

# Determinação da Condutividade Térmica de um metal

Francisco Cruz 63409, Pedro Henriques 63452, Sofia Leitão 63403

LCET, IST  
(16 de Abril 2009)

Neste trabalho foi determinada a constante de conduividade térmica do alumínio através da análise do regime estacionário tendo obtido, para uma tensão  $V_1$ ,  $k_1 = 231 \pm 4 \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ . Para uma tensão  $V_2$  obteve-se  $k_2 = 230 \pm 4 \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ . A análise do regime variável permitiu ainda calcular um valor de  $k$  igual a  $k_3 = 353 \pm 99 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ .

## I- Introdução

A condução de calor é regida pela lei de Fourier. Esta estabelece que a densidade de fluxo de calor  $\vec{j}_Q$ , num ponto do meio, é proporcional ao gradiente de temperatura nesse ponto, isto é:

$$\vec{j}_Q = k \vec{\nabla T} \quad (1)$$

À constante de proporcionalidade dá-se o nome de condutividade térmica, sendo uma grandeza intrínseca a cada material. Esta traduz a medida da capacidade do material de “conduzir” calor.

Se o fluxo de calor e a temperatura do meio não variarem ao longo do tempo, diz-se que o sistema atinge uma situação de equilíbrio, regime estacionário. Nesta situação, e no caso de um corpo unidimensional, integrando em  $x$ , temos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta^2 T = 0 \quad (2) \text{ e } (3)$$

$$T(\vec{r}, t) = T(x) = c_1 x + c_2$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  ficam bem definidas uma vez impostas as condições de fronteira.

No sistema a estudar existirá uma fonte quente alimentada por uma resistência cuja potência é dada por:

$$P_1 = V_1 i_1 \quad (4)$$

Existirá também uma fonte fria que consome:

$$P_{FF} = \frac{\Delta mc \Delta T}{\Delta t} \quad (5)$$

A diferença entre (6) e (7), será o calor dissipado por trocas de calor entre a barra e o ar, por unidade de tempo, pelo que:

$$k = \frac{P_{FF}}{A_{\text{secção}} \frac{dT}{dx}} \quad (6).$$

Para quantificar a variação a temperatura ao longo do corpo unidimensional no caso do regime variável recorre-se ao método de separação de variáveis para a resolução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

onde  $c$  é a capacidade calorífica específica e  $\rho$  é a densidade do material.

Impondo uma distribuição inicial de temperaturas e novas condições de fronteira tem-se então que a solução da equação do calor é:

$$T(x, t) = T_a + \frac{T_b - T_a}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} (2T_0 - T_a - T_b) & n \text{ ímpar} \\ \frac{2}{n\pi} (T_b - T_a) & n \text{ par} \end{cases} \quad (8)$$

Ou seja é composta por uma série infinita de termos convergentes para a solução do regime estacionário. De facto, o valor de  $\alpha = K/(\rho c)$  dá-nos uma medida da rapidez com a qual o sistema alcança o mesmo.

A temperatura em cada ponto, pode no entanto ser aproximada por um polinómio do 4º grau:

$$T(\vec{r}, t) = T(x) = c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5 \quad (9)$$

Aproximando também,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} \bigg|_{x_m} = \frac{T(x_m, t_1 + \Delta t) - T(x_m, t_1 - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (10)$$

Tem-se, directamente da equação (7), que:

$$k = \frac{\rho c [T(x_m, t_1 + \Delta t) - T(x_m, t_1 - \Delta t)]}{2\Delta t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \bigg|_{x_m}} \quad (11)$$

## II- Procedimento e Montagem

Para a realização deste trabalho utiliza-se uma barra de alumínio de comprimento  $L=12\text{cm}$  e de secção  $4\text{cm}^2$ .

A montagem do sistema é ilustrada pela figura seguinte :

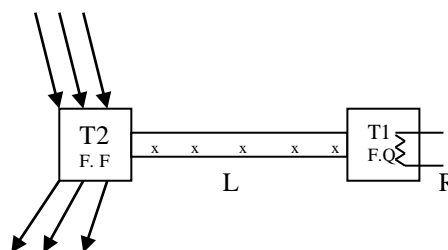


Fig.1- Esquema da Montagem

Existem duas fontes no sistema, uma fonte quente, T1, que é alimentada por uma resistência eléctrica percorrida por um corrente que é conhecida e uma fonte fria T2, arrefecida por um sistema de água circulante. A barra possui ainda sensores cuja posição é conhecida e que estão ligados a um software que regista os pares de tempo e temperatura.

Na primeira parte, para o estudo do regime estacionário, serão efectuadas medições de temperatura de equilíbrio para duas tensões de alimentação diferentes.

Na segunda parte, será estudado o regime variável. Para isso, desligar-se-à a fonte de alimentação do sistema e, de imediato, começarão a ser registados os valores de temperatura ao longo da barra durante um período de cerca de 10 minutos.

