

Macroeconomia I

Fundações de Modelos Dinâmicos de Equilíbrio Geral

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Nosso objetivo final será resolver o "equilíbrio" do modelo.
- Resolver os preços e as alocações.
- Logo podemos estudar contrafactuais, mecanismos, efeitos de diferentes políticas.

Como resolver o modelo?

- (i) Quais as condições necessárias para a existência de uma solução em um problema dinâmico de equilíbrio geral?
- (ii) Como definir e encontrar o equilíbrio?
- (iii) Como podemos fazer afirmações sobre o bem-estar?

Um Modelo (macro)econômico

Construindo um modelo (macro)econômico

- **Preferências:** função utilidade.
- **Tecnologia:** função de produção.
- **Governo:** instrumento de políticas, função objetivo.
- **“Environment”:** Informação, estrutura de mercado, bens, população, etc.
- **Endowments:** Dotações dos agentes.
- **Conceito de equilíbrio:** como os preços são definidos, ou alternativamente, como ocorrem as interações entre os agentes da economia.

Com essas informações podemos definir os preços e alocações da economia.

Equilíbrio Competitivo

Em geral vamos focar em um equilíbrio competitivo.

Definition (Equilíbrio Competitivo)

Um equilíbrio competitivo são alocações (uma lista/vetor de quantidades) e preços (lista/vetor de preços) dado que:

- (i) Dado os preços, as quantidades solucionam o problema dos agentes;
 - (ii) As quantidades respeitam as restrições de recursos da economia (ou seja, são alocações *feasible*).
-
- Um conjunto de equações que descrevem as ações dos agentes e as restrições da economia de maneira que os preços descrevem um equilíbrio (não há excesso de demanda ou oferta).
 - A segunda condição, em geral, implica que todos os mercados estão em equilíbrio (i.e. market clearing).

Solucionando o Modelo

Passo a passo:

1. Descrever o “*environment*”.
2. Solucionar o problema individual de cada agente
 - ▶ Escrever o problema de maximização e o conjunto de equações que determinam a solução.
 - ▶ Consumo das famílias (em função da renda e preço), $c = f(y, p)$; demanda por trabalho das firmas (em função do salário/juros), $n = h(w, r)$, etc.
3. Indicar as condições de equilíbrio (*market clearing conditions*).
 - ▶ A demanda agregada de banana tem que ser igual a oferta agregada de banana, a mesma coisa para maçãs, etc.
4. Descrever o equilíbrio competitivo.
 - ▶ Escrever todos os objetos endógenos (preços, alocações, etc) e todas as equações (f.o.c dos agentes, market clearing, etc), e eventualmente políticas do governo.
 - ▶ Sistema de N equações e N objetos endógenos.

Solucionando o Modelo

Vantagens desta abordagem

- Relações agregadas respeitam as restrições individuais.
- **Transparência:** Mapa claro do que é preferência/tecnologia, e do que é decisão endógena dos agentes.
- A expectativa dos agentes é consistente com o modelo.
- **Micro** \Rightarrow **Macro**.
- Mudanças de políticas alteram o bem-estar de cada agente individualmente.
- Implicações testáveis sobre o comportamento individual.

Modelo de Crescimento Neoclássico

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
- **Tecnologia:** $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$
- **Governo:** Não há.
- **“Environment”:** Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido
 $y_t = c_t + i_t$.
- **Endowments:** k_0 dado.
- **Conceito de equilíbrio:** Competitivo.

Solução: Sequências $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$.

Preferências e Tecnologia

[A: Cap 2, 5. PK: Cap]

Preferências

- Agentes principais de um modelo de equilíbrio geral: indivíduos, famílias, consumidores, etc.
- A definição das suas preferências são importantes porque formam a base de avaliação de bem-estar do modelo:
 - ▶ Noções de otimalidade e ordenamento de políticas só são possíveis se conhecermos as preferências dos agentes.
- A maior parte dos modelos macroeconômicos utiliza o conceito de agente representativo (*Representative Household*).
 - ▶ Quando isso importa?

População e Utilidade

- Existe um continuum de indivíduos h representados pelo intervalo $[0, 1]$.
 - ▶ Vantagem de utilizar população unitária: valor agregado = média.
- Assumimos que só existe um bem de consumo final c e que todo indivíduo h tem uma função utilidade por período:

$$u^h(c_t^h) \tag{1}$$

- Suposições comuns sobre $u()$:
 - ▶ é uma função duas vezes derivável, estritamente crescente ($u'(c) > 0$), estritamente côncava ($u''(c) < 0$), não se altera ao longo do tempo, e não depende da decisão dos outros indivíduos.
 - ▶ é *time-separable*.
 - ▶ definida sobre $c > 0$.

