Apunte Señales y Sistemas I

Por: Tomás Rojas # Señales, sistemas y procesamiento de señales

> Definición: Una **señal** es cualquier cantidad física que varia en el tiempo, en el espacio o cualquier otra variable.

Algunos ejemplos de señales pueden ser polinomios que dependan del tiempo o del espacio o cualquier cosa.

Hay señales que pueden ser especificadas de manera funcional (con funciones), pero este no es siempre el caso.

Si tomamos un audio de una charla, no es una señal definida funcionalmente, pero podemos descomponerla en suma de senos y cosenos:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(t) \sin[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)]$$

Donde $\{A_i\}, \{F_i\}, \{\theta_i\}$ son conjuntos de Amplitudes, Frecuencias y Fases respectivamente, que bien podrían variar en el tiempo.

Otro ejemplo de señal puede ser un electrocardiograma. Esta señal le entrega información a un médico sobre la condición en que se encuentra el corazón de su paciente. De manera similar, un electroencefalograma da información de la actividad cerebral.

Todos los sistemas mencionados son ejemplos de sistemas que dependen se solo una variable independiente, el tiempo… Un ejemplo de un sistema con más variables independientes puede ser una imagen.

Un sistema también puede ser definido como un aparato físico que ejecuta cierta operación sobre una señal. Por ejemplo un filtro puede ser tratado como un sistema.

Cuando pasamos una señal por un sistema, decimos que la procesamos. En general, un sistema está caracterizado por el tipo de operación que aplica a una señal.

Clasificación de señales

> lo voy a dejar en blanco ya que no es tan importante para el C1, más adelante volveré a llenar esto

Señales en tiempo continuo versus señales en tiempo discreto

Señales sinusoidales continuas

Un oscilador armónico simple puede ser descrito matemáticamente como:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta); \quad -\infty < t < \infty$$

El subíndice a hace referencia a que esta señal es analógica.

La frecuencia Ω es frecuencia angular, en radianes, es común usar F que es en Hertz, donde $\Omega = 2\pi F$

La señal sinusoidal analógica está caracterizada por las siguientes propiedades:

- *Para cualquier valor fijo de frecuencia F, $x_a(t)$ es periódica.* Esto es

$$x_a(t + T_p) = x_a(t), \quad T = 1/F$$

- *Señales análogas sinusoidales con distintas frecuencias, **son** distintas.*
- *Incrementar la frecuencia implica incrementar las oscilaciones de una señal en un tiempo dado.*

Podemos notar que para $F \to 0$ entonces $F \to \infty$

Señales sinusoidales discretas

Podemos expresar matemáticamente una señal sinusoidal discreta de la siguiente manera:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta); \quad -\infty < n < \infty$$

Acá también tenemos otra frecuencia:

$$\omega \equiv 2\pi f$$

Podemos ver las siguientes propiedades de este tipo de señales:

- *Una señal sinusoidal discreta es periódica **solo** si su frecuencia f es un nro racional.*

Por definición tenemos que una señal discreta es periódica con periodo $N \quad (N > 0)$ ssi:

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

El valor más pequeño de N para el que esto se cumple, se llama *periodo fundamental*.

Demostración:

$$\cos[2\pi f_0(N+n)+\theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

Por lo que es periódica sólo si su frecuencia f_0 es una fracción entre dos enteros i.e. es racional.

- *Sinusoides discretas cuyas frecuencias están separadas por un múltiplo entero de 2π son **indénticas**.*

Para probar esto, consideremos $\cos(\omega_0 n + \theta)$

$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

Como consecuencia de esto, **todas** las secuencias sinusoidales que cumplan:

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta); \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Donde:

$$\omega k = \omega_0 + 2k\pi, \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi$$

Son **indistinguibles**, por lo mismo, nos interesan frecuencias en los rangos $-\pi \leq \omega \leq \pi$ o bien $-1/2 \leq f \leq 1/2$

- _La oscilación más rápida que puede tener una señal sinusoidal discreta es cuando $\omega = \pm\pi$ o bien $f = \pm 1/2$

En la siguiente imagen podemos ver la señal $x(n) = \cos \omega_0 n$ con distintos valores para ω_0

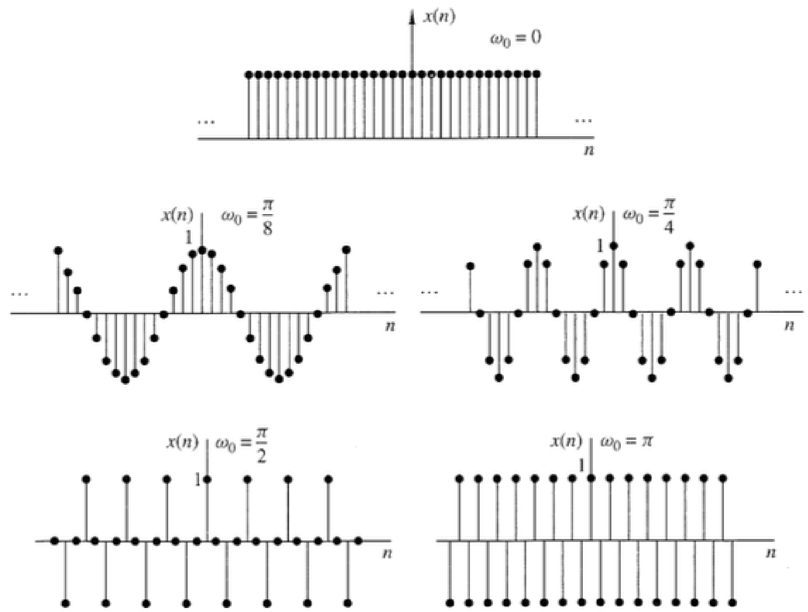

Figura 1: Imagen sacada de *Digital Signal Processing*

Analógico a digital y digital a analógico

Muchas señales de interés son analógicas. Para procesar una señal analógica de manera digital, primero hay que digitalizarla.

