Macroeconomia I
Lista de Exercícios 1
Prazo de Entrega: 04 de Agosto (via Teams)

1. **(Constant Relative Risk Aversion Utility Function).** A função utilidade instantânea mais utilizada em modelos macroecônomicos é a utilidade isoelástica (também conhecida CRRA utility function):

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}, \quad \sigma \geq 0 \text{ e } \sigma \neq 1.$$

Para as questões (c) em diante considere também dois períodos com desconto $0 < \beta < 1$:

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2),$$

   (a) Demonstre que se $\sigma = 1$, então $u(c) = \ln c$ (dica: utilize a regra de L'Hôpital).

   (b) Defina $\sigma(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}$ como o coeficiente de Arrow-Pratt de aversão relativa ao risco. Logo $\sigma(c)$ indica a atitude do indivíduo em relação ao risco. Quanto maior é $\sigma(c)$, maior a aversão ao risco. Mostre que σ é constante.

   (c) Seja a taxa marginal de substituição entre dois períodos como:

$$MRS(c_1, c_2) = \frac{\partial U/\partial c_2}{\partial U/\partial c_1}.$$

   A função u é homotética se $MRS(c_1, c_2) = MRS(\gamma c_1, \gamma c_2)$. Mostre que U é homotética.

   (d) Defina a elasticidade de substituição intertemporal como:[1]

$$ies(c_t, c_{t+1}) = -\frac{d(c_{t+1}/c_t)}{dMRS(c_{t+1}, c_t)} \frac{MRS(c_{t+1}, c_t)}{c_{t+1}/c_t}$$

   Mostre que $ies(c_1, c_2) = 1/\sigma$.[2]

   (e) **Bônus (não precisa entregar):** refaça todos os exercícios com uma utilidade CARA (Constant Absolute Risk Aversion): $u(c) = 1 - \exp\{-\sigma c\}$.

2. **(Modelo de Crescimento Neoclássico com Trocas no Período 0).** Considere o modelo de crescimento neoclássico. Existe uma família representativa com massa unitária. Não há crescimento populacional. A função utilidade é dada por:

[1] A elasticidade de substituição intertemporal é definida como a variação percentual na taxa de crescimento do consumo em resposta a uma variação percentual na taxa de juros real. Note que a taxa de juros é o preço intertemporal do consumo, e que no ótimo (equação de euler) é igual a MRS.

[2] Esta relação entre a elasticidade de substituição intertemporal e o coeficiente de aversão ao risco não é geral. Existem preferências em que as duas variáveis não são relacionadas (por exemplo, *Epstein–Zin preferences*).

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

com k_0 dado. O bem final que pode ser consumido ou investido é produzido utilizado a seguinte função de produção $y_t = k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$. A acumulação de capital é dado pela seguinte lei de movimento:

$$k_{t+1} = k_t(1-\delta) + i_t.$$

(a) Descreva o problema da família e das empresa em uma estrutura de mercado Arrow-Debreu (trocas no período 0).

(b) Caracterize o equilíbrio: resolva os problemas e interprete as soluções.

(c) Defina um equilíbrio competitivo para esta economia.

3. **(Método de Negishi)**. Considere a economia de trocas com dois agentes. A função utilidade para um agente $i = 1, 2$ é dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t^i. \tag{1}$$

Em cada período os agentes recebem dotações e_t^i determinadas pela seguinte regra:

$$e_t^1 = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } t \text{ é par;} \\ 0, & \text{se } t \text{ é ímpar;} \end{cases} \qquad e_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é par;} \\ \hat{e}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{2}$$

A dotação pode ser transformada em bem de consumo final sem custo: $c_t = \hat{e}$. O objetivo do problema é encontrar as alocações ótimas utilizando o método de Negishi.[3]

(a) Seja α^i o peso dado pelo planejador social para o agente i (onde $\sum_{i=1}^{2} \alpha^i = 1$). Defina e resolva o problema do planejador social para esta economia. Interprete as condições de primeira ordem. Como o planejador escolhe dividir os recursos da economia (intertemporalmente e entre agentes)?

(b) Qual é o conjunto de alocações Pareto eficiente desta economia?

(c) Queremos encontrar a alocação Pareto eficiente que descentraliza um equilíbrio competitivo. Determine que o preço de uma unidade de consumo p_t seja igual ao multiplicador de lagrange da restrição de recursos da economia (normalize $p_0 = 1$). Defina uma função de transferência em função dos pesos, $t^i(\alpha^i)$, onde t é a transferência que cada agente necessita para conseguir comprar a alocação eficiente dado a sua sequência de dotações $\{e^i\}_{t=0}^{\infty}$.

(d) Explique brevemente e intuitivamente porque a transferência que implementa o equilíbrio competitivo é igual $t^i(\alpha) = 0$ para todo i. Encontre o peso α que determina o equilíbrio competitivo.

[3]Dica: veja a seção 2.2.4 das notas do DK e/ou a seção 7.5.2 das notas do PK.

4. **(Uma Economia com Dois Setores).** Considere a seguinte economia. A família representativa tem função utilidade:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^t} u(c_t), \quad \rho > 0.$$

Onde $u(.)$ é estritamente crescente, estritamente côncava, diferenciável, limitada com $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$. A família é dotada de uma unidade de tempo.

A economia é composta por dois setores, um para a produção de bens de consumo e outro para a produção de bens de investimento. A tecnologia do setor de bens de consumo é

$$c_t = A k_{c_t}^{\theta} n_{c_t}^{1-\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

A tecnologia do setor de bens de investimento é

$$x_t = B k_{x_t}^{\phi} n_{x_t}^{1-\phi}, \quad 0 < \phi < 1.$$

A tecnologia de acumulação de capital é

$$k_{t+1} = k_t(1-\delta) + x_t, \quad 0 < \delta < 1,$$

e as restrições de viabilidade da economia (*feasibility contraints*) são:

$$n_{c_t} + n_{x_t} \leq 1 \quad \text{e} \quad k_{c_t} + k_{x_t} \leq k_t.$$

Suponha que a família é dona do estoque de capital e vende os serviços do capital e do trabalho, cujos preços em termos do bem de consumo no período t são dados por r_t e w_t, respectivamente. O preço do bem de investimento em termos do bem de consumo no período t é q_t. Após receberem a renda dos fatores, as famílias decidem quanto consumir e investir.

(a) Defina cuidadosamente o problema da família e o problema das empresas (em ambos os setores) em um ambiente de mercado sequenciais.

(b) Defina um equilíbrio competitivo para esta economia.

(c) Defina um equilíbrio de estado estacionário para esta economia.

(d) Defina o problema de otimização intertemporal resolvido por um planejador central benevolente para esta economia.

(e) Obtenha e interprete as condições necessárias de primeira ordem para este problema.

(f) Especifique um conjunto de equações que caracterizam as quantidades de equilíbrio no estado estacionário. (Dica: este sistema de equações envolve as quantidades no estado estacionário c, x, k_c, k_x, k, n_c e n_x, e os preços no estado estacionário r, q e w.)

(g) Especifique um algoritmo para calcular as quantidades c, x, k_c, k_x, k, n_c e n_x, e os preços r, q e w no estado estacionário. Não é necessário resolver o problema algebricamente.