

Apunte Señales y Sistemas I

Por: Tomás Rojas

Señales, sistemas y procesamiento de señales

Definición: Una **señal** es cualquier cantidad física que varía en el tiempo, en el espacio o cualquier otra variable.

Algunos ejemplos de señales pueden ser polinomios que dependen del tiempo o del espacio o cualquier cosa.

Hay señales que pueden ser especificadas de manera funcional (con funciones), pero este no es siempre el caso.

Si tomamos un audio de una charla, no es una señal definida funcionalmente, pero podemos descomponerla en suma de senos y cosenos:

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \sin[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)]$$

Donde $\{A_i\}$, $\{F_i\}$, $\{\theta_i\}$ son conjuntos de Amplitudes, Frecuencias y Fases respectivamente, que bien podrían variar en el tiempo.

Otro ejemplo de señal puede ser un electrocardiograma. Esta señal le entrega información a un médico sobre la condición en que se encuentra el corazón de su paciente. De manera similar, un electroencefalograma da información de la actividad cerebral.

Todos los sistemas mencionados son ejemplos de sistemas que dependen de solo una variable independiente, el tiempo... Un ejemplo de un sistema con más variables independientes puede ser una imagen.

Un sistema también puede ser definido como un aparato físico que ejecuta cierta operación sobre una señal. Por ejemplo un filtro puede ser tratado como un sistema.

Cuando pasamos una señal por un sistema, decimos que la procesamos. En general, un sistema está caracterizado por el tipo de operación que aplica a una señal.

Clasificación de señales

lo voy a dejar en blanco ya que no es tan importante para el C1, más adelante volveré a llenar esto

Señales en tiempo continuo versus señales en tiempo discreto

Señales sinusoidales continuas

Un oscilador armónico simple puede ser descrito matemáticamente como:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta); \quad -\infty < t < \infty$$

El subíndice a hace referencia a que esta señal es analógica.

La frecuencia Ω es frecuencia angular, en radianes, es común usar F que es en Hertz, donde $\Omega = 2\pi F$

La señal sinusoidal analógica está caracterizada por las siguientes propiedades:

- *Para cualquier valor fijo de frecuencia F , $x_a(t)$ es periódica.* Esto es

$$x_a(t + T_p) = x_a(t), \quad T = 1/F$$

- *Señales análogas sinusoidales con distintas frecuencias, **son** distintas.*
- *Incrementar la frecuencia implica incrementar las oscilaciones de una señal en un tiempo dado.*

Podemos notar que para $F \rightarrow 0$ entonces $T \rightarrow \infty$

Señales sinusoidales discretas

Podemos expresar matemáticamente una señal sinusoidal discreta de la siguiente manera:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta); \quad -\infty < n < \infty$$

Acá también tenemos otra frecuencia:

$$\omega \equiv 2\pi f$$

Podemos ver las siguientes propiedades de este tipo de señales:

- *Una señal sinusoidal discreta es periódica **solo** si su frecuencia f es un nro racional.*

Por definición tenemos que una señal discreta es periódica con periodo N ($N > 0$) ssi:

$$x(n + N) = x(n) \quad \forall n$$

El valor más pequeño de N para el que esto se cumple, se llama *periodo fundamental*.

Demostración:

$$\cos[2\pi f_0(N + n) + \theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

Por lo que es periódica sólo si su frecuencia f_0 es una fracción entre dos enteros i.e. es racional.

- *Sinusoides discretas cuyas frecuencias están separadas por un múltiplo entero de 2π son **indénticas**.*

Para probar esto, consideremos $\cos(\omega_0 n + \theta)$

$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

Como consecuencia de esto, **todas** las secuencias sinusoidales que cumplan:

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta); \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Donde:

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi, \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi$$

Son **indistinguibles**, por lo mismo, nos interesan frecuencias en los rangos $-\pi \leq \omega \leq \pi$ o bien $-1/2 \leq f \leq 1/2$

- La oscilación más rápida que puede tener una señal sinusoidal discreta es cuando $\omega = \pm\pi$ o bien $f = \pm 1/2$

En la siguiente imagen podemos ver la señal $x(n) = \cos \omega_0 n$ con distintos valores para ω_0

