# Análise Matemática II

2017/18

## Lista de Exercícios 3

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x=0 \text{ ou } y=0, \\ \\ 1 & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0. \end{cases}$$

a) Mostre que $f$ tem derivadas parciais finitas em $(0,0)$.
b) Prove que $f$ não é contínua em $(0,0)$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que $f$ não é contínua na origem.
b) Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
c) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2,-1)$ no ponto $(1,0)$.

3. Considere $f(x,y) = \left(e^{xy} - 4y^2 x + 5x^2 y\right)$. Calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$.

4. Considere:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) Indique o domínio de definição de $f$, $D$.
b) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $\forall (x,y,z) \in D$.

5. Considere a função $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 x$.
   Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2)$.

6. Seja $f(x,y) = (\log x)\sqrt{y}$.

a) Defina o domínio de $f$.
b) Estude $f$ quanto à diferenciabilidade.
c) Calcule um valor aproximado de $f(1.07, 3.98)$ usando o diferencial.

**7.** Considere uma função $f$ diferenciável no ponto $(1,2)$ com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1 \;\text{ e }\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3.$$

Se $f(1,2) = 4$ indique uma aproximação para o valor de $f(0.99, 2.03)$.

8. Calcular a derivada de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log(e^{2x} + e^y)$ no ponto $(1,2)$, segundo uma direcção que forma, com o eixo OX, um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

9. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & xy \neq 0, \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ e } y = 0, \\ y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & x = 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é diferenciável na origem apesar de nenhuma das parciais ser contínua na origem.

10. Seja $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$ com $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$.
Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

11. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $g(x,y) = (e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy)$ e $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, $f(1,1,0) = (1,0)$ e $f'(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Mostre que $g$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
b) Determine as derivadas $(g \circ f)'(1,1,0)$ e $(f \circ g)'(1,0)$.

12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x^2 - y^2$.
a) Para $x = \varphi(t) = \operatorname{sen} t$ e $y = \psi(t) = \cos t$ calcular $\dfrac{du}{dt}$ designando por $u(t) = f(x,y) = f(\varphi(t), \psi(t))$.
b) Para $x = \varphi(s,t) = \operatorname{sen}(st)$ e $y = \psi(s,t) = \cos(st)$ calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ designando por $u(s,t) = f(x,y) = f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$.

13. Considere as funções $f(x,y,z) = \left(z, -x^2, -y^2\right)$ e $g(x,y,z) = x + y + z$ e sejam $v = (1,2,3)$ e $u = (2,3,\frac{1}{2})$.
a) Calcule as matrizes jacobianas de $f$, $g$ e $g \circ f$.

b) Calcule as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1),\ \ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1),\ \ \frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0)\ \text{ e }\ \frac{\partial (g\circ f)}{\partial u}(2,0,1).$$

14. Sejam $f(x,y)=\left(x^2-y^2+xy,y^2-1\right)$ e $f(u,v)=(u+v,2u,v^2)$.
a) Mostre que $f$ e $g$ são diferenciáveis e que $f\circ g$ existe.
b) Determine a derivada de $f\circ g$ no ponto $(1,1)$:
$(i)$ Directamente e
$(ii)$ Usando a regra da cadeia.

15. Seja $f : D\subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ tal que $Df_{(0,0,e)}=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\right]$ e seja

$$h(x,y,z)=f\left(xy^2z^3,\operatorname{sen}x,ze^{5-y^2}\right).$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-2,1)$.

16. Para a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y,z)=\left(x^2+e^z,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2y+3z}{3}\right)\right),$$

screva a matriz jacobiana em $(0,0,0)$.

17. Considere a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z)=\left(2x+3y^2+2z,x-\cos y,2y+\operatorname{tg}z\right).$$

a) Calcule a matriz jacobiana e o jacobiano.
b) Determine a derivada de $f$ no ponto $\left(1,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ segundo o vector $u=(2,-1,3)$.

18. Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem cuja matriz jacobiana nesse ponto é $J_{(0,0,0)}=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\right]$ e tal que $g(0,0,0)=0$. Sendo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x,y,z)=g\left(x+y+z,g(x,y,z),xyz\right)$$

calcule $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)$.

