Soma de Séries (Geométrica e Mengoli)

Uma série numérica é um somatório de números. O termo geral de uma série é uma sucessão (é comum utilizar a letra n de forma a manter a notação das sucessões mas ... na matemática como a letra é "muda" também se podem utilizar outras letras como k, i, m, etc.)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{n^2+2} = \frac{5\times 1}{1^2+2} + \frac{5\times 2}{2^2+2} + \cdots + \frac{5\times n}{n^2+2} + \cdots$$

É **convergente** se o limite (quando n tende a infinito) das suas somas parciais existir e for finito. Caso contrário a série é **divergente**.

Apesar de ser uma soma infinita, há dois tipos de séries onde é possível calcular a sua soma (o limite das somas parciais). São as séries **Geométricas** e de **Mengoli** ou **Telescópicas**.

♠ **Série Geométrica**

Uma série é geométrica se o termo seguinte resulta da multiplicação do anterior por um número. Esse número é a **razão**. Digo multiplicar pois dividir por 7 é o mesmo que multiplicar por 1/7.

A sua forma geral é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

. Não é necessário que uma série comece em 1, umas começam em 0 ou 2.

A razão **r** calcula-se através da divisão do termo n+1 pelo anterior

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

, ou ... vai-se "ajeitando" o termo geral até ficar um número elevado a n.

Natureza: Após calculada a razão **r**, a série será convergente se **-1 < r < 1**, caso contrário será divergente.

Soma da série: Para as convergentes a soma é

$$\text{Soma} = \frac{1^{\underline{o}}\ termo}{1-r}$$

Esta fórmula resulta do limite das somas parciais

$$\lim_{n \to +\infty} 1^{\underline{o}} termo \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Exemplo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-n} 2^{2n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^2)^n \times 2^3}{7^n} = 2^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{7^n} = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

Esta é uma série geométrica de razão 4/7. Como a razão verifica -1 < 4/7 < 1, a série é convergente. A sua soma é dada por

$$\text{Soma} = \frac{1^{\underline{o}}\ termo}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{56}{3}$$

♠ **Série de Mengoli ou Telescópica**

Estas séries são especiais pois é possível colocá-las na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k})$$

A soma da série é dada por

$$\text{Soma} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - k \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Por exemplo no caso de k=2 e a série começar em 0 ficaria

$$\text{Soma} = a_0 + a_1 - 2 \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Estas séries convergem se o limite anterior existe e for finito, caso contrário são divergentes.

Exemplo:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n(n+1)} = 3 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Nem sempre é fácil ver que se trata de uma série de Mengoli mas se é pedido a sua soma e não é possível colocar tudo elevado a n (de forma a ser uma geométrica), terá de ser obrigatoriamente de Mengoli. Nota que esta série não começa em 1, mas sim em 2. Como k=1 a soma dos primeiros k termos é apenas o primeiro (neste caso o termo de ordem 2).

Assim para esta série de Mengoli com k=1 a sua soma é dada por

$$\text{Soma} = a_2 - 1 \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Não esquecer de multiplicar por 3. Assim a soma da série original é 3/2 logo convergente.

Última alteração: Segunda, 21 Outubro 2013, 11:57