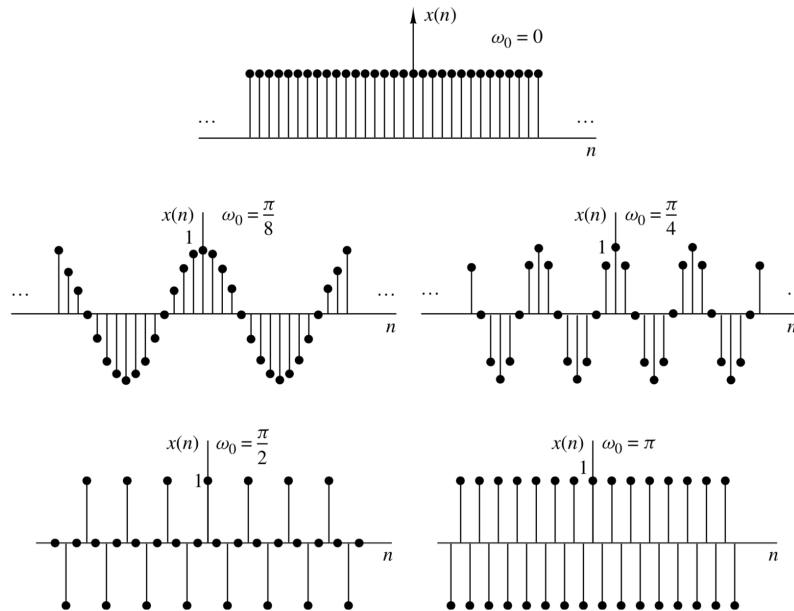


Figura 1: Imagen sacada de *Digital Signal Processing*

Analógico a digital y digital a analógico

Muchas señales de interés son analógicas. Para procesar una señal analógica de manera digital, primero hay que digitalizarla.

Esto tampoco es pertinente para el C1, por lo que lo dejaré para después

Teorema del muestreo

Si tenemos una señal analógica ¿Cómo encontramos la frecuencia de muestreo F_s ? Para responder esta pregunta es necesario conocer ciertas características de la señal de interés. En particular, tenemos que tener ciertas nociones del *contenido frecuencial* de la señal. Por lo general podemos conocer esa información en forma de cotas superiores.

Supongamos que cualquier señal analógica puede ser representada como un suma de senos (Fourier se encarga de eso).

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i)$$

Donde N es el número de frecuencias presentes.

El teorema nos dice que (se viene golazo, pero en virtud del tiempo lo voy a plantear no más, en todo caso es fácil de ver que tiene que ver con el aliasing de las señales al tomar mal la frecuencia de muestreo) $F_s > 2F_{\max}$

Donde F_{\max} es la frecuencia más alta presente en la señal.

Usando esto, cualquier componente de frecuencia $|F_i| < F_{\max}$, en analógica, pasa a ser una señal sinusoidal discreta con una frecuencia:

$$-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2}$$

o de manera equivalente:

$$-\pi \leq \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi$$

Como $|f| = 1/2$ o $|\omega| = \pi$ son las frecuencias más altas en tiempo discreto, si escogemos el muestreo como se mostró, se evita el problema del aliasing.

Así la condición $F_s > 2F_{\max}$ garantiza que el mapeo de frecuencias continuas pase con relación 1 a 1 al dominio discreto.

Teorema del muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{\max} = B$ y la señal se muestrea de tal manera que $F_s > 2B$, entonces $x_a(t)$ puede ser recuperada con la función interpolación

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$$

Así $x_a(t)$ puede ser expresada como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin[2\pi B(t - n/2B)]}{2\pi B(t - n/2B)}$$

TODO: Falta poner un par de imágenes

Señales y sistemas en tiempo discreto

En esta sección se ven mucho los sistemas LTI, tema central del curso.

Señales en tiempo discreto

Una señal en tiempo discreto $x(n)$ es una función de una variable independiente que es un entero. Como muestra la *figura 2*, la señal **no está definida** para valores de n que no sean enteros (ni siquiera es 0).

