

# Macroeconomia I

## Programação Dinâmica em Tempo Contínuo

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

# Introdução

---

- Tempo discreto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- Tempo contínuo:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

- Porque o desconto é exponencial?
- Qual a diferença?
  - ▶ Não há nenhuma diferença substancial. Alguns problemas são naturalmente escritos em tempo discreto, outros em tempo contínuo (ex. *optimal stopping time problems*).
  - ▶ A matemática tende a ser mais elegante, mas as vezes mais complicada.
- Como resolver o problema?

# Referências

---

- Acemoglu: Cap 7.
- Notas do Matthias Kredler.

## Exemplo: Consumo e Poupança

---

- Tempo contínuo finito:  $t \in [0, T]$ .

$$\begin{aligned} & \max_{c_t} \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt + e^{-\rho T} V_T(a_T) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\partial a_t}{\partial t} = \dot{a}_t = r a_t + w - c_t, \\ & a_0 \text{ dado e } a_T \geq 0. \end{aligned}$$

onde  $V_T(a_T)$  é um valor terminal (exógeno).

- Alternativamente podemos colocar uma condição:  $a_T = 0$  (não é uma escolha do agente, mas uma restrição no problema!).
- As soluções  $c_t$  e  $a_t$  são funções:  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Exemplo: Consumo e Poupança

---

- Como encontrar a restrição orçamentária em tempo contínuo?
- Restrição orçamentária para um período  $\Delta t$ :

$$a_{t+\Delta t} = (a_t + w\Delta t - c_t\Delta t)(1 + r\Delta t)$$

- Fluxo vs estoque:  $a_t$  é estoque e  $c_t$ ,  $w$ , e  $r$  são variáveis de fluxo.
- Re-escrevendo e tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} = ra_t + w - c_t + (w - c_t)r\Delta t$$

- Como resolver o problema?
  - ▶ Cálculo variacional (não iremos ver).
  - ▶ Princípio Máximo de Pontryagin (análogo ao Lagrangiano).
  - ▶ Equação de Hamilton-Jacobian-Bellman (análogo à Equação de Bellman).
- A abordagem aqui será mais “intuitiva” e menos formal. Vamos saltar a maioria dos teoremas e provas.
- Intuitivamente, muito do que vimos para o tempo discreto tem um equivalente para tempo contínuo (princípio da otimalidade, suficiência da transversalidade, etc).
- O Capítulo 7 do Acemoglu é a referência caso você se interesse por mais detalhes.

# Princípio Máximo de Pontryagin

# Princípio Máximo de Pontryagin

---

- Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max_{y_t, x_t} \int_0^T f(x_t, y_t, t) dt + M(x_T) \\ s.t. \quad \dot{x}_t = g(x_t, y_t, t) \\ x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

- $x_t$  é o vetor estado.
- $y_t$  é o vetor controle.
- $f$  é a função retorno (com desconto implícito).
- $g$  lei de movimento do estado.



# Princípio Máximo de Pontryagin

---

- Defina o Hamiltoniano como:

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)$$

onde  $\lambda_t$  é o coestado (*costate*), é da mesma dimensão de  $x_t$  é uma função do tempo.

- Princípio Máximo de Pontryagin.** Suponha que  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis e que  $(x_t^*, y_t^*)$  são soluções interiores contínuas. Logo, existe uma função  $\lambda_t^*$  que satisfaz as condições necessárias:

$$H_x(x_t, y_t, \lambda_t, t) = -\dot{\lambda}_t^* \quad \forall t, \quad (1)$$

$$H_y(x_t, y_t, \lambda_t, t) = 0 \quad \forall t, \quad (2)$$

$$H_\lambda(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \dot{x}_t \quad \forall t. \quad (3)$$

Com a condição terminal  $\lambda_T = M_x(x_T)$  (caso a condição terminal seja  $a_T = 0$ , então  $\lambda_T = 0$ ).

# Princípio Máximo de Pontryagin

---

- Para ter um pouco de intuição, imagine o seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \int_0^T \underbrace{[f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t) - \lambda_t \dot{x}_t]}_{H(x_t, y_t, \lambda_t, t)} + M(x_T)$$

- $\lambda_t$  funciona como o “multiplicador” e informa sobre o valor de relaxar as restrições.
- As condições necessárias são análogas as condições de primeira ordem do Lagrangeano acrescentando uma condição “temporal”.

