Macroeconomia I

Incerteza e Programação Dinâmica Estocástica

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Até o presente momento todos os problemas estudados eram determinísticos.
- Incerteza é uma parte importante da dinâmica econômica:
  - A renda das famílias flutuam individualmente: indíviduos perdem o emprego, recebem aumento, etc.
  - A produtividade das firmas se altera ao longo do tempo, idéias e novos produtos são introduzidos no mercado.
  - A economia agregada flutua ao longo do tempo.
- Para estudar incerteza vamos:
  1. Resolver e representar modelos dinâmicos de equilíbrios geral com incerteza.
  2. Relembrar processos estocásticos e cadeias de Markov.
  3. Introduzir a programação dinâmica estocástica.

Incerteza em Equilíbrio Geral

[LS: Cap 8; PK: Cap 6; DK: Cap 6.]

Notação

- Um evento (estocástico) no período t: $s_t \in S$. S é o conjunto de eventos possíveis (finito e igual em todo o t).
- Um histórico de eventos é um vetor representado por: $s^t = (s_0, s_1, ..., s_t)$.
- Formalmente $s^t \in S^t$, onde $S^t = S \times S \times S... \times S$.
- A probabilidade de observar um histórico particular de eventos é dado por: $\pi(s^t)$.
- Já a probabilidade conditional de observar s^t após a realização de s^τ: $\pi(s^t|s^\tau)$.
- Em alguns lugares você também pode encontrar a representação de um sub-histórico de s^t como: $s^t_{\rightarrow t-1}$.

Notação

- Agora todos os bens da economia em vez de serem "apenas" indexado por t, também têm que ser indexado pelo histórico de eventos s^t: $c_t(s^t)$.
- Um agente escolhe uma sequência de consumo dependente do histórico de eventos: $\{c_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.
- Agentes maximizam a **utilidade esperada**:

$$U(\{c_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{s^t \in S^t} \pi(s^t) u(c_t(s^t)) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]. \tag{1}$$

- **Exemplo:** Economia de dotação com com dois agentes.
- Os agentes $i = \{1, 2\}$ recebem uma dotação $e_t^i(s^t)$ dependendo do histórico de s^t.

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Trocas ocorrem no período 0 antes de qualquer incerteza ser realizada.
- No período 0 agentes trocam consumos em todos os períodos e *possíveis realizações de* s^t.
- Defina o preço de uma unidade de consumo (ou melhor dizendo, *claims* de uma realização de consumo) em t e s^t: $p_t(s^t)$.
- A restrição orçamentária de um agente i no período 0:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) e_t^i(s^t). \tag{2}$$

- *Market clearing* tem que ser sustentado em todas as datas e possíveis históricos de eventos!

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t. \tag{3}$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

Definição. Um equilíbrio competitivo Arrow-Debreu é uma sequência de alocações $\{c_t^1(s^t), c_t^2(s^t\}_{t=0,\ s^t \in S^t}^{\infty}$ e preços $\{p_t(s^t)\}_{t=0,\ s^t \in S^t}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{p_t(s^t)\}_{t=0,\ s^t \in S^t}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1(s^t), c_t^2(s^t\}_{t=0,\ s^t \in S^t}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i(s^t) \geq 0\}_{t=0,\ s^t \in S^t}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t(s^t)) \tag{4}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) e_t^i(s^t). \tag{5}$$

2. O mercado de bens está em equilíbrio (*feasibility*):

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t. \tag{6}$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Resolução para um agente arbitrário:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t^i(s^t)) + \lambda^i \left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) \left[e_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \tag{7}$$

- E as cpo...

$$\beta^t \pi(s^t) u'(c_t^i(s^t)) = \lambda^i p_t(s^t) \quad \forall t,\ s^t,\ i$$

- Note que ao substituir por λ o agente equaliza a utilidade marginal entre diferentes estados da natureza.

