Ejercicio 1

Tomás Rojas Castiglione
dept. de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Santiago, Chile
tomas.rojas.c@ug.uchile.cl

Pregunta 2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estado está dada por e^{At}

Una buena estrategia es pasar a Jordan, para esto primeto sacamos los valores propios con la calculadora, así: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 2$

Sacando los vectores propios con los valores propios en

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

Al hacer ese proceso y para todas igualar $x = 1$ obtenemos finalmente los siguientes vectores propios asociados a los valores propios:

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, v_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Así nuestra matriz de la transformación a Jordan es

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo esta matriz, tenemos:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}1 & -0{,}15 & 0{,}05 \\ -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Para poder encontrar la respuesta a la entrada de un escalón de amplitud 2, podemos primero pasar todo a Jordan, Usando la convención de las matrices A, B, C, D, donde en este caso $D = 0$, tenemos que sus símiles en Jordan van a ser $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, teniendo en cuanta el cambio $z(t) = T^{-1}x(t)$

De esta manera tenemos

$$\hat{A} = T^{-1}AT$$
$$\hat{B} = T^{-1}B$$
$$\hat{C} = CT$$
$$\hat{D} = 0$$

explicitamenta tenemos:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$
$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\hat{D} = 0$$

Además

$$z(0) = z_0 = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}15 \\ -0{,}4 \end{bmatrix}$$

La respuesta del estado en base Jordan queda dada por

$$z(t) = e^{\hat{A}t} z_0 + e^{\hat{A}t} * \hat{B} 2u(t), \quad \forall t \geq 0$$

donde $*$ denota la convolución

El resultado del primer término es

$$\begin{bmatrix} 1{,}25e^{t} \\ 0{,}15e^{-3t} \\ -0{,}4e^{2t} \end{bmatrix}$$

el segundo da

$$\begin{bmatrix} -e^t+1 \\ -1/15(e^{-3t}-1) \\ 2/5(e^{2t}-1) \end{bmatrix}$$

así la respuesta al escalón en Jordan es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^t+1 \\ \frac{1}{12}e^{-3t}+\frac{1}{15} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Para volver a la forma normal, con las variables de estado originales, tenemos que la respuesta al escalón pedido es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^t}{4}+\frac{2}{3}+\frac{e^{-3t}}{12} \\ \frac{e^t}{4}-\frac{e^{-3t}}{4} \\ \frac{e^t}{4}+\frac{3e^{-3t}}{4} \end{bmatrix}$$

como ya tenemos $x(t)$, solo reemplazamos en la ecuación que nos da la respuesta al escalón en la salida $y(t)$

$$y(t) = \frac{e^t}{4}+\frac{2}{3}+\frac{e^{-3t}}{12}$$

Para identificar la matriz de transición de estado, basta con tomar la de la forma canónica y usar la siguiente transformación $Te^{\hat{A}t}T^{-1}$:

$$Te^{\hat{A}t}T^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} -0{,}6e^{2t}+1{,}5e^t+0{,}1e^{-3t};\ 0{,}4e^{2t}-0{,}25e^t-0{,}15e^{-3t};\ 0{,}2e^{2t}-0{,}25e^t+0{,}05e^{-3t} \\ -1{,}2e^{2t}+1{,}5e^t-0{,}3e^{-3t};\ 0{,}8e^{2t}-0{,}25e^t+0{,}45e^{-3t};\ 0{,}4e^{2t}-0{,}25e^t-0{,}15e^{-3t} \\ -2{,}4e^{2t}+1{,}5e^t+0{,}9e^{-3t};\ 1{,}6e^{2t}-0{,}25e^t-1{,}35e^{-3t};\ 0{,}8e^{2t}-0{,}25e^t+0{,}45e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Las funciones base son el conjunto dado por $\{e^t, e^{-3t}, e^{2t}\}$

Para la respuesta al impulso solo hay que tomar lo mismo que hicimos para la entrada del escalón pero en vez de usar el escalón de amplitud 2, usar la delta de Dirac. Aprovechando las propiedades de la delta de dirac en la integral tenemos:

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}t} * \hat{B}\delta(t) &= \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}\delta(\tau)d\tau \\ &= e^{\hat{A}t}\hat{B} \end{aligned}$$