# Princípio Máximo de Pontryagin

- Nos casos que a função retorno é descontada exponencialmente por  $e^{-\rho t}$  (praticamente todos em economia), é conveniente redefinir o Hamiltoniano como  $\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)$ :

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)$$

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = e^{-\rho t} \underbrace{(\hat{f}(x_t, y_t, t) + \mu_t g(x_t, y_t, t))}_{\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)}$$

- Onde o multiplicador e o retorno estão em valores correntes:

$$\mu_t = \lambda_t e^{\rho t}, \text{ e } \hat{f}(x_t, y_t, t) = f(x_t, y_t, t) e^{\rho t}.$$

- A única condição que se altera é a (1):

$$\hat{H}_x(x_t, y_t, \mu_t, t) = \rho \mu_t - \dot{\mu}_t^*$$

$$\hat{H}_y(x_t, y_t, \mu_t, t) = 0$$

$$\hat{H}_\lambda(x_t, y_t, \mu_t, t) = \dot{x}_t.$$

## Exemplo: Consumo e Poupança

---

- No problema de Consumo e Poupança

$$\hat{H} = u(c_t) + \mu_t(ra_t + w - c_t)$$

- Logo:

$$r\mu_t = \rho\mu_t - \dot{\mu}_t^* \quad \forall t, \quad (4)$$

$$u'(c_t) = \mu_t \quad \forall t. \quad (5)$$

- Tomando a derivada em relação ao tempo:

$$\dot{\mu}_t = u''(c_t)\dot{c}_t \quad (6)$$

- Substituindo e encontramos equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho) \quad (7)$$

## Exemplo: Consumo e Poupança

---

- A solução é um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho)$$
$$\dot{a}_t = ra_t + w - c_t$$

- Alternativamente podemos resolver por  $\dot{c}_t$  (utilizando  $\ddot{a}_t$ ) e encontrar uma equação de segunda ordem.
- Para caracterizar uma solução é necessário uma condição inicial e uma terminal.
  - ▶ Condição inicial:  $a_0$  dado.
  - ▶ Condição terminal:  $V_T(a_T)$  ou transversalidade em caso de tempo infinito.
- Note que a elasticidade de substituição intertemporal é igual a

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t}$$

Onde  $\sigma$  é o coeficiente de aversão ao risco. Que implica na EE:  $\dot{c}_t/c_t = (r - \rho)/\sigma$ .

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

# Programação Dinâmica

---

- Exatamente como no tempo discreto, podemos representar o problema utilizando a Programação Dinâmica.
- Abordagem mais flexível, principalmente para introduzir incerteza, escolha discreta, etc.
- Mesma solução mas temos que resolver uma equação diferencial parcial em vez de uma equação diferencial ordinária.
- Mais fácil levar o problema para o computador (não iremos ver métodos numéricos).

# Bellman's Principle

---

- Como encontrar a função valor em tempo contínuo?
- Considere o princípio de otimalidade de Bellman para obter a função valor  $V(t - \Delta t, a)$ :

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t, a')\}$$
$$s.t. \quad a' = a + (ra + w - c)\Delta t$$

- ▶  $u(c)\Delta t$ : fluxo de utilidade entre os períodos  $t - \Delta t$  e  $t$ .
  - ▶  $e^{-\rho\Delta t}V(t, a')$ : valor de continuação.
  - ▶  $(ra + w - c)\Delta t$ : fluxo de renda e consumo.
- Reescreva a equação:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t, a + (ra + w - c)\Delta t)\}$$



# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

- Defina  $g(\Delta t) \equiv e^{-\rho\Delta} V(t, a + [ra + w - c]\Delta t)$  e tome a expansão de Taylor em torno do ponto  $\Delta t = 0$ :

$$g(\Delta t) = g(0) + g'(0)\Delta t + o(\Delta)$$

$$g(\Delta t) \approx V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t$$

onde  $V_a(t, a)$  é a derivada em relação a  $a$ .