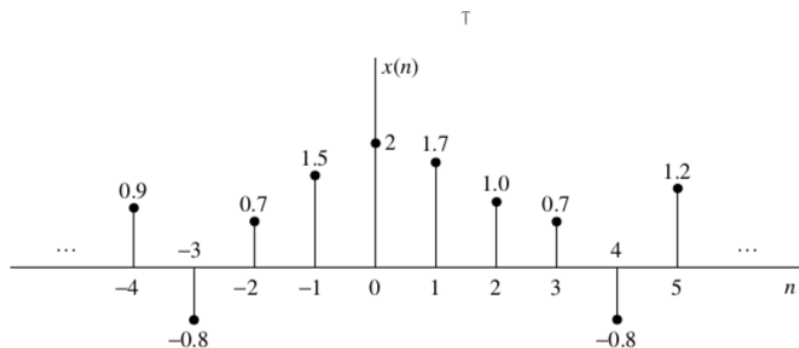


Figura 2

Señales elementales en tiempo discreto

1.- Muestra unitaria Es una señal que es 1 en 0 pero 0 en todo lo demás

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

2.- Señal escalón unitario

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

3.- Señal rampa unitaria

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

4.- Señal exponencial

$$x(n) = a^n \quad \forall n$$

A puede ser real o complejo, si usamos propiedades los complejos, tenemos:

$$x(n) = r^n e^{jn\theta}$$

Que tiene parte real e imaginaria dadas por la identidad de Euler.

Clasificación de las señales discretas en el tiempo (energía y potencia)

Energía de una señal

La energía E de una señal viene dada por:

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Usamos el cuadrado de la función ya que esta sirve para señales tanto reales como complejas. La energía de una señal puede o no ser finita. Cuando la energía de una señal es finita, se dice que es una *señal de energía*

Definimos además la energía de una señal en un intervalo finito $-N \leq n \leq N$

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

así podemos redefinir la energía como

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N$$

Potencia media de una señal

Muchas señales con energía infinita, tienen potencia media finita. La potencia media de una señal discreta se define como:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

También podemos definir la potencia media como:

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

Periodicidad de una señal

Una señal es periódica con periodo N ($N > 0$) ssi:

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

El valor más pequeño de N para el cual lo anterior es válido, se llama el *periodo fundamental de la señal*. Si no hay valor que satisfaga esta relación, entonces se dice que la señal es no-periódica o a-periódica.

La energía de una señal periódica $x(n)$ en un periodo —Por ejemplo $0 \leq n \leq N - 1$ — es finita si solo toma valores finitos en el periodo. Por otro lado la potencia media de una señal periódica es finita y es igual a la potencia media de un único periodo. Así si $x(n)$ es una señal periódica con periodo fundamental N y toma valores finitos, tenemos que su potencia está dada por:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Así, las señales periódicas son señales de potencia.

Señales pares e impares

Una señal real $x(n)$ es simétrica o par si:

$$x(-n) = x(n)$$

Por otro lado es antisimétrica o impar si:

$$x(-n) = -x(n)$$

Notemos que si $x(n)$ es impar, entonces $x(0) = 0$

Cualquier señal puede ser construida como una suma de una señal par y una impar.

La función par viene dada por:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

la impar por:

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

Así:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

Manipulaciones simples de Señales a tiempo discreto

Acá vamos a ver transformaciones simples de señales

Transformación de la variable independiente (tiempo) Una señal $x(n)$ puede ser trasladada en el tiempo cambiando el argumento n por $n - k$, donde k es un entero. Si es positivo, se traslada hacia la derecha (retardo) si es negativo hacia la izquierda (adelanto).

Otra transformación útil es la de reflexión temporal con respecto al origen, para esto basta con reemplazar el argumento n por $-n$

Es importante notar que estas operaciones no son conmutativas entre sí.

Sistemas en tiempo discreto

Un sistema discreto es uno que recibe una señal discreta y aplica una operación de tal manera que la salida es también una señal discreta, llamada salida o respuesta del sistema.

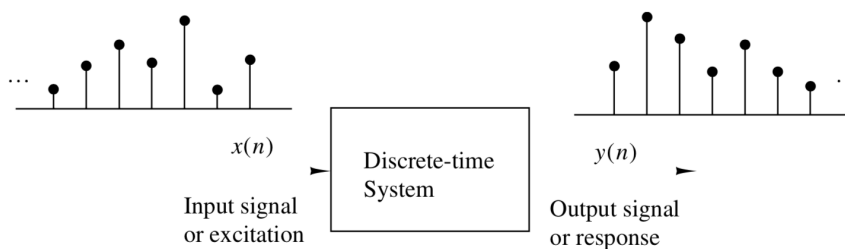


Figura 3: Representación de un sistema discreto

Cuando pasamos una señal $x(n)$ por un sistema, decimos que aplicamos una transformación sobre la entrada para producir la salida $y(n)$. Esta relación se expresa matemáticamente así:

$$y(n) \equiv \mathcal{T}[x(n)]$$

donde \mathcal{T} representa la transformación

Hay varias maneras de describir las características de un sistema de operaciones aplicadas a $x(n)$ para producir $y(n)$. Partamos con la descripción entrada-salida.

