Análise Matemática II

2017/18

EXAME 7/06/2018

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ 3x^2+4y^2 & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Calcule, utilizando a definição, a derivada de f no ponto $(-3,1)$, segundo o vector $v = (1,2)$, ou seja,

$$f'_{(1,2)}(-3,1).$$

2. Seja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$u(x,y) = y^2 - x^2 \text{ e } v(x,y) = x^2 - y^3.$$

Para a função composta $G(u(x,y), v(x,y))$ calcule

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}.$$

3. Considere a função vectorial $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(x,y,z) = (5x+y+2z, y+2z, az-y), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

a) Determine para que valores de a a função h é invertível.

b) Para um valor conveniente de a, calcular a função inversa de h, h^{-1}.
(Se não repondeu à alínea anterior use $a = -1$).

4. Estude quanto aos extremos relativos a função

$$h(z,w) = -z^3 + z^2 w - 4w + 2z + 7.$$

5. Um depósito prismático de base quadrangular tem de volume 125 m^3. Determine as suas dimensões de modo que a área total das suas faces seja mínima.

Grupo II

6. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}, z^2)$.

a) Verifique que a função $V(x,y,z) = \frac{1}{(x^2-y^2)^2} + \frac{z^3}{3}$ é uma função potencial para F.

b) F é um campo gradiente? Justifique a resposta.

c) Calcule o integral de linha $\int_C F d\gamma$ onde C é a curva descrita pela função $g(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t)$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

7. Calcule o integral de linha, $\int_C (2x+y)dx - (x-4xy)dy$, usando o teorema de Green, sendo C a circunferência $x^2+y^2=1$, percorrida (uma vez) no sentido directo.

8. Considere o conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\right\}$$

.

Calcule o integral triplo $\iiint_A z\ e^{x^2+y^2} dx\ dy\ dz$.

9. Considere a função vectorial $F(x,y,z) = (x,\ y,\ z^2)$ e seja Γ a fronteira do cilindro $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\right\}$. Sendo n o vector normal unitário orientado para o exterior de M, calcule $\iint_\Gamma < F, n > dS$, usando o teorema da divergência de Gauss.

10. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial, definido por

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

de classe C^1. Se F é um campo conservativo, mostre que $\operatorname{rot} F = 0$.

Nome:
N: