Macroeconomia I

Programação Dinâmica

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Até o presente momento resolvemos problemas dinâmicos encontrando a sequência ótima do problema.
- Nem sempre isso é prático e muitas vezes é contra-intuitivo.
- A partir de agora estudaremos como resolver o problema recursivamente, explorando o fato de que as decisões podem ser feita período a período.
- Este método é conhecido como **Programação Dinâmica**.
- É particularmente útil para resolver os problemas numericamente.

Referências

- Notas do DK: Cap. 3, 4 e 5.
- Acemoglu: Cap. 6
- Stokey and Lucas with Prescott.

Um Exemplo Simples

- Exemplo simples utilizando o modelo de crescimento neoclássico.
- Logo estudaremos em detalhes o caso geral.

$$V(k_0) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \quad \text{para todo } t \tag{2}$$

$$k_0 \text{ dado.} \tag{3}$$

- Note que $V(k_0)$ é o valor total do problema no tempo 0 para uma economia que começa com capital k_0.

Um Exemplo Simples

$$V(k_0) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \tag{4}$$

$$= \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ u(f(k_0) - k_1) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\} \tag{5}$$

$$= \max_{\{k_1\}} \left\{ u(f(k_0) - k_1) + \beta \left[\max_{\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(f(k_t) - k_{t+1}) \right] \right\} \tag{6}$$

$$= \max_{\{k_1\}} \left\{ u(f(k_0) - k_1) + \beta \underbrace{\left[\max_{\{k_{t+2}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t} u(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) \right]}_{=V(k_1)} \right\} \tag{7}$$

$$V(k_0) = \max_{k_1} u(f(k_0) - k_1) + \beta V(k_1) \tag{8}$$

Um Exemplo Simples

$$V(k_0) = \max_{0 \leq k_1 \leq f(k_0)} u(f(k_0) - k_1) + \beta V(k_1) \tag{9}$$

- Em vez de maximizar uma sequência infinita só precisamos encontrar k_1.
- Por outro lado não conhecemos a forma da função $V()$, ou seja, $V()$ é uma *equação funcional*.
- Note que a solução $k_1 = g(k_0)$ é uma função de k_0.

Equação de Bellman

- Já que em todos os períodos o problema é o mesmo, podemos generalizar:

$$V(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} u(f(k) - k') + \beta V(k') \tag{10}$$

  onde k é capital corrente e k' é o capital no período seguinte.

- Essa é a famosa função valor (*Value Function*) ou **Equação de Bellman**.
- Sob quais condições podemos generalizar? Conceitualmente os dois problemas são diferentes:
  - $V(k_0)$ é a formulação sequencial, o valor da soma descontada da utilidade infinita evaluada no ótimo.
  - $V(k)$ é o problema recursivo, a função valor que resolve o problema de programação dinâmica.
- Sob certas condições a solução destes dois problemas são iguais.

Matemáticas Preliminares

Equação de Bellman

Equação Funcional:

$$V(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V(y)\} \tag{11}$$

- x é a variável (ou vetor) de estado (*state variable*).
- y é a variável (ou vetor) de controle (*control variable*).
- $\Gamma : X \to Y$ é o conjunto de restrição/factível (*feasible set correspondence*).
- $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ é a função de retorno instantânea (*return function*).

$$g(x) = \arg \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V(y)\} \tag{12}$$

- $g(x)$ é a função política/regra de decisão (*policy funcion*).

Equação de Bellman

Problema Sequencial:

$$V^*(x_0) = \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \quad \text{(SP)} \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \quad \text{para todo } t \tag{14}$$

$$x_0 \text{ dado.} \tag{15}$$

Equação Funcional:

$$V(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V(y)\} \quad \text{(FE)} \tag{16}$$

- Sob quais condições a solução do problema SP é igual ao FE?
- Como podemos encontrar a solução do problema FE e em quais condições a solução é única?

O Operador T

- Para resolver o $\sup$ e encontrar a função política $g(x)$, primeiro precisamos encontrar a função V.
- Defina o **operador T**:

$$(TV)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta V(y)\} \tag{17}$$

- O operador T é uma "função" que faz o mapa de uma função V para outra função V, ou seja: $T : C \to C$, onde C é o conjunto de funções possíveis.
- O objetivo final é encontrar o **ponto fixo** do operador, ou seja encontra a função que $V = TV$.
- Iremos utilizar o **Teorema do Ponto Fixo de Banach**.

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Theorem (Teorema do Ponto Fixo de Banach - Teorema da Contração)

Se (S, d) for um espaço métrico completo e $T : S \to S$ uma contração com módulo β, então:

1. *T possui exatamente um ponto fixo em S, ou seja existe apenas um V tal que $TV = V$;*
2. *Para qualquer $v_0 \in S$, $d(T^n V_0, V) \leq \beta^n d(V_0, V)$, $n = 1, 2, ..$*

- Escrevendo o operador como:

$$V_{n+1}(x) = (TV)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V_n(y)\} \tag{18}$$

- Se as condições de Banach são satisfeitas, o Teorema nos dá um algoritmo simples: supor V_0 e iterar no operador até que a distância entre V_n e V_{n+1} seja suficientemente pequena.
- Ele também garante a unicidade de V!
- **Prova:** (SLP/A) Utilizar a definição de contração e a propriedade de desigualdade triangular da norma.

Road Map

- Precisamos definir o domínio do operador T e o que significa uma convergência de sequências dentro deste espaço $\Rightarrow$ Definir um espaço métrico completo.

- Logo temos que definir o que é uma contratação e quais as condições para que T seja uma contração.

- Algumas vezes não é trivial mostrar que T é um mapa de uma função para ela mesmo (principalmente quando temos um $\sup$), vamos utilizar o Teorema de Berge para garantir isto.