$$\beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \frac{u'(c_t^i(s^t))}{u'(c_0^i(s_0))} = \frac{p_t(s^t)}{p_0(s_0)} \quad \forall t,\ s^t,\ i$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- A razão da utilidade marginal entre agentes é constante em todo o t e s^t:

$$\frac{u'(c_t^2(s^t))}{u'(c_t^1(s^t))} = \frac{u'(c_0^2(s_0))}{u'(c_0^1(s_0))} \quad \forall t,\ s^t$$

- Exemplo com u CRRA:

$$\left(\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)}\right)^{-\sigma} = \left(\frac{c_0^2(s_0)}{c_0^1(s_0)}\right)^{-\sigma} \quad \forall t,\ s^t$$

  $\Rightarrow$ Razão do consumo entre dois agentes é constante em todo o t e s^t.

- Dado a restrição de recursos: $c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) = e_t(s^t)$: um agente consume uma fração constante θ^i da dotação agregada $e_t(s^t)$.
- Existe **perfect risk sharing** entre os agentes!

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Existe **perfect risk sharing** entre os agentes! Flutuações de consumo são dadas por flutuações da renda agregada e não da renda individual.

- A alocação competitiva não depende do histórico de eventos s^t nem da distribuição das dotações realizadas (as trocas são negociadas no período 0).

- Note a necessidade das suposições de informação perfeita e de que os contratos são executáveis (*full enforcement*).

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Resolver para os preços, utilizamos otimalidade + restrição de recursos:

$$
\begin{aligned}
p_t(s^t) = &\quad \beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \left(\frac{c_t^i(s^t)}{c_0^i(s_0)} \right)^{-\sigma} \\
= &\quad \beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \left(\frac{e_t(s^t)}{e_0(s_0)} \right)^{-\sigma}
\end{aligned}
$$

- Ou seja, o "preço" do consumo em um estado da natureza s^t depende da probabilidade que este estado seja realizado e da quantidade de riqueza (agregada).

- O preço de um seguro em um período de "vacas magras" é alto já que nenhum agente quer distribuir seus dotes.

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Agora vamos definir um mercado sequencial. Em todos os períodos os mercados abrem e as trocas ocorrem.
- Para equivalência entre um mercado do tipo Arrow-Debreu e um mercado sequencial com incerteza precisamos entregar uma unidade de consumo em **todos os estados da natureza**.
- Isto é: eu posso comprar um contrato ao preço de $q_t(s_{t+1}, s^t)$ no período t e histórico s^t que me entregue uma unidade de consumo no período seguinte e com evento s_{t+1}, para cada evento s_{t+1}.
- O agente poderá, no período t, se proteger completamente de qualquer evento que ocorrerá em $t+1$ comprando um contrato para cada s_{t+1}.
- Estes instrumentos financeiros são conhecidos como: **Arrow securities**.
- No caso que seja possível negociar *Arrow securities* em todos os períodos e estados da natureza Arrow (1964) mostra que podemos negociar bens entre diferentes t e s^t (ou seja, mercados completos) implementar mercados completos (livre troca entre bens).

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Defina $a_{t+1}(s_{t+1}, s^t)$ como a quantidade de Arrow securities comprada pelos agentes no período t.
- A restrição orçamentária de um agente arbitrário i em t e s^t:

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q(s_{t+1}, s^t) \leq e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t)$$

- Note que os agentes compram Arrow securities em t para todas as contigências $s_{t+1 \in S}$, mas logo que s_{t+1} é realizado a posição financeira de $t+1$ é apenas $a_{t+1}(s_{t+1}, s^t)$ correspondente ao estado realizado.
- O mercado de Arrow securities precisa igualar a zero em todos os períodos e eventos.