- A função valor:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t\}$$

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

- Continuando:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t\}$$
$$\frac{V(t - \Delta t, a) - V(t, a)}{\Delta t} = \max_{c > 0} \{u(c) - \rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}\}$$

- Tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  e encontramos a **Hamilton-Jacobi-Bellman Equation**:

$$-V_t(t, a) + \rho V(t, a) = \max_{c > 0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t, a)\}$$

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

## Hamilton-Jacobi-Bellman Equation:

$$-V_t(t, a) + \rho V(t, a) = \max_{c \geq 0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t, a)\}$$

- Equação diferencial parcial ( $V_t(t, a)$ ).
- Suposição:  $V$  é diferenciável em todos seus argumentos.
- **Intuição:**  $V_a(t, a)$  representa o aumento marginal do valor quando a riqueza  $a$  aumenta marginalmente  $\rightarrow$  note a conexão com o multiplicador  $\mu$ !
- Se o problema for estacionário (variáveis constante ao longo do tempo):  $V_t(t, a) = 0$  e função valor não depende do tempo.

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

- Estamos interessados na solução do problema. Condição necessária (c.p.o em relação a  $c$ ):

$$u'(c^*(t, a)) = V_a(t, a)$$

- E a condição de envelope. Diferenciando a HJB em relação a  $a$  (avaliado no ótimo  $c^*(t, a)$ ):

$$\begin{aligned} -V_{ta}(t, a) + \rho V_a(t, a) &= \frac{\partial c^*(t, a)}{\partial a} \underbrace{(u'(c^*(t, a)) - V_a(t, a))}_{=0 \text{ (pela cpo)}} + \dots \\ &\dots (ra + w - c^*(t, a))V_{aa}(t, a) + rV_a(t, a) \end{aligned}$$

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

- Finalmente:

$$V_{ta}(t, a) + \dot{a}V_{aa}(t, a) = -(r - \rho)V_a(t, a)$$

- Defina a solução ótima de  $a^*(t)$  utilizando a lei de movimento e  $c^*(t, a)$ :

$$\dot{a}^*(t) = ra + w - c^*(t, a)$$

- Logo:

$$\frac{dV_a(t, a^*(t))}{dt} = V_{ta}(t, a^*(t)) + \dot{a}^*(t)V_{aa}(t, a^*(t))$$

- Note que  $V_t(t, a)$  é a derivada parcial com respeito ao primeiro argumento e  $dV(t, a)/dt$  é a derivada total (potencialmente o segundo argumento pode depender de  $t$ ).

# Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

---

- Utilizando a cpo, e a condição de envelope avaliada no ótimo  $a^*(t)$ :

$$\frac{\frac{d}{dt} V_a(t, a^*(t))}{V_a(t, a^*(t))} = -(r - \rho)$$

$$\frac{\frac{d}{dt} u'(c_t)}{u'(c_t)} = -(r - \rho)$$

$$\frac{u''(c_t) \dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho)$$

- Finalmente encontramos a mesma **Equação de Euler!**

## Uma pequena nota sobre Incerteza

- Vamos considerar o processo mais simples em tempo contínuo: processos poisson (*jump processes*).
  - ▶ Casos gerais necessitam uma introdução à cálculo estocástico.
- Considere que  $w_t$  segue um processo poisson com estados:  $\{w_1, w_2\}$
- A taxa de transição entre o estado  $i$  e  $j$  é dado por:  $\eta_{ij} \geq 0$ .
- A probabilidade condicional de “saltar” do estado 1 para o estado 2 no intervalo  $\Delta t$

$$P(\text{salto para } w_2 \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_1) = 1 - e^{-\eta_{12}\Delta t} \approx \eta_{12}\Delta t + o(\Delta t)$$

onde a aproximação é válida para um  $\Delta t$  próximo de zero.



- Para  $N$  estados  $w \in \{w_1, \dots, w_N\}$  com  $\Delta t$  pequeno:

$$P(\text{salto para } w_j \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{continuar em } w_1 \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \left( 1 - \sum_{j \neq i} \eta_{ij} \Delta t + o(\Delta t) \right)$$

- Probabilidade de 2 saltos no mesmo intervalo é de segunda ordem e desaparece rapidamente quando  $\Delta t \rightarrow 0$

$$P(2 \text{ ou } + \text{ saltos: } i \rightarrow k \rightarrow j \text{ em } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ji} \Delta t \times \eta_{kj} \Delta t = \eta_{ji} \eta_{ji} (\Delta t)^2$$

- Considere o problema de consumo e poupança com  $w \in \{w_1, w_2\}$  e  $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta$ :

$$V(t - \Delta t, a, w_1) = \max_{c \geq 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t} [(1 - \eta\Delta t)V(t, a', w_1) + \eta\Delta t V(t, a', w_2)]\}$$

com  $a' = a + (ra + w_1 - c)\Delta t$ .