Descripción entrada-salida de un sistema

En este caso el sistema se tomó como *caja negra*

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$$

Clasificación de sistemas a tiempo discreto

Tanto en el diseño como en el análisis de sistemas, nos interesa ver sus propiedades. Para poder hablar de propiedades de un sistema, estas tienen que satisfacerse para cualquier entrada que le pongamos, de otra manera no podemos hablar de que el sistema posea efectivamente la propiedad.

Sistemas estáticos versus sistemas dinámicos Un sistema se dice *estático* o *sin memoria* si la salida del sistema depende a lo más, del input que se está procesando en ese momento dado, esto es, que no está ni ahí con lo que pase antes o después, por eso sin memoria, como mi abuelita. En cualquier otro caso, se dice que el sistema es *dinámico* o que *tiene memoria*. Si la salida de un sistema en un tiempo n está totalmente determinada por las muestras de entrada den el intervalo desde $n - N$ a n ($N \geq 0$) Se dice que el sistema tiene duración de memoria N , si $N = 0$ el sistema es estático. Si N es finito, el sistema tiene memoria finita, si N es infinito —diverge—, el sistema tiene memoria infinita.

Los sistemas estáticos o sin memoria son descritos en general de la siguiente manera:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n), n]$$

Sistemas invariantes en el tiempo versus sistemas variantes en el tiempo Podemos subdividir los sistemas en sistemas variantes e invariantes en el tiempo. Un sistema se dice invariante en el tiempo si su característica entrada-salida no cambia en el tiempo.

Definición: Un sistema relajado \mathcal{T} es *invariante en el tiempo* ssi:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \implies x(n - k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n - k); \quad \forall \quad x(n), k$$

Esta es la prueba que hay que aplicar para saber si un sistema es invariante en el tiempo. Primero excitamos un sistema con una entrada arbitraria y después usamos el operador de desplazamiento temporal.

$$y(n, k) = \mathcal{T}[x(n - k)]$$

Si $y(n, k) = y(n - k)$ para cualquier valor de k , entonces el sistema **es invariante en el tiempo**.

Sistemas lineales versus sistemas no-lineales Un sistema lineal es aquel que satisface el *principio de superposición*

Definición: Un sistema es lineal ssi:

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\mathcal{T}[x_1(n)] + a_2\mathcal{T}[x_2(n)]$$

Para cualquiera entradas y constantes $x_i(n), a_i$ respectivamente.

Sistemas causales versus sistemas no-causales

Definición: Un sistema se dice *causal* si la salida del sistema para cualquier tiempo n depende solo de entradas presentes y/o pasadas, pero no de futuras. Matemáticamente:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]$$

donde $F[\cdot]$ es una función arbitraria.

Si un sistema no cumple con esta condición, se dice que es *no-causal*

Sistema estable versus sistema inestable Kerimoh sistemas estables porque en la práctica son más útiles

Definición: Un sistema se dice bounded input–bounded output (BIBO) estable ssi toda entrada acotada produce una salida acotada. Matemáticamente:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall \quad n$$

Interconexión de sistemas en tiempo discreto

Los sistemas discretos en el tiempo pueden ser interconectados para crear sistemas más complejos, grandotes y fortotototes. Hay dos maneras básicas de conectarlos: en cascada (serie) o en paralelo.