- Finalmente sabendo que estamos em um espaço métrico completo e que T é uma contração e mapa uma função a ela mesmo, podemos aproximar a nossa função valor utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Espaços Métricos

Definition (Espaço Vetorial)

Um espaço vetorial X é um conjunto que é limitado sobre adição vetorial (finita) e multiplicação por um escalar. Seja $f,\ g \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Adição: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Multiplicação por um escalar: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Para discutir convergência precisamos também de uma noção de distância (entre dois elementos dentro de um conjunto):

Definition (Espaço Métrico)

Um espaço métrico é formado por um conjunto S não vazio e uma métrica $d : S \times S \to \mathbb{R}$ tais que para todos $x, y, z \in S$ vale que:

1. $d(x,y) \geq 0$ com igualdade se $x = y$;
2. $d(y,x) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Espaços Métricos

- Para espaços vetoriais definimos as métricas de forma que a distância entre dois vetores seja igual a distância entre sua diferença e zero: $d(x, y) = d(x - y, \vec{0})$.

Definition (Espaço Vetorial Normado)

Um espaço vetorial normado é um espacço vetorial S e uma norma $||.|| : S \to \mathbb{R}$ tais que para todos$x,\ y \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale que:

1. $||x|| \geq 0$ com igualdade se e somente se $x = \vec{0}$;
2. $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

- Ou seja, um espaço vetorial normado é um par $(X, ||.||)$, onde X é um espaço vetorial e $d(x, y) = ||x - y||$.
- Ok, mas estamos interessados em distância entre funções.

Espaço Métricos com Funções

- **Exemplo:** Seja $C(X)$ o conjunto de funções contínuas e limitadas com domínio $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ e $x,\ y \in C(X)$, defina $d(x, y)$ como:

$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{19}$$

  Logo o par $(C(X), d)$ é um espaço métrico.

- Verifique que as condições são satisfeitas:
  1. $d(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = |x(t^*) - y(t^*)| \geq 0$ onde t^* é o maximizador, e a com igualdade se e somente se $x = y$;
  2. $d(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a,b]} |y(t) - x(t)| = d(y, x)$.
  3. $d(x, z) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - z(t)| = |x(t^*) - z(t^*)| \leq |x(t^*) - y(t^*)| + |y(t^*) - z(t^*)| = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)| = d(x, y) + d(y, z)$

- Em geral vamos utilizar a norma do supremo (norma uniforme) como medida de distância entre funções: $||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Convergência de Sequências

- Ok, temos uma definição de espaço e de distância. Agora podemos definir uma convergência de sequência aplicada para qualquer espaço métrico.

Definition (Convergência de Sequências)

Uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em S converge para $x \in S$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um N_ε tal que:

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N_\varepsilon \tag{20}$$

- Ou seja, uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em um espaço métrico (S, d) se e somente se a sequência de $\{d(x_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ convergir para zero.

Definition (Sequência de Cauchy)

Uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ em S é uma sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existe um N_ε tal que:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \text{ para todo } n, \ m \geq N_\varepsilon \tag{21}$$

- **Observação:** Toda sequência convergente é Cauchy, mas a recíproca não é verdadeira.

Convergência de Sequências

- Intuitivamente, para saber se uma sequência é de Cauchy basta conhecer os pontos da sequência, e não necessariamente para onde ela converge.
- Isto faz com que seja mais fácil identificar uma sequência de Cauchy do que uma sequência convergente.

Definition (Espaço Métrico Completo)

Um espaço métrico (S, d) é completo se toda to sequência de Cauchy em S converge para um elemento em S.

- Ok, mas estamos interessados na convergência de $\lim_{n\to\infty} V_n = V$, e agora?

Espaço de Banach

Theorem

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^l$ e $C(X)$ o conjunto de funções contínuas e limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ com a norma do supremo, $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Logo $C(X)$ é um espaço normado completo (Espaço de Banach)

- **Prova (intuição):** É necessário demostrar que $C(X)$ é um espaço normado e, principalmente completo. Isto envolve demonstrar que existe uma sequência f_n Cauchy. O truque é que convergência na norma do supremo é convergência uniforme, e convergência uniforme preserva continuidade.
- Ou seja, temos uma sequência de funções V_n em $C(X)$ e o limite da sequência também está em $C(X)$.
- Agora que sabemos que estamos buscando nossa função V em um espaço de Banach, se o operador T for uma contração podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Contração

Definition (Contração)

Seja (S, d) um espaço métrico e $T : S \to S$ uma função que mapeia S em ela mesmo. T é uma contração com módulo β se para algum $\beta \in (0, 1)$, $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$, para todo $x, \ y \in S$.

- Ok, satisfazer Espaço de Banach é fácil: basta escolher funções contínuas e limitadas e utilizar a norma-$\sup$. Como mostrar que T é uma contração?

- Utilizar a própria definição de contração e checar se ela é satisfeita por T.

- Muitas vezes é complicado, e por isso é conveniente utilizar as **Condições Suficientes de Blackwell**.

