Ejercicio 1

Tomás RojasCastiglione
dept. de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Santiago, Chile
tomas.rojas.c@ug.uchile.cl

Pregunta 1

Vamos a asumir las siguientes hipótesis:

- tenemos que las temperaturas de tanto los contenedores como la leche condensada y el agua, son homogéneas en todo el medio.
- no hay pérdida de masa por ningún mecanismo.
- los volúmenes se mantienen constantes
- los calores específicos se mantienen constantes
- No se introduce masa de ningún elemento durante el proceso.
- el gas entrega un calor que depende de una función $\Phi(t)$ por una constante α, pero en este caso va a ser una constante.
- La única pérdida de energía del sistema es a través de la olla que contiene el agua con el medio-ambiente.

Condiciones iniciales:

- Temperatura del agua: $291{,}15K(18°C)$ (el agua viene de la llave)
- Temperatura del recipiente del agua[1] (olla 1): $294{,}15K(21°C)$
- Temperatura recipiente de la leche condensada (olla 2): $294{,}15K(21°C)$
- Temperatura de la leche condensada $287{,}15K(14°C)$(estaba abierto el tarro, entonces viene del refrigerador y lo sacaron un poco antes de hacer el manjar, por eso su temperatura es la que es, además hace el problema más entretenido)
- Temperatura medio ambiente: $294{,}15K(21°C)$

Podemos caracterizar el modelo como un modelo en el que se va a utilizar el balance de energía, es un sistema dinámico pues las cantidades de interés van cambiando en el tiempo, es de variables concentradas pues nos intereza la temperatura de medios completos y no en sus coordenadas espaciales obteniendo EDOs y no EDPs, es un proceso artificial pues no ocurre en la naturaleza, es deterministico pues no contiene variables aleatorias, es un sistema multivariable pues la salida va a ser la temperatura de cada medio para cada instante t, es de tiempo continuo, causal y lineal

Derivación del modelo: Si etiquetamos los medios del 1 al 5 en el siguiente orden; olla 1, agua, olla 2, leche condensada y aire de la cocina tenemos que cada elemento tiene a su haber las siguientes cantidades relevantes:

- Calores específicos: c_i en $\frac{J}{K \cdot kg}$
- Masas: m_i en kg
- Temperatura (nuestras variables de estado): T_i en K
- coeficientes de transferencias entre el medio i y el medio j: h_{ij} en $\frac{W}{m^2 K}$
- Área de contacto entre el medio i y el medio j: A_{ij} en m^2

Para encontrar los valores apropiados, vamos a hacer unas aproximaciones. Primero que nada, la olla que contiene el agua va a ser de $0{,}15m$ de radio y $0{,}25m$ de altura, la para la leche condensada va a ser de radio $r = 0{,}1m$ y altura $h = 0{,}1m$, así el volumen de agua va a ser el volumen de la olla grande menos el de la olla chica, esto es $\approx 0{,}014m^3$, que en litros es $14L$ como la densidad del agua es 1, tenemos $14kg$ de agua. Vamos a echarle 2 tarros de leche condensada de $0{,}25kg$ cada uno, así tenemos $0{,}5Kg$ de leche condensada. Para las superficies de contacto tenemos, entre el agua y la olla que la contiene, $0{,}30m^2$, entre el agua y la olla de la leche condensada tenemos $0{,}09m^2$. La densidad de la leche condensada es $\approx 1{,}3g/mL$, eso nos deja con $384{,}6mL = 384{,}6 \cdot 10^{-6}m^3$ si dividimos por el área del fondo, amos a tener la altura que cubre la leche condensada: $A_{\text{fondo olla leche condensada}} \approx 0{,}0314$ así $h_{\text{leche condensada}} \approx 0{,}01m$, finalmente con esto podemos calcular el área de contacto entre los dos medios que es el área de la base de la olla de la leche condensada, más el área correspondiente a la altura de la leche condensadas en la olla, finalmente tenemos que eso es $\approx 0{,}038m^2$. La masa de la olla grande es de $1kg$ y de la chica $0{,}5kg$. Finalmente, el área de la olla grande con el aire es igual a la de la olla grande con el agua, pero le sumamos la tapa dando $\approx 0{,}37m^2$

Sabemos que la derivada de la energía en cada medio con respecto al tiempo, al conservarse los volúmenes de todo al interior, es igual a $h_{ij}A_{ij}(T_i - T_j)$ en donde h es el coeficiente de transferencia, A es la superficie del i con el medio j notar que esta es la contribución a la derivada de la energía de el elemento j en la energía de i. Además tenemos que la energía interna en estos casos es $E = m_i c_i T$ así tenemos que las ecuaciones en las variables de estado que son las temperaturas de cada medio, tienen la siguiente forma:

$$\dot{T_i} = \sum_{j \in \Omega_i} \frac{h_{ij} A_{ij}(T_i - T_j)}{c_i m_i} + \alpha \Phi(t) \delta[i-1]$$

[1] esto corresponde a la temperatura ambiente en Kelvin

Donde el conjunto Ω_i es el conjunto delos elementos j que comparten frontera con el elemento i. Recordemos que el elemento $i = 1$ es la olla que contiene el agua, por lo tanto sólo cuando $i = 1$ tenemos que $\delta[i-1] = 1$, en todos los demás casos es igual a cero.

