AM1: Sucessões

Uma sucessão de números reais pode ser entendida como uma função cujo domínio são os números naturais. O seu gráfico daria um conjunto de pontos (discretos).

Apenas dá para calcular o limite de uma sucessão quando **n** tende a + infinito. Assim muitas vezes se omite esta 'tendência' e abusa-se da linguagem matemática

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \dashrightarrow \lim u_n$$

Uma sucessão é convergente se o seu limite é **único** e diferente de infinito. Caso o limite dê infinito ou tenha dois ou mais sublimites a sucessão diz-se divergente.

Ao calcular o limite podem acontecer várias situações que **não são** indeterminações ...

$$\frac{c}{\pm\infty} \to 0 \;\blacksquare\; \frac{5}{0} \to +\infty \;\blacksquare\; \frac{2}{0^-} \to -\infty$$

As indeterminações são ...

$$+\infty - \infty \;\blacksquare\; \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \;\blacksquare\; \frac{0}{0} \;\blacksquare\; 0\times\infty \;\blacksquare\; 0^0 \;\blacksquare\; \infty^0 \;\blacksquare\; 1^\infty$$

Um limite muito importante é a constante elevada a + infinito

$$\lim_{n\to+\infty} c^n = \begin{cases} +\infty & c > 1 \\ 1 & c = 1 \\ 0 & -1 < c < 1 \\ não\ existe & c \leq -1 \end{cases}$$

♠ Polinómios, raízes e exponenciais numa fração

$$\Lsh\ \lim \frac{30n + 4n^2 - 25}{4 - n^2} = \lim \frac{4n^2}{-n^2} = -4$$

$$\Lsh\ \lim \frac{7 + 3n}{\sqrt{5 + n^4}} = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^4}} = \lim \frac{3n}{n^2} = \lim \frac{3}{n} = 0$$

$$\Lsh\ \lim \frac{-43n - 2n^3}{\sqrt{2 + n^4} + n^2 - 13} = \lim \frac{-2n^3}{\sqrt{n^4} + n^2} = \lim \frac{-2n^3}{2n^2} = \lim -n = -\infty$$

Observa que um exponencial cresce mais rapidamente que uma potência $3^n >> 456n^8$

$$\Lsh\ \lim \frac{4^n + 73n^{35}}{\sqrt{6 + n^{78}} + n^{672} - 3^{2n}} = \lim \frac{4^n}{-(3^2)^n} = \lim -\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$$

♠ 'infinitéssimo x limitada'

Utilizar quando existem sucessões limitadas como senos e cossenos

$$\lim \frac{\sin(3n+4)}{\sqrt{5+n^4}} = \lim \frac{1}{\sqrt{5+n^4}} \times \sin(3n+4) = 0 \times 'limitada' = 0$$

♠ Indeterminações +∞-∞ 'o conjugado'

Este tipo de indeterminação ocorre quando existe uma subtração de uma ou duas raizes. A ideia é multiplicar e dividir pelo conjugado, utilizando o facto de $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)=\lim\frac{\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)}{n+\sqrt{n^2+4}}=\lim\frac{n^2-n^2-4}{n+\sqrt{n^2}}=\lim\frac{-4}{2n}=0$$

♠ $1^{\infty}\rightarrow$ Nepper

Quando existe algo elevado a infinito e esse algo é uma sucessão que tende para 1, então estamos perante um limite que vai originar um **e**···.

A fórmula a utilizar, a qual teremos que 'ajeitar' a expressão é

$$\lim\left(1+\frac{a}{u}\right)^{u}=e^{a}$$

Observe-se que a é um número, o sinal de + tem de estar e u é uma sucessão que tende para infinito. O mecanismo é dividido em dois processos: primeiro 'ajeita-se' dentro dos parêntesis; depois prepara-se o expoente.

$$\lim\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{5n+2-5}{5n+2}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{5n+2}{5n+2}-\frac{5}{5n+2}\right)^{n^2}=\lim\left(1+\frac{-5}{5n+2}\right)^{n^2}=$$

$$=\left[\lim\left(1+\frac{-5}{5n+2}\right)^{5n+2}\right]^{\lim\frac{n^2}{5n+2}}=\left[e^{-5}\right]^{+\infty}=e^{-\infty}=0$$

