Análise Matemática II

2017/18

Lista de Exercícios 4

1. Considere a função $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$. Averigúe se é homogénea e, no caso afirmativo, determine o grau α. Verifica a identidade de Euler? Justifique.

2. Verifique que as funções seguintes são homogéneas, determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:

a) $f(x,y) = x^2\sqrt{y} + y^{\frac{5}{2}} \log\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
b) $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

3. Verifique que as seguintes funções são homogéneas:

a) $f(x,y) = \dfrac{4x^2 + 3xy}{x^2 + y^2}$.
b) $f(x,y) = 2xy^2 + \log\left(4^{x^3}\right)$.

4. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$.

a) Mostre que f é homogénea e indique o seu grau de homogeneidade.
b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ também é homogénea.
c) Verifique identidade de Euler para f.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = x^2 y + \frac{\sqrt{x^\alpha y}}{\sqrt{z^\beta}} + y^{\beta - 1} z.$$

Determine os valores de α e β de modo que a função seja homogénea. Indique o grau de homogeneidade e verifique o Teorema de Euler.

6. Seja $f(x,y)$ uma função homogénea de grau 2. Se

$$f(-2,-4) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = 1$$

determine $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)}$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \rho \ \cos(\theta) \\ y & = & \rho \ \mathrm{sen}(\theta)\,. \end{array} \right. \quad , \quad \text{com } \rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

a) Calcule $f'(x)$ (matriz jacobiana) de f).
b) Em que condições existe $f^{-1}(x)$?
c) Determine f^{-1} e $\left(f^{-1}\right)'$ (matriz jacobiana de f^{-1}).
d) Prove que $f' \times \left(f^{-1}\right)' = I$.

8. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & 2x + 3y + 5z \\ v & = & x - y \\ w & = & 2x + 3z. \end{array} \right.$$

a) Verifique se g é invertível.
b) Calcule $\left(g^{-1}\right)'$.

9. Considere uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x + y + z \\ v & = & 2y + z \\ w & = & -x + 2z. \end{array} \right.$$

a) Determine o jacobiano de g.
b) Que pode afirmar quanto à sua invertibilidade ?
c) Se possível, calcule g^{-1}.

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2).$$

(a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para f.
(b) Será f globalmente invertível? Justifique.
(c) Calcule $Df^{-1}(2,2,2)$, onde f^{-1} é a inversa local de f numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$.

11. Considere as funções

$$f(u,v,w) = \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2u + bv + w \\ y & = & u + (b+2)v + 2w \\ z & = & u + 2bw \end{array} \right.$$

e

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & bx + 2y + z \\ v & = & 2x + (b+2)y + 2z \\ w & = & 6x - y + 3z. \end{array} \right.$$

a) Em cada caso, determine o parâmetro b de modo a que as funções sejam invertíveis.
b) Para um valor conveniente de b, determine, para cada uma das funções, a respectiva função inversa.

12. Mostre que a equação $x^2 y + \operatorname{sen} y = x$ define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$ e expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y, numa vizinhança do ponto $(0, 0)$.

13. A função diferenciável $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y.

14. Prove que as equações seguintes, definem z como função de x e y numa vizinhança dos pontos referidos e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ nesses pontos:

a) $\log(x + 2y + 3z) = 4xy$ na vizinhança de $(1, 0, 0)$.
b) $2x + y - 3z - 1 + \cos(x + 2y + z) = 0$ na vizinhança da origem.

15. Considere a equação $x + 2y - z = \operatorname{sen}(3xyz)$.

a) Verifique a equação define z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$.
b) Mostre que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \text{e que} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 2.$$

16. Considere a equação

$$x + 2xy + 3z^2 + 2x^2 z = 1.$$

a) Para que valores de z a equação define, implicitamente, z como função de x e y na vizinhança de $(1, 0, z)$.
b) Calcule as derivadas parciais de z como função de x e y na vizinhança dos pontos anteriores.
c) Nos pontos referidos, calcule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

17. Considere o sistema

$$\begin{cases} e^u + x \cos v = 0 \\ e^u + y \operatorname{sen} v - 1 = 0. \end{cases}$$

Verifique que este sistema define univocamente e implicitamente u e v como funções de x e y, numa vizinhança de $(-1,1,0,0)$ e calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(-1,1), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(-1,1) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y}(-1,1).$$

18. Mostre que a equação

$$e^{x+y+z} + xyz = 1$$

define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $g(x,y)$ numa vizinhança de $(0,0,0)$ e expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

19. Considere o sistema

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v+x) = 1, \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define implicitamente (u,v) como funções de (x,y), numa vizinhança de $(x,y,u,v) = (0,1,0,1)$.
b) Calcule

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,1), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(0,1), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,1) \text{ e } \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0,1).$$

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} xy + \log(z+w) = 0 \\ zw + \log(x+y) = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define z e w como funções implícitas de x e y, na vizinhança de $(1,0,1,0)$.
b) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial w}{\partial y},$$

na vizinhança de $(1,0)$.