### III- Resultados e Análise

Foi medido o caudal do fluído de arrefecimento em duas ocasiões distintas e obtive-se a tabela:

	Caudal (dm <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )	<i>e<sub>Caudal</sub></i> (dm <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )
1ª Medição	0,00344	0,003515
2ª Medição	0,00359	

Tabela 1

Mediu-se também a tensão e a intensidade que actuavam na resistência de cobre para determinar a potência emitida:

V(V)	e <sub>v</sub> (V)	I(A)	e <sub>i</sub> (A)	P(W)	e <sub>p</sub> (W)
14,6	0,1	1,25	0,01	18,25	0,271

Tabela 2

Obteve-se, a partir do software que automaticamente convertia as tensões enviadas pelos diferentes termómetros ao longo da barra, os diferentes valores das temperaturas à saída (T<sub>H2Oa</sub>) e entrada do fluído (T<sub>H2Ob</sub>) e ao longo da barra (T<sub>1</sub> a T<sub>5</sub>):

	L (cm)	T <sub>a</sub> (°C)	T <sub>b</sub> (°C)	T <sub>médio</sub> (°C)	e <sub>T</sub> (°C)
T <sub>1</sub>	1	51,91	51,79	51,85	0,06
T <sub>2</sub>	3,5	48,01	47,9	47,955	0,055
T <sub>3</sub>	6	42,85	42,76	42,805	0,045
T <sub>4</sub>	8,5	37,42	37,33	37,375	0,045
T <sub>5</sub>	11	32,46	32,39	32,425	0,035
T <sub>H2Oa</sub>	saída H <sub>2</sub> O	22,66	22,58	22,62	0,04
T <sub>H2Ob</sub>	entr. H <sub>2</sub> O	22,09	22,04	22,065	0,025

Tabela 3

Com os valores das temperaturas da entrada e saída da água obteve-se o valor da potência recebida:

P(W)	e <sub>p</sub> (W)
8,166153	1,073

Tabela 4

Ora, este valor é muito inferior à potência emitida (18,25±0,271W) pelo que desconfiámos que, mesmo dissipando-se algum calor ao longo da barra, nas juntas do material e na própria fonte quente, o valor é muito diminuto. Pelo que acabámos por concluir que a melhor aproximação à potência útil seria a emitida já que a recebida pela fonte fria tinha os termómetros em contacto com o ar o que fazia com que os valores das temperaturas T<sub>H2Oa</sub> e T<sub>H2Ob</sub> não fossem os reais.

Efectuámos o gráfico da temperatura (em °C) em função do comprimento da barra de alumínio (em cm):

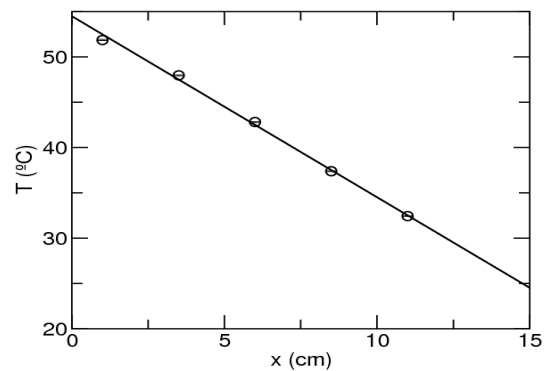


Gráfico 1

O declive da recta é:  $-1,9757 \pm 0,0059$  ( que corresponde a  $\frac{dT}{dx}$  ) e utilizando o valor da potência emitida obtemos um valor para a constante de condutividade térmica do alumínio: **k1= 231 ± 4 Wm<sup>-1</sup>°C<sup>-1</sup>**.

Repetiu-se a experiência com outro valor de tensão:

V(V)	e <sub>v</sub> (V)	I(A)	e <sub>i</sub> (A)	P(W)	e <sub>p</sub> (W)
17,1	0,1	1,47	0,01	25,137	0,318

Tabela 5

E obteve-se novamente a tabela de valores para as temperaturas:

	L (cm)	T <sub>a</sub> (°C)	T <sub>b</sub> (°C)	T <sub>médio</sub> (°C)	e <sub>T</sub> (°C)
T <sub>1</sub>	1	62,76	62,57	62,665	0,095
T <sub>2</sub>	3,5	57,53	57,38	57,455	0,075
T <sub>3</sub>	6	49,92	49,78	49,85	0,07
T <sub>4</sub>	8,5	42,27	42,17	42,22	0,05
T <sub>5</sub>	11	36,51	36,39	36,45	0,06
T <sub>H2Oa</sub>	saída H <sub>2</sub> O	23,07	22,98	23,025	0,045
T <sub>H2Ob</sub>	entr. H <sub>2</sub> O	22,29	22,2	22,245	0,045

Tabela 6

E o gráfico da temperatura (em °C) em função do comprimento da barra (em cm):