Estrutura de Mercado: Sequencial

Definição. Um equilíbrio competitivo com Mercados Sequenciais é uma sequência de alocações $\{c_t^i(s^t), a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t), \}_{t=0,\ i=1,2,\ s^t\in S^t}^{\infty}$ e preços $\{q(s_{t+1}, s^t)\}_{t=0,\ s^t\in S^t}^{\infty}$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{q(s_{t+1}, s^t)\}_{t=0,\ s^t\in S^t}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^i(s^t), a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t), \}_{t=0,\ i=1,2,\ s^t\in S^t}^{\infty}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i>0,\ a_{t+1}^i(s_{t+1},s^t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t\in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t(s^t)) \tag{8}$$

$$s.t. \quad c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) \leq e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t) \quad \forall t,\ s^t \tag{9}$$

$$a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \geq -\overline{A}^i \quad \forall t,\ s^t; \quad a_0^i \text{ dado.} \tag{10}$$

2. O mercado de bens e de ativos (títulos) estão em equilíbrio:

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t \tag{11}$$

$$a_{t+1}^1(s_{t+1}, s^t) + a_{t+1}^2(s_{t+1}, s^t) = 0 \quad \forall t\ s^t \in S^t \text{ e } s_{t+1} \in S \tag{12}$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Resolução para um agente arbitrário:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t^i(s^t)) + \dots \right.$$

$$\left. \dots \sum_{s^t \in S^t} \lambda_t^i(s^t) \left[e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) - \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) \right] \right)$$

- E as cpo (onde $\lambda_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)$ é o multiplicador para s_{t+1} dado um histórico s^t) ...

$$\beta^t \pi(s^t) u'(c_t^i(s^t)) = \lambda_t^i(s^t) \quad \forall t,\ s^t,\ i$$

$$\lambda_t^i(s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) = \lambda_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)$$

- Note a equivalência entre Arrow-Debreu e sequencial quando:

$$q_t(s_{t+1}, s^t) = \frac{p_{t+1}(s^{t+1})}{p_t(s^t)}$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Ou seja, a função preço (*pricing kernel*) é:

$$q_t(s_{t+1}, s^t) = \beta \frac{u'(c^i_{t+1}(s^{t+1}))}{u'(c^i_t(s^t))} \pi(s^{t+1}|s^t)$$

  onde $\pi(s^{t+1}|s^t) = \pi(s_{t+1}, s^t)/\pi(s^t)$.

- O preço de **um** Arrow security associado ao estado s_{t+1}. Lembre-se que as Arrow-securities pagam apenas em um estado da natureza (nos outros pagam 0).
- A *pricing kernel* é a bastante usadas em macro-finance e partir dela podemos precificar variados ativos.
- Por exemplo, podemos precificar o preço de um título livre de risco (não contingente ao estado) como:

$$\sum_{s_{t+1}|s^t} q_t(s_{t+1}, s^t) = R_t^{-1}.$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Ou seja, o preço de **full consumption insurance** em t, é a soma dos preços das Arrow securities associada a todos os eventos s_{t+1}:

$$\sum_{s_{t+1}|s^t} q_t(s_{t+1}, s^t) = \beta \sum_{s_{t+1}|s^t} \frac{u'(c^i_{t+1}(s^{t+1}))}{u'(c^i_t(s^t))} \pi(s^{t+1}|s^t)$$

- Note que $\sum_{s_{t+1}} \pi(s^{t+1}|s^t) u'(c^i_{t+1}(s^{t+1})) = \mathbb{E}_t \left[u'(c^i_{t+1})\right]$ é a utilidade marginal do consumo esperada condicional a informação em t.

- Finalmente podemos re-escrever a Euler Equation:

$$u'(c^i_t(s^t)) = \beta R_t \mathbb{E}_t[u'(c^i_{t+1}(s^{t+1})] \quad \forall t,\ s^t.$$

Cadeias de Markov

[LS: Cap 2; PK: Cap 6; DK: Cap 6; SLP: Cap 8.]

Introdução

- Até o presente momento não especificamos a estrutura da incerteza: a princípio um evento pode depender de todo o histórico de eventos anteriores.
- Em macro a incerteza será basicamente modelada como Cadeias de Markov e equações de diferenças lineares de primeira ordem (por exemplo um AR(1)).
- Ou seja, vamos ignorar o histórico e concentrar apenas na última realização.
- Mas nada nos impede de especificar processos estocásticos mais gerais!