- Assumiremos também:

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0 \quad (3)$$

- Isto garante que a escolha de um agente seja sempre $c \in (0, \infty)$.
- Mais consumo é sempre melhor, mas uma unidade adicional de c aumenta \Rightarrow Utilidade marginal é decrescente

- Assumindo um fator de desconto exponencial $\beta \in (0, 1)$ (específico ao indivíduo h), a função de utilidade é dada

$$U^h(c_1^h, c_2^h, \dots, c_T^h) \equiv \sum_{t=0}^T (\beta^h)^t u^h(c_t^h), \quad (4)$$

onde U é a função utilidade definida sobre uma sequência de consumo $\{c_t\}_{t=0}^T$.

- Uma interpretação simples é que c_t em períodos diferentes são “bens” diferentes.
- Desconto exponencial implica que independentemente do período t , o desconto entre t e $t + 1$ é sempre o mesmo.
- T pode ser finito ou infinito.

Agente Representativo

- De maneira geral $u()$ e β podem depender do indivíduo h
 - ▶ Os indivíduos também podem ser heterogêneos em suas dotações: renda, riqueza...
- Estamos interessados em estudar as variáveis agregadas \Rightarrow eventualmente temos que agregar as decisões de todos os indivíduos da economia.
- Isto é, a demanda agregada, C_t , é definida:

$$C_t = \int_0^1 c_t^h dh \quad (5)$$

onde c_t^h é o consumo ótimo do agente h .

Agente Representativo

- **Problema:** Agregar agentes heterogêneos pode ser complicado.
- Implica em resolver a decisão de cada agente individualmente.
- **Solução:** Assumir a existência de um agente representativo.
 - ▶ A demanda agregada da economia pode ser representada por um agente representativo tomando a decisão sujeita à restrição orçamentária agregada.
 - ▶ Quando podemos fazer isso?
 - ▶ O que nós perdemos?
- **Solução trivial:** Assumir que as preferências e as dotações são iguais para todo o h :
 - ▶ $u^h() = u()$, $\beta^h = \beta$ e dotações iguais $\Rightarrow c^h = c$.
- Podemos colocar restrições na utilidade para assumir a existência do agente representativo.

Teorema de Agregação de Gorman

Theorem (Teorema de Agregação de Gorman)

Considere uma economia com $N < \infty$ bens e um conjunto H de agentes com riqueza w^h . Suponha que as preferências de cada família $h \in H$ são representadas pela utilidade indireta

$$v^h(p, w^h) = a^h(p) + b(p)w^h, \quad (6)$$

então as preferências podem ser agregadas e representadas por um agente com utilidade indireta

$$v(p, w) = a(p) + b(p)w, \quad (7)$$

onde $a(p) = \int_{h \in H} a^h(p)dh$ e $w = \int_{h \in H} w^h dh$.

- **Prova:** Utilize a identidade de Roy para encontrar a demanda individual e tome a integral sobre h .

Teorema de Agregação de Gorman

- Se as preferências levam a utilidades indiretas lineares na riqueza com o mesmo $b(p)$ para todos os agentes, podemos representar a demanda individual para um bem arbitrário:

$$c^h(p, w^h) = \alpha^h(p) + \kappa(p)w^h \quad (8)$$

- Relação **linear** entre a demanda e a riqueza!
- **Intuição:**
 - ▶ Se todos os agentes tem a mesma propensão marginal a consumir, a demanda agregada apenas depende da riqueza agregada!
 - ▶ Ao realocarmos riqueza de um agente para o outro, a demanda agregada não se altera.

Um Exemplo Simples

- Suponha 2 agentes com utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$.
 - ▶ Capitalista recebe lucro $y^c = \pi$.
 - ▶ Trabalhador recebe salário $y^w = w$.
 - ▶ Renda agregada $Y = w + \pi$.
- Demandas individuais: $x_1^i = \alpha y^i / p_1$ e $x_2^i = (1 - \alpha) y^i / p_2$ para $i = c, w$.
- Utilidade indireta:

$$v^i(p, y^i) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = \left(\alpha \frac{y^i}{p_1} \right)^\alpha \left((1 - \alpha) \frac{y^i}{p_2} \right)^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{1 - \alpha}{p_2} \right)^{1-\alpha} y^i$$

- Utilidade indireta do agente representativo com renda Y :

$$v(p, Y) = \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{1 - \alpha}{p_2} \right)^{1-\alpha} Y$$

Exemplos

(i) Utilidades quasi-homotéticas:

$$u(x_1^h, \dots, x_N^h) = \left[\sum_{j=1}^N (x_j - \xi_j^h)^{(\sigma-1)/\sigma} \right]^{\sigma/(\sigma-1)} \quad (9)$$

defina $\tilde{x}_j^h = x_j - \xi$. Desde que a solução seja interior, a utilidade admite um agente representativo com $\xi_j \equiv \int_h \xi_j^h dh$.

(ii) Utilidades quasi-lineares

$$u(c, l) = u(c) + \phi l \quad (10)$$

Uma nota sobre o horizonte infinito

Intuição: $T = \infty$?

