Macroeconomia I

Programação Dinâmica em Tempo Contínuo

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Tempo discreto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- Tempo contínuo:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

- Porque o desconto é exponencial?
- Qual a diferença?
  - Não há nenhuma diferença substancial. Alguns problemas são naturalmente escritos em tempo discreto, outros em tempo contínuo (ex. *optimal stopping time problems*).
  - A matemática tende a ser mais elegante, mas as vezes mais complicada.
- Como resolver o problema?

Exemplo: Consumo e Poupança

- Tempo contínuo finito: $t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \max_{c_t} & \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt + e^{-\rho T} V_T(a_T) \\ s.t. \quad & \frac{\partial a_t}{\partial t} = \dot{a}_t = r a_t + w - c_t, \\ & a_0 \text{ dado e } a_T \geq 0. \end{aligned}$$

onde $V_T(a_T)$ é um valor terminal (exógeno).

- Alternativamente podemos colocar uma condição: $a_T = 0$ (não é uma escolha do agente, mas uma restrição no problema!).
- As soluções c_t e a_t são funções: $c : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Exemplo: Consumo e Poupança

- Como encontrar a restrição orçamentária em tempo contínuo?
- Restrição orçamentária para um período Δt:

$$a_{t+\Delta t} = (a_t + w\Delta t - c_t\Delta t)(1 + r\Delta)$$

- Fluxo vs estoque: a_t é estoque e c_t, w, e r são variáveis de fluxo.
- Re-escrevendo e tomando o limite $\Delta t \to 0$:

$$\frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} = ra_t + w - c_t + (w - c_t)r\Delta t$$

Tempo Contínuo

- Como resolver o problema?
  - Cálculo de variacional (não iremos ver).
  - Princípio Máximo de Pontryagin (análogo ao Lagrangiano).
  - Equação de Hamilton-Jacobian-Bellman (análogo à Programação Dinâmica).
- A abordagem aqui será mais "intuitiva" e menos formal. Vamos saltar a maioria dos teoremas e provas.
- Intuitivamente, muito do que vimos para o tempo discreto tem um equivalente para tempo contínuo (princípio da otimalidade, suficiência da transversalidade, etc).
- O Capítulo 7 do Acemoglu é a referência caso você se interesse por mais detalhes.

Princípio Máximo de Pontryagin

[A: Cap 7]

Princípio Máximo de Pontryagin

- Considere o problema:

$$\begin{aligned} &\max_{y_t, x_t} \int_0^T f(x_t, y_t, t)dt + M(x_T) \\ s.t. \quad &\dot{x}_t = g(x_t, y_t, t) \\ &x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

- x_t é o vetor estado.
- y_t é o vetor controle.
- f é a função retorno (com desconto implícito).
- g lei de movimento do estado.

Princípio Máximo de Pontryagin

- Defina o Hamiltoniano como:

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)$$

onde λ_t é o coestado (*costate*), é da mesma dimensão de x_t é uma função do tempo.

- **Princípio Máximo de Pontryagin.** Suponha que f e g são continuamente diferenciáveis e que (x_t^*, y_t^*) são soluções interiores contínuas. Logo, existe uma função λ_t^* que satisfaz as condições necessárias:

$$H_x(x_t, y_t, \lambda_t, t) = -\dot{\lambda}_t^* \quad \forall t, \tag{1}$$

$$H_y(x_t, y_t, \lambda_t, t) = 0 \quad \forall t, \tag{2}$$

$$H_\lambda(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \dot{x}_t \quad \forall t. \tag{3}$$

Com a condição terminal $\lambda_T = M_x(x_t)$ (caso a condição terminal seja $a_T = 0$, então $\lambda_T = 0$).

Princípio Máximo de Pontryagin

- Para ter um pouco de intuição, imagine o seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \int_0^T [\underbrace{f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)}_{H(x_t, y_t, \lambda_t, t)} - \lambda_t \dot{x}_t] + M(x_T)$$

- λ_t funciona como o "multiplicador" e informa sobre o valor de relaxar as restrições.
- As condições necessárias são análogas as condições de primeira ordem do Lagrangeano acrescetando uma condição "temporal".