Cadeias de Markov

- **Definição**: Seja $x_t \in X$, onde $X = \overline{x}_1,\ \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ é um conjunto finito de valores. Uma Cadeia de Markov Estacionária é um processo estocástico $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ definido por X, uma matriz de transição $P_{n\times n}$, e uma distribuição de probabilidade inicial π_0 (vetor $1 \times n$) para x_0.

- **Propriedade Markoviana**: Um processo estocástico $\{x\}$ possui a Propriedade Markoviana se para todo $k \geq 1$ e todo t: $Prob(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-k}) = Prob(x_{t+1}|x_t)$.

- Os elementos de $P_{n\times n}$ representam as probabilidades: $P_{ij} = Prob(x_{t+1} = \overline{x}_j | x_t = \overline{x}_i)$.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ P_{n1} & & P_{nn} \end{bmatrix}$$

- Para todo i: $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$.

Cadeias de Markov

- A matriz de transição define as probabilidades de mover de um estado i para o estado j em um período.

- A probabilidade de sair de um estado para outro em dois períodos: P^2.

$$Prob(x_{t+2} = \overline{x}_j | x_t = \overline{x}_i) = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} P_{kj} \equiv P_{ij}^{(2)},$$

  onde $P_{ij}^{(2)}$ é o elemento $(i,\ j)$ de P^2.

- Dado o vetor π_0, π_1 é a probabilidade incondicional de x_1: $\pi_1 = \pi_0 P$.

- De maneira análoga: $\pi_2 = \pi_0 P^2$, $\pi_t = \pi_0 P^t$ e $\pi_{t+1} = \pi_t P$

- **Definição**: Uma distribuição incondicional **estacionária** para P é um vetor de probabilidade π que $\pi = \pi P$.

- Logo uma distribuição estacionária satisfaz:

$$\pi I = \pi P,$$
$$\pi I - \pi P = \pi[I - P] = 0.$$

  Isto é, π é um autovetor de P (normalizado $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$), com um autovalor unitário.

- O fato de P ter elementos não negativos e linhas que somam a um garante que P tenha pelo menos um autovetor e autovalor.

- Mas a distribuição estacionária não necessariamente é única.

Cadeias de Markov

- **Exemplo**:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A matriz P tem dois autovalores unitários associados as distribuições estacionárias $\pi = [1\ 0\ 0]$ e $\pi = [0\ 0\ 1]$.

- Note que qualquer distribuição inicial com massa 0 no segundo estado é uma distribuição estacionária.

- Os estados 1 e 3 são estados absorventes, uma vez que você entra neles nunca sairá.

Cadeias de Markov

- Seja π_∞ o único vetor que satisfaça $\pi_\infty = \pi_\infty P$ e, se para todas as distribuições iniciais π_0:

$$\lim_{t \to \infty} \pi_0 P^t = \pi_\infty$$

- Então podemos dizer que a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária com uma distribuição invariante única.
- **Teorema:** Seja P uma matriz de transição com $P_{ij} > 0 \ \forall (i,j)$. Logo P tem uma distribuição invariante única e a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária.
- **Teorema:** Seja P uma matriz de transição com $P_{ij}^n > 0 \ \forall (i,j)$, para algum $n \geq 1$. Logo P tem uma distribuição invariante única e a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária.
- Intuitivamente tem que ser possível ir de um estado a outro em um (teorema 1) ou n passos (teorema 2).

Programação Dinâmica Estocástica

[A: Cap 16; SLP: Cap 9-10.]

Programação Dinâmica Estocástica

- A maior vantagem da programação dinâmica aparece quando introduzimos incerteza.
- Quando representamos o processo estocástico como uma Cadeia de Markov apenas a última realização é suficiente $\Rightarrow$ não há necessidade de escrever todo o histórico.
- Os teoremas são semelhantes aos anteriores com algumas modificações em consideração ao processo estocástico z. Referências: Acemoglu ou SLP.