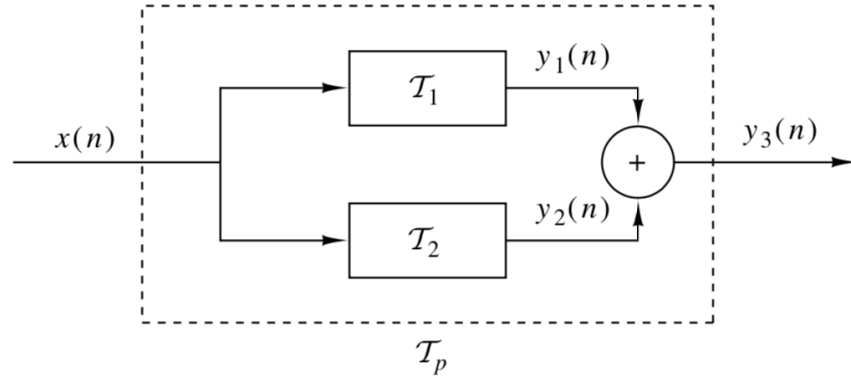
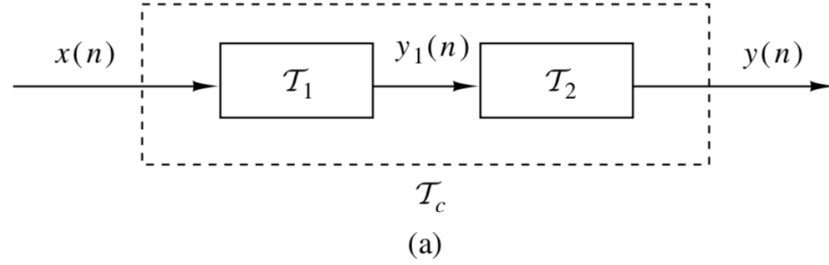


Figura 4: Ilustración de dos sistemas conectados en serie y en paralelo.

En el caso cascada tenemos

$$y_1(n) = \mathcal{T}_1[x(n)]$$

y la salida del segundo sistema es:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}_2[y_1(n)] \\ &= \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1[x(n)]] \end{aligned}$$

Notamos que los sistemas \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 pueden ser combinados de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}_c \equiv \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$$

En general, el orden en que aplicamos los operadores es importante y

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$$

pero si nuestros sistemas son lineales e invariantes en el tiempo, entonces \mathcal{T}_c es invariante y ahí sí $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$

Para conexiones paralelas tenemos la misma idea:

$$\begin{aligned}
y_3(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\
&= \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] \\
&= (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)[x(n)] \\
&= \mathcal{T}_p[x(n)]
\end{aligned}$$

Donde $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$

Análisis de señales a tiempo discreto en sistemas LTI

La idea de esta sección es mostrar que los sistemas LTI están caracterizados por su respuesta a una muestra unitaria. De igual manera, vamos a mostrar que cualquier señal discreta se puede descomponer como una suma ponderada de muchas unidades. La forma general que relaciona la respuesta de impulso unitario (muestra unitaria) y la salida de un sistema a una entrada arbitraria, la suma de convolución, también será mostrada en esta sección. Así vamos a poder saber la salida de cualquier sistema con solo conocer la convolución y cómo se relaciona con el impulso unitario.

Técnicas para el análisis de sistemas lineales

Hay dos métodos básicos para analizar el comportamiento o respuesta de un sistema lineal a una determinada entrada. Un método está basado en la solución directa de la relación entrada-salida del sistema, que en general, tiene la forma:

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N); x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

donde $F[\cdot]$ es una función de las cantidades entre los paréntesis. En particular, para un sistema LTI, veremos que la relación entrada-salida está dada por:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son parámetros constantes que especifican el sistema y son independientes de $x(n)$ e $y(n)$. La relación de entrada-salida se llama ecuación de diferencias y representa una manera de caracterizar el comportamiento de un sistema a tiempo discreto LTI.

Segundo método: Supongamos que la señal de entrada $x(n)$ se descompuso en una suma ponderada de señales elementales $\{x_k(n)\}$ de la siguiente manera:

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

donde $\{c_k\}$ son un conjunto de amplitudes en la descomposición de la señal $x(n)$. Ahora supongamos que la respuesta de un componente de señal $x_k(n)$ es $y_k(n)$. Así:

$$y_k(n) \equiv \mathcal{T}[x_k(n)]$$

Asumiendo que el sistema está relajado y la respuesta a $c_k x_k(n)$ es $c_k y_k(n)$, tenemos:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] \\ &= \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)] \\ &= \sum_k c_k y_k(n) \end{aligned}$$

La base a escoger como nuestras *señales fundamentales* depende mucho de la naturaleza de las señales de entrada que estemos considerando. Por ejemplo si la entrada es periódica, una buena base serían exponenciales complejas:

$$x_k(n) = e^{j\omega_k n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

donde las frecuencias $\{\omega_k\}$ están relacionadas de manera armónica, esto es:

$$\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right) k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

La frecuencia $2\pi/N$ es la *frecuencia fundamental* y todos los componentes de más alta frecuencia de la base son múltiplos enteros de esta.