- (i) **Altruísmo:** Derivamos utilidade pelo bem-estar dos nossos descendentes. Um agente que vive um período e desconta a utilidade de seus filhos com β :

$$U(c_\tau) = u(c_\tau) + \beta U(c_{\tau+1}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} u(c_t) \quad (11)$$

- (ii) **Simplificação:** Quando T é suficientemente alto, o comportamento do modelo é semelhante a $T = \infty$. Modelos com $T = \infty$ são estacionários e mais fáceis de trabalhar.

Uma nota sobre o horizonte infinito

- Ao lidar com horizonte infinito temos que nos preocupar se:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (12)$$

é limitada (*bounded*).

- Como comparar duas sequências de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que produzem U infinito?
- Dependendo do problem isso impõe restrições nos parâmetros e formas funcionais.
- Se $c_t = \bar{c}$ for constante, a condição para que a série seja convergente é $\beta < 1$.
- Mas se a sequência for do tipo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty} = \{c_0(1 + \gamma)^t\}_{t=0}^{\infty}$, irá depender de γ , β e $u(\cdot)$.

- Agente responsável pela produção \Rightarrow Firms.
- Na maior parte dos modelos (mas não todos!) vamos assumir:
 - ▶ que existe uma firma representativa com uma função de produção representativa (ou agregada) que produz um único bem final;
 - ▶ que o lucro (quando houver) é redistribuído para todas as famílias igualmente;
 - ▶ que utiliza como insumos (ou fatores) capital, K , e/ou trabalho, L . Esses insumos são contratados no “spot market” (problema da firma é estático).
- **Intuição:** A função de produção agregada representa o valor adicionado total (PIB) da economia e não um bem específico.
 - ▶ Capital e trabalho são insumos utilizados por todos os setores em maior ou menor proporção.
 - ▶ Bens intermediários não são incluídos e o custo de materiais básicos não é relevante quantitativamente.

- Com um único bem final y , se
 - ▶ os mercados forem competitivos;
 - ▶ não existirem externalidades na produção;a economia admite uma firma representativa (incluindo se as firmas da economia tiverem funções de produção heterogêneas).
- **Teorema e prova:** Acemoglu p. 158.
- Mesmo com múltiplos bens/setores, se a função de produção for a mesma e os fatores completamente móveis entre setores é possível demonstrar que existe uma função agregada.

Função de Produção

Função de Produção Agregada

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t) \quad (13)$$

Onde: K : Capital; L : Trabalho; A : *Shifter* tecnológico, viésado ou não para um determinado fator.

(Típicas) Suposições Neoclássicas:

- (i) $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ é duas vezes diferenciável, é estritamente crescente e côncava em K e L .
 - ▶ $F_K > 0$; $F_L > 0$;
 - ▶ $F_{KK} < 0$; $F_{LL} < 0$ (rendimentos marginais decrescentes)
- (ii) F exibe retornos constantes de escala em K e L
 - ▶ F é homogênea de grau 1: $zF(K, L, A) = F(zK, zL, A)$.
- (iii) Condições Inada.

Função de Produção

Retornos Constante de Escala

Theorem (Teorema de Euler)

Suponha que $f : \mathbb{R}^{K+2} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, com derivadas parciais f_x e f_y , e é homogênea de grau m . Logo:

$$mf(x, y, z) = f_x(x, y, z)x + f_y(x, y, z)y \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \text{ e } z \in \mathbb{R}^K. \quad (14)$$

Além disso, f_x e f_y são homogêneas de grau $m - 1$ em x e y .

- Note que retornos constante de escala somado a equilíbrio competitivo (preço igual ao produto marginal) implica que as firmas tem lucro zero.
- Em particular, isso implica *Produção = Renda Total dos Fatores*:

$$Y_t = w_t L_t + r_t K_t \quad (15)$$

Condições de Inada

F satisfaz:

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, L, A) = \infty$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} F_L(K, L, A) = \infty$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, L, A) = 0$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} F_L(K, L, A) = 0$$

Para todo $L > 0$, $K > 0$.

- Suponha também: $F(0, L, A) = 0$.

Bem-Estar e o Problema do “Social Planner”

[A: Cap 5; PK: Cap 7; DK: Cap 2.]

Bem-Estar e Equilíbrio

- **Objetivo final:** Encontrar as alocações de equilíbrio.
- Pela definição de equilíbrio competitivo precisamos também encontrar os preços?
- Existe uma maneira mais simples de encontrar as alocações?
- Relação próxima entre resolver o problema do planificador central e o equilíbrio competitivo descentralizado.
- Sob certas condições os dois problemas resultam nas mesmas alocações \Rightarrow Teoremas do Bem-Estar.
 - ▶ **1º Teorema do Bem-Estar:** Eq. competitivo \Rightarrow Alocações Pareto ótimo.
 - ▶ **2º Teorema do Bem-Estar:** Alocações Pareto ótimo \Rightarrow Eq. competitivo.
- Neste caso também podemos dizer que a economia é Pareto eficiente.

