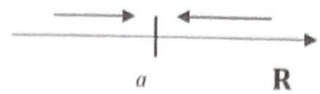
1. Limites em R^n

Em **R** para que existisse o limite de uma função num ponto ***a*** era necessário que existissem e fossem iguais os limites laterais à esquerda e à direita

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$



De certa forma só existem duas direções possíveis.
Em $\mathbf{R}^2$ para calcular, por exemplo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ já temos uma infinidade de direções.

⚠ Para provar que um limite **não existe** é utilizado o princípio dos 2 caminhos:
" Se para duas direções diferentes resultarem limites diferentes, então o limite não existe "

Este princípio é usado para provar a não existência de um limite! Se para "mil" direções o resultado for sempre 7, **não** podemos concluir que o limite inicial é 7!!!

Receita para provar a não existência de um limite na origem:

- Direção **y=0** (aproximar pela reta horizontal) $\lim\limits_{x\to 0, y=0}$
- Direção **x=0** (aproximar pela reta vertical) $\lim\limits_{y\to 0, x=0}$

A estes dois primeiros limites também se chamam **limites iterados**
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ e $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$

- Direção **y=mx** (aproximar pelas retas de declive **m**)

  $\lim\limits_{x\to 0, y=mx}$ $\longmapsto$ Se este limite depender de **m** então não existe.

- Direção **y=ax²** ou **x=ay²** (aproximar por parábolas)

  $\lim\limits_{x\to 0, y=ax^2}$ ou $\lim\limits_{y\to 0, x=ay^2}$ $\longmapsto$ Se este limite depender de **a** então não existe.

Quando obtivermos 2 resultados diferentes podemos concluir que o limite não existe.

Truque ... se o menor grau de cima for maior que o maior em baixo então o limite existe.

Exemplo 1: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 - y^2}{x^2 - 3y^2}$

O "truque" diz que como o grau em cima é igual ao de baixo (2), o limite não vai existir.

$$\boldsymbol{y=0} \mapsto \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 3y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = 2 \qquad \boldsymbol{x=0} \mapsto \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{-3y^2} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ Como para direções diferentes (nomeadamente y=0 e x=0) resultam limites diferentes (2 e 1/3), resulta que o limite original não existe.

Exemplo 2: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Neste caso o "tal truque" diz que o grau em cima é 3 (um do x e dois do y) e o maior em baixo é 4, logo o limite não vai existir.

$$\boldsymbol{y=0} \mapsto \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \qquad \boldsymbol{x=0} \mapsto \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4} = 0$$

$$\boldsymbol{y=mx} \mapsto \lim_{x\to 0, y=mx}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0.$$

Estamos a tentar provar que não existe ... temos de encontrar uma direção que dê um limite diferente.

$$\boldsymbol{x=y^2} \mapsto \lim_{y\to 0, x=y^2}\frac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ Como para direções diferentes (nomeadamente y=0 e $x=y^2$) resultam limites diferentes (0 e 1/2), resulta que o limite original não existe.

◆ **Quando existe a expressão** x^2+y^2 **usamos coordenadas polares** $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

⚠ Assim a expressão $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ldots \longmapsto \lim_{\rho\to 0}\ldots$ e $x^2+y^2 \longmapsto \rho^2$

Neste caso se o limite der 20, o resultado é 20, se depender de θ não existe.
Se o limite não for para a origem adaptam-se as coordenadas ...

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \longmapsto \begin{cases} x-2=\rho\cos\theta \\ y+3=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \lim_{(x,y)\to(2,-3)}\ldots \longmapsto \lim_{\rho\to 0}\ldots \quad \text{e} \quad (x-2)^2+(y+3)^2 \longmapsto \rho^2$$

Exemplo 3: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

O grau em cima é 2 (o x e o y estão a multiplicar), em baixo é 1 (raiz de x^2) ... vai existir. Utilizando coordenadas polares ...

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{3\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{3\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}3\rho\cos\theta\sin\theta = 0$$

$\therefore$ O limite existe e é 0.

2. Continuidade de funções em R^n

- **Prolongamentos por continuidade**

Quando uma função não está definida num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é sempre possível prolongar a função. Acontece que nem sempre é possível fazê-lo de modo a que a função fique contínua nesse ponto.