Programação Dinâmica Estocástica

Crescimento Estocástico

- Suponha que z_t seja uma Cadeia de Markov de primeira ordem com densidade condicional $f(z'|z)$.
  - O valor de z contém informação sobre o problema no período t e sobre a esperança do período $t+1$.
- Suponha que a função de produção dependa de z na seguinte maneira zk^α.
- A equação de Bellman para o modelo neoclássico:

$$V(k,z) = \max_{k' \in [0, zf(k)+(1-\delta)k]} \{u(zk^\alpha + (1-\delta)k - k') + \beta \mathbb{E}[V(k',z')|z]\},$$

onde $\mathbb{E}[V(k',z')|z] = \int V(k',z') f(z'|z) dz'$.

- Com a função política: $k' = g(k,z)$.

Programação Dinâmica Estocástica

- CPO:

$$u'(zk^{\alpha} + (1-\delta)k - k) = \beta \mathbb{E}[V_k(k', z')|z]$$

- E a condição de envelope:

$$V_k(k', z') = u'(z'k'^{\alpha} + (1-\delta)k' - k'')(z'\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

- Equação de Euler estocástica:

$$u'(c(k,z)) = \beta \mathbb{E}[u'(c(k', z'))(z'\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)|z]$$

- Onde a $c(k, z)$ é a função política de consumo.

Programação Dinâmica Estocástica

Modelo de Crescimento (estocástico)

- Choque: $z \in \mathbb{R}^{+}$.
- Estado: z e k.
- Controle: k'.
- Conjunto Possível: $k' \in \Gamma(k, z) = [0, zk^{\alpha} + (1-\delta)k]$.
- Função Retorno: $F(k, z, k') = u(zk^{\alpha} + (1-\delta)k - k')$
- Lei do Movimento do Estado: $(k', z') = h(k', z'; z, k) = (k', z')$ (trivial).
- Equação de Belllman:

$$V(k, z) = \max_{k' \in \Gamma(k,z)} \{F(k, z, k') + \beta \mathbb{E}[V(k', z')|z]\}$$

Programação Dinâmica Estocástica

Forma geral

- Choque: $z \in \mathbb{R}^n$.
- Estado: $x \in \mathbb{R}^l$ ($z^{(i)}$ pode estar incluído ou não!).
- Controle: $y \in \mathbb{R}^m$.
- Conjunto Possível: $y \in \Gamma(x),\ \Gamma : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$.
- Função Retorno: $F(x, y),\ F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.
- Lei do Movimento do Estado: $x' = h(x, y, z'),\ h : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$.
- Equação de Belllman:

$$V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta \mathbb{E}[V(\underbrace{h(x, y, z')}_{x'})|z]\}$$

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

- Suponha um indivíduo (com vida infinita) que consome c, poupa a e tem renda *iid* w. Utilidade segue as suposições padrão.
- Restrição orçamentária:

$$c + a' \leq a(1+r) + w.$$

- O empréstimo está limitado pela restrição $a \geq -b$.
- A equação de Bellman:

$$V(a, w) = \max_{a' \in [-b, a(1+r)+w]} \{u(a(1+r) + w - a') + \beta \mathbb{E}[V(a', w')]\}$$

- Podemos reduzir os estados ainda mais?
  - A variável estado é menor conjunto de variáveis que nos permitem definir: o conjunto possível, a função retorno, a lei de movimento e esperança condicional da equação de Bellman.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Cash-on-hand

- Defina a variável "cash-on-hand": $x \equiv a(1+r) + w$.
  - Estado: y. Controle: a' (ou c).
  - $\Gamma(x) = [-b, x]$; $F(x, a') = u(a(1+r) + w - a')$.
  - Lei de movimento: $x' = h(a', w') = a'(1+r) + w'$.
- A equação de Bellman:

$$V(x) = \max_{a' \in [-b,x]} \{u(x - a') + \beta \mathbb{E}[V(h(a', w'))]\}$$

- Variáveis de estado diminuiu de (a, w) para x.
- Frequentemente reduzir o número de variáveis de estado acaba sendo de grande valor para fins analíticos e computacionais (lembre-se do *curse of dimensionality*).

