

# Análise Macro I

## Lista de Exercícios 2

Prazo de Entrega: 15 de Julho (Via Teams)

1. **(Equação de Bellman para Poupança e Consumo)**. Considere o problema padrão de consumo e poupança. Um consumidor com  $a_0 \geq 0$  recebe um fluxo constante de  $w > 0$  a cada período e pode poupar a uma taxa de juros (bruta)  $(1 + r) \equiv R$ . A restrição orçamentária é:

$$c_t + \frac{a_{t+1}}{R} \leq a_t + w \quad t = 0, 1, \dots, \infty,$$

e restrição de *no-borrowing*:  $a_{t+1} \geq 0$ . Suponha também que existe um limite superior exógeno dado por  $\bar{a} > 0$ . A utilidade do consumidor é

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

onde  $u(\cdot)$  é uma função contínua, diferenciável, estritamente crescente, estritamente côncava com  $u(0) = 0$ . Utilize os teoremas vistos em classe para responder as questões.

- (a) Enuncie este problema como um problema de programação dinâmica: descreva o estado, a variável controle, a função retorno e o conjunto factível do controle (conjunto restrição).
  - (b) Escreva a equação de Bellman.
  - (c) Existe uma única função  $V$  satisfazendo a equação de Bellman? Explique.
  - (d) A solução da equação de Bellman  $V$  também é a solução do problema de sequencial subjacente? Explique.
  - (e) Mostre que a função valor é crescente.
  - (f) Mostre que a função valor é côncava e que a função política ótima é contínua.
  - (g) Como você construiria a sequência  $\{a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$  para o plano de poupança ótimo dado  $a_0$ ?
  - (h) Utilize o Teorema do Envelope e derive a equação de Euler utilizando a equação de Bellman.
2. **(Consumo e Poupança com *Habit Formation*)**. Considere um agente cuja utilidade depende não apenas do consumo atual  $c_t$ , mas também do consumo passado  $c_{t-1}$ :<sup>1</sup>

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, c_{t-1}),$$

---

<sup>1</sup>Preferências com *habit formation* são utilizadas em modelos de finanças (e.g. Campbell and Cochrane (1999)), e em modelos DSGE (e.g. Christiano, Eichenbaum and Evans (2005)).

onde  $u$  é diferenciável e côncava em ambos os argumentos, e é crescente em  $c_t$ . Além de  $\beta \in (0, 1)$  e  $c_{-1} > 0$  dado. O agente é dotado de ativos  $a_0 > 0$  e a cada período recebe uma renda  $y > 0$ . Suponha que o agente pode poupar a uma taxa de juros bruta  $(1 + r) = R > 1$  e que existe um limite de empréstimo dado  $a > -\bar{A}$ .

- (a) Escreva este problema em forma de Programação Dinâmica: Descreva as variáveis estado, controle, a função retorno, e o conjunto de restrição.
- (b) Escreva a equação de Bellman.
- (c) Encontre e interprete a equação de Euler.

3. **(Busca de Dois Maridos com Dona Flor).** Dona Flor vive em um mundo que dura dois períodos:  $t = 0, 1$ . Ela está procurando um marido e tem dois encontros marcados: um com Vadinho em  $t = 0$ , e outro com Teodoro em  $t = 1$ .<sup>2</sup> Ao encontrar Vadinho, ela observa a *match quality*, que é uma variável aleatória  $x$  distribuída uniformemente em  $[0, 1]$ ; 1 significa que Vadinho é o marido perfeito para ela, enquanto 0 significa que ele é bastante regular. Se ficar com ele, Dona Flor recebe utilidade  $x$  em ambos os períodos (e desmarca o encontro com Teodoro).

Se ela decidir deixar Vadinho, ela recebe utilidade  $\sigma$  no período 0 e encontra Teodoro em  $t = 1$ , onde  $\sigma \in (0, 1)$  é dado exogenamente. No encontro com Teodoro, Dona Flor observa seu *match quality* com Teodoro, dado por  $y$ . Suponha que  $y$  é uniformemente distribuído em  $[0, 1]$  e é independente de  $x$ . Novamente, Dona Flor pode decidir se fica com Teodoro e recebe utilidade  $y$ , ou se fica solteira, caso em que recebe  $\sigma \in (0, 1)$ . Dona Flor maximiza a utilidade esperada e desconta o período com  $\beta \in (0, 1)$ .

- (a) Escreva as equações de Bellman que caracterizam o problema de Dona Flor: Quais são as variáveis estado, controle, a função retorno, e o conjunto de possibilidades do controle.
- (b) Encontre as regras de decisão de Dona Flor.
- (c) Como a regra de decisão no tempo 0 muda quando  $\sigma$  aumenta? Explique brevemente a intuição por detrás do resultado.
- (d) Como a regra de decisão no tempo 0 muda quando  $\beta$  aumenta? Explique brevemente a intuição por detrás do resultado.
- (e) Suponha as seguintes alterações:  $\sigma = 0$  e  $\beta = 1$ ;  $x$  é distribuído como antes, mas  $y = \rho x + u$ ,  $\rho \in (0, 1)$  e onde  $u$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[-1, 1]$  (e independente de  $x$ ).