Contração

Theorem (Condições Suficientes de Blackwell)

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^l$ *e seja* $B(X)$ *o espaço de funções llimitadas:* $f : X \to \mathbb{R}$*, com a norma do supremo. Seja* $T : B(X) \to B(X)$ *um operador que satisfaça:*

1. *(monotonicidade)* $f,\ g \in B(X)$ *e* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X$ *implica que* $(Tf)(x) \leq (Tg)(x)$ *para todo* $x \in X$*;*
2. *(desconto) Existe algum* $\beta \in (0, 1)$ *tal que* $[T(f + c)(x) \leq (Tf)(x) + \beta c$ *para todo* $f \in B(X)$*,* $c \geq 0$ *e* $x \in X$*.*

Então T *é uma contração de módulo* β*.*

Exemplo

Modelo de Crescimento Neoclássico:

$$(TV)(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{u(f(k) - k') + \beta V(k')\} \tag{22}$$

1. (monotonicidade) Seja $W(k) \geq V(k)$ para todo k.

$$(TW)(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} u(f(k) - k') + \beta W(k') \tag{23}$$

$$\geq \max_{0 \leq k' \leq f(k)} u(f(k) - k') + \beta V(k') = (TV)(k) \tag{24}$$

   para um $0 \leq k' \leq f(k)$ (k fixo, ou seja o cojunto possível não se altera) e $W(k') \geq V(k')$ por suposição.
2. (desconto) Para um $c \geq 0$:

$$[T(V + c)](k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{u(f(k) - k') + \beta(V(k') + c)\} \tag{25}$$

$$= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{u(f(k) - k') + \beta V(k')\} + \beta c = (TV)(k) + \beta c \tag{26}$$

Teorema do Máximo

- Note que para T ser uma contração o operador precisa resultar em uma função dentro do mesmo espaço $C(X)$.
- Em condições normais é fácil demonstrar isso (soma de f contínuas limitadas é contínua e limitada, etc), mas no nosso caso temos o $\sup$ que deixa a situação mais complicada.
- Considere o problema:

$$\sup_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) \tag{27}$$

- Suponha que $f(x, .)$ seja contínua em y (para um x fixo) e $\Gamma(x)$ seja um conjunto compacto e não vazio. Logo, o máximo existe e a função valor está bem definida:

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y), \tag{28}$$

assim como a correspondência ótima (política):

$$G(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) = \{y \in \Gamma(x); f(x, y) = h(x)\} \tag{29}$$

Teorema do Máximo

Theorem (Teorema do Máximo de Bergé)

Seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma funcão contínua e $\Gamma : X \to Y$ uma correspondência não vazia, contínua e com valores compactos. Então:

1. *A função valor $h : X \to \mathbb{R}$ é contínua;*
2. *A regra de decisão $G : X \to Y$ é não vazia, hemi-contínua superiormente e tem valores compactos.*

Lemma (Teorema do Máximo Convexo)

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^l$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Suponha que $\Gamma : X \to Y$ é não vazia, contínua, com valores compactos e convexos. Seja $f X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua e côncava, para cadda $x \in X$.

1. *A função valor $h(x)$ é côncava e a correspondência $G(x)$ tem valores convexos.*
2. *Se f for estritamente côncava em y para todo x, logo $G(x)$ é contínua com valor único (não é uma correspondência).*

Teorema do Máximo

- Note que o Teorema do Máximo garante que o nosso operador tenha uma solução e que a solução seja contínua.
- Também existe uma versão generalizada onde é f é uma correspondência, mas não será necessário para nossos problemas.
- O lema garante que a solução seja única e que o operador tenha solução côncava.

Exemplo: Modelo de Crescimento Neoclássico

- $u(f(k) - k') + \beta V(k')$: u e f são funções contínuas, logo se $V(k')$ é contínua, a soma será uma função contínua.
- $\Gamma(k) = [0, f(k)]$: 0 e $f(k)$ são funções contínuas de k, logo $\Gamma(k)$ é não vazia, contínua e com valores compactos.

Pelo **Teorema do Máximo** $V(k) = \max_{k' \in [0, f(k)]} u(f(k) - k') + \beta V(k')$ também é contínua. Com argumentos similares podemos dizer que $V(k)$ é limitada e côncava.

Programação Dinâmica

- Ou seja, no modelo de crescimento neoclássico (e em muitos outros) podemos chutar uma solução $V_0(k)$ que seja contínua e limitada (e dependendo do problema, côncava).

- Dado as suposições usuais em u, f e $\beta \in (0,1)$ podemos estabelecer via Teorema do Máximo e Condições Suficientes de Blackwell que o operador $(TV)(k)$ é uma contração.

- Como nossa métrica distância entre funções é a norma-$\sup$, estamos em um espaço de Banach e podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

- Logo existe apenas uma solução V e podemos aproximá-la iterando via o operador, $V_{n+1} = TV$, até o ponto eem que distância entre $||V_{n+1} - V_n||$ é pequena o suficiente.

Programação Dinâmica Sob Certeza

Equação de Bellman

Problema Sequencial:

$$V^*(x_0) = \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \quad \text{(SP)} \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \quad \text{para todo } t \tag{31}$$

$$x_0 \text{ dado.} \tag{32}$$

Equação Funcional:

$$V(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V(y)\} \quad \text{(FE)} \tag{33}$$

Perguntas:

1. A solução de (FE) também satisfaz (SP)? A função política é equivalente a sequência ótima?
2. Como podemos encontrar a solução de (FE)?

Notação e definição...

- X é o conjunto de valores possíveis da variável de estado.
- **Plano possível**: uma sequência $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfaz $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ para todo t.
- Um conjunto de plano possíveis (dado x_0): $\Pi(x_0) = \{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\}$.
- Para todo $n = 0, 1...$ a soma parcial dos retornos (descontados) dado um plano possível $\tilde{x}$ é definido como:

$$u_n(\tilde{x}) = \sum_{t=0}^{n} F(x_t, x_{t+1}). \tag{34}$$

Princípio da Otimalidade

- A idéia que (FE) $\Leftrightarrow$ (SP) é chamada de Princípio da Otimalidade.

- Basicamente são quatro passos:
  1. Mostrar que o supremo de (SP) $V^*(x_0)$ satisfaz (FE): $(SP) \Rightarrow (FE)$.
  2. Mostrar que se existe uma solução da (FE), (e se $\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0$), então é dado por $V^*(x_0)$: $(FE) \Rightarrow (SP)$.
  3. Mostrar que a sequência $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que alcança o supremo do (SP) satisfaz $V = V^*$.
  4. Mostrar que *qualquer* sequência $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfaz $V = V^*$ e $\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) \leq 0$ alcança o supremo do (SP).

- Suposições:
  - **(A1)** $\Gamma(x)$ é não vazio.
  - **(A2)** $\lim_{n\to\infty} u_n(\tilde{x})$ existe para todo $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$ (uma condição suficiente é ter $F(x_t, x_{t+1})$ limitada e $\beta \in (0,1)$).

- É isso. Bastante simples, não?

Princípio da Otimalidade

- Não vamos fazer a demonstração completa (ver SLP Teoremas 4.2-4.5) mas sim dar um pouco de intuição.
- Primeiro: **(A1)** e **(A2)** garantem que (SP) seja bem definido exclusivamente.
- **(A1)** não é muito interessante, apenas garante que podemos escolher alguma sequência.
- **(A2)** é onde está todo o poder do **Princípio da Otimalidade** junto com a suposição $\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0$.
    - Note que (FE) pode ter múltiplas soluções. Lembre-se das condições do Teorema da Contração.
    - Mas se existir uma solução (FE) e a solução satisfaz a condição extra $\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0$, então essa é a solução do (SP) (que é necessariamente única).
    - Lembre-se da TVC. Não existe uma condição equivalente para a forma recursiva, mas de certa forma a condição extra coloca um limite superior no crescimento da utilidade.
    - SLP tem alguns exemplos interessantes para ilustrar essa condição.

Bellman Equations

- Agora já estabelecemos que sob suposições bastante suaves (SP) $\Leftrightarrow$ (FE).
- Podemos então concentrar nas equações de Bellman e estudar este problema com mais cuidado, incluindo como encontrar a solução.
- Suposições (vamos diferenciar das anteriores):
  - **(B1)**: $\Gamma(x)$ é uma correspondência não vazia, contínua, com valor compacto.
  - **(B2)**: $F(x, y)$ é limitada e contínua.
- **(Thm)** Suponha **(B1)** e **(B2)**. Podemos utilizar o instrumental matemático da última seção e:
  - Podemos definir um operador $T : C(X) \to C(X)$.
  - T: tem exatamente um único ponto fixo.
  - Para todo $V_0 \in C(X)$ podemos aproximar via iteração $|T^n V_0 - V|| \leq \beta^n ||V_0 - V||$, $n = 0, 1, 2...$
  - A correspondência política G é hemi-contínua superior e tem valor compacto.

Bellman Equations

- Mais suposições:
  - **(B3)**: $F(x, y)$ é estritamente côncava.
  - **(B4)**: $\Gamma(x)$ tem valores convexos.

- **(Thm)** Suponha **(B1)**, **(B2)**, **(B3)**, e **(B4)**: V é estritamente côncava, e G é contínua e definida exclusivamente. Ou seja, G é uma função política.

- Aqui utilizamos o lema do Teorema do Máximo com convexidade.

- Note que o modelo de crescimento neoclássico satisfaz essas suposições trivialmente.

- Mas não é incomum encontrar modelos que não satisfaçam estas suposições (ex. modelos com escolha discreta, onde o indíviduo escolhe trabalhar ou não, etc)

Bellman Equations

- Mais suposições:
  - **(B5)**: Para todo y, $F(., y)$ é estritamente crescente.
  - **(B6)**: $\Gamma(x)$ é monótona. Ou seja, se $x \leq x'$, então $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$.
- **(Thm)** Suponha **(B1)**, **(B2)**, **(B5)**, e **(B6)**: V é estritamente crescente.
- Esboço da demonstração. Seja $x_0 < x_1$:

$$
\begin{aligned}
V(x_0) = & \max_{y \in \Gamma(x_0)} \{F(x_0, y) + \beta V(y)\} \\
= & F(x_0, g(x_0)) + \beta V(g(x_0)), \text{ para algum } g(x_0) \\
< & F(x_1, g(x_0)) + \beta V(g(x_0)) \\
\leq & \max_{y \in \Gamma(x_1)} \{F(x_1, y)) + \beta V(y)\} = V(x_1)
\end{aligned}
$$

- **Exemplo:** Mostre que o modelo de crescimento neoclássico satisfaz **(B5)**, e **(B6)**.
- Monotonicidade da função valor é uma propriedade bastante explorada numericamente para encontrar a solução da Bellman.

Bellman Equations

- Finalmente, é interessante pensar como utilizar o cálculo para caracterizar a solução do (FE).
- Vimos que dada certas condições a Equação de Euler é condição necessária (mas não suficiente - lembre-se da TVC) para uma solução.
- **(B7)**: F é continuamente diferenciável no interior do conjunto $X \times Y$.
- Como podemos saber o resultado da diferenciação na V? **Teorema do Envelope**.

Theorem (Benveniste-Scheinkman ou Teorema do Envelope)

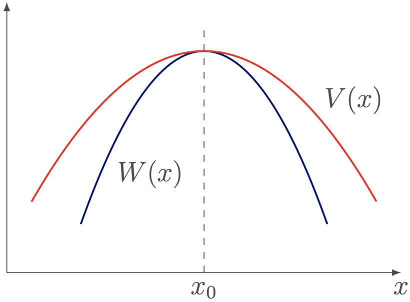
Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^l$, $V : X \to \mathbb{R}$ côncava, $x_0 \in \text{int}(X)$, e D uma vizinhança de x_0. Se existe uma função diferenciável $W : X \to \mathbb{R}$ com $W(x_0)$ e $W(x) \leq V(x)$ para todo $x \in D$, então V é diferenciável em x_0, e $V_i(x_0) = W_i(x_0)$ para $i = 1, 2, ..., l$.