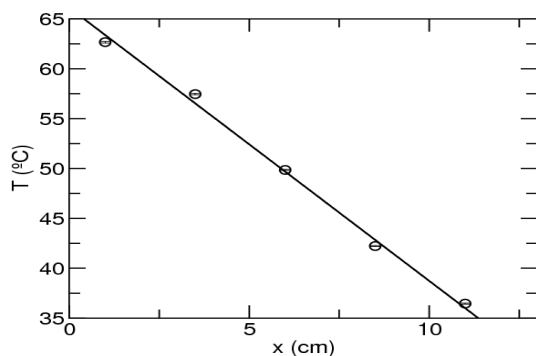


Gráfico 2

O declive da recta é:  $-2,7383 \pm 0,0092$  e  
 $k_2 = 230 \pm 4 \text{ W m}^{-1} \text{ °C}^{-1}$

Para o segundo procedimento removeu-se a fonte quente e registou-se o decaimento da temperatura ao longo da barra. Optou-se por analisar as temperaturas num determinado instante ( $t=90.281\text{s}$ ) ao longo do comprimento da barra e obteve-se o seguinte gráfico:

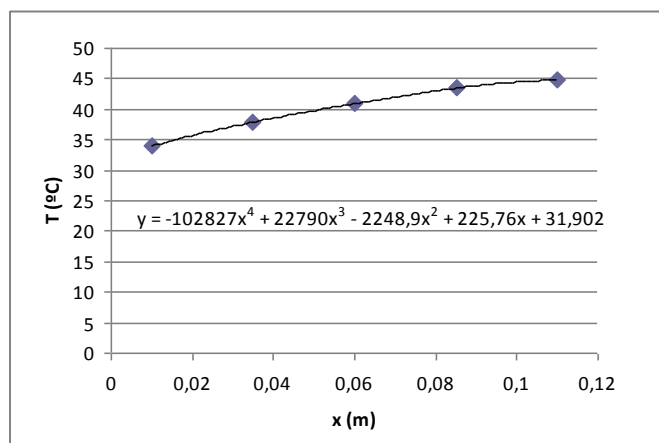


Gráfico 3

Ora fazendo uma interpolação polinomial de quarta ordem, tira-se uma aproximação da segunda derivada da temperatura em ordem ao comprimento  $x$ .

Considerou-se agora um  $x$  aleatório ( $x = 6 \text{ cm}$ ) e obteve-se o valor de  $T(6, t+\Delta t)$  e de  $T(6, t-\Delta t)$  em que  $\Delta t$  é um intervalo de tempo suficientemente pequeno (não se considerou muito pequeno devido ao ruído).

Para  $\Delta t = 10 \text{ s}$  obtivemos um valor para a constante de condutividade térmica do alumínio de  $k_3 = 353 \pm 99 \text{ W/m °C}$

#### IV- Conclusão

Os valores obtidos na primeira parte da experiência encontram-se próximos do valor tabelado  $237 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .  $k_1$  apresenta um desvio de cerca de 2,6 % e  $k_2$  de 3,2%.

No entanto, o valor experimental do  $k$  não cobre o valor tabelado porque os erros considerados na experiência são muito pequenos. O desvio à exactidão poderá ser explicado, na sua maioria, pelas trocas de calor com o ar. De facto o sistema não está perfeitamente isolado. Para além disso, como já foi anteriormente mencionado na análise dos

resultados, optou-se por usar o valor da potência da fonte quente como o valor do calor transferido pela barra por unidade de tempo porque o cálculo da energia consumida pela fonte fria introduzia um grande erro na nossa medida. Verificámos que o último sensor deveria estar colocado mais próximo da fonte fria. Assim, com esta aproximação, o calor dissipado por trocas de calor com o meio envolvente não está a ser considerado no cálculo.

Na segunda parte da actividade experimental explicamos os elevados erros à exactidão devido à aproximação que utilizámos em vez da aproximação pela expressão (8). Além disto achou-se que a escolha do intervalo de tempo  $\Delta t$  poderá ter sido muito pequeno e portanto o ruído terá sido muito relevante e causador de uma grande fonte de erro não considerada no cálculo do  $k$ .

A forma mais correcta de calcular  $k$  no regime variável seria recorrendo directamente à expressão (8), onde se tomariam os primeiros 3 a 4 termos da série dos senos. No entanto, dado o rigor da actividade experimental e a dificuldade deste cálculo, optámos por calcular  $k$  através do raciocínio descrito na introdução teórica. O valor obtido é assim muito pouco exacto,  $k_3$  tem um desvio de 49,1%.

Há ainda a apontar uma outra fonte de erro que poderá ser responsável pelo desvio à exactidão dos resultados obtidos: a calibração dos sensores cujo o erro é difícil de estimar. De facto, um pequeno erro de calibração da ordem das décimas num único sensor, alteraria bastante o valor de  $k$  obtido.

Claramente, o melhor método para determinar a condutividade de um metal é pela análise da evolução de temperatura ao longo da barra aquando do regime estacionário, uma vez que permite a obtenção de resultados mais exactos.