É possível prolongar por continuidade uma função ***f*** num ponto ***a*** se existir o seu limite

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L$$

Como resultado teremos uma função prolongamento

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (a_1,a_2) \\ L, & (x,y) = (a_1,a_2) \end{cases}$$

- **Continuidade**

- Uma função que <u>não esteja definida por ramos</u> é contínua em todo o seu domínio (a não ser que o domínio seja um conjunto "esburacado" com condições do tipo $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$).
  Desta forma quanto for pedido o conjunto onde a função é contínua ... basta calcular o domínio.
- Uma função <u>definida por ramos</u> é contínua nos pontos onde não muda de ramo e, no ponto onde muda de ramo é necessário ver se o limite é igual à imagem.

Exemplo 4: Estude a continuidade de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 8, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para já posso afirmar que a função é contínua se $(x,y) \neq (0,0)$, pois é o quociente de duas funções contínuas (um polinómio e uma raiz) e o denominador não se anula.

Assim é contínua, para já, em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

No ponto $(0,0)$ a função será contínua se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 8$

No Exemplo 3 foi calculado este limite e deu 0!!! Assim a função não é contínua em $(0,0)$.

$\therefore$ A função é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

3. Derivadas de 1ª ordem em R^n

- **Derivada direcional**

A derivada direcional da função f na direção do vetor $\vec{v}$ num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ nota-se por $f'_{\vec{v}}(a)$ ou $D_{\vec{v}}f(a)$ ou $f'(a;\vec{v})$ ou $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ e é dada pelo seguinte limite

$$f'_{\vec{v}}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h\vec{v}) - f(a)}{h}$$

- O vetor $\vec{v}$ tem de ser unitário, isto é, ter norma 1. Se assim não acontecer é necessário dividir pela sua norma.
- **A derivada parcial em ordem a x,** $\frac{\partial f}{\partial x}$ é o caso particular do vetor $\vec{v} = (1,0)$;
- **A derivada parcial em ordem a y,** $\frac{\partial f}{\partial y}$ trata-se de $\vec{v} = (0,1)$.

- **Diferenciabilidade**

- **Teorema:** Se todas as derivadas parciais de $\boldsymbol{f}$ existirem numa vizinhança de $\boldsymbol{a}$ e forem contínuas em $\boldsymbol{a}$, então $\boldsymbol{f}$ é diferenciável no ponto $\boldsymbol{a}$.

- Desta forma, se uma função não estiver definida por ramos basta calcular as derivadas parciais e, nos pontos onde estas existirem e forem contínuas, a função $\boldsymbol{f}$ será diferenciável.

- No caso da função estar definida por ramos e $a = (a_1, a_2)$ o ponto onde a função muda de ramo, $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $a = (a_1, a_2)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \times (x-a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \times (y-a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0$$

- **Teorema:** Se $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $\boldsymbol{a}$ então $\boldsymbol{f}$ é contínua em $\boldsymbol{a}$.

Se $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $\boldsymbol{a}$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (já unitário), então a derivada direcional fica:

$$f'_{\vec{v}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \times v_2 = \nabla f(a) \cdot (v_1, v_2)$$

- **Equação do plano tangente à superfície *F***

A equação do plano tangente a uma superfície dada pela equação $F(x,y,z) = 0$ no ponto $a = (a_1, a_2, a_3)$ é

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) \times (x-a_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(a) \times (y-a_2) + \frac{\partial F}{\partial z}(a) \times (z-a_3) = 0 \text{ ou } \langle (x,y,z) - a, \nabla F(a) \rangle = 0$$

Quando a superfície é dada pelo gráfico de uma função $f(x,y)$ temos de fazer $z = f(x,y) \Leftrightarrow z - f(x,y) = 0$.
Neste caso temos que $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ e a coordenada em falta é $a_3 = f(a_1, a_2)$.

- **Equação da reta normal à superfície F**

A equação da reta normal a uma superfície dada pela equação $F(x,y,z) = 0$ no ponto $a = (a_1, a_2, a_3)$ é

Equações vetoriais da reta $(x,y,z) = a + t\nabla F(a), t \in \mathbb{R}$ ou $N(t) = a + t\nabla F(a), t \in \mathbb{R}$

$$\text{Equações paramétricas} \begin{cases} x = a_1 + t\dfrac{\partial F}{\partial x}(a) \\ y = a_2 + t\dfrac{\partial F}{\partial y}(a), t \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + t\dfrac{\partial F}{\partial z}(a) \end{cases}$$

O vetor $\nabla F(a)$ é o **vetor normal**. No caso de ser pedido unitário basta normalizá-lo, isto é, $\frac{\nabla F(a)}{\|\nabla F(a)\|}$.

