Departamento de Matemática

Introdução à Probabilidade e Estatística
2015/2016 - 2º Semestre

Ficha Nº 7: Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses

Resolução

1. O departamento de recursos humanos da empresa que pretende recrutar funcionários para uma nova área de negócio,...

   (a) $H_0 : \mu_X \leq 115$ *vs* $H_1 : \mu_X > 115$.
   Podemos admitir a normalidade da classificação no teste dos homens através da interpretação do *p-value* do teste de Shapiro-Wilk ($n < 50$): *p-value*=0,425, logo não rejeitamos a hipótese $H_0 : X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ para 1% (5% ou 10%) de significância, uma vez que $0,01\,(0,05 \text{ ou } 0,1) \ngeq 0,425$.
   $t_{obs} = -4,314 \ngtr t_{14,0.99} = 2,624$, logo não rejeitamos a hipótese nula para $\alpha = 1\%$. Não existe evidência estatística que nos permita concluir que os candidatos do sexo masculino verificam o pressuposto.

   (b) *p-value* $\simeq$ 0,9995.

   (c) $]136,002; 489,814[$

   (d) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ *vs* $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$
   Para além da normalidade da classificação no teste dos homens, podemos admitir a normalidade da classificação no teste das mulheres através da interpretação do *p-value* do teste de Shapiro-Wilk ($n < 50$): *p-value*=0,505, uma vez que não rejeitamos a hipótese $H_0 : Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ para 1% (5% ou 10%) de significância, uma vez que $0,01\,(0,05 \text{ ou } 0,1) \ngeq 0,505$.
   Através da interpretação do teste de Levene ($H_0 : \sigma^2_X = \sigma^2_Y$ *vs* $H_0 : \sigma^2_X \neq \sigma^2_Y$), concluímos que não rejeitamos H_0, uma vez que *p-value*=0,390 (> qualquer um dos níveis de significância usuais). Logo podemos assumir a igualdade das variâncias.
   Como $|t_{obs}| = |\frac{-3,8}{6,175}| = 0,615 \ngtr t_{28,0.995} = 2,763$, não rejeitamos $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ para $\alpha = 1\%$. Não existe evidência estatística que permita afirmar que as classificações médias no teste diferem significativamente entre sexos.

(Uma forma alternativa que nos permitia concluir o mesmo seria através do intervalo a 90% de confiança para a diferença de médias:
limite superior = 6,705 $\Rightarrow \bar{x} - \bar{y} + \varepsilon = 6,705 \Rightarrow \varepsilon = 6,705 - (-3,8) = 10,505$.
Logo
limite inferior = -3,8 - 10,505 = -14,305.
Como $0 \in IC_{90\%}(\mu_X - \mu_Y) =]-14,305; 6,705[$, também irá pertencer ao $IC_{99\%}(\mu_X - \mu_Y)$, pelo que se chegaria à mesma conclusão a 1% de significância).

2. Um fabricante da indústria cerâmica pretende determinar se duas novas ligas...

   (a) Podemos admitir a normalidade da temperatura máxima de resistência ao calor da liga *premium* nacional e da liga *standard*, uma vez que para o teste de Shapiro-Wilk ($n < 50$): *p-value*$_{premium\ nacional}$=0,129 e *p-value*$_{standard}$=0,825, logo não rejeitamos as hipóteses $H_0 : X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ e $H_0 : X_3 \sim \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3)$ para 1% (5% ou 10%) de significância, uma vez que qualquer um dos $\alpha's$ usuais $\ngeq 0,129$ ou $0,825$.
   No caso da liga *premium* importada, já não podemos admitir a normalidade uma vez que *p-value*$_{premium\ importada} < 0,001$, o que conduz à rejeição de $H_0 : X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, pois qualquer um dos $\alpha's$ usuais $\geq$ p-value$_{premium\ importada}$.

   (b) $H_0 : \mu_2 = 1535$ *vs* $H_1 : \mu_2 \neq 1535$.
   $t_{obs} = 3,869 > t_{19,0.95} = 1,729$, logo rejeitamos a hipótese nula para $\alpha = 10\%$.
   Existe evidência estatística de que a temperatura média de resistência ao calor da liga *premium* nacional é significativamente diferente de 1535.

   (c) *p-value* $\simeq$ 0,001.

   (d) (**Atenção:** Para a resolução desta alínea é necessário o valor da variância amostral da temperatura de resistência ao calor da liga *standard* que era apresentada neste exame numa primeira tabela que se pode encontrar no exercício 3 da Ficha n.º 1: $s_3^2 = 10,09^2$). Podemos dizer que $\sigma_3^2 \in]71,12; 166,04[$ com 80% de confiança.