Óptimalidade de Pareto

- Suponha uma economia arbitrária:
 1. N bens indexados por j ;
 2. H famílias indexados por h que consomem x_j^h com utilidade U^h e dotações e^h ;
 3. F firmas indexados por f que produzem y_j^f .
- A fração da propriedade da firma é dado por θ_h^f , onde $\sum_h^H \theta_h^f = 1$.
- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f \in F, h \in H, j \in N}$ é “feasible” se para todo $j \in N$:

$$\sum_h^H x_j^h \leq \sum_h^H e_j^h + \sum_f^F y_j^f \quad (16)$$

- **Definição:** Uma alocação $\{x_j^h, y_j^f\}_{f \in F, h \in H, j \in N}$ é Pareto ótimo se:
 1. é “feasible”;
 2. não existe nenhuma outra alocação “feasible” $\{\hat{x}_j^h, \hat{y}_j^f\}$ que

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j \in N}) \geq U^h(\{x_j^h\}_{j \in N}) \quad \text{para todo } h \quad (17)$$

$$U^h(\{\hat{x}_j^h\}_{j \in N}) > U^h(\{x_j^h\}_{j \in N}) \quad \text{para pelo menos um } h. \quad (18)$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar

Theorem (First Welfare Theorem)

Suponha que $\{x_j^h, y_j^f, p_j\}$ seja um equilíbrio competitivo e que todas U^h sejam localmente não saciada (locally nonsatiated). Então $\{x_j^h, y_j^f\}$ é Pareto ótimo.

- **Prova:** Por contradição. Suponha $\{x_j^h, y_j^f\}$ não seja Pareto ótimo (ou seja, existe uma outra alocação feasible que dê mais utilidade para pelo menos um h) e use a definição de eq. competitivo.
- Note que estamos assumindo a existência de um eq. competitivo (que pode não existir dependendo da forma de U^h , e dos conjuntos de x e y).
- Ótimo de Pareto não diz nada sobre equidade (um indivíduo consumindo tudo é eficiente).
- Quando o Primeiro teorema do Bem-Estar não se aplica?
 - ▶ Externalidades; Mercados incompletos; Competição Imperfeita; Informação Assimétrica; Tributação Distorciva;

Segundo Teorema do Bem-Estar

Theorem (Second Welfare Theorem)

Considere a alocação Pareto ótimo $\{x_j^h, y_j^f\}$. Dada certas condições (conjunto de produção e consumo é convexo, utilidade é côncava, contínua e localmente não saciada), existe um equilíbrio competitivo com preços $\{p_j\}$ e dotações $\{e^h, \theta_h^f\}$ que suportam a alocação $\{x_j^h, y_j^f\}$.

- **Prova:** A prova é mais complicada já que implicitamente envolve demonstrar a existência de um equilíbrio competitivo. Basicamente envolve mostrar a existência de preços (em um hiperplano) que suportam as alocações.
- Intuitivamente, o 2^{do} Teorema do Bem-Estar nos diz que uma alocação é parte de um eq. competitivo.
- Dado uma redistribuição apropriada das dotações iniciais, podemos selecionar a alocação Pareto ótima que é um eq. competitivo.

- Os Teoremas do Bem-Estar dizem que podemos ir de uma alocação Pareto ótimo para um equilíbrio descentralizado e vice-versa.
- Sob certas condições basta computar as alocações Pareto ótimo resolvendo o problema do *Social Planner* (que em geral é mais simples).
- **Social Planner**: Maximiza a utilidade dado as restrições tecnológicas e de recursos da economia (não está sujeito a restrição orçamentária dos consumidores - mas sim aos recursos TOTAIS da economia).
- Com mais de uma família o planificador tem que associar um peso a utilidade de cada família \Rightarrow Existência de um conjunto de alocações Pareto-ótimo.
- **Método de Negishi**: Seleciona o peso apropriado de acordo com as dotações iniciais de cada família para encontrar as alocações do eq. competitivo!

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
 - ▶ $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; Condições de Inada; $\beta \in (0, 1)$.
- **Tecnologia:** $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$
 - ▶ F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l , CRS, condições de Inada).
 - ▶ Depreciação do capital $\delta \in [0, 1]$
- **“Environment”:** Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
 - ▶ População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments:** k_0 dado.

Problema do Social Planner

Passo 2: Resolver o problema do planejador social benevolente:

- Vamos assumir um consumidor representativo \Rightarrow planejador escolhe a alocação $\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}$ que maximiza a utilidade deste consumidor.
- Trade-off de consumo presente vs consumo futuro.

$$\max_{\{k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (19)$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq y_t = F(k_t, n_t) \quad \forall t; \quad (20)$$

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t \quad \forall t; \quad (21)$$

$$k_0 > 0 \text{ dado}; \quad (22)$$

- Para simplificar, substituímos a lei de movimento do capital em i_t e $n_t = 1$.
- E escrever: $f(k_t) \equiv F(k_t, 1) + (1 - \delta)k_t$.

