Análise Matemática II

2017/18

Lista de Exercícios 1

1. Prove que as aplicações seguintes são normas no espaço $\mathbb{R}^n$:

a) $\|x\|_M = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ (norma do máximo),

b) $\|x\|_S = |x_1| + ... + |x_n|$ (norma da soma),

c) $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_n)^2}$ (norma euclideana).

2. Mostre que:

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\,\|x\|_M\,, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Mostre que:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4. Para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_1 + x_2}, \log(x_1), \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

a) Indique o domínio D de g e represente-o graficamente.

b) Descreva $\operatorname{int}(D)$, $\operatorname{ext}(D)$ e $\operatorname{fr}(D)$.

5. Determine o valor de cada uma das funções seguintes, definidas de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$, nos pontos indicados:

a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - x$ em $(0, 1)$; $(-2, 3)$ e $(2, -3)$.

b) $g(s, t) = \dfrac{2st}{s^2 + t^2}$ em $(1, 0)$, $(-3, 4)$ e $(5, 5)$.

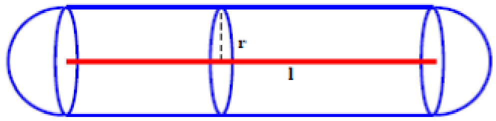
c) $f(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ em $(-1, 0)$; $(e, 0)$ e $(-3, -4)$.

6. Um tanque para armazenamento de oxigénio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro de raio r e de altura l (a unidade é o metro), com um hemisfério em cada extremidade.

a) Calcule a capacidade do tanque em função da altura l e do raio r.

b) Calcule o valor da capacidade de um tanque de altura $8m$ e de raio $1m$.

7. O índice de massa corporal humano (IMC) é expresso em função do peso P, em quilos, e da altura A, em metros, por



$$IMC(P, A) = \frac{P}{A^2}$$

O IMC indica se uma pessoa está acima ou abaixo do peso ideal, segundo a seguinte tabela da Organização Mundial da Saude:

Condição ponderal	IMC
Abaixo do peso	$IMC < 18,5$
Peso normal	$18,5 \leq IMC \leq 25$
Excesso de peso	$25 < IMC \leq 30$
Obesidade	$IMC > 30.$

a) Qual a condição ponderal de uma pessoa que mede $1,65m$ e pesa $95kg$?

b) Se uma pessoa mede $1,80m$ entre que valores poderá variar o seu peso, de modo a possuir uma condição ponderal normal?

8. Quando um poluente é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração do poluente, a x metros da origem da emissão e a y metros do chão pode ser aproximada por

$$P(x, y) = \frac{a}{x^2}\left(e^{h(x,y)} + e^{k(x,y)}\right)$$

com

$$h(x, y) = -\frac{b}{x^2}(y - h)^2 \text{ e } k(x, y) = -\frac{b}{x^2}(y + h)^2$$

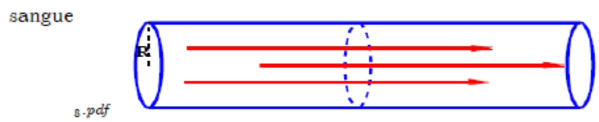
A concentração do poluente P é medido em $\mu g = m^2$ (μg = microgramas), sendo a e b constantes que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente. Considere $a = 200$ e $b = -0,002$.

a) Se uma fábrica tiver uma chaminé de $10m$ de altura, determine a contaminação a $1km$ de distância e a uma altura de $2m$.

b) Para os valores indicados dos parâmetros, se a altura da chaminé de uma fábrica for de $15m$, a que distância da fábrica se deve colocar, de modo que a contaminação a altura de $1m$ seja, no máximo, de $0,05\mu g/m^2$?

9. Lei do fluxo laminar de Poiseuille: descreve o fluxo sanguíneo através de um vaso, como artérias ou veias. Como as quantidades envolvidas são pequenas, podemos considerar que os vasos tem formato cilíndrico não elástico.

Represente-se por R o raio e l o comprimento, medidos em cm. Devido à fricção nas paredes do vaso, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo



central do vaso; decresce se a distância d (cm) do eixo à parede cresce e é zero na parede. A função velocidade v é uma função de cinco variáveis:

$$v(P, R, l, d, \eta) = \frac{P(R^2 - d^2)}{4l\eta}$$

onde η é a viscocidade do sangue e P a diferença entre a pressão da entrada e a da saída do sangue no vaso. Experimentalmente, para o sangue (humano) numa veia, temos $\eta = 0,0027$. Calcule a velocidade do fluxo sanguíneo, se $l = 1,675$, $R = 0,0075$, $P = 4 \times 10^3$ e $d = 0,004$.

10. Um modelo simplificado (modelo de Cobb-Douglas) para estimar o crescimento da economia de um país, é determinado pela quantidade de trabalho e pelo capital investido. A função utilizada para modelar a produção é da forma

$$P(T, C) = 1,01T^{0,75}C^{0,25},$$

onde P é a produção total (valor dos bens produzidos no ano), T é a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas no ano) e C é o capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios).

a) Determine o domínio da função P. Faça um esboço.

b) No ano A, os valores da produção, do trabalho e do capital, foram respectivamente, de 231, 194 e 407 em unidades apropriadas. Calcular a produção no ano A.

c) O que acontece com a produção se o trabalho e o capital investido duplicarem ambos?

d) Que alteração tem a produção se o trabalho e o capital investido forem multiplicados por um número positivo k?

11. Encontre o domínio D das funções seguintes e, quando possível, represente-o graficamente:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 16}$,

b) $g(x, y) = \log(y + x^2)$,

c) $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \dfrac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$,

d) $f(x, y) = \text{arcsen}(x + y)$,

e) $g(x,y) = \log\left(\dfrac{y}{x}\right) + \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2)$.

12. Para as funções seguintes, indique o seu domínio, o limite na origem (se existir) e o conjunto onde a função é contínua:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 2}{3 + xy}$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3y^2}{3x^2 - y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y) + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

e) $r(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$

13. Prove que a função identidade é contínua em $\mathbb{R}^2$.

14. Estude a continuidade das funções:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b)

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x - 2y - 2}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 2x^2, & x = 2. \end{cases}$$

15. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$. Mostre que é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Sug.: use o exercício 3.