> Esto tampoco es pertinente para el C1, por lo que lo dejaré para después

Teorema del muestreo

Si tenemos una señal analógica ¿Como encontramos la frecuencia de muestreo F_s? Para responder esta pregunta es necesario conocer ciertas características de la señal de interés. En particular, tenemos que tener ciertas nociones del *contenido frecuencial* de la señal. Por lo general podemos conocer esa información en forma de cotas superiores.

Supongamos que cualquier señal analógica puede ser representada como un suma de senos (Fourier se encarga de eso).

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i)$$

Donde N es el número de frecuencias presentes.

El teorema nos dice que (se viene golazo, pero en virtud del tiempo lo voy a plantear no más, en todo caso es fácil de ver que tiene que ver con el aliasing de las señales al tomar mal la frecuencia de muestreo) $F_s > 2F_{\max}$

Donde $F_{\max}$ es la frecuencia más alta presente en la señal.

Usando esto, cualquier componente de frecuencia $|F_i| < F_{\max}$, en analógica, pasa a ser una señal sinusoidal discreta con una frecuencia:

$$-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2}$$

o de manera equivalente:

$$-\pi \leq \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi$$

Como $|f| = 1/2$ o $|\omega| = \pi$ son las frecuencias más altas en tiempo discreto, si escogemos el muestreo como se mostró, se evita el problema del aliasing.

Así la condición $F_s > 2F_{\max}$ garantiza que el mapeo de frecuencias continuas pase con relación 1 a 1 al dominio discreto.

Teorema del muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{\max} = B$ y la señal se muestrea de tal manera que $F_s > 2B$, entonces $x_a(t)$ puede ser recuperada con la función interpolación

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$$

Así $x_a(t)$ puede ser expresada como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin[2\pi B(t - n/2B)]}{2\pi B(t - n/2B)}$$

TODO: Falta poner un par de imágenes

Señales y sistemas en tiempo discreto

En esta sección se ven mucho los sistemas LTI, tema central del curso.

Señales en tiempo discreto

Una señal en tiempo discreto $x(n)$ es una función de una variable independiente que es un entero. Como muestra la *figura 2*, la señal **no está definida** para valores de n que no sean enteros (ni siquiera es 0).

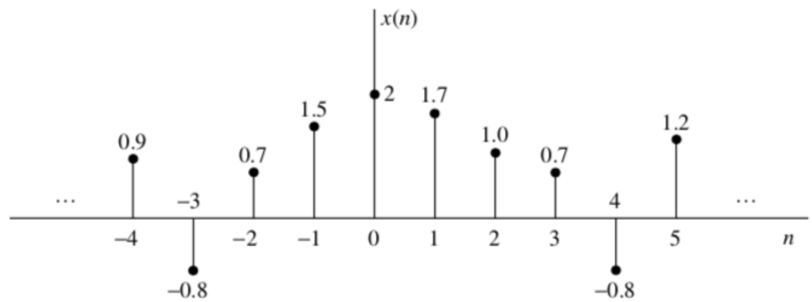

Figura 2

Señales elementales en tiempo discreto

1.- Muestra unitaria Es una señal que es 1 en 0 pero 0 en todo lo demás

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

2.- Señal escalón unitario

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

3.- Señal rampa unitaria

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

4.- Señal exponencial

$$x(n) = a^n \quad \forall n$$

A puede ser real o complejo, si usamos propiedades los complejos, tenemos:

$$x(n) = r^n e^{jn\theta}$$

Que tiene parte real e imaginaria dadas por la identidad de Euler.

Clasificación de las señales discretas en el tiempo (energía y potencia)

Energía de una señal

La energía E de una señal viene dada por:

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Usamos el cuadrado de la función ya que esta sirve para señales tanto reales como complejas. La energía de una señal puede o no ser finita. Cuando la energía de una señal es finita, se dice que es una *señal de energía*

Definimos además la energía de una señal en un intervalo finito $-N \leq n \leq N$

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

así podemos redefinir la energía como

$$E \equiv \lim_{N\to\infty} E_N$$

Potencia media de una señal

Muchas señales con energía infinita, tienen potencia media finita. La potencia media de una señal discreta se define como:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

También podemos definir la potencia media como:

$$P \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

Periodicidad de una señal

Una señal es periódica con periodo $N \quad (N > 0)$ ssi:

$$x(n+N) = x(n) \qquad \forall n$$

El valor más pequeño de N para el cual lo anterior es válido, se llama el *periodo fundamental de la señal* Si no hay valor que satisfaga esta relación, entonces se dice que la señal es no-periódica o a-periódica.

La energía de una señal periódica $x(n)$ en un periodo —Por ejemplo $0 \leq n \leq N-1$— es finita si solo toma valores finitos en el periodo. Por otro lado la potencia media de una señal periódica es finita y es igual a la potencia media de un único periodo. Así si $x(n)$ es una señal periódica con periodo fundamental N y toma valores finitos, tenemos que su potencia está dada por:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Así, las señales periódicas son señales de potencia.

Señales pares e impares

Una señal real $x(n)$ es simétrica o par si:

$$x(-n) = x(n)$$

Por otro lado es antisimétrica o impar si:

$$x(-n) = -x(n)$$

Notemos que si $x(n)$ es impar, entonces $x(0) = 0$