Resolvendo um Problema Dinâmico

- Ok, como resolver um problema dinâmico com soma infinita?
- Resolveremos primeiro com um T finito utilizando métodos de otimização com restrição (Kuhn-Tucker).
- As condições de Kuhn-Tucker são suficientes se a função objetiva for côncava e as restrições convexas.
- As suposições que fizemos sobre u e f garantem que essas condições são garantidas:
 - ▶ $u(c_t)$ é crescente logo a restrição de recursos se mantém com igualdade.
 - ▶ $u(c_t)$ é côncava, logo a soma de $u(c_t)$ também é côncava.
 - ▶ A restrição é convexa: $0 \leq k_t \leq f(k_t)$.
 - ▶ Condições de Inada garantem que a solução seja interior $c > 0$ e $k > 0$.
 - ▶ Exceto para o último T onde $k_{T+1} = 0$.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^T [\beta^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) - c_t - k_{t+1}) + \mu_t k_{t+1}] \quad (23)$$

- Condições de Kuhn-Tucker:

- ▶ $k_{t+1} \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ e $\mu_t \geq 0$.
- ▶ Folga complementar (complementary slackness): $k_{t+1}\mu_t = 0$

Condições de primeira ordem...

- Note que $k_{t+1} > 0$ e $\mu_t = 0$, para todo $t = 0, \dots, T-1$:

$$u'(c_t)\beta^t = \lambda_t \quad \text{e} \quad \lambda_t = f'(k_{t+1})\lambda_{t+1} \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (24)$$

- O que implica na *Euler Equation*:

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (25)$$

- Provavelmente a equação mais importante na macro moderna.

Euler Equation

- A Equação de Euler conecta a decisão de consumo de hoje com a de amanhã. Explicita o trade-off entre consumo e poupança (ou no caso do planejador alocar uma unidade em c_t ou em i_t).

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad (26)$$

- Custo marginal de deixar de consumir uma unidade do bem final em t é igual ao benefício marginal descontado de consumir $f'(k_{t+1})$ unidades do bem final em $t + 1$.
- Concavidade (estrita) na função utilidade implica que as famílias gostariam de suavizar o consumo ao long da vida.
- Note que poupança extra altera o retorno futuro via $f'(k_{t+1})$.

Solução do Problema: Tempo Finito

- Note que a equação de Euler só é válida até o período $T - 1$. As c.p.o no período T :

$$u'(c_T)\beta^T = \lambda_T \quad \text{e} \quad \lambda_T = \mu_T \quad t = 0, \dots, T - 1 \quad (27)$$

- O que implica que $\mu_T = \lambda_T > 0$ e $k_{T+1} = 0$!
- Resultado intuitivo, já que não faz sentido levar capital para $T + 1$...

Solução do Problema: Tempo Finito

- As sequências que maximizam a utilidade precisam satisfazer o sistema de equações de diferenças (para $t = 0, \dots, T - 1$):

$$u'(c_t) = f'(k_{t+1})\beta u'(c_{t+1}) \quad (\text{Equação de Euler}) \quad (28)$$

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \quad (\text{Restrição de Recursos}) \quad (29)$$

- Alternativamente podemos substituir c_t e escrever o problema como uma equação de diferença de segunda ordem.
- Duas equações de diferenças (de primeira ordem) necessitam de duas condições iniciais/terminais.
- Essas condições são: k_0 dado e $k_{T+1} = 0$.

Tempo Infinito

- Em tempo finito $k_{T+1} = 0$. Mas em tempo infinito qual é a condição terminal que garante que o sistema de equações tenha uma solução única? *Condição de Transversalidade* (TVC).
- Note que em tempo finito: $\lambda_T k_{T+1} = 0$.
- A **Condição de Transversalidade**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0 \quad (30)$$

- Intuitivamente diz que o valor sombra (*shadow value*) do capital converge para zero (não necessariamente o estoque de capital).
- Sem a TVC é possível encontrar infinitas sequências de c_t e k_{t+1} que satisfaçam a EE.
- **Prova** para a suficiência da TVC em PK ou SL.

- Com a TVC e o k_0 dado e as duas equações de diferenças (EE e restrições de recursos) podemos encontrar as alocações ótimas que solucionam o problema do planejador central.
- Na grande parte das aplicações não é possível resolver o problema analiticamente.
 - ▶ Aproximações lineares.
 - ▶ Resolver o problema no computador (utilizando programação dinâmica).
- **Exemplo:** Suponha $u(c) = \log(c)$ e $f(k) = k^\alpha$ e resolva para política ótima (i.e. k_{t+1} em função de k_t e os parâmetros).
- Sabemos que pelos Teoremas do Bem-Estar as alocações escolhidas pelo planejador são parte de um equilíbrio competitivo.
- Ok, mas e os preços? E se os Teoremas do Bem-Estar não se aplicarem?

