Análise Matemática II

2017/18

EXAME de RECURSO 18/06/2018

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, dada por $f(u, v, w)$,

$u(x, y, z) = 2x - 2y, \quad v(x, y, z) = 2y - 2z, \quad w(x, y, z) = 2z - 2x.$

a) Calcule e simplifique

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

b) Determine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

2. Estude a diferenciabilidade e a continuidade da função no seu domínio

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^3}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Considere a equação

$$3x^2 - y^2 + 2z + 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2x - 3z\right) = 0.$$

a) Verifique se a equação define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança da origem.

b) Calcule

$$\textbf{b.1)} \ \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad \textbf{b.2)} \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

c) Determine e classifique os pontos críticos de $z(x, y)$, numa vizinhança da origem.

4. Indique e classifique os extremos relativos da função

$$f(x, y) = x^2 + 2x + 3y - e^{3y}.$$

5. Determine e classifique os extremos da função $g(x, y, z) = 3x + y^2 + 2z$, sujeita às restrições

$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

Grupo II

6. Considere o campo vectorial $G(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

a) Mostre que este campo vectorial verifica uma condição necessária para ser um campo gradiente.

b) Determine a função potencial φ, do campo vectorial G, tal que $\varphi(1,0) = 0$.

7. Considere a função vectorial $F(x,y) = (x^3 + xy^2, yx^2 + y^3 + 3x)$ e a elipse C que é a fronteira da região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

a) Calcule o integral de linha $\int\limits_C F d\gamma$.

Sug: considere a parametrização, $x = 3\cos t$ e $y = 2\operatorname{sen} t$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, no sentido directo.

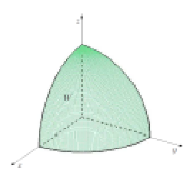
b) Calcule o integral de linha, $\int\limits_C F d\gamma$, usando o teorema de Green.

Sug: Recorde que a área duma elipse com semieixo maior a e semieixo menor b é igual a πab.

8. Considere o integral triplo: $I = \iiint\limits_W xz \; dzdydx$, onde

$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3,\; 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\right\}$.

A figura seguinte representa o conjunto W.



a) Expresse o integral em coordenadas esféricas.

b) Calcule o integral que obteve na alínea a).

9. Determine, utilizando o teorema da divergência de Gauss, o fluxo do campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xz\operatorname{sen}(yz) + x^3, \cos(yz), 3zy^2 - e^{x^2+y^2})$$

para o exterior da superfície S, formada pelo cilindro $x^2+y^2 = 16$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 3$.

10. Seja G um campo vectorial tal que existe uma função diferenciável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla g = G$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$.

Mostre que: $\displaystyle\int_C G \; d\gamma = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$.

Nome:
N: