k(k_t, n_t) = MgPK \quad \forall t \tag{52}$$

$$w_t = F_n(k_t, n_t) = MgPN \quad \forall t \tag{53}$$

- Dependendo da função de produção é possível derivar equações de demanda por trabalho e capital em função dos preços: $k^d = h^k(r, w)$, $n^d = h^k(r, w)$.
- Em muito dos modelos que vamos estudar estaremos interessado na razão k_t/n_t (em função dos preços).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

- Famílias são donas do capital e ofertam trabalho para as firmas.
- Capital é predeterminado: k_t é dado, famílias aumentam capital investindo (e deixando de consumir).

$$\max_{\{k_{t+1},\ c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{54}$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq r_t k_t + w_t n_t \quad \forall t; \tag{55}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta) k_t \quad \forall t; \tag{56}$$

$$k_t \geq 0\ \forall t \quad \text{e} \quad k_0 > 0 \text{ dado}; \tag{57}$$

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(w_t + (1 + r_t - \delta)k_t - k_{t+1} - c_t \right) \tag{58}$$

- Dado as suposições que fizemos em F e u sabemos que a solução será interior e a restrição orçamentária se sustenta com igualdade.
- C.p.o: $u'(c_t) = \lambda_t$ e $\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1} - \delta) = \lambda_t$ para todo t.
- Solução do problema é a sequência que satisfaz a Equação de Euler (condições necessárias):

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1} - \delta)u'(c_{t+1}) \quad \forall t \tag{59}$$

juntamente com a condição de Transversalidade.

Problema das famílias: TVC vs no-Ponzi game

- Note que a TVC é semelhante a *no-Ponzi game*, as duas impedem que as trajetórias ótimas não "explodam".
- Se assumimos uma condição *no-Ponzi* com igualdade e $a_t = k_t$ temos que via TVC:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda_T k_{T+1} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_t = \frac{\lambda_{t-1}}{(1 + r_t - \delta)} \tag{60}$$

- Iterando: $\lambda_T = \frac{\lambda_0}{\Pi_{t=0}^{T}(1+r_t-\delta)}$ e substituindo chegamos a no-Ponzi.
- Apesar de terem a mesma utilidade, conceitualmente são coisas diferentes:
  - A *no-Ponzi-game* é uma restrição no problema das famílias que impede a acumulação de dívidas.
  - No modelo de crescimento neoclássico básico normalmente a no-Ponzi é omitida já que $a_t = k_t > 0\ \forall t$.
  - Mas em versões mais sofisticadas (com diferentes tipos títulos, governo, etc) ela pode ser necessária.

TVC vs no-Ponzi game

- Já a TVC determina a escolha ótima dado um conjunto de possíveis sequências.
- É uma condição necessária e suficiente para a solução do problema na **formulação sequencial** do modelo de crescimento.
  - Em outras palavras, é uma **condição terminal**.
- **Kamihigashi (2008)**: "A no-Ponzi-game condition is a constraint that prevents overaccumulation of debt, while a typical transversality condition is an optimality condition that rules out overaccumulation of wealth. They place opposite restrictions, and should not be confused."

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 3: Condições de Equilíbrio

- Market clearing para capital e trabalho:

$$n_t^d = 1 \quad \text{e} \quad k_t^d = k_t^* \quad \forall t \tag{61}$$

- Market clearing no mercado de bens (resource constraint):

$$y_t = c_t + i_t \quad \forall t \tag{62}$$

- que é trivialmente satisfeita pela restrição orçamentária das famílias: $y_t = F(k_t, n_t) = r_t k_t + w_t n_t$ e $i_t = k_{t+1} + (1 - \delta)k_t$.
- Pela Lei de Walras com dois mercados em equilíbrio, o terceiro também estará. Note que resolvemos para dois preços todo t: r_t e w_t (o preço do bem final foi normalizado $p_t = 1$).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 4: Descrever o Equilíbrio Competitivo

Definição. Um equilíbrio competitivo é uma sequência de alocações $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ do consumidor e da firma $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$, e preços $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado k_0 e a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da família.
2. Dada a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da firma.
3. Market clear para todo t:

$$
\begin{aligned}
n_t^d &= 1 \\
k_t^d &= k_t \\
F(k_t, n_t) &= c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t
\end{aligned}
$$

Equilíbrio no Crescimento Neoclássico

- Juntando solução da família (eq. de Euler + restrição orçamentária) com a solução da firma (preço no mercado de fatores igual ao produto marginal), temos:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta(1 + r_{t+1} - \delta)u'(c_{t+1}) \quad \forall t \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t &= r_t k_t + w_t n_t = y_t = F(k_t, n_t) \quad \forall t \\ r_t &= F_k(k_t, n_t) = MgPK \quad \forall t \\ w_t &= F_n(k_t, n_t) = MgPN \quad \forall t \end{aligned}$$

- Que resulta no mesmo sistema do planejador social:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad \text{(Equação de Euler)} \\ c_t + k_{t+1} &= f(k_t) \quad \text{(Restrição de Recursos)} \end{aligned}$$

  - Lembrando que $f(k_t) \equiv F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$.

- EE + restrição de recursos + k_0 + TVC caracterizam as sequências de eq. $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$.

Equilíbrio no Crescimento Neoclássico

Resumo:

- **Equilíbrio descentralizado**: estrutura de mercados sequenciais vs Arrow-Debreu $\Rightarrow$ Eq. "de mercado".
  - Se os mercados forem completos, as soluções são idênticas.
- **Problema do planejador benevolente**: alocações Pareto ótimo.
- Se os teoremas do bem-estar forem satisfeitos as duas soluções são idênticas e o equilíbrio é ótimo.

Estado Estacionário

- **Estado Estacionário (*Steady State*):** Uma economia encontra-se no estado estacionário quando as suas variáveis assumirem um valor constante no tempo.

$$k_{ss} = k_{t+1} = k_t$$
$$c_{ss} = c_{t+1} = c_t.$$

- Dado nossas suposições - em especial concavidade de F e retornos constante de escala - a economia convergirá para um estado estacionário:

Estado Estacionário

- Para que a economia chegue ao estado estacionário basta iniciar com $k_0 > 0$.

- Note que utilizado a EE: $u'(c_{ss}) = (1 + r_{ss} - \delta)u'(c_{ss})$ juntamente com $r_{ss} = F_k(k_{ss}, 1)$ podemos encontrar facilmente k_{ss}.
    - Se $k_0 < k_{ss}$, a economia acumulará capital até chegar no estado estacionário.
    - Se $k_0 > k_{ss}$, a economia desacumulará capital até chegar no estado estacionário.

- Vamos estudar com mais detalhes as dinâmicas de acumulação mais a frente.

- **Exemplo:** Encontre k_{ss} dado $F(k, n) = k^\alpha n^\alpha$

Estado Estacionário

Estado Estacionário com $F(k,n) = k^{\alpha} n^{\alpha}$

$$u'(c_{ss}) = \beta(1 + r_{ss} - \delta)u'(c_{ss}) \tag{63}$$

$$c_{ss} + \delta k_{ss} = r_{ss}k_{ss} + w_{ss}k_{ss} \tag{64}$$

$$r_{ss} = \alpha \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{\alpha-1} \tag{65}$$

$$w_{ss} = (1-\alpha)\left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}}\right)^{\alpha} \tag{66}$$

- Dado que $n_{ss} = 1$, é um sistema de 4 equações e 4 variáveis endógenas $\{k_{ss}, c_{ss}, r_{ss}, w_{ss}\}$.
- Não há dinâmica, logo é possível encontrar a solução analítica para as variáveis endógenas.
- Pode-se encontrar também: $y_{ss} = k_{ss}^{\alpha} n_{ss}^{\alpha}$ e $i_t = \delta k_{ss}$.

Taking Stock

- Como resolver um modelo de **Equilíbrio Geral Competitivo**?
    1. Descrever o ambiente da economia;
    2. Resolver o problema dos agentes;
    3. Indicar as condições de equilíbrio;
    4. Descrever o equilíbrio competitivo.
- Como utilizar os **Teoremas do Bem-Estar** para resolver o modelo?
    - Dado certas condições a solução do **Planejador Central** é igual ao eq. descentralizado.
    - Neste caso sabems que o eq. é Pareto eficiente
- Vimos também que a EE + TVC são condições suficientes para problemas de sequência infinita.
- E que dado certas suposições a economia admite uma família/firma representativa.