   (e) Através da interpretação do teste de Levene ($H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_3^2$ *vs* $H_0 : \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$), concluímos que não rejeitamos H_0, uma vez que *p-value*=0,2 (> qualquer um dos níveis de significância usuais). Logo podemos assumir a igualdade das variâncias.
   Sabe-se relativamente ao intervalo a 99% de confiança para a diferença de médias:
   limite superior = 33,04816 $\Rightarrow \bar{x_2} - \bar{x_3} + \varepsilon = 33,04816 \Rightarrow \varepsilon = 33,04816 - 25,42954 = 7,61862$. Logo
   limite inferior = 25,42954 - 7,61862 = 17,81092.
   Como 0 não está contido no $IC_{99\%}(\mu_2 - \mu_3) =]17,81092; 33,04816[$, podemos concluir que a temperatura média de resistência ao calor da liga premium nacional é significativamente diferente da temperatura média de resistência ao calor da liga standard, para 1% de significância.

3. Foram retiradas 25 peças da produção diária de uma máquina...

   (a) $]4.805; 5.595[$; $]4.730; 5.670[$; $]4.582; 5.818[$

(b) $]4.789; 5.611[$; $]4.705; 5.695[$; $]4.529; 5.871[$

4. Pretende-se analisar os salários, por sexo, do pessoal...

   (a) $]2571.86; 2640.98[$

   (b) A = 469; B = 1098; C = -225.69960

5. Registou-se o comprimento, em metros, dos saltos de 10 atletas portugueses do sexo masculino em provas de triplo salto em pista coberta...

   (a) $1 - \alpha = 0.9652$.

   (b) $]0.0244; 0.3315[$.

   (c) Dado que $t = -1.2511$, logo menor do que 1.383, não se rejeita a hipótese nula para uma significância de 10%.

6. O Serviço Nacional de Saúde (SNS) afirma que a proporção de asmáticos numa certa população masculina é inferior a 10%.

   (a) $H_0 : p \leq 0,1 \quad vs \quad H_1 : p > 0,1$. Como $z_{Obs} = 2,593$ existe evidência suficiente nos resultados para afirmar (ao nível de significância de 5%) que a proporção de asmáticos numa certa população masculina é superior a 10%. Pelo que o médico deve avisar o SNS de que a sua estimativa não está correcta.

   (b) *p-value* =0,0048

   (c) Potência de teste = 0,9515

   (d) IC a 95% para a proporção : $]0,1048; 0,2052[$.

7. Foram efectuados estudos em Lisboa com o objectivo de determinar a concentração de monóxido de carbono (CO) perto de vias rápidas.

   (a) Como $\chi^2_{obs} = 20.9$ não se rejeita H_0 para $\alpha = 1\%$.

   (b) $]98.473; 102.527[$.

   (c) $n \geq 1174$.

8. Certa linha de fabrico está programada de modo a produzir uma percentagem de artigos defeituosos não superior a 3%.

   (a) $H_0 : p \leq 0,03 \quad vs \quad H_1 : p > 0,03$

   $$z_{Obs} = \sqrt{50}\frac{0,04 - 0,03}{\sqrt{0,03 * (1 - 0,03)}} = 0,4145$$

   Não se rejeita a hipótese nula, considerando um nível de significância de 5%. Ou seja, não existe evidência estatística suficiente para afirmar que o processo se encontrava fora de controlo, pelo que o encarregado agiu mal.

(b) $p - value = P(Z > 0,4145) = 0,3409$.

(c) $P(\text{Rejeitar} H_0 | H_0 \text{falsa}) = P(\overline{P} > 0,0697 | p_0 = 0,035) = 0,0901$.

$P(\text{Rejeitar} H_0 | H_0 \text{falsa}) = P(\overline{P} > 0,0697 | p_0 = 0,1) = 0,7611$.

9. A poluição atmosférica é medida em dois locais distintos, um no centro de uma pequena cidade (Y) e outro numa zona rural, 15Km mais a sul, (X)...

   (a) $] - 0.4992 - 2.206 * 0.51658; -0.4992 + 2.206 * 0.51658[=] - 1.6389; 0.64027[$. Existe evidência estatística suficiente para afirmar (com uma significância de 3%) que, em média, a poluição atmosférica é igual nos dois locais.

   (b) $]1,7879; 6.0861[$

10. Dois laboratórios (A e B) avaliam a quantidade de cloro de amostras de água recolhidas à mesma hora de cada dia.

    (a) Pelo 1º output não se rejeita (para um nível se significância de 5%) a hipótese nula da normalidade das população, quer para o Laboratório A (p-value=0.176) quer para o B (p-value=0.147). De igual modo, não se rejeita a hipótese nula de igualdade de variância pelo teste de Levene (p-value=0.952).

    $] - 0,5482; 0,4966[$.

    (b) $H_0 : \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

    Como p-value=0.916 não se rejeita H_0 para qualquer α=1%.

11. Um investigador pretende estudar a capacidade de concentração dos alunos do ensino universitário antes e depois do almoço.