♠ Raízes índice n

Quando surge a raiz índice n, esse limite é igual, caso exista, ao limite do quociente entre o termo de ordem n+1 pelo termo de ordem n, isto é,

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\lim\sqrt[n]{\frac{3n}{5-2n}}=\lim\frac{\dfrac{3(n+1)}{5-2(n+1)}}{\dfrac{3n}{5-2n}}=\lim\frac{(3n+3)(5-2n)}{(-2n+3)3n}=\lim\frac{-6n^2}{-6n^2}=1$$

♠ Sucessões enquadradas

O método das sucessões enquadradas é utilizado quando a nossa sucessão tem uma infinidade de somas. A ideia é encontrar uma sucessão que seja maior, cujo limite seja por exemplo 7, outra menor com o limite também 7 e assim a nossa sucessão inicial terá também limite 7. Observa que com frações, quando pretendemos encontrar algo maior, temos de diminuir o denominador (a parte de baixo). Para encontrar o número de termos é necessário utilizar a seguinte fórmula: **último - primeiro + 1**.

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{7n^2+k} = \lim \frac{5}{7n^2} + \frac{5}{7n^2+1} + \cdots + \frac{5}{7n^2+n} = ?$$

$$\textit{termos}\ (n+1) \times \frac{5}{7n^2+n} \le \frac{5}{7n^2} + \cdots + \frac{5}{7n^2+n} \le \frac{5}{7n^2} \times (n+1)\ \textit{termos}$$

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{\frac{5n+5}{7n^2+n}} \le \frac{5}{7n^2} + \cdots + \frac{5}{7n^2+n} \le \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{\frac{5n+5}{7n^2}}$$

Neste caso o limite pretendido é 0. O número de termos é **n-0+1**.

♠ Sucessões definidas por recorrência

As sucessões são definidas por recorrência quando é dado o primeiro termo e uma forma de calcular o termo seguinte. As perguntas que envolvem estas sucessões estão, quase sempre, separadas em 3 etapas: na primeira é pedido para provar uma limitação através da indução matemática; em seguida é pedido a justificação de monotonia (crescente ou decrescente); finalmente a convergência e o limite.

Última alteração: Terça, 22 Outubro 2013, 19:16

Na maioria das séries numéricas não é possível calcular a sua soma. No entanto pode-se ver a sua natureza (se é convergente ou divergente).

♠ Primeiro Critério

A primeira coisa do mundo a fazer numa série é analisar o seu termo geral.

- Se o termo geral não tender para zero então a série é divergente;
- Se o termo geral tender para zero nada se pode concluir (a série pode convergir ou divergir).

Os seguintes exemplos são séries divergentes. Basta analisar o termo geral e verificar que o limite não é 0!!!!

$$\sum(-1)^n\frac{3n^2+4n}{n^2-9};\ \sum\left(\frac{-1+5n}{5n+4}\right)^{2n};\ \sum\sqrt{\frac{n+4}{2n-20}};\ \sum 0{,}3$$

As séries separam-se em Séries de termos não negativos ou séries alternadas. Para as primeiras existem, pelo menos, os seguintes 3 critérios.

♠ **Critério de Comparação**

Este critério compara uma série cujo temo geral seja a divisão de polinómios ou raízes. De uma forma geral se a diferença entre o grau em baixo pelo grau em cima for maior que 1, a série irá convergir, caso a diferença dê menor ou igual a 1 a série irá divergir. A comparação referida assenta nas **Séries de Dirichlet**.

$$\mathit{Série\ de\ Dirichlet}\sum\frac{1}{n^\alpha}\ \begin{cases}\alpha\le 1 & \text{diverge}\\ \alpha>1 & \text{converge}\end{cases}$$

Exemplo:

$$\sum\frac{n+7}{\sqrt[3]{n^5+4n-2}}$$

Neste caso o grau em baixo é 5/3 e em cima é 1. Baixo - cima dá 2/3. Assim vamos calcular o limite da divisão do nosso termo geral por um sobre n elevado á diferença de graus (os 2/3). Com esta simples conta já sei que a série vai divergir.

$$\lim\frac{\frac{n+7}{\sqrt[3]{n^5+4n-2}}}{\frac{1}{n^{2/3}}}=\lim\frac{n\times n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^5}}=\lim\frac{n^{5/3}}{n^{5/3}}=1>0\ \text{e finito}$$

Por comparação as séries

$$\sum\frac{n+7}{\sqrt[3]{n^5+4n-2}}$$

e

$$\sum\frac{1}{n^{2/3}}$$

têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha \le 1$ é divergente. Assim a nossa série também é divergente.