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu vs Mercado Sequenciais

[A: Cap 5. PK: Cap 5]

Estrutura de Mercado

- Já resolvemos para as alocações do crescimento ótimo \Rightarrow Social Planner.
- O que é um equilíbrio descentralizado? Alocações suportadas por preços que equilibram todos os mercados.
- Basicamente resolver a oferta e demanda em $N - 1$ mercados (pela lei de Walras o N -ésimo mercado estará em equilíbrio).
- Escolher alocações quase sempre implica em resolver um problema dinâmico.

Duas maneiras de representar um equilíbrio competitivo

1. **Arrow-Debreu:** Trocas ocorrem no período 0.
2. **Mercados Sequenciais:** Mercados abrem a cada período.

Economia de dotações com 2 agentes

- **Environment:** 2 agentes ($i = 1, 2$) consumidores de um único bem que vivem infinitos períodos.

- **Preferências:**

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

- **Dotações:** Sequências determinísticas $\{e^i\}_{t=0}^{\infty}$, sendo que:

$$e_t^1 = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } t \text{ é par.} \\ 0, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad e_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é par.} \\ \hat{e}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (32)$$

e $\hat{e} > 0$.

- **“Tecnologia”:** A dotação pode ser transformada em bem de consumo final sem custo:
 $c_t = \hat{e}$

Estrutura Arrow-Debreu

- Agentes “trocam” no período 0 (ou assinam um contrato de compra e venda com “perfect commitment”).
- Nos períodos seguintes eles apenas entregam as quantidades acertadas no período 0.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t . Vamos normalizar $p_0 = 1$.
- Intuitivamente, um bem de consumo em t é uma commodity diferente em $t - 1$ (e por isso tem um preço diferente).
- Em *mercados completos*, T períodos é equivalente a ter T bens diferentes diferentes em um mesmo período.
- Restrição orçamentária do agente i no período 0: $\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i$.

Definição. Um equilíbrio competitivo Arrow-Debreu é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^\infty$ e preços $\{p_t\}_{t=0}^\infty$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{p_t\}_{t=0}^\infty$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1, c_t^2\}_{t=0}^\infty$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i \geq 0\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \quad (33)$$

$$s.t. \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \quad (34)$$

2. O mercado de bens está em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \quad (35)$$

Já descrevemos o ambiente da economia e a definição de equilíbrio competitivo, vamos direto ao problema de otimização dos agentes $i = 1, 2$.

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Suponha $u(c) = \log(c)$ $\beta \in (0, 1)$. Para um agente arbitrário $i = 1, 2$:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i) + \lambda_i \left(\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i - \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i \right) \quad (36)$$

onde λ_i é o multiplicador de lagrange da restrição orçamentária para um agente i .

- ▶ A solução é interior: $c_t > 0$ para todo t ($\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$).
- ▶ A restrição orçamentária se mantém com igualdade (u é estritamente crescente).
- c.p.o: $\frac{\beta^t}{c_t^i} = \lambda_i p_t$ para $t = 0, 1, \dots, \infty$.
- Resolvendo por λ_i em dois períodos arbitrários:

$$\frac{1}{c_t^i} = \frac{p_t}{p_{t+1}} \frac{\beta}{c_{t+1}^i} \quad \text{para todo } t \text{ e } i = 1, 2 \quad (37)$$

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Ok, um sistema com infinitas equações, e agora? Note que: $c_t^i = c_0^i \frac{p_0}{p_t} \beta^t$.
- Substituindo na restrição orçamentária e normalizando $p_0 = 1$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{c_0^i}{1 - \beta} \quad (38)$$

- Que nos dá a sequência de alocações em função dos preços.
- Para complementar a solução, precisamos encontrar os preços que suportam o equilíbrio: equação de equilíbrio no mercado de bens!

Resolvendo o Problema de Dois Agentes

- Equilíbrio no mercado de bens:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \quad (39)$$

- Somando a c.p.o dos dois agentes:

$$c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2 = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} (c_t^1 + c_t^2) \quad \forall t \quad (40)$$

- Que implica em $\hat{e} = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} \hat{e} \Leftrightarrow \beta = \frac{p_{t+1}}{p_t}$. Com a normalização de $p_0 = 1$:

$$p_t = \beta^t \quad \forall t \quad (41)$$

- O que significa que $c_{t+1}^i = c_t^i = c_0^i$ para ambos i .

Resolvendo um Problema Dinâmico

- A princípio já temos a resolução do equilíbrio, mas podemos ir adiante e mostrar a sequência de consumo como função dos parâmetros.
- O agente 1 recebe a dotação primeiro, logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^1 = \hat{e} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{2t} = \frac{\hat{e}}{1 - \beta^2} \quad (42)$$

- De maneira semelhante podemos demonstrar que para o agente 2:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1 - \beta^2} \quad (43)$$

- Finalmente, as alocações de eq. são dadas:

$$c_t^1 = c^1 = \frac{\hat{e}}{1 + \beta} > \frac{\hat{e}}{2} \quad \text{e} \quad c_t^2 = c^2 = \frac{\hat{e}\beta}{1 + \beta} < \frac{\hat{e}}{2} \quad (44)$$

- O agente 1 consome mais porque ele recebe o dote primeiro.