- $(1 - \eta\Delta t)V(t, a', w_1)$  valor de continuação quando  $w$  não muda
- $\eta\Delta t V(t, a', w_2)$  valor de continuação quando  $w_1 \rightarrow w_2$ .

## Consumo e Poupança

- Diferencie em  $\Delta t$  e avalie  $\Delta t = 0$  (o resultado será o mesmo se utilizarmos a série de Taylor como anteriormente):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V(t - \Delta t, a, w_1)}{\partial \Delta t} \right|_{\Delta t=0} &= -V_t(t, a, w_1) = \\ &= \max_{c>0} \{ u(c) + \underbrace{\dot{a}V_a(t, a, w_1)}_{\text{Poupança adicional}} \} - \rho V(t, a, w_1) + \underbrace{\eta(V(t, a, w_2) - V(t, a, w_1))}_{\text{Diferença Salarial}} \end{aligned}$$

Note que o efeito de poupar no estado  $w_2$  é de segunda ordem.

- A solução satisfaz as duas HJB simétricas:

$$-V_t(t, a, w_1) + (\rho + \eta)V(t, a, w_1) = \max_{c>0} \{ u(c) - [ar + w_1 - c]V_a(t, a, w_1) \} + \eta V(t, a, w_2)$$

$$-V_t(t, a, w_2) + (\rho + \eta)V(t, a, w_2) = \max_{c>0} \{ u(c) - [ar + w_2 - c]V_a(t, a, w_2) \} + \eta V(t, a, w_1)$$

- Para encontrar a EE utilizamos a mesma idéia que anteriormente. Suponha que o problema seja estacionário. A cpo de  $c$  implica:

$$u'(c^*(a, w)) = V_a$$

- A condição do envelope ( $\partial HJB / \partial a$ ):

$$\rho V_a(a, w) = \eta(V_a(a, \tilde{w}) - V_a(a, w)) + rV(a, w) + \dot{a}V_{aa}(a, w)$$

- Ok, no tempo discreto sabemos que nossa EE é sobre o valor esperado da utilidade marginal de  $t + 1$  (i.e.  $\mathbb{E}[u'(c_{t+1})]$ ).
- Qual a definição apropriada deste valor esperado em tempo contínuo?

- **Definição.** Para a função diferenciável  $f$ , defina o *Infinitesimal Generator* como o operador  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}f(a, w) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_t[f(a_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t})] - f(a_t, w_t)}{\Delta t}$$

- **Intuição:** O *Infinitesimal Generator* descreve como o processo estocástico evolui em um intervalo de tempo.
- Nosso processo estocástico depende de duas variáveis:  $a_t^*$  e  $w_t$ . Basicamente  $\mathcal{A}$  nos diz como a função  $f$  evolui em valor esperado dado  $a_t^*$  e  $w_t$  para um instante  $t$ .

- No nosso caso:

$$\mathbb{E}_t[f(a_{t+\Delta t}^*, w_{t+\Delta t})] \approx (1 - \eta\Delta t)f(a_t^* + \dot{a}, w_t) + \eta\Delta t f(a_t^* + \dot{a}, \tilde{w}_t)$$

- É relativamente fácil utilizar a definição e demonstrar que:

$$\mathcal{A}f(a^*, w) = \underbrace{\dot{a}f_a(a, w)}_{\text{Drift em } a} + \underbrace{\eta(f(a^*, \tilde{w}) - f(a^*, w))}_{\text{transição salarial}}.$$

- A condição do envelope pode ser escrita:

$$\underbrace{\dot{a}V_{aa}(a, w) + \eta(V_a(a, \tilde{w}) - V_a(a, w))}_{\mathcal{A}V_a(a, w)} = -(r - \rho)V_a(a, w)$$

- Combinando a cpo com o envelope:

$$\frac{\mathcal{A}V_a(a^*, w)}{V_a(a^*, w)} = -(r - \rho)$$
$$\frac{\mathcal{A}u'(c^*(a, w))}{u'(c^*(a, w))} = -(r - \rho)$$

- Finalmente encontramos a Equação de Euler!
- Onde  $\frac{\mathcal{A}u'(c^*)}{u'(c^*)}$  é a taxa de crescimento esperada de  $u'$ .

# Taking Stock

---

- Aprendemos o Princípio Máximo de Pontryagin e utilizamos o Hamiltoniano para resolver um problema de controle ótimo.
- Derivamos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema de consumo e poupança.
- Utilizamos um processo Poisson para introduzir incerteza.