Envelope Theorem

- O teorema do envelope nos diz que se encontramos uma função $W(x) \leq V(x)$ podemos utilizar a derivada desta função para encontrar $V_i(x)$.
- No nosso caso:

$$\begin{aligned} W(x) =& F(x, g(x_0)) + \beta V(g(x_0)) \\ \leq& \max_y \{F(x, y) + \beta V(y)) = V(x) \end{aligned}$$

- Note que $g(x_0)$ é a política ótima em x_0 (mas pode não ser em x) e $V(g(x_0))$ um número (e não uma função).
- Logo: $W_i(x_0) = F_i(x_0, g(x_0)) = V_i(x_0)$.



Envelope Theorem

- **(Thm)** Suponha **(B1)**, **(B2)**, **(B3)**, **(B4)**, e **(B7)**. Se $x_0 \in \mathrm{int}(X)$ e $g(x_0) \in \mathrm{int}(\Gamma(x_0))$, logo V é continuamente diferenciável em x_0, onde a derivada é dada por:

$$V_i(x_0) = F_i(x_0, g(x_0)), \quad i = 1,\ 2, ..., l.$$

- Em palavras: a derivada da função valor é igual a derivada da função retorno, $F(x, y)$, nos argumentos x com y avaliado no ótimo.
- No modelo de crescimento neoclássico: $V_k(k_0) = u'(f(k_0) - g(k_0))f'(k_0)$.
- Intuitivamente: $V_k(k_0) = u'()f'(k_0) \underbrace{-g'(k_0)u'() + g'(k_0)\beta V'(g(k_0))}_{=0 \text{ c.p.o (interior)}}$

Euler Equation

- Dados as nossas suposições podemos derivar uma Equação de Euler para o problema:

$$V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta V(y)\}$$
$$g(x) = \arg\max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta V(y)\}$$

- C.p.o (solução interior do $\max$): $F_y(x, y^*(x)) + \beta V_y(y^*(x)) = 0$.
- Aplicando o Teorema do Envelope: $V_x(x) = F_x(x, y^*(x))$.
- Subsituindo encontramos a Equação de Euler na sua forma geral:

$$F_y(x, y^*(x)) + \beta V_y(y^*(x)) = 0$$
$$F_y(x, y^*(x)) + \beta F_x(y^*(x), y^*(y^*(x))) = 0$$

ou $F_{x_{t+1}}(x_t, x_{t+1}) + \beta F_{x_{t+1}}(x_{t+1}, x_{t+2}) = 0$

Exemplo

Mas uma vez vamos ver o Modelo de Crescimento Neoclássico

$$V(k) = \max_{k' \in [0, f(k)]} u(f(k) - k') + \beta V(k') \tag{35}$$

- Variável estado: k;
- Variável controle: k';
- Conjunto de restrição: $\Gamma(k) = [0, f(k)]$;
- Função retorno: $F(k, k') = u(f(k) - k')$.

Suposições

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, estritamente crescente e côncava;
- $f(0) = 0$ e para algum $\bar{k} > 0$, $k \leq f(k) \leq \bar{k}$, para para todo $k \in [0, \bar{k}]$ e $f(k) < k$ para todo $k > \bar{k}$.
- $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, estritamente crescente e côncava; $\beta \in (0, 1)$.

Exemplo

- É fácil de mostrar que a maior parte das suposições necessárias são satisfeitas.
- Talvez a menos intuitiva é que a suposição que a função retorno seja limitada.
- Basta lembrar que dada as suposições na função de produção a economia eventualmente chegará no estado estacionário.
  - Se iniciarmos a economia em $k_0 < k_{ss}$, ocorrerá acumulação de capital até k_{ss}. Portanto o capital sempre será limitado por k_{ss}.
  - Caso $k_0 > k_{ss}$, ocorrerá desacumulação de capital até k_{ss}. Portanto o capital será limitado por k_0.
- Capital é limitado por $\max\{k_0, k_{ss}\}$.
- Portanto, $\Gamma(k)$ tem valor compacto e $u(k, k')$ é limitada. Dada as outras suposições **(B1)** e **(B2)** são satisfeitas. $\Rightarrow$ Princípio da otimalidade e Ponto Fixo de Banach podem ser aplicados.

Exemplo

- u é estritamente côncava e claramente $\Gamma \in [0, f(k)]$ tem valor-convexo ($f(k)$ é contínua), logo **(B3)** e **(B4)** são satisfeitas.
  - Lema do Teorema do Máximo se aplica e a função valor será estritamente côncava e a política ótima será uma função contínua.
- $u(k, k')$ é estritamente crescente em k e $\Gamma \in [0, f(k)]$ é monótona (já que $f(k)$ é estritamente crescente), logo **(B5)** e **(B6)** são satisfeitas.
  - $V(k)$ é uma função estritamente crescente.
- u e f são diferenciáveis, **(B7)**, logo a função é diferenciável (Teorema do Envelope). Se k for interior:

$$V'(k) = u'(f(k) - g(k))f'(k)$$

note que se condições de Inada são satisfeitas $g(k)$ será interior.

Exemplo

- Finalmente, tomamos c.p.o do problema da equação funcional:

$$u'(f(k) - g(k)) = \beta V'(k)$$

- Combinando com o Envelope:

$$u'(f(k) - g(k)) = \beta f'(g(k))u'(f(g(k) - g(g(k)))$$
$$u'(c_t) = \beta f'(k_{t+1})u'(c_{t+1})$$

- Finalmente encontramos a nossa Equação de Euler.

Encontrando a Função Valor

Como Encontrar a Função Valor?