Estrutura de Mercado Sequencial

- Agentes “trocam” todos os períodos e podem tomar empréstimos de 1–período (ou emprestar) a uma taxa de juros r_t .
- Defina a_t como a posição líquida do agente, ou seja a poupança do período $t - 1$.
- O preço do bem de consumo final é p_t em cada t . Vamos normalizar $p_t = 1$ *em todos os períodos*.
- Restrição orçamentária do agente i no período t :

$$c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i. \quad (45)$$

- Alternativamente, podemos utilizar como o preço de um título de um período como $q_t \equiv 1/(1 + r_t)$.

Mercados Sequenciais

Definição. Um equilíbrio competitivo com Mercados Sequenciais é uma sequência de alocações $\{c_t^1, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^\infty$ e preços $\{r_t\}_{t=0}^\infty$ dado que:

1. Dado a sequência de juros $\{r_t\}_{t=0}^\infty$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^i, c_t^2, a_{t+1}^1, a_{t+1}^2\}_{t=0}^\infty$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i > 0\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \quad (46)$$

$$s.t. \quad c_t + a_{t+1} \leq a_t(1 + r_t) + e_t^i \quad \forall t, a_0^i = 0 \quad (47)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a_{T+1}}{\prod_{t=0}^T (1 + r_t)} = 0 \quad (No-Ponzi-game) \quad (48)$$

2. O mercado de bens e de ativos (títulos) estão em equilíbrio:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e} \quad \forall t \quad (49)$$

$$a_{t+1}^1 + a_{t+1}^2 = 0 \quad \forall t \quad (50)$$

No-Ponzi Game

- Note a condição de *no-Ponzi game*: sem ela o agente sempre poderia rolar a dívida e conseguir uma sequência de consumo maior.
- Substituindo as restrições orçamentárias até T :

$$\begin{aligned}\frac{c_0 - e_0}{(1 + r_0)} + \frac{a_1}{(1 + r_0)} &\leq a_0 \\ \frac{c_1 - e_1}{(1 + r_1)} + \frac{a_2}{(1 + r_1)} &\leq a_1 \dots \\ \Rightarrow \sum_{t=0} \frac{c_t - e_t}{(1 + r_t)} + \underbrace{\frac{a_{T+1}}{\prod_{t=0}^T (1 + r_t)}}_{=0 \text{ No-Ponzi-game}} &\leq a_0\end{aligned}$$

- Alternativamente a esta condição, podemos impor um limite inferior de forma que:

$$a_{t+1} \geq -\bar{A}, \quad (51)$$

desde que este limite inferior seja alto o suficiente para não restringir a escolha de a_{t+1} .

Mercados Sequenciais

- Note que a condição *no-Ponzi game* é semelhante a TVC. No Modelo de Crescimento Neoclássico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_t = \frac{\lambda_{t-1}}{(1 + r_t - \delta)} \quad (52)$$

- Apesar de terem a mesma utilidade, conceitualmente:
 - ▶ A *no-Ponzi-game* restringe a escolha da família.
 - ▶ A TVC determina a escolha ótima dado um conjunto de possíveis sequências.
- Se os mercados são completos, um equilíbrio Arrow-Debreu sempre tem um equivalente em Mercado Sequenciais (teorema e prova nas notas DK).
- Qual a relação entre $(1 + r_t)$ e os preços p_t e p_{t+1} ?
- **Exercício:** Suponha $u() = \log()$ e resolva o problema supondo mercados sequenciais.

Voltando ao Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 1: Descrever o modelo.

- **Preferências:** $u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$
 - ▶ $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é estritamente crescente, duas vezes diferenciável; $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$; $\beta \in (0, 1)$.
- **Tecnologia:** $y_t = F(k_t, n_t)$ e $i = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$
 - ▶ F : satisfaz as suposições neoclássicas (crescente, diferenciável e côncava em k e l , CRS, condições de Inada).
 - ▶ Depreciação do capital $\delta \in [0, 1]$
- **“Environment”:** Não há incerteza; Um único bem que pode ser consumido ou investido $y_t = c_t + i_t$.
 - ▶ População $n_{t+1} = n_t = 1$.
- **Endowments:** k_0 dado.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 2: Resolver o problema dos agentes (família e firmas).