♠ **Critério D'Alembert (ou da razão)** Usar quando existem fatoriais ou algo elevado a n (sem estar tudo elevado a n)

$$\sum u_n \rightarrow \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \begin{cases} > 1 & \text{diverge} \\ < 1 & \text{converge} \end{cases}$$

Observação: O critério é inconclusivo se o limite der 1. Em alguns casos é necessário 'ajeitar' um nepper.

Exemplo:

$$\sum \frac{5^n n!}{n^n}$$

$$\lim \frac{\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{5^n n!}{n^n}} = \lim \frac{n^n 5^n 5(n+1)n!}{5^n n!\,(n+1)^n (n+1)} = 5 \times \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \cdots = 5 \times e^{-1} = \frac{5}{e} > 1$$

Assim pelo Critério D'Alembert a série é divergente.

♠ **Critério de Cauchy (ou da raiz)** Usar quando está tudo elevado a n.

$$\sum u_n \rightarrow \operatorname{limsup} \sqrt[n]{u_n} \quad \begin{cases} > 1 & \text{diverge} \\ < 1 & \text{converge} \end{cases}$$

Observação: O critério é inconclusivo se o limite der 1. Trata-se do limite superior.

Exemplo:

$$\sum \ln^n(2 + (-1)^n) = \sum (\ln(2 + (-1)^n))^n$$

$$\operatorname{limsup} \sqrt[n]{(\ln(2 + (-1)^n))^n} = \operatorname{limsup} \ln(2 + (-1)^n) = \ln 3 > 1$$

Assim pelo Critério de Cauchy a série é divergente.

Por fim existem séries com termos positivos e negativos. Observa que as séries de termos negativos são estudadas como as séries de termos positivos pois basta colocar um sinal de menos antes.

As séries de termos alternados têm quase sempre o fator $(-1)^n$ ou $\cos(n\pi)$ que é a mesma coisa.

♠ **Séries Alternadas**

Estas séries podem ser: **Absolutamente Convergentes**, **Simplesmente Convergentes** ou **Divergentes**.

Observação: Como o supra-sumo é convergir absolutamente, é melhor começar a atacar estas séries pela convergência absoluta. Se converge absolutamente também irá convergir simplesmente.

Exemplo:

$$\sum (-1)^n \frac{4n}{\sqrt{3n^3+9}}$$

1. Ver a convergência absoluta (trata-se de verificar a série do módulo)

$$\sum \left|(-1)^n \frac{4n}{\sqrt{3n^3+9}}\right| = \sum \frac{4n}{\sqrt{3n^3+9}}$$

Esta série irá divergir pois a diferença entre o grau em baixo (3/2) e o grau em cima (1) é 1/2. Comparando a série com a série de Dirichlet irá divergir (ver exemplo em cima).

Desta forma **a série não converge absolutamente**.

2. Ver a convergência simples

Uma série alternada

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge (neste caso simplesmente) se: o termo geral a_n tender para 0 e for decrescente. Este é o **Critério de Leibniz**.

No nosso caso o termo geral (á parte do $(-1)^n$) tende para zero e é uma sucessão decrescente. Assim pelo critério de Leibniz a série converge simplesmente.

Exemplo:

$$\sum (-1)^n \frac{4}{\sqrt{3n^3+9}}$$

Esta série irá convergir absolutamente pois se tirarmos o $(-1)^n$ ficará um termo geral onde a diferença de graus entre baixo e cim será 3/2 > 1. Por comparação converge.

Não é necessário verificar a convergência simples pois o 'topo' é convergir absolutamente.

Observação: De referir que existem séries alternadas cuja análise do termo geral resultará uma série divergente. Em cima existe um exemplo assim. A receita aqui apresentada será assim desnecessária.

Última alteração: Quinta, 31 Outubro 2013, 15:06