Nuevamente, multiplicamos por C ya que queremos la respuesta al impulso en la salida

$$C\int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}\delta(\tau)d\tau = Ce^{\hat{A}t}\hat{B}$$

Así la respuesta al impulso en base original la podemos escribir como

$$CTe^{\hat{A}t}(z_0+\hat{B}) = \frac{3e^t}{4}+\frac{e^{-3t}}{4}$$

La respuesta al estado cero basta con calcular la expresión que sigue

$$CTe^{\hat{A}t}\hat{B} * u(t) = C\int \begin{bmatrix} -\frac{e^{t-\tau}}{2} \\ \frac{e^{-3(t-\tau)}}{10} \\ \frac{2e^{2(t-\tau)}}{5} \end{bmatrix} u(\tau)d\tau$$

donde $u(t)$ es una entrada arbitraria

Por otro lado la respuesta a la entrada cero es cuando $u(t) = 0$ y nos quedamos con las condiciones iniciales

$$\text{RENC} = -\frac{2e^{2t}}{5}+\frac{5e^t}{4}+\frac{3e^{-3t}}{20}$$

-A. *b*

Para ver cómo controlar esto, primero tenemos que ver si el sistema es controlable o no. Veamos si $[B|AB|A^2B]$ es l.i.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Vemos que todos esos vectores son l.i., por lo tanto el sistema es controlable.

Ahora diseñemos un feedback para cambiar sus polos a -1,-2,-3

Primero tenemos que queremos los polos de la siguiente manera

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 = 0$$

Con un feedback $u = -kx + r$ donde k es la ganancia y r la referencia, tenemos

$$\dot{x} = (A-Bk)x + Br$$

buscando los valores propios de $(A-Bk)$ tenemos

$$\begin{aligned} \det(A-Bk-\lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6-2k_1 & 7-2k_2 & -\lambda-2k_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\lambda^3 - 2k_3\lambda^2 + (7-2k_2)\lambda + 6 + 2k_1 = 0 \end{aligned}$$

como es igual a cero y el componente de λ^3 no calza con lo que queremos, podemos multiplicar por -1

$$\lambda^3 + 2k_3\lambda^2 - (7-2k_2)\lambda - 6 - 2k_1$$

Igualando todos los componentes con nuestro polinomio de con los polos deseados, tenemos:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 9, \quad k_3 = 3$$

Así

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

gráficamente tenemos

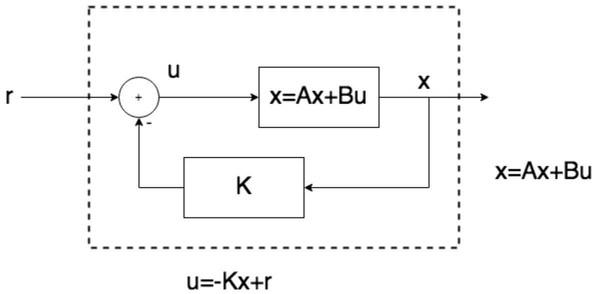

Figura 1. Representación gráfica de la retroalimentación de control

recordemos que r es la referencia

-B. c

Primero veamos si el sistema es observable, para eso el la matrix de observabilidad tiene que tener rango 3. O bien que las columnas sean l.i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente es l.i.

Ahora que sabemos que el sistema es observable tenemos que diseñar un nuevo sistema que logre estimar el estado del sistema a partir de la salida de nuestro sistema original.

Diseñemos un nuexo sistema con el cual vamos a estimar x

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= Ax(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{aligned}$$

Definamos ahora un error de estimación

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= [Ax(t) + Bu(t)] - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))] \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t) - L[Cx(t) - C\hat{x}(t)] \\ &= Ae(t) - LCe(t) \\ &= (A - LC)e(t) \end{aligned}$$

podemos hacer que esto decaiga rápido dando polos arbitrariamente negativos. Al hacer esto hacemos que el error decaiga rápidamente a cero, luego como tenemos el error cero, significa que nuestro estimador $\hat{x}$ es igual a los estados x por lo que podemos hacer lo mismo que hicimos anteriormente para controlar con x pero con el estimador $\hat{x}$

Código fuente

Todo el código fuente usado en esta tarea puede ser encontrado en https://github.com/tomasrojasc/ejercicio1SS2