- O problema da firma é estático - firmas contratam capital e trabalho no spot market.
Todo t :

$$\max_{k_t, n_t} \pi_t = F(k_t, n_t) - r_t k_t - w_t n_t \quad (53)$$

- Dado as suposições sobre $F(k_t, n_t)$ as c.p.o são necessárias e suficientes:

$$r_t = F_k(k_t, n_t) = MgPK \quad \forall t \quad (54)$$

$$w_t = F_n(k_t, n_t) = MgPN \quad \forall t \quad (55)$$

- Dependendo da função de produção é possível derivar equações de demanda por trabalho e capital em função dos preços: $k^d = h^k(r, w)$, $n^d = h^n(r, w)$.
- Em muito dos modelos que vamos estudar estaremos interessado na razão k_t/n_t (em função dos preços).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

- Famílias são donas do capital e ofertam trabalho para as firmas.
- Capital é predeterminado: k_t é dado, famílias aumentam capital investindo (e deixando de consumir).

$$\max_{\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (56)$$

$$s.t. \quad c_t + i_t \leq r_t k_t + w_t n_t; \quad (57)$$

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t; \quad (58)$$

$$k_0 > 0 \text{ dado}; \quad (59)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_{T+1}}{\prod_{t=0}^T (1 + r_t - \delta)} = 0. \quad (60)$$

Modelo de Crescimento Neoclássico

Problema das famílias

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \lambda_t (w_t + (1 + r_t - \delta)k_t - k_{t+1} - c_t) \quad (61)$$

- Dado as suposições que fizemos em F e u sabemos que a solução será interior e a restrição orçamentária se sustenta com igualdade.
- C.p.o: $u'(c_t) = \lambda_t$ e $\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1} - \delta) = \lambda_t$ para todo t .
- Solução do problema é a sequência que satisfaz a Equação de Euler (condições necessárias):

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1} - \delta)u'(c_{t+1}) \quad \forall t \quad (62)$$

juntamente com a condição de *no-Ponzi-game*.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 3: Condições de Equilíbrio

- Market clearing para capital e trabalho:

$$n_t^d = 1 \quad \text{e} \quad k_t^d = k_t^* \quad \forall t \quad (63)$$

- Market clearing no mercado de bens (resource constraint):

$$y_t = c_t + i_t \quad \forall t \quad (64)$$

- que é trivialmente satisfeita pela restrição orçamentária das famílias:

$$y_t = F(k_t, n_t) = r_t k_t + w_t n_t \quad \text{e} \quad i_t = k_{t+1} + (1 - \delta)k_t.$$

- Pela Lei de Walras com dois mercados em equilíbrio, o terceiro também estará. Note que resolvemos para dois preços todo t : r_t e w_t (o preço do bem final foi normalizado $p_t = 1$).

Modelo de Crescimento Neoclássico

Passo 4: Descrever o Equilíbrio Competitivo

Definição. Um equilíbrio competitivo é uma sequência de alocações $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ do consumidor e da firma $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$, e preços $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ dado que:

1. Dado k_0 e a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da família.
2. Dada a sequência de juros e salários $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ é a solução do problema da firma.
3. Market clear para todo t :

$$n_t^d = 1$$

$$k_t^d = k_t$$

$$F(k_t, n_t) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$$

Modelo de Crescimento Neoclássico

- Note que a solução com mercados sequenciais ou Arrow-Debreu é exatamente a mesma.
- Além do mais, neste caso, os Teoremas do Bem Estar garantem que a solução do Planificador Central é a mesma do equilíbrio competitivo.
- Podemos ir mais adiante e caracterizar a solução do problema no **Estado Estacionário**.
- **Estado Estacionário (*Steady State*)**: Uma economia encontra-se no estado estacionário quando as suas variáveis assumirem um valor constante no tempo.
- Dado nossas suposições - em especial concavidade de F e retornos constante de escala - a economia convergirá para um estado estacionário: $k_{ss} = k_{t+1} = k_t$ e $c_{ss} = c_{t+1} = c_t$.

Modelo de Crescimento Neoclássico

Estado Estacionário

- Para que a economia chegue ao estado estacionário basta iniciar com $k_0 > 0$.
- Note que utilizado a EE: $u'(c_{ss}) = (1 + r_{ss} - \delta)u'(c_{ss})$ juntamente com $r_{ss} = F_k(k_{ss}, 1)$ podemos encontrar facilmente k_{ss} .
 - ▶ Se $k_0 < k_{ss}$, a economia acumulará capital até chegar no estado estacionário.
 - ▶ Se $k_0 > k_{ss}$, a economia desacumulará capital até chegar no estado estacionário.
- **Exemplo:** Encontre k_{ss} dado $F(k, n) = k^\alpha n^\alpha$
- A acumulação de capital tem que respeitar a sequência ótima de capital via EE e a lei de movimento do capital.
- Vamos estudar com mais detalhes as dinâmicas de acumulação posteriormente.

Taking Stock

- Como resolver um modelo de **Equilíbrio Geral Competitivo**?
 1. Descrever o ambiente da economia;
 2. Resolver o problema dos agentes;
 3. Indicar as condições de equilíbrio;
 4. Descrever o equilíbrio competitivo.
- Como utilizar os **Teoremas do Bem-Estar** para resolver o modelo?
 - ▶ Dado certas condições a solução do **Planejador Central** é igual ao eq. descentralizado.
 - ▶ Neste caso sabemos que o eq. é Pareto eficiente
- Vimos também que a EE + TVC são condições suficientes para problemas de sequência infinita.
- E que dado certas suposições a economia admite uma família/firma representativa.