    (a) Como o p-value é igual 0.127 não se rejeita a hipótese de normalidade da diferença dos dados.
    $] - 0,7524; 3,5524[$

    (b) Como $0 \in] - 0,7524; 3,5524[$ não se rejeita (para uma significância de 2%) a hipótese nula. Ou seja, não existe evidência suficiente nos resultados para afirmar que existe diferença entre a capacidade média de concentração antes e depois do almoço.

    (c) Como $\chi^2_{Obs} = 14,092$ não se rejeita (para uma significância de 5%) a hipótese nula. Ou seja, não existe evidência suficiente nos resultados para afirmar que a variabilidade da capacidade de concentração antes do almoço é diferente de 10.

    (d) *p-value*=0,238

    (e) Como $t_{Obs} = \frac{\overline{x}-k}{3,957}\sqrt{10}$ então rejeita-se H_0 se $\frac{\overline{x}-k}{3,957}\sqrt{10} > 1,833$. Donde se retira que $\overline{x} > k + 1,833\frac{3,957}{\sqrt{10}}$. Então, $k + 1,833\frac{3,957}{\sqrt{10}} = 56 \Rightarrow k = 53,706$.

12. A uma eleição concorrem três candidatos A, B e C.

    (a) $]0,4130;0,5730[$.
    (b) $z_{obs} = -0,816 > -1,645$ não se rejeita H_0, com uma confiança de 95%.
    (c) *p-value*=0,2061.
    (d) Se $n_i = 23$.

14. Suponha que o teor de nicotina de duas marcas de cigarros foi analisado...

    (a) Como $z_{obs} > 2,326$ rejeita-se H_0, pelo que existe forte evidência estatística para afirmar, com uma confiança de 99%, que o teor médio de nicotina da marca A é superior ao da marca B.
    (b) *p-value*$\simeq 0$
    (c) Potência do teste=$P(\overline{X} > 2,5713|\mu_1 = 2,1) + P(\overline{X} < 2,4287|\mu_1 = 2,1) \simeq 1$, para uma confiança de 95%.

15. Para comparar a resistência ao esforço físico de duas populações, A e B...

    (a) $\overline{y} = 15,882$ e $s_Y = 3,343$.
    (b) $]14,0557;17,7083[$.
    (c) $1-\alpha = 0,98$.

16. Com o objectivo de estudar algumas características dos jogadores de futebol que participam no Campeonato Europeu de Futebol de 2008...

    (a) Pelo 1º output não se rejeita (para um nível se significância de 5%) a hipótese nula da normalidade das população, quer para Altura dos jogadores Checos (p-value=0.574) quer para a Altura dos jogadores Gregos (p-value=0.376). De igual modo, não se rejeita a hipótese nula de igualdade de variância pelo teste de Levene (p-value=0.317).

        $]-7.3374;3.3374[$.
    (b) 5.3374.
    (c) Não se rejeita (para uma significância de 5%) a hipótese nula. Ou seja, não existe evidência suficiente nos resultados para afirmar que existe diferença entre as alturas médias dos jogadores.
    (d) Não existe evidência suficiente nos resultados para (com $\alpha = 5\%$) afirmar que a altura média dos jogadores checos é superior a 175cm.
    (e) *p-value*=0.0375. Conclusão?
    (f) $\overline{x} = 179.34$.
    (g) Não existe evidência suficiente nos resultados para afirmar (com $\alpha = 1\%$) que a variância das alturas dos jogadores checos é superior à variância das alturas dos jogadores gregos.

17. De 72 jogadores inquiridos, 36 jogam em equipas estrangeiras, 34 em equipas do país de origem e 2 não têm equipa.

    A notícia é verdadeira. Existe evidência estatística que permite concordar com a notícia, ao nível de significância de 5%.

18. Foi levado a cabo um estudo para averiguar se a ausência às aulas durante o semestre de Inverno é maior num centro urbano do norte ou do sul.

    (a)]0.0114; 0.1602[
    (b) Rejeitamos H_0, ao nível de significância de 1%. Existe uma forte evidência estatística de que no Inverno se falta mais às aulas na região do Norte.
    (c) 0.0012
    (d) 0.97

19. Tome-se o seguinte exemplo, relativo a dois tipos de geradores (I e II)...

    (a) Não existe evidência estatística suficiente (para um $\alpha = 1\%$) para afirmar que o valor esperado da produção de energia eléctrica é diferente nos dois geradores.
    (b) *p-value*$\simeq 1$. Conclusão?
    (c) Não existe evidência estatística suficiente (para um $\alpha = 5\%$) afirma que o desvio padrão da produção de energia eléctrica através do gerador II é diferente de 4KW/h.
    (d) $]0.5077; 3.5989[$.

(Dulce Gomes e Patrícia Filipe, IPE 2014/2015)