21. Calcule o 2^a diferencial da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = e^{2x-y+3z}.$$

22. Escreva a fórmula de Taylor, de ordem 2, da função

$$f(x,y,z) = xyz$$

no ponto $(1,1,1)$.

23. Para $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=xy^4-e^{x+4y}$, calcule o diferencial de 3^a ordem.

24. Escreva um polinómio de Taylor de grau 2, que aproxime a função $f(x,y)=\operatorname{arctg}(xy)$, em torno do ponto $(1,1)$ e calcule um valor aproximado para $\operatorname{arctg}(0.99)$.

25. Determine, caso existam, os extremos da função

$$f(x,y)=-\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{16}.$$

26. Estude a existência de extremos livres das funções:

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+yz+2xz-xy$;
b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $g(x,y)=2(y^3+x^2+xy)$;
c) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $h(x,y)=2(x-y)^2-2(y^4+x^4)$.

27. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y)=ye^{1-x^2-y^2}.$$

28. Determine, caso existam, os extremos da função

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+4z^2.$$

29. Para a função $f(x,y)=x^4-2x^2y^2+y^4+1$,

a) Prove que qualquer ponto da forma (x,x) ou $(x,-x)$ é um ponto estacionário;
b) Determine as direcções singulares.
c) Mostre que todas as derivadas dirigidas se anulam segundo as direcções singulares;
d) Prove que 1 é um mínimo absoluto de f.
(Sugestão: escreva f na forma $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2+1$).

30. Estude os extremos relativos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=y^2+xy+3y+2x+5$;
b) $g(x,y)=x^2+xy-2y-2x-3$;
c) $h(x,y)=x^2+y-e^y$;
d) $f(x,y)=x^2+y^2+2xy+2y+2x+10$.

31. Considere a equação $x+2xy+3z^2+x^2z-1=0$.

a) Indique os pontos onde a equação define z como função de x e y.

b) Determine, se existirem, os extremos da função z.

32. Seja a equação $x^2 + xy + y^2 = 27$.
a) Indique o conjunto de pontos para os quais a equação define y como função de x.
b) Determine, caso existam, os extremos de y.

33. Determine os máximos e mínimos relativos (locais) da função $y(x)$ definida implicitamente pela equação

$$y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0.$$

34. Calcule os extremos da função $z(x, y)$ definida implicitamente pela igualdade

$$x + 2xy + 3z^2 + x^2z = 2,$$

na vizinhança dos pontos adequados.

35. Determine os extremos de $f(x, y) = 2x - 3y$ que pertencem à elipse $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10$.

36. Estude os extremos de $g(x, y, z) = x^2 + 2y + z$ que pertencem aos planos $x + y + z = 2$ e $x + 2y = 1$.

37. Determine três números cuja soma seja 150 e de modo que o produto seja o máximo.

38. Determine e classifique os extremos das funções seguintes nas regiões indicadas:
a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x + 3$ na região

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\};$$

b) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$ sobre a curva C dada por

$$4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0;$$

c) $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$ na região

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ |y| \leq 1\right\};$$

d) $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$ sujeita às restrições

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right. ;$$

e) $g(x,y,z) = 2x + y^2 + 2z$ sujeita às restrições

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + z = 10 \\ x + 2z = 8 \end{array} \right. .$$

39. Determine a distância mínima da origem à superfície $z = \dfrac{1}{xy}$.

40. Indique o(s) ponto(s) do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

41. Determine o paralelepípedo rectangular de volume máximo inscrito numa esfera de raio r.

42. Num secador de cereais de formato cilíndrico com raio de 1 metro, a temperatura do ar na saída do secador num ponto (x, y) da secção transversal do tubo de descarga do secador, considerando a origem no centro do tubo, é dada pela função

$$T(x,y) = 8(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5).$$

Encontre a maior e a menor temperatura na secção de saída do secador.