19. Calcule $\dfrac{d^2u}{dt}$ para $t=1$, com

$$u=\frac{z^2}{(x-y)^2},\ \ x=t^2-2t,\ \ y=\cos(1-t)\ \text{ e }\ z=\frac{1}{t^2}.$$

20. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (\operatorname{sen}(xy), \cos(xy), xz).$$

Calcule o diferencial de $f$ no ponto $P = (0, 2, 1)$ segundo o vector $u = (-1, 2, 1)$.

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função $f = f(u, v)$ de classe $C^2$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1, 0) = 3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(-1, 0) = 2.$$

Sendo $h$ a função definida por $h(x, y) = f(x^2 - y, xy)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1)$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas mistas de $2^a$ ordem são nulas e tal que $f \in C^2$.
Para $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ e $\psi(x, y) = y^3$, designando por $u(x, y)$ a função composta de $f$ com $\varphi$ e $\psi$, $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$, prove que

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ com } x, y \neq 0.$$

23. Dada a função $z(x, y) = \operatorname{tg}\left(x^2 + y^3\right)$, com $x = t^2 + 2t$ e $y = \log t$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

24. Seja a função $f(x, y, z) = 3x - 2y + 4z$, em que $x(t) = \log t$, $y(t) = 3t$, $z(t, w) = 2^t + \cos w$.
Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial w}$.

25. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com $f$ de classe $C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ e $g$ definida por

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0,$$

para qualquer ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

26. Prove que a derivada de $f$ segundo um vector depende linearmente de $v$, isto é, para $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in D$; $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe se,

e só se, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha v}(a)$ existe $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e no caso afirmativo:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha v}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

27. Sejam as funções $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $z(s,t) = h\left(x(s,t), y(s,t)\right)$ com $x(s,t) = s^2 - t^2$ e $y(s,t) = 2st$. Prove que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 4x \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - 2y \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial h}{\partial y}.$$

28. Determine uma equação da recta normal e do plano tangente, no ponto $P = (3, 4, -2)$, ao cone

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

29. Indique a equação do plano tangente e da recta normal à superfície $3xyz - z^3 = 8$ no ponto com a abcissa nula e ordenada 2.

30. Indique a equação do plano tangente à superfície $z = 3 - 2x^2 - y^2$ no ponto $P = (1, -1, 0)$.

31. Considere o parabolóide $z = f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$.

a) Verifique que o ponto $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$ pertence ao parabolóide.
b) Determine a equação do plano tangente ao parabolóide em $P$.
c) Indique uma equação da recta normal ao parabolóide no ponto $P$.
d) Determine o ponto $Q$ de intersecção da reta perpendicular ao gráfico de $f$ em $P$ com o plano $XOY$.

32. Considere a superfície $\varphi$ dada pela igualdade $z = 2x^2 + 4y^2$ e um ponto $P = (1, 2, 18)$.

a) Mostre que $P \in \varphi$.
b) Determine a equação do plano tangente a $\varphi$ em $P$.
c) Indique a equação da recta normal a $\varphi$ em $P$.

33. Indique a equação do plano tangente e da recta normal à superfície

$$x^2 - 4y^2 + 2z = -2$$

no ponto $(2, 1, -1)$.

34. Determine a equação de um plano tangente à superfície

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

de modo que seja paralelo ao plano $y = 2z$.

35. Calcule a divergência e o rotacional das seguintes funções:
a) $f(x, y, z) = (xy, yz, zx)$
b) $g(x, y, z) = (xe^y)\overrightarrow{e}_2 + (yez)\overrightarrow{e}_3$.

36. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta),$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho > 0$. Calcule $\operatorname{div} f$.

37. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(x, y, z) = (x^2 + y - z,\ xyz^2,\ 2xy - y^2 z).$$

Calcule:
a) $\operatorname{div} f$.
b) $\operatorname{rot} g$.

38. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Prove que:

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0) \quad \text{e que} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0.$$

39. Considere a função $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.
a) Calcule o laplaciano.
b) A função é harmónica? Justifique.

40. Considere a função $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x, y, z) = 5xy + 3x^2 y + 2xz + 5yz - z^3.$$

Calcule:
a) $\nabla h$.
b) O hessiano de $h$ em $(0, b, 1)$.
c) $\Delta h$.

41. Considere uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de classe $C^2$.
Prove que $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

42. Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial :

$$F(x, y, z) = (x\cos(y^2 + z^2), y(x + z), ze^{xy}).$$