- **Gradiente**

O vetor gradiente de uma função <u>escalar</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um vetor formado pelas derivadas parciais da função f

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- **Matriz Jacobiana**

A matriz Jacobiana de uma função <u>vetorial</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ é a matriz

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

O <u>**Jacobiano**</u> é o determinante da Matriz Jacobiana, isto é, $J_f = |Df|$

- **Divergência**

A divergência de uma função vetorial $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ é o traço da matriz Jacobiana

$$div\, f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

⚠ A divergência é escalar, está em $\mathbb{R}$

- **Rotacional**

O rotacional de uma função vetorial $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ é o seguinte vetor

$$\text{rot}\, f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

⚠ O rotacional é um vetor.

4. Derivada da Composta, Implícita e Inversa

Derivada da Composta (para funções vetoriais)

$$D(f \circ g)(a) = Df\big(g(a)\big) \times Dg(a)$$

onde a expressão anterior é o produto das matrizes Jacobianas de f e g.

Derivada da Função Implícita (caso escalar)

A equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente $\boldsymbol{z}$ como função de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, isto é $z = f(x, y)$, se:

- F for de classe C^1, isto é, as derivadas parciais existirem e forem contínuas;
- $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

Em caso afirmativo, podem-se calcular as seguintes derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Derivada da Função Inversa

A função vetorial $f(x, y) = (f_1, f_2) = (u, v)$ é localmente invertível numa vizinhança de (x_0, y_0) se:

- f for de classe C^1, isto é, as quatro derivadas parciais existirem e são contínuas;
- O Jacobiano de f em (x_0, y_0) for $\neq 0$, isto é, $J_f(x_0, y_0) \neq 0$.

Em caso afirmativo podemos calcular a matriz Jacobiana da função inversa

$$Df^{-1}(R) = [Df(x_0, y_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, R = f(x_0, y_0)$$

5. Derivadas parciais de ordem superior

As 4 derivadas parciais de segunda ordem para uma função escalar (f: $R^2 \to R$) são:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Observe-se que as duas últimas são as derivadas mistas. Quando a função é contínua estas derivadas são iguais (Teorema Schwarz).

- **Matriz Hessiana**

  A matriz Hessiana de uma função escalar $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma matriz formada pelas 9 derivadas de 2ª ordem

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix}$$

- **Laplaciano**

  O Laplaciano de uma função escalar $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é o traço da matriz Hessiana, isto é, a soma da diagonal

$$\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$$

Quando uma função f verifica a **equação de Laplace**: $\Delta f = 0$, diz-se que a função é **Harmónica**.

6. Otimização livre e condicionada

♦ Otimização livre

1º Encontrar os pontos críticos. Resolver $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$

2º Ver a natureza dos pontos críticos

- **Caso *f*(*x*,*y*):** Calcular o determinante da matriz Hessiana $|\mathrm{H}_f|$ em cada ponto crítico:

  → Se $|\mathrm{H}_f| < 0$ então o ponto crítico em questão é **ponto de sela**;

  → Se $|\mathrm{H}_f| > 0$

  ↪ $f''_{xx} > 0$ então o ponto crítico é minimizante e f(PC) é **mínimo**;

  ↪ $f''_{xx} < 0$ então o ponto crítico é maximizante e f(PC) é **máximo**.

- **Caso *f*(*x*,*y*,*z*):** Calcular a matriz Hessiana em cada ponto crítico e os menores principais

$$d_1 = f''_{xx}\,, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}$$

Se o resultado for $+\,+\,+$ então o ponto crítico é minimizante e f(PC) é **mínimo**;

Se o resultado for $-\,+\,-$ então o ponto crítico é maximizante e f(PC) é **máximo**;

Se verificada uma das ordenações atrás e a partir de certa ordem os menores forem todos 0 então nada se pode concluir;

Todos os outros casos restantes originam que o ponto crítico é **ponto de sela**.

♦ Otimização condicionada – Multiplicadores de Lagrange

Para encontrar os extremos de uma função numa região o procedimento é quase análogo ao anterior:

- encontram-se os pontos críticos;
- para os pontos críticos encontrados avalia-se a natureza dos que pertencerem à região (tentar representar a região);
- finalmente … substituem-se as expressões de cada fronteira da região na função e estuda-se esta "nova" função.