Princípio Máximo de Pontryagin

- Nos casos que a função retorno é descontada exponencialmente por $e^{-\rho t}$ (praticamente todos em economia), é conveniente redefinir o Hamiltoniano como $\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)$:

$$\begin{aligned} H(x_t, y_t, \lambda_t, t) =& f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t) \\ H(x_t, y_t, \lambda_t, t) =& e^{-\rho t} \underbrace{\left(\hat{f}(x_t, y_t, t) + \mu_t g(x_t, y_t, t)\right)}_{\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)} \end{aligned}$$

- Onde o multiplicador e o retorno estão em valores correntes:

$$\mu_t = \lambda_t e^{\rho t}, \text{ e } \hat{f}(x_t, y_t, t) = f(x_t, y_t, t) e^{\rho t}.$$

- A única condição que se altera é a (1):

$$\begin{aligned} \hat{H}_x(x_t, y_t, \mu_t, t) &= \rho \mu_t - \dot{\mu}_t^* \\ \hat{H}_y(x_t, y_t, \mu_t, t) &= 0 \\ \hat{H}_\lambda(x_t, y_t, \mu_t, t) &= \dot{x}_t. \end{aligned}$$

Exemplo: Consumo e Poupança

- No problema de Consumo e Poupança

$$\hat{H} = u(c_t) + \mu_t(ra_t + w - c_t)$$

- Logo:

$$r\mu_t = \rho\mu_t - \dot{\mu}_t^* \quad \forall t, \tag{4}$$

$$u'(c_t) = \mu_t \quad \forall t. \tag{5}$$

- Tomando a derivada em relação ao tempo:

$$\dot{\mu}_t = e^{-\rho t} u''(c_t)\dot{c}_t \tag{6}$$

- Substituindo e encontramos equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho) \tag{7}$$

Exemplo: Consumo e Poupança

- A solução é um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r-\rho)$$
$$\dot{a}_t = ra_t + w - c_t$$

- Alternativamente podemos resolver por $\dot{c}_t$ (utilizando $\ddot{a}_t$) e encontrar uma equação de segunda ordem.
- Para caracterizar uma solução é necessário uma condição inicial e uma terminal.
  - Condição inicial: a_0 dado.
  - Condição terminal: $V_T(a_T)$ ou transversalidade em caso de tempo infinito.
- Note que a elasticidade de substituição intertemporal é igual a

$$\sigma = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t}$$

que implica na EE: $\dot{c}_t/c_t = \sigma(r-\rho)$.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Programação Dinâmica

- Exatamente como no tempo discreto, podemos representar o problema utilizando a Programação Dinâmica.
- Abordagem mais flexível, principalmente para introduzir incerteza, escolha discreta, etc.
- Mesma solução mas temos que resolver uma equação diferencial parcial em vez de uma equação diferencial ordinária.
- Mais fácil levar o problema para o computador (não iremos ver métodos numéricos).

Bellman's Principle

- Como encontrar a função valor em tempo contínuo?
- Considere o princípio de otimalidade de Bellman para obter a função valor $V(t-\Delta t, a)$:

$$V(t-\Delta t, a) = \max_{c>0}\{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t,a')\}$$
$$s.t. \quad a' = a + (ra + w - c)\Delta t$$

  - $u(c)\Delta t$: fluxo de utilidade entre os períodos $t-\Delta t$ e t.
  - $e^{-\rho\Delta t}V(t,a')$: valor de continuação.
  - $(ra + w - c)\Delta t$: fluxo de renda e consumo.

- Reescreva a equação:

$$V(t-\Delta t, a) = \max_{c>0}\{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t, a + (ra + w - c)\Delta t)\}$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Defina $g(\Delta t) \equiv e^{-\rho\Delta} V(t, a + [ra + w - c]\Delta t)$ e tome a expansão de Taylor em torno do ponto $\Delta t = 0$:

$$
\begin{aligned}
g(\Delta t) =& g(0) + g'(0)\Delta t + o(\Delta) \\
g(\Delta t) \approx& V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a})\, \Delta t
\end{aligned}
$$

  onde $V_a(t, a)$ é a derivada em relação a a.

- A função valor:

$$
V(t - \Delta t, a) = \max_{c>0} \{u(c)\Delta t + V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a})\, \Delta t\}
$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Continuando:

$$
\begin{aligned}
V(t-\Delta t, a) &= \max_{c>0} \{u(c)\Delta t + V(t,a) + (-\rho V(t,a) + V_a(t,a)\dot{a})\,\Delta t\} \\
\frac{V(t-\Delta t, a) - V(t,a)}{\Delta t} &= \max_{c>0} \{u(c) - \rho V(t,a) + V_a(t,a)\dot{a}\}
\end{aligned}
$$