1. Chute e verifique (*guess and verify*) / método dos coeficientes indeterminados.

2. Processo iterativo.

Chute e verifique

- Sob certas condições conseguimos resolver o problema sequencial analiticamente.
- De maneira similar podemos resolver a função valor analiticamente em casos especiais.
- Suponha $u(c) = \ln(c)$ e $f(k) = k^{\alpha}$ (ou seja, $\delta = 1$).
- Chute que a função valor tem a seguinte forma:

$$V = A + B\ln(k)$$

  A e B são os coeficientes que precisam ser encontrados.
- Vamos proceder em 3 passos.

Chute e verifique

Passo 1: Resolva o problema de maximização

$$V = \max_{0 \leq k \leq k^\alpha} \{\ln\big(k^\alpha - k'\big) + \beta(A + B\ln\big(k'\big))\}$$

A c.p.o é suficiente e a solução é interior:

$$k' = \frac{\beta B k^\alpha}{1 + \beta B}$$

Passo 2: Avalie o lado direito no k' ótimo

$$V = -\ln(1 + \beta B) + \alpha \ln(k) + \beta A + \beta B \ln\left(\frac{\beta B}{1 + \beta B}\right) + \alpha\beta \ln(k)$$

Chute e verifique

Passo 3: Substitua o lado esquerdo pelo chute e encontre A e B

$$
\begin{aligned}
A + B\ln(k) &= -\ln(1+\beta B) + \alpha\ln(k) + \beta A + \beta B\ln\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right) + \alpha\beta\ln(k) \\
(B - \alpha(1+\beta B))\ln(k) &= -A - \ln(1+\beta B) + \beta A + \beta B\ln\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right)
\end{aligned}
$$

Note que o único jeito do lado esquerdo (que depende de k) ser igual ao direito é se $(B - \alpha(1+\beta B)) = 0$:

$$
B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta},
$$

substituindo B no lado direito e igualando a zero:

$$
A = \frac{\beta}{1-\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln(\alpha\beta) + \ln(1-\alpha\beta)\right].
$$

Processo Iterativo

- Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach sabemos que se chutarmos uma função $V_0(k) \in C(k)$ e iterarmos para frente o nosso chute converge geometricamente (β^n) para a solução única V.
- Pseudo-algoritmo:
  1. Escolha um chute V_0 e um grau de tolerância $\varepsilon > 0$
  2. Compute V_{n+1} utilizando o operador:

     $$V_{n+1}(k) = \max_{0 \leq k \leq f(k)} \{u(f(k) - k') + \beta V_n(k)\}$$

     isso implica resolver o problema de maximização e avaliar utilizando k'^* ótimo.
  3. Calcule $d = \sup ||V_{n+1} - V_n||$.
  4. Se $d < \varepsilon$, encontramos a função valor $V_{n+1} = V$. Caso contrário atualize o chute, $V_n = V_{n+1}$ e retorne ao ponto 2.
- Note que não vamos iterar ao infinito (nossa vida é finita). Por outro lado temos que escolher um ε pequeno para ter uma boa aproximação.

Iteração da Função Valor

- Na prática vamos utilizar a Iteração do Ponto Fixo (*Value Function Iteration - VFI*) no computador.
- Se quiser tentar iterar analiticamente, utilize o exemplo do método de coeficientes indeterminados e chute $V_0 = 0$. Verifique que a V_{n+1} se aproxima a solução encontrada.
- No computador temos que nos preocupar com alguns detalhes:
  1. Como aproximar V?
  2. Como resolver o problema de maximização?
- Descreverei a versão mais simples para resolver o problema numericamente: VFI com função valor discretizada linearmente em trechos (*piecewise linear function*) e utilizar *grid search* para a maximização.
- Este método é o mais robusto e sabemos exatamente as condições para seu funcionamento, mas existem outros métodos mais rápidos que necessitam suposições extras, por exemplo utilizando a EE ou a função política.

Iteração da Função Valor

1. Discretize k em um vetor com I pontos entre $\underline{K}$ e $\overline{K}$. Defina os pontos na grade como $\{K_1, K_2, ..., K_I\}$.
   - O número de pontos I é determinado pelo trade-off entre velocidade e precisão.
   - Os pontos podem ser equidistantes ou dependendo do problema na região com maior curvatura da função valor.
   - Escolha $\underline{K}$ e $\overline{K}$ de maneira que $0 < \underline{K} < k_{ss} < \overline{K}$.
2. A função valor será armazenada em um vetor com I pontos: $\{V_i\}_{i=1}^{I}$. Inicie o vetor com seu "chute" V^0 (cada ponto de V_i é o valor associado ao capital k_i).
3. Compute V_i^{n+1} utilizando o procedimento para todo i (*grid search*):
$$V_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} u(f(k_i) - k_j) + \beta V_j^n, & \text{se } f(k_i) - k_j = c_{i,j} > 0 \\ -\infty, & \text{se } f(k_i) - k_j = c_{i,j} \leq 0 \end{cases}$$
$$V_i^{n+1} = \max\{V_{i,1}^{n+1}, V_{i,2}^{n+1}, ..., V_{i,I}^{n+1}\}$$
4. Calcule $d = \max_{i=1,..,I} |V_i^{n+1} - V_i^n|$. Se $d < \varepsilon$, encontramos a função valor $V_{n+1} = V$. Caso contrário atualize o chute, $V_n = V_{n+1}$ e retorne ao ponto anterior.

Iteração da Função Valor

- Quando terminar é bom fazer alguns diagnósticos:
  - Observe se os limites escolhidos $\underline{K}$ e $\overline{K}$ são suficientemente altos de maneira que a solução seja interior.
  - Experimente diminuir um pouco mais o grau de tolerância ε ou o número de pontos I. Se sua aproximação for boa a V não deve alterar muito.
- A maximização tende a ser o passo computacionalmente mais custoso.
  - Muitas vezes pode ser acelerado explorando propriedades de V (concavidade, monotonicidade).
  - Pode ser feito via "grid search" ou utilizando interpolação com um algoritmo de otimização (Newton, etc).
- A função política (via grid search) $g_i = j$ é um mapa de um ponto da grade i para outro ponto da grade j.
  - Para avaliar pontos "fora da grade" temos que usar algum tipo de interpolação.