De todos os valores encontrados escolhe-se o maior dos máximos e o menor dos mínimos e serão estes os extremos da função na região indicada.

Quando se pede os extremos de uma função sujeita a uma restrição usam-se os **Multiplicadores de Lagrange**.

Por exemplo para a obtenção dos extremos de $f(x,y,z)$ sujeita à restrição $g(x,y,z) = 0$ procede-se da seguinte forma:

1º Constrói-se a função de Lagrange $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

2º Encontram-se os pontos críticos para L. Resolver $\nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$;

3º Ver a natureza dos pontos críticos. Para cada ponto crítico, que lhe está associado um λ, calcular a matriz Hessiana Orlada

$$\overline{H}_f = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ g'_y & f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ g'_z & f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix}$$

Determina-se o determinante desta matriz em cada ponto crítico. Se forem duas variáveis e uma restrição basta ver o sinal do determinante. **> 0 implica que é ponto de máximo**; **< 0 é ponto de mínimo**.

Exercícios

I.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)\,y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(1,0)\,,\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(1,0)\,.\end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

Solução: 0

II.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad x^2+y^2>4,\\ e^{y-2} & \text{se} \quad x^2+y^2\leq 4.\end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

S: 0; não existe; 0

III. Calcule a derivada direcional de **f** na direção de **v** no ponto **P**:

$a)$ $f(x,y)=x^2+y^2-3xy^3,\quad v=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad P=(1,2);$

$b)$ $f(x,y)=e^x\cos y,\quad v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right),\quad P=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right);$

$c)$ $f(x,y)=17x^y,\quad v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad P=(1,1);$

$d)$ $f(x,y)=e^{x^2}\cos y,\quad v=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right),\quad P=\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right).$

S: -11-16√3; -1/√5; 17/√2; -4e/5

IV. Verifique se as seguintes funções são diferenciáveis na origem:

$a)$ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2};$

$b)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,;\end{cases}$

$c)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,;\end{cases}$

$d)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$

S: Não; Não; Não; Não

V. Determine, caso existam, os extremos e os pontos de sela da função no plano:

$a)\ f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y;$

$b)\ f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x;$

$c)\ f(x,y) = x\sin 2y;$

$d)\ f(x,y) = (x-1)(x-y)(x+y);$

$e)\ f(x,y,z) = f(x,y) = e^{1+x^2-y^2};$

$f)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$

$g)\ f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy.$

a) $(1,-1)$ e $(-1,1)$ pontos de sela, $(1,1)$ mínimo local e $(-1,-1)$ máximo local;

b) $(0,1)$ e $(0,-1)$ pontos de sela, $(1,0)$ mínimo local e $(-1,0)$ máximo local;

c) $\left(0,\frac{k\pi}{2}\right)$, com $n\in\mathbb{Z}$, pontos de sela;

d) $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ e $\left(\frac{2}{3},0\right)$ mínimo local;

e) $(0,0)$ ponto de sela;

f) $(0,0)$ ponto de sela e $(1,1)$ mínimo local;

g) $(0,0)$ ponto de sela e $(-1,1)$ máximo local.

VI. Determine, caso existam, os extremos e os pontos de sela da função no espaço:

$a)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z;$

$b)\ f(x,y,z) = xe^x + ye^y + ze^z.$

a) $(0,1)$ e $(0,-1)$ pontos de sela, $(1,0)$ mínimo local e $(-1,0)$ máximo local;

c) $(-1,-1,-1)$ mínimo local.

VII. Determine, caso existam, os extremos e os pontos de sela da função:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, no conjunto dos pontos (x,y) que verificam a equação $x^2 + y^2 = 1$;

b) $g(x,y) = x^2 + y^2$, no conjunto dos pontos (x,y) que verificam a equação $x^6 + y^6 = 1$;

a) $f(0,\pm 1) = -1$ mínimo e $f(\pm 1, 0) = 1$ máximo;

b) $g(0,\pm 1) = g(\pm 1, 0) = 1$ mínimo e $g\left(\pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt[3]{2^2}$ máximo.

VIII. Encontre 3 números cuja soma seja 150 e o seu produto o maior possível. **S:** x = y = z = 50