- Tomando o limite $\Delta t \to 0$ e encontramos a **Hamilton-Jacobi-Bellman Equation**:

$$
-V_t(t,a) + \rho V(t,a) = \max_{c>0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t,a)\}
$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Hamilton-Jacobi-Bellman Equation:

$$-V_t(t,a) + \rho V(t,a) = \max_{c>0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t,a)\}$$

- Equação diferencial parcial.
- Suposição: V é diferenciável em todos seus argumentos.
- **Intuição:** $V_a(t,a)$ representa o aumento marginal do valor quando a riqueza a aumenta marginalmente $\rightarrow$ note a conexão com o mulltiplicador μ!
- Se o problema for estacionário (variáveis constante ao longo do tempo): $V_t(t,a) = 0$ e função valor não depende do tempo.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Hamilton-Jacobi-Bellman Equation:

$$-V_t(t,a) + \rho V(t,a) = \max_{c>0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t,a)\}$$

- Equação diferencial parcial.
- Suposição: V é diferenciável em todos seus argumentos.
- **Intuição:** $V_a(t,a)$ representa o aumento marginal do valor quando a riqueza a aumenta marginalmente $\rightarrow$ note a conexão com o mulltiplicador μ!
- Se o problema for estacionário (variáveis constante ao longo do tempo): $V_t(t,a) = 0$ e função valor não depende do tempo.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Estamos interessados na solução do problema. Condição necessária (c.p.o em relação a c):

$$u'(c^*(t,a)) = V_a(t,a)$$

- E a condição de envelope. Diferenciando a HJB em relação a a (avaliado no ótimo $c^*(t,a)$):

$$-V_{ta}(t,a) + \rho V_a(t,a) = \frac{\partial c^*(t,a)}{\partial a} \underbrace{\left(u'(c^*(t,a)) - V_{aa}(t,a)\right)}_{=0 \text{ (pela cpo)}} + \ldots$$

$$\ldots(ra + w - c^*(t,a))V_{aa}(t,a) + rV_a(t,a)$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Finalmente:

$$V_{ta}(t,a) + \dot{a}V_{aa}(t,a) = -(r-\rho)V_a(t,a)$$

- Defina a solução ótima de $a^*(t)$ utilizando a lei de movimento e $c^*(t,a)$:

$$\dot{a}^*(t) = ra + w - c^*(t,a)$$

- Logo:

$$\frac{\partial V_a(t,a^*(t))}{\partial t} = V_{ta}(t,a^*(t)) + \dot{a}^*(t)V_{aa}(t,a^*(t))$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Utilizando a cpo, e a condição de envelope avaliada no ótimo $a^*(t)$:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}V_a(t, a^*(t))}{V_a(t, a^*(t)} = -(r-\rho)$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}u'(c_t)}{u'(c_t)} = -(r-\rho)$$

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r-\rho)$$

- Finalmente encontramos a mesma **Equação de Euler**!

Uma pequena nota sobre Incerteza

Incerteza

- Vamos considerar o processo mais simples em tempo contínuo: processos poisson (*jump processes*).
  - Casos gerais necessitam uma introdução à cálculo estocástico.
- Considere que w_t segue um processo poisson com estados: $\{w_1, w_2\}$
- A taxa de transição entre o estado i e j é dado por: $\eta_{ij} \geq 0$.
- A probabilidade condicional de "saltar" do estado 1 para o estado 2 no intervalo Δt

$$P(\text{salto para } w_2 \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_1) = 1 - e^{-\eta_{12}\Delta t} \approx \eta_{12}\Delta t + o(\Delta t)$$

onde a aproximação é válida para um Δt próximo de zero.

Incerteza

- Para N estados $w \in \{w_1, ..., w_N\}$ com Δt pequeno:

$$P(\text{salto para } w_j \text{ no intervalo } [t, t+\Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{continuar em } w_1 \text{ no intervalo } [t, t+\Delta t] | w_t = w_i) \approx \left(1 - \sum_{j \neq i} \eta_{ij}\Delta t + o(\Delta t)\right)$$

- Probabilidade de 2 saltos no mesmo intervalo é de segunda ordem e desaparece rapidamente quando $\Delta t \to 0$

$$P(\text{2 ou + saltos: } i \to k \to j \text{ em } [t, t+\Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ji}\Delta t \times \eta_{kj}\Delta t = \eta_{ji}\eta_{ji}(\Delta t)^2$$

Consumo e Poupança

- Considere o problema de consumo e poupança com $w \in \{w_1, w_2\}$ e $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta$:

$$V(t-\Delta t, a, w_1) = \max_{c>0}\{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\left[(1-\eta\Delta t)V(t,a',w_1) + \eta\Delta t V(t,a',w_2)\right]\}$$

  com $a' = a + (ra + w_1 - c)\Delta t$.