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Cash-on-hand

- Equação de Euler:

$$u'(c) = \beta(1 + r)\mathbb{E}[u'(c')]$$

- O que determina a taxa de poupança dos indivíduos?

- Três motivos:

  1. Substituição intertemporal: β vs $(1 + r)$.
  2. Suavização de consumo: desejo de suavizar os diferentes choques (contemporâneos) na renda.
  3. Poupança precaucionária: seguro contra choques futuros.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Poupança precaucionária

- Suponha apenas dois períodos, $\beta(1+r) = 1$ e que $w_1 = \overline{w}$ (determinístico).

$$u'(a_0(1+r) + w_0 - a_1) = u'(a_1(1+r) + w_1 - a_2)$$

- Com apenas 2 períodos: $a_2 = 0$.
- Suponha $w = \overline{w} + \varepsilon$, onde $\varepsilon \sim G(\sigma)$ com média zero e variância σ.
- Como o comportamento dos indivíduos se alteram quando aumenta o risco (i.e. antes w era determinístico e agora estocástico)?
- Se a utilidade marginal é convexa $u'''(c) > 0$, então pela desigualdade de Jensen:

$$\mathbb{E}[u'(a_1(1+r) + \overline{w} + \varepsilon)] > u'(a_1(1+r) + \overline{w})$$

- Logo se a utilidade marginal é convexa, risco gera poupança precaucionária.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

- Aversão ao risco: curvatura de $u()$.
- Prudência (*prudence*): curvatura da utilidade marginal $u'()$.

$$u'(a_0(1+r)+w_0-a_1) = u'(a_1(1+r)+w_1-a_2)$$

- CRRA: $u'' < 0$ (aversão ao risco) e $u''' > 0$ (prudênca).
- Utilidade quadrática:

$$u(c) = -\frac{1}{2}(\bar{c}-c)^2$$

- $u'' < 0$ (aversão ao risco) e $u''' = 0 \rightarrow$ não há prudência!

Exemplo: McCall Search Model

- Tempo infinito: $t = 1, 2, ..., \infty$.
- Cada período o agente recebe uma oferta *iid* de salário w de uma c.d.f $F(w)$ com suporte $[0, \overline{\omega}]$.
- Decisão:
  - Se aceitar (A): recebe w no período atual e para sempre (não há demissão).
  - Se rejeitar (R): recebe $b \in (0, \overline{\omega})$ no período atual e recebe uma nova oferta no período seguinte.
- Utilidade linear e $\beta \in (0, 1)$: o agente maximiza: $\mathbb{E}_0[\sum_{t=0}^{\infty} y_t]$, onde y_t é igual a b ou w.
- Equação de Bellman:
  - Aceite (A): $V^A(w) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w = \frac{w}{1-\beta}$,
  - Rejeite (R): $V^R(w) = b + \beta \mathbb{E}[V(w')] = b + \beta \int_0^{\overline{\omega}} V(w') f(w') dw'$.
  - $V(w) = \max\{V^A(w), V^R(w)\}$.

Exemplo: McCall Search Model

- **Solução:** encontrar o salário de reserva w^*

$$g(w) = \begin{cases} \text{A se } w \geq w^*, \\ \text{R se } w < w^*. \end{cases} \tag{13}$$

- Caracterizado pela condição de indiferença:

$$V^A(w^*) = V^R(w^*) \longleftrightarrow \frac{w^*}{1-\beta} = b + \beta \int_0^{\overline{\omega}} V(w')f(w')dw' \tag{14}$$

- **Exercício:** mostre que

$$w^* - b = \frac{\beta}{1-\beta} \int_{w^*}^{\overline{\omega}} w' - w^* f(w')dw', \tag{15}$$

  LHS: custo de oportunidade ao rejeitar a oferta w^*. RHS: benefício esperado de procurar mais uma vez (*option value*).

