Análise Matemática II

2017/18

Lista de Exercícios 2

1. Determine,utilizando a definição, as derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções, nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = \dfrac{2x+y+3}{x-3y+1}$ em $(-1,1)$.

b) $g(s,t) = \sqrt{st}$ em $(1,1)$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2yz^2$. Determine as derivadas parciais num ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de 1^a ordem das funções seguintes:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ da função seguinte:

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\operatorname{sen}(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5. Recorrendo à definição, calcule a derivada das seguintes funções, segundo o vector u e nos pontos, P, indicados.

a) $f(x,y) = 2x^2+3y^2$, $u = (1,1)$ e $P = (2,-1)$.

b) $g(x,y) = 2x+5y^2$, $u = (1,\sqrt{2})$ e $P = (-1,1)$.

6. Determine a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ nos pontos P indicados.

a) $f(x,y) = e^{5xy}$, $u = (1,1)$ e $P = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

b) $g(s,t) = \log\left(2+s+y^2\right)$, $u = (1,0)$ e $P = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ u=(1,2)$ e $P=(1,0)$.

7. Considere a função seguinte:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Mostre que a derivada de f, segundo qualquer vector, existe em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.

8. Considere a função $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\dfrac{x\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$.

a) Defina o domínio de f.

b) Calcule, ou mostre que não existe, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}.$$

Calcule, se existirem, as derivadas parciais de 1^a ordem de g.

9. Uma função $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ chama-se harmónica se, $\forall x\in D$, se verificar a igualdade seguinte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0.$$

Verifique que as funções seguintes são harmónicas.

a) $f(x,y)=e^x\operatorname{sen}(y)$.

b) $V(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, sendo q e ε_0 constantes.

10. Considere a função $f(x,y)=x\operatorname{sen}(yz)$ .Determine:

$$a)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad b)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\qquad c)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\qquad d)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},$$

$$e)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\qquad f)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}.$$

11. Para as funções

$$f(x,y) = x^2\cos(x)\ y^3, \quad g(x,y,z) = \frac{2x}{y\ x^2+z^2}$$
$$h(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz), \quad p(x,y) = (3x+2y)^6.$$

calcule:

$a)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\quad b)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\quad c)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\quad d)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\quad e)\ \dfrac{\partial g}{\partial y}$, $\quad f)\ \dfrac{\partial g}{\partial z}$,

$g)\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$, $\quad h)\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}$, $\quad i)\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}$, $\quad j)\ \dfrac{\partial p}{\partial x}$, $\quad l)\ \dfrac{\partial^3 p}{\partial y \partial x^2}$, $\quad m)\ \dfrac{\partial^4 p}{\partial y^2 \partial x^2}$.

12. Mostre que a função $f(x,y) = x^2 \log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifica a igualdade

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2f - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

13. A altura em relação ao nível das águas do mar de um ponto (x,y), de uma certa montanha, é dado por

$$z = 2500 - 2x^2 - 3y^2, \qquad \text{onde } x, y \text{ e } z \text{ são definidos em metros.}$$

O semi-eixo positivo OX aponta para Oriente e o semi-eixo positivo OY indica o Norte. Um montanhista está no ponto $(-10, 5, 2225)$ e pode caminhar em qualquer direcção.

a) Se se dirigir em direcção a Ocidente, o montanhista estará subindo ou descendo?

b) Se caminhar em direcção a Nordeste, o montanhista estará subindo ou descendo e a que taxa?

c) Em que direcção/direcções deverá caminhar para seguir uma curva de nível?

14. Mostre que as funções seguintes têm derivadas parciais de 1^a ordem na origem mas não são diferenciáveis em $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

15. Estude a continuidade e diferenciabilidade das funções seguintes:

a) $f(x,y) = xy$.

a) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2x^2 - yx^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y) + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

e) $r(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$.

16. Calcule o diferencial total das funções:

a) $z = 2x^2 + y^2 - 5x - 3y$ no ponto $(-2,1)$ para os acréscimos $dx = 0,1$ e $dy = -0,3$.

b) $z = x^2 \log\left(\dfrac{x}{y}\right)$ no ponto $(1,1)$ para os acréscimos $dx = -0,2$ e $dy = 0,2$.

17. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \setminus \{(0,...,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1,...,x_n) = \log\left(\|(x_1,...,x_n)\|\right).$$

Sabendo que f é diferenciável, determine o diferencial de f num ponto $(x_1,...,x_n)$ relativamente ao vector $h = (h_1,...,h_n)$.

18. Utilizando o conceito de diferencial, indique um valor aproximado nos casos seguintes:

a) $f(1.02, 0.96)$ para $f(x,y) = 4x^2 + 3xy + \dfrac{x}{y^2}$.

b) $g(1.003, 1.002)$ para $g(x,y) = \log(y)\, x^2 + \dfrac{y^2}{1+x^2}$.