Las ecuaciones pertinentes se ven de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{T}_1 &= \frac{h_{12}A_{12}(T_2 - T_1)}{c_1 m_1} + \frac{h_{15}A_{15}(T_5 - T_1)}{c_1 m_1} + \alpha\Phi(t) \\
\dot{T}_2 &= \frac{h_{12}A_{12}(T_1 - T_2)}{c_2 m_2} + \frac{h_{23}A_{23}(T_3 - T_2)}{c_2 m_2} \\
\dot{T}_3 &= \frac{h_{23}A_{23}(T_2 - T_3)}{c_3 m_3} + \frac{h_{34}A_{34}(T_4 - T_3)}{c_3 m_3} \\
\dot{T}_4 &= \frac{h_{34}A_{34}(T_3 - T_4)}{c_4 m_4} \\
\dot{T}_5 &= 0
\end{aligned}$$

De manera matricial tenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(h_{12}A_{12}+h_{15}A_{15})}{c_1 m_1} & \frac{h_{12}A_{12}}{c_1 m_1} & 0 & 0 & \frac{h_{15}A_{15}}{c_1 m_1} \\ \frac{h_{12}A_{12}}{c_2 m_2} & -\frac{h_{12}A_{12}+h_{23}A_{23}}{c_2 m_2} & \frac{h_{23}A_{23}}{c_2 m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_{23}A_{23}}{c_3 m_3} & -\frac{h_{23}A_{23}+h_{34}A_{34}}{c_3 m_3} & \frac{h_{34}A_{34}}{c_3 m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_{34}A_{34}}{c_4 m_4} & -\frac{h_{34}A_{34}}{c_4 m_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

además tenemos la salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

donde $u(t)$ es la entrada y está dada por $\alpha\Phi(t)$ con $\Phi(t)$ el flujo del gas en función de tiempo. Si llamamos A a la matriz de constantes de la ecuación anterior y B al vector que acompaña la entrada $u(t)$, además $x = [T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5]^T$, tenemos que los estados vienen dados por:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^\infty e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Donde x_0 son las temperaturas iniciales que ya fueron indicadas

Vemos que tenemos una variable externa $u(t)$ mientras que las demás son internas. De las internas tenemos las variables de estado T_i y los parámetros $m_i, c_i, h_i j, A_i j$

El estado de referencia es el estado al que el sistema llega cuando $t \to \infty$ y $u(t) = 0$ siempre que sea siempre el mismo estado $\forall x_0$. Notamos que para este sistema este no es el caso, ya que el estado de equilibro (como veremos más adelante) depende de las condiciones iniciales.

El estado cero es con $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, por lo que es solo la parte de la convolución de lo hecho anteriormente. Notar que este estado es inviable pues requeriríamos que todos nuestros medio estuviesen a una temperatura de $0K$.

El estado de equilibrio es por su puesto la temperatura ambiente ya que es el estado que corresponde a $t \to \infty$ cuando $u(t) = 0$, en nuestro caso sería $\text{lím}_{t\to\infty} x(t)|_{u(t)=0} = 295{,}15 \cdot [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

Intuitivamente el sistema sí es lineal, pues vemos que no hay ningún componente al cuadrado o alguna forma rara, además al ser posible escribirlo matricialmente en ecuaciones lineales, hereda la linealidad de las matrices. Además es invariante en el tiempo pues las variables que no son de estado son constantes.

Para la simulación se usó primero MATLAB para generar un digrama de bloques y después se usó python para la simulación ya que exportar los datos de MATLAB a csv no es una tarea fácil

El diagrama de bloques en MATLAB se ve de la siguiente manera:

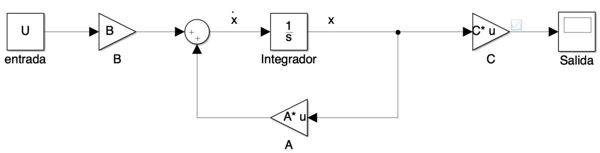

Figura 1. Diagrama de bloques hecho en Simulink

las condiciones iniciales fueron las ya mencionadas, a esto se le suman los parámetros h_{ij} y c_i que están definidos:

las siguientes cantidades están en J $(kg)^{-1}K^{-1}$

$$c_1 = 4120$$
$$c_2 = 4181{,}3$$
$$c_3 = 4120$$
$$c_4 = 3265{,}7$$

lo que viene está en $Wm^{-3}K^{-1}$

$$h_{12} = 1500$$
$$h_{23} = 1500$$
$$h_{34} = 500$$
$$h_{15} = 300$$

El resultado de la simulación nos da el siguiente gráfico:

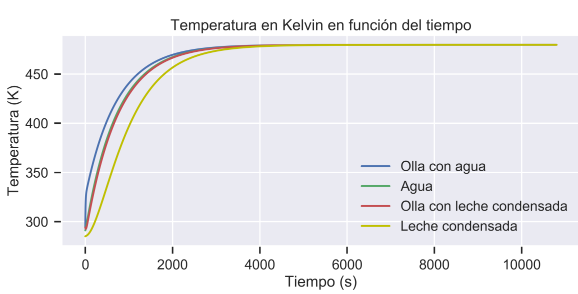

Figura 2. Simulación con Python

Notamos que la simulación tiene mucho sentido pues aproximadamente a la hora se alcanza la temperatura de equilibrio para la entrada y el resto del tiempo se cocina de esa manera con una temperatura constante.

CÓDIGO FUENTE

Todo el código fuente usado en esta tarea puede ser encontrado en https://github.com/tomasrojasc/ejercicio1SS2