Alguns Exemplos

Exemplo: T finito

- Até o presente momento estudamos problemas de sequência infinita: em todo período o problema é igual.
- Em problemas com sequência finita isso não é verdade.
- Considere o problema de "Cake-Eating": o agente nasce com ativos a_0 e tem que comer o bolo até a sua morte em T.

$$V(a_0) = \max_{\{a_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t), \quad u \text{ segue as suposições usuais,} \tag{36}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + a_{t+1} = a_t(1+r), \quad \text{para } t = 0, 1, .., T \tag{37}$$

$$a_0 \text{ dado.} \tag{38}$$

- No $t = 0$ o agente vai escolher poupar alguma parte do bolo (independentemente do a_0). No $t = T$ o agente vai escolher comer tudo (não recebe mais utilidade em $T + 1$).

Exemplo: T finito

- A decisão ótima vai depender do período da vida.
- Forma recursiva:

$$V_t(a) = \max_{a' \in [0, a(1+r)]} \{u(a(1+r) - a') + \beta V_{t+1}(a')\} \tag{39}$$

  - Variável estado: a e t;
  - Variável controle: a';
  - Conjunto de restrição: $\Gamma(a) = [0, a(1+r)]$;
  - Função retorno: $F(a, a') = u(a(1+r) - a')$.

- Ou seja, a idade do agente (t) é uma variável estado (também podemos escrever $V(a, t)$).

Resolvendo o Problema

- Com problemas de T finito podemos resolver o problema por *backward induction* em vez de iterar até a convergência no ponto fixo.
- No período T: $V_{T+1} = 0$ e $g_T(a) = 0$. Logo $V_T(a) = u(a(1+r))$.
- Apartir daí podemos encontrar $V_{T-1}(a)$, $V_{T-2}(a), ..., V_1(a)$.
- Problemas em que a função valor depende de T são considerados problemas de prog. dinâmica não-estacionários.
- Os problemas mais simples são de sequências finitas, mas também inclui problemas com sequência infinita em que algum parâmetro ou função depende de T.
  - Não vamos estudar problemas com sequência infinita não-estacionária. Com algumas modificações os teoremas que vimos são aplicáveis a estas situações (ver Acemoglu cap 6).

Exemplo: 2-period McCall Search Model

- Dois períodos: $t = 1, 2$.
- Cada período o agente recebe uma oferta *iid* de salário w de uma c.d.f $F(w)$ com suporte $[\underline{\omega}, \overline{\omega}]$.
- Decisão:
  - Se aceitar (A): recebe w no período atual e até o fim da vida.
  - Se rejeitar (R): recebe $\alpha \in (\omega, \omega)$ no período atual e recebe uma nova oferta no período seguinte (se estiver vivo).
- Problema típico de *Real Option* (as vezes chamamos a função valor de *asset value equation*).
- Utilidade linear e $\beta \in (0, 1)$: o agente maximiza: $\mathbb{E}[y_0 + \beta y_1]$, onde y_t é igual a α ou w.
- A solução envolve encontrar o salário de reserva $w_{t,R}$. Salário onde o agente é indiferente em aceitar ou rejeitar o trabalho.

Exemplo: 2-period McCall Search Model

- Estado: w e t.
- Controle: $c = \{\text{A, R}\}$, ou podemos representar como uma função indicadora $c = \{1, 0\}$, onde 1 é o aceite.
- Função retorno: $F(w) = \begin{cases} w \text{ se } c = \text{A}, \\ \alpha \text{ se } c = \text{R}. \end{cases}$
- *Feasible set*: $\Gamma = \{\text{A, R}\}$.

Solução: Período 2

- Função valor: $V_2(w) = \begin{cases} w \text{ se } c = \text{A}, \\ \alpha \text{ se } c = \text{R}. \end{cases}$
- Função política: $g_2(w) = \begin{cases} \text{A se } w \geq \alpha, \\ \text{R se } \alpha < w. \end{cases}$
- Ou seja, $V_2(w) = \max\{w, \alpha\}$ e salário de reserva $w_{2,R} = \alpha$.

Exemplo: 2-period McCall Search Model

Solução: Período 1

- Função valor:
  - Aceite (A): $V_1^A(w) = w + \beta w$,
  - Rejeite (R): $V_1^R(w) = \alpha + \beta \mathbb{E}[V_2(w')]$
- Função política: $g_1(w) = \begin{cases} \text{A se } V_1^A(w) \geq V_1^R(w), \\ \text{R se } V_1^A(w) < V_1^R(w). \end{cases}$
- Ou seja, $V_2(w) = \max\{w(1+\beta), \alpha + \beta \mathbb{E}[V_2(w)]\}$, onde:

$$\mathbb{E}[V_2(w)] = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} V_2(w')dF(w') = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \max\{w', \alpha\}dF(w')$$

$$= \int_{\underline{\omega}}^{\alpha} \alpha dF(w') + \int_{\alpha}^{\overline{\omega}} w'dF(w') = \alpha F(\alpha) + \int_{\alpha}^{\overline{\omega}} w'dF(w').$$

Exemplo: 2-period McCall Search Model

Solução: Período 1

- Salário de reserva no período 1:

$$w_{1,R}(1+\beta) = \alpha + \beta \left[\alpha F(\alpha) + \int_{\alpha}^{\overline{\omega}} w' dF(w') \right]$$

$$w_{1,R} = \frac{\alpha}{(1+\beta)} + \frac{\beta}{(1+\beta)} \left[\alpha F(\alpha) + \int_{\alpha}^{\overline{\omega}} w' dF(w') \right]$$