- Mostre que w^* é crescente em b (dica: utilize o teorema da função implícita).

Exemplo: Iteração da Função Valor

- Para resolver a função no computador utilizaremos o mesmo método que anteriormente: iterar função valor com *grid search* para a maximização.
- A única mudança chave é como lidar com o processo markoviano.
- Se ele for discreto não precisamos fazer nada!
- Se ele for contínuo precisamos utilizar algum método de discretização:
  - Os mais conhecidos (aplicados a um $AR(1)$): Tauchen e Rouwenhorst.
- Existem maneiras alternativas de computar uma esperança condicional no computador.
  - Lembre-se que a esperança é basicamente uma integral $\rightarrow$ computar uma esperança é computar uma integral numericamente.
- **Exemplo:** Stochastic Growth Model (com $\delta = 1$).

Iteração da Função Valor

1. Discretize k em um vetor com n_k pontos entre $\underline{K}$ e $\overline{K}$. Defina os pontos na grade como $\{K_1, K_2, ..., K_I\}$.
2. Discretize z como um processo de markov com n_z pontos. Isto implica em um vetor de valores para $\{Z_1, Z_2, ..., Z_{n_z}\}$ e uma matriz de transição $P_{n_z \times n_z}$.
3. A função valor será armazenada em uma matriz $n_k \times n_z$: $\{V_{ij}\}$. Inicie a matriz com seu "chute" V^0 (cada ponto de V_{ij} é o valor associado ao capital k_i e a produtividade z_j).
4. Compute a esperança da função valor ($\mathbb{E}[V_{ij}] = VP'$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n_z} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ V_{n_k 1} & \dots & \dots & V_{n_k n_z} \end{bmatrix}}_{V_{n_k \times n_z}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n_z 1} \\ P_{12} & \ddots & \ddots & \\ P_{1n_z} & \dots & \dots & P_{n_z n_z} \end{bmatrix}}_{P'_{n_z \times n_z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{E}[V_{11}] & \mathbb{E}[V_{12}] & \dots & \mathbb{E}[V_{1n_z}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{E}[V_{n_k 1}] & \dots & \dots & \mathbb{E}[V_{n_k n_z}] \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}[V]}$$

Note que $\mathbb{E}[V_{ij}] = \sum_m^{n_z} P_{jm} V_{im}$ (esperança condicional a j).

Iteração da Função Valor

- O resto é padrão:
- Compute V_{ij}^{n+1} utilizando o procedimento para todo i e j (*grid search* ou *brute force*):

$$
\begin{aligned}
V_{ij,l}^{n+1} &= \begin{cases} u(z_j f(k_i) - k_l) + \beta \mathbb{E} V_{lj}^{n}, & \text{se } z_j f(k_i) - k_l = c_{ij,l} > 0 \\ -\infty, & \text{se } z_j f(k_i) - k_l = c_{ij,l} \leq 0 \end{cases} \\
V_{ij}^{n+1} &= \max\{V_{ij,1}^{n+1}, V_{ij,2}^{n+1}, ..., V_{ij,n_K}^{n+1}\}
\end{aligned}
$$

- Calcule $d = \max_{i,\ j} |V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^{n}|$. Se $d < \varepsilon$, encontramos a função valor $V_{n+1} = V$. Caso contrário atualize o chute, $V_n = V_{n+1}$ e retorne ao ponto anterior.

Taking Stock

- Vimos como representar a incerteza em modelos de equilíbrio geral.
  - Notação geral mas complicada e "pesada".

- A maioria dos processos estocásticos utilizados na macroeconomia são iid ou dependem apenas da última realização: cadeias de Markov!

- Bastante conveniente para introduzir e representar com programação dinâmica.