- i. Mostre que o Valor de rejeitar a Vadinho é

$$V_0^R(x) = \frac{\rho^2}{4}x^2 + \frac{\rho}{2}x + \frac{1}{4}.$$

- ii. Explique intuitivamente por que agora  $V^R$  é crescente em  $x$  (mas não era antes).
- iii. Mostre que a probabilidade de que Dona Flor rejeite Vadinho é crescente em  $\rho$ .
- iv. Para  $\rho = 0.5$ , encontre a regra de decisão no período  $t = 0$ .

---

<sup>2</sup>No romance original de Jorge Amado (1966), Vadinho está morto e Dona Flor tem que decidir entre Teodoro e o espírito (!) de Vadinho.

4. **(Investimento com Custo de Ajuste).** Considere uma firma que produz um bem  $y$  de acordo com a tecnologia  $y_t = k_t$  para  $t = 0, 1, \dots, T$ , onde  $k$  é o capital. Em cada período, a firma aluga o capital em mercados competitivos a um aluguel constante  $q > 0$ .

A firma está sujeita a uma função demanda decrescente: o preço do bem  $y$  é determinado pela função  $p_t = p(y_t)$  em todos os períodos, onde  $p(y) > 0$  e  $p'(y) < 0$  para todo  $y > 0$ . A empresa desconta os seus lucros futuros a uma taxa de juros de mercado  $1 + r = R > 1$ .

A firma está sujeita a um custo de ajuste quadráticos caso deseje alterar o seu estoque de capital:

$$\frac{c}{2}(k_{t+1} - k_t)^2, \quad t = 1, 2, \dots, T - 1,$$

onde  $c > 0$  é uma constante. A firma começa com capital inicial dado por  $k_0 = 0$ .

- (a) Escreva esse problema em forma de Programação Dinâmica: Descreva as variáveis estado, controle, função de retorno, e o conjunto viável (restrição) para o(s) controle(s).
  - (b) Escreva a função valor em  $T$  e para um período genérico  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ .
  - (c) Suponha que o Teorema do Envelope é válido. Encontre a condição otimalidade para o investimento (ou seja, a equação de Euler) e interprete-a brevemente.
  - (d) Encontre o estoque de capital no estado estacionário, ou seja,  $\bar{k}$  para o qual a firma não gostaria de alterar mesmo se começasse com  $k_0 = \bar{k}$ .
5. **(“Codando” o Modelo de Crescimento em Tempo Finito).** [Não é obrigatório entregar]. Considere o modelo de crescimento neoclássico “padrão” em horizonte finito. A função de produção  $k_t^\alpha$ , a lei de movimento do capital é dado por:

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + k_t^\alpha - c_t,$$

e a família representativa escolhe a sequência de consumo para maximizar a seguinte função utilidade:

$$\sum_{t=0}^T \beta^t \log(c_t).$$

A equação de Bellman do problema é:

$$V_t(k) = \max_{k'} \{ \log(k^\alpha + k(1 - \delta) - k') + \beta V_{t+1}(k') \} \quad t = 0, \dots, T - 1$$

e

$$V_T(k') = \max_{k'} \{ \log(k^\alpha + k(1 - \delta) - k') \},$$

com a função política associada:  $k' = g_t(k)$ .

- (a) Descreva cuidadosamente o algoritmo para encontrar a função valor e a função política.

- (b) Considere  $T = 50$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.96$  e  $\delta = 0.1$ . Discretize o espaço do capital em  $n_k = 200$  pontos equidistantes, com  $k_{min} = 2k_{ss}/n_k$  e  $k_{max} = 2k_{ss}$  ( $k_{ss}$  é o capital do estado estacionário em um problema horizonte infinito). Implemente o algoritmo em uma linguagem de sua escolha.
- (c) Defina  $k_0 = k_{min}$ . Utilize a função política para simular a sequência ótima de capital  $\{k_{t+1}^*\}_{t=0}^T$ . Represente a solução em uma figura. Quantos tempo leva para a sequência ótima atingir o estado estacionário (se ela atingir)? Altere os parâmetros  $\beta = 0.8$  e  $\beta = 0.99$  e responda a pergunta novamente.
- (d) Aumente o número de períodos para  $T = 500$ . Represente a solução em uma figura. A sequência ótima atinge o estado estacionário em quantos períodos? Em quantos períodos a sequência ótima começa a desacumular capital?