Descomponiendo una señal en tiempo discreto a impulsos.

Supongamos que tenemos una señal arbitraria $x(n)$ que queremos descomponer en una suma de impulsos unitarios. La descomposición matemáticamente se ve como sigue:

$$x_k(n) = \delta(n - k)$$

donde k representa el atraso de cada impulso individualmente.

Ahora supongamos que multiplicamos $x(n)$ con $\delta(n - k)$. Como el impulso es 0 en todos lados menos en $n = k$ donde vale 1, el resultado es otro impulso solo que puede no valer 1, sino que vale $x(k)$:

$$x(n)\delta(n - k) = x(k)\delta(n - k)$$

si ahora repetimos lo mismo pero con m y con $m \neq k$ podemos repetir lo mismo. Gráficamente, tenemos:

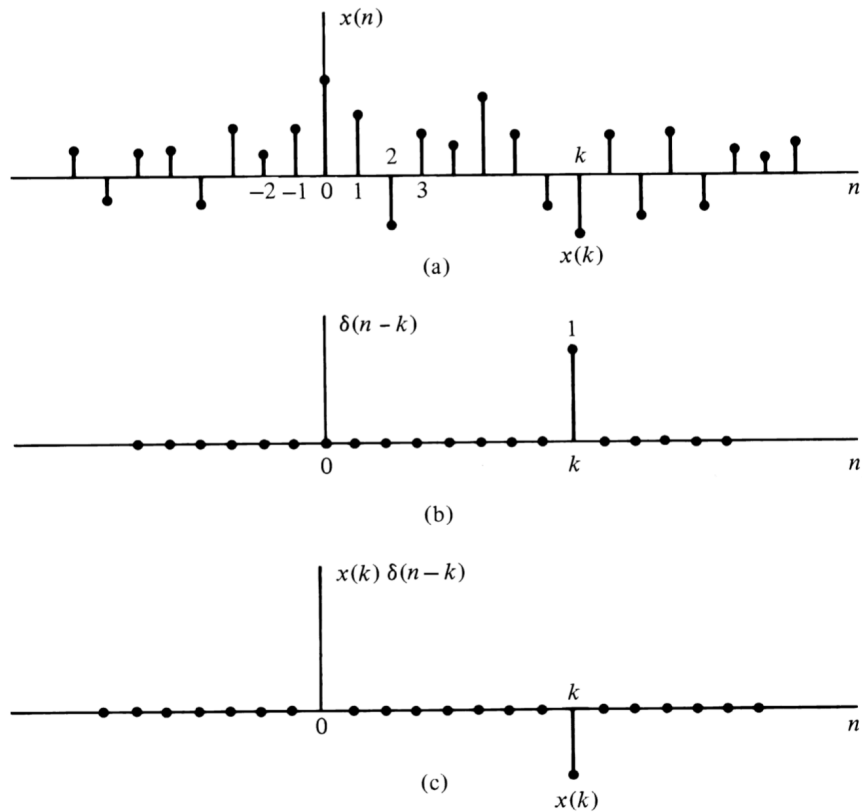


Figura 5: Representación gráfica de la descomposición de una señal en impulsos.

Así:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)$$

Respuesta de sistemas LTI a entradas arbitrarias: La suma de convolución

Denotemos la respuesta a un componente de impulso como $y(n, k)$, pero como es la respuesta al impulso en $n = k$, de damos una letra especial $h(n, k)$

$$y(n, k) \equiv h(n, k) = \mathcal{T}[\delta(n - k)]$$

Pero podemos usar esto para una entrada arbitraria de la manera que vimos antes.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)$$

así tenemos :

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{T}[\delta(n - k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n, k) \end{aligned}$$

Notemos que para lo anterior, no hubo que aplicar invarianza en el tiempo, de hecho si asumimos que nuestra señal es LTI, la cosa se pone más izipizi:

$$h(n) \equiv \mathcal{T}[\delta(n)]$$

aplicando invarianza en el tiempo:

$$h(n - k) = \mathcal{T}[\delta(n - k)]$$

Así:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$$

Así, vemos que un sistema LTI está caracterizado por una sola función $h(n)$ que es la *respuesta al impulso*. La relación de la ecuación anterior es la llamada **suma de convolución**

Receta: Para calcular la salida de convolución hacemos lo que sigue.