- $(1-\eta\Delta t)V(t,a',w_1)$ valor de continuação quando w não muda
- $\eta\Delta t V(t,a',w_2)$ valor de continuação quando $w_1 \to w_2$.

Consumo e Poupança

- Diferencie em Δt e avalie $\Delta t = 0$ (o resultado será o mesmo se utilizarmos a série de taylor como anteriormente):

$$\left.\frac{\partial V(t-\Delta t, a, w_1)}{\partial \Delta t}\right|_{\Delta t=0} = -V_t(t,a,w_1) =$$
$$= \max_{c>0}\{u(c) + \underbrace{\dot{a}V_a(t,a,w_1)}_{\text{Poupança adicional}}\} - \rho V(t,a,w_1) + \underbrace{\eta(V(t,a,w_2) - V(t,a,w_1))}_{\text{Diferença Salarial}}$$

Note que o efeito de poupar no estado w_2 é de segunda ordem.

- A solução satisfaz as duas HJB simétricas:

$$-V_t(t,a,w_1) + (\rho+\eta)V(t,a,w_1) = \max_{c>0}\{u(c) - [ar + w_1 - c]V_a(t,a,w_1)\} + \eta V(t,a,w_2)$$
$$-V_t(t,a,w_2) + (\rho+\eta)V(t,a,w_2) = \max_{c>0}\{u(c) - [ar + w_2 - c]V_a(t,a,w_2)\} + \eta V(t,a,w_1)$$

Consumo e Poupança

- Para encontrar a EE utilizamos a mesma idéia que anteriormente. Suponha que o problema seja estacionário. A cpo de c implica:

$$u'(c^*(a,w)) = V_a$$

- A condição do envelope (∂HJB$/\partial a$):

$$\rho V_a(a,w) = \eta(V_a(a,\tilde{w}) - V_a(a,w)) + rV(a,w) + \dot{a}V_{aa}(a,w)$$

- Ok, no tempo discreto sabemos que nossa EE é sobre o valor esperado da utilidade marginal de $t+1$ (i.e. $\mathbb{E}[u'(c_{t+1})]$).
- Qual a definição apropriada deste valor esperado em tempo contínuo?

Consumo e Poupança

- **Definição.** Para a função diferenciável f, defina o *Infinitesimal Generator* como o operador $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}f(a,w) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{E}_t[f(a_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t})] - f(a_t, w_t)}{\Delta t}$$

- **Intuição**: O *Infinitesimal Generator* descreve como o processo estocástico evolui em um intervalo de tempo.

- Nosso processo estocástico depende de duas variáveis: a_t^* e w_t. Basicamente $\mathcal{A}$ nos diz como a função f evolui em valor esperado dado a_t^* e w_t para um instante t.

Consumo e Poupança

- No nosso caso:

$$\mathbb{E}_t[f(a^*_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t})] \approx (1-\eta\Delta t) f(a^*_t + \dot{a}, w_t) + \eta \Delta t f(a^*_t + \dot{a}, \tilde{w}_t)$$

- É relativamente fácil utilizar a definição e demonstrar que:

$$\mathcal{A}f(a^*, w) = \underbrace{\dot{a} f_a(a, w)}_{\textit{Drift} \text{ em } a} + \underbrace{\eta(f(a^*, \tilde{w}) - f(a^*, w))}_{\text{transição salarial}}.$$

- A condição do envelope pode ser escrita:

$$\underbrace{\dot{a} V_{aa}(a, w) + \eta(V_a(a, \tilde{w}) - V_a(a, w))}_{\mathcal{A}V_a(a,w)} = -(r-\rho) V_a(a, w)$$

Consumo e Poupança

- Combinando a cpo com o envelope:

$$\frac{\mathcal{A}V_a(a^*, w)}{V_a(a^*, w)} = -(r - \rho)$$
$$\frac{\mathcal{A}u'(c^*(a, w))}{u'(c^*(a, w))} = -(r - \rho)$$

- Finalmente encontramos a Equação de Euler!
- Onde $\frac{\mathcal{A}u'(c^*)}{u'(c^*)}$ é a taxa de crescimento esperada de u'.

Taking Stock

- Aprendemos o Princípio Máximo de Pontryagin e utilizamos o Hamiltoniano para resolver um problema de controle ótimo.
- Derivamos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema de consumo e poupança.
- Utilizamos um processo Poisson para introduzir incerteza.