- Ou seja, $V_1^A(w_{1,R}) = V_1^R(w_{1,R})$

Equilíbrio Competitivo Recursivo

Equilíbrio Competitivo Recursivo

- Assim como utilizamos o Social Planner, a programação dinâmica facilita a solução do problema dinâmico.
- Mas no final das contas estamos interessados é no equilíbrio do modelo. Como descrever o equilíbrio competitivo em forma recursiva?
- Vamos escrever a Bellman dos agentes que fazem escolhas dinâmica. No modelo de Crescimento Neoclássico são as famílias.
- Quais são as variáveis estado? k e...?
  - E os preços? r e w...
  - Os preços são função do capital (MPK e MPN).
- Mas a Bellman representa o problema de uma única família, e a decisão de uma única família não pode alterar os preços da economia!
  - Um agente (em um equilíbrio competitivo) toma os preços como dado! São **atomísticos**.

Equilíbrio Competitivo Recursivo: *The 'big K, little k' trick*

- Vamos diferenciar o capital "agregado" da economia, K, do capital de uma família, k: *The 'big K, little k' trick*.
- Suposições: continuum de indivíduos i com medida unitária e todos os agentes são simétricos:
$$K = \int_0^1 k_i di = \int_0^1 k di \tag{40}$$
ou seja, o capital agregado é soma do capital de todas famílias.
  - Note que neste caso é trivial que $K = k$ já que todos os agentes são iguais e portanto tomam a mesma decisão.
  - Mas esta distinção é importante se os agentes forem heterogêneos!
- Os preços r e w são funções do capital **agregado** (e caso seja relevante para o problem, do trabalho agregado $N = \int_0^1 n_i di = 1$).
- As famílias não escolhem o estado agregado K, mas formam expectativas sobre a sua evolução.

Equilíbrio Competitivo Recursivo: Crescimento Neoclássico

Problema da Firma

- Problema da firma é estático.
  - Se as firmas fossem heterogêneas teríamos que agregar a demanda de todas as firmas: $K^d = \int_{f \in F} k_f^d df$.
- Neste caso, vamos simplificar e assumir uma firma representativa (e resolver o problema utilizando as variáveis agregadas).

$$\max_{K,N} F(K,N) - r(K)K - w(K)N$$

- cpo:

$$r(K) = F_k(K,1) \quad \text{e} \quad w(K) = F_n(K,1)$$

- Ou seja, os preços são funções dos estados agregados.

Equilíbrio Competitivo Recursivo: Crescimento Neoclássico

Problema das Famílias

- Estado: k e K.

$$
\begin{aligned}
V(k,K) = \max_{c,\ k'\geq 0} & \{u(c) + \beta V(k',K')\} \\
s.t. \quad & c + k' = w(K) + (1 + r(K) - \delta)k \\
& K' = H(K)
\end{aligned}
$$

- Policy functions: $c^* = g^c(k,K)$ e $k'^* = g^k(k,K)$.
- $K' = H(K)$ é a lei de movimento percebida pelo agente (*perceived law of motion*).
- Os agentes não escolhem K mas eles formam expectativas sobre a sua evolução (e portanto sobre os preços futuros!).
- **Expectativas Racionais:** Como eles são racionais e "conhecem" o modelo $\Rightarrow$ a lei de movimento percebida será igual a a lei de movimento verdadeira.

Equilíbrio Competitivo Recursivo: Crescimento Neoclássico

- **Definição:** Um equilíbrio recursivo competitivo é uma função valor, V, regras de decisão (funções políticas) g^k e g^c, funções preço, r e w, e lei de movimento agregado H, que:

  1. Dado as funções, r, w e H, a função valor V é a solução da equação de Bellman das famílias com as regras de decisão g^k e g^c.
  2. Os preços satisfazem:
  $$r(K) = F_k(K, 1) \quad \text{e} \quad w(K) = F_n(K, 1).$$
  3. As expectativas dos agentes são racionais (ou lei de movimento percebida é *consistente* com a lei de movimento verdadeira):
  $$H(K) = g^k(K, K).$$
  4. *Market clearing* para todo K:
  $$g^c(K, K) + g^k(K, K) = F(K, 1) + (1 - \delta)K.$$

Equilíbrio Competitivo Recursivo: Crescimento Neoclássico

- A definição de um equilíbrio recursivo é usual, exceto para o ponto 3.
- O ponto 3 simplismente declara explicitamente que **em equilíbrio** a lei de movimento percebida tem que ser igual a lei de movimento realizada ao agregar as decisões dos agentes individuais:

$$K' = H(K) = \int_0^1 k_i'^{*} di = g(K, K),$$

  onde, em equilíbrio, podemos usar o truque $k = K$.
- Ou seja, os agentes tem **expectativas racionais**: escolhem $g^k(k, K)$ e esperam $H(K)$. Expectativas corretas implicam $K = k$ e que os preços são consistentes com as escolhas dos HH.
- Isto implica em um **Ponto Fixo**: Policy functions dependem de K, e K é o resultado da agregação de g^k.
  - Neste problema isto é trivial, mas com agentes heterogêneos pode ser uma parte custosa da resolução do modelo.

Taking Stock

- Estudamos as condições para que um problema de **programação dinâmica** seja bem comportado
    - Quais as condições para a solução única e como aproximar a solução.
    - Além de como aproximar esta solução numericamente.

- Também vimos que dado condições fracas a solução do SP é a mesma da FE.

- Finalmente, aprendemos como definir um equilíbrio recursivo.