INFORME TAREA 1

Valentino González
RUT:XX.XXX.XXX-X
Github: @thevalentino

1. Introducción

El objetivo de esta tarea es encontrar el valor de a que resuelve la Ecuación (1) del enunciado. Si x es una variable aleatoria sacada de la distribución descrita en el enunciado, entonces a representa un valor que asegura que los valores aleatorios de x serán mayores que a solo un 5 % de las veces.

$$0.05 = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy \tag{1}$$

La ecuación a resolver incluye el cálculo de una integral que debe ser regularizada pues sus límites van de 0 a ∞. Implementaremos un cambio de variable que regulariza los límites y luego una función que calcule la integral de forma numérica para resolverla para distintos valores de a.

Finalmente implementaremos una función que busque el valor de a que hace que la integral original valga 0.05.

2. Desarrollo

Lo primero es regularizar la integral. Para ello seguimos la sugerencia del enunciado y aplicamos el cambio de variable $u = 1/y$, con lo que el problema se transforma en:

$$0.05 = \int_0^{1/a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u^2} \exp\left(\frac{-1}{2u^2}\right) du \tag{2}$$

La forma de la función a integrar se puede apreciar en la Figura 1. Llamaremos a esta función $f(u)$.

Para integrar $f(u)$ utilizaremos la función `scipy.interpolate.quad`, la cual es una implementación de la librería `QUADPACK` escrita en `FORTRAN`. Esta librería implementa el método de *cuadratura adaptativa* e intenta automáticamente escoger el algoritmo necesario para calcular la integral con una precisión dada por el usuario. Para más información: https://en.wikipedia.org/wiki/QUADPAC

Definimos entonces la función:

$$I(a) = \int_0^{1/a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u^2} \exp\left(\frac{-1}{2u^2}\right) du \tag{3}$$

cuya forma se muestra en la Figura (2). $I(a)$ se calcula numéricamente con la función `quad` con sus parámetros por defecto. Los más importantes son las tolerancias absoluta y relativa: *epsabs=1.49e-08, epsrel=1.49e-08*, y el límite máximo de sub-intervalos para el algoritmo adaptativo: *limit=50*.

Es importante notar que la función $f(u)$ se indefine en $u = 0$. Sin embargo, como se aprecia en la Figura (1), el área bajo la curva en las cercanías de cero pequeña por, lo que podríamos partir la integral en algún valor $\epsilon \gtrsim 0$. El algoritmo de `quad` es capaz de manejar esta indefinición

`../solucion/integral.pdf`

Figura 1: La función que vamos a integrar.

automáticamente, por lo que no implementamos ningún cambio relacionado a la indefinición de la función $f(u)$.

`../solucion/solucion.pdf`

Figura 2: La función $I(a)$. Buscamos el valor de a para el cual la función toma el valor 0.05 (linea azul horizontal punteada). Utilizando el algoritmo de newton, encontramos la solución $a^* = 1.64$ (línea roja vertical punteada).

Finalmente, es necesario resolver la ecuación:

$$I(a^*) - 0.05 = 0 \tag{4}$$

Esto lo hacemos utilizando el método de newton (en realidad de la secante), implementado en `scipy.optimize.newton`. Utilizamos los parámetros por defecto, en particular, la tolerancia absoluta *tol=1.48e-08* y el número máximo de iteraciones *maxiter=50*. Le damos como punto de partida el valor $a_0 = 1$. El algoritmo converge luego de 7 iteraciones encontrando el valor $a^* = 1.64485363$.

Otros valores del punto de partida convergen a un valor muy cercano con diferencias en el número de iteraciones necesarias. Por ejemplo para $a_0 = 0.5$, el algoritmo converge luego de 8 iteraciones.

3. Discusión y Conclusiones

Si x es una variable aleatoria sacada de una gausiana con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, entonces sólo tomará valores mayores a $a^* = 1.64$ el 5 % de las veces.

Si bien este problema involucra el cálculo de una integral de límites indefinidos (Ecuación 1), el cambio de variable $u = 1/y$ resulta en una función bien comportada. En particular, la suavidad de la función (ver Figura 2), asegura que algoritmos como el de la *secante* para buscar raíces converjan de manera robusta (casi independiente del punto de partida elegido), y en pocas [sic.] iterasiones.