Função homogénea

f é uma função homogénea de grau $\alpha \in \mathbb{R}$ se verificar a igualdade

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots x_n)$$

Igualdade de Euler

Uma função é homogénea de grau α se e só se

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f(x_1, \ldots, x_n)$$

Operadores diferenciáveis $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1) $m = 1$ $\quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

2) divergência ao escalar em $\mathbb{R}$ $\quad \text{div } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}$

3) rotacional de f

$$\text{rot } f = \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \text{ ou }$$

vetor

$$\text{rot } f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

4) matriz hessiana

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

5) Laplaciano ao traço da matriz hessiana

$$\text{lap } f = \Delta f = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_n^2}$$

Superfície

Chamamos superfície ao conjunto caracterizado

$$\varphi(x,y,z) = 0$$

Plano tangente

$$\left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$$

Reta normal

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

Função inversa

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\det(J f) \neq 0$

$\to (f^{-1})' = (f')^{-1}$

calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$

f; x, y; $r\ \theta$, $r\ \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Diferenciabilidade

Se todas as derivadas parciais de f existirem numa vizinhança de a e forem contínuas em a, então f é diferenciável no ponto a.

① Não definida por ramos, basta calcular as derivadas parciais e, nos pontos onde estas existirem e forem contínuas, a função f será diferenciável.

② Definida por ramos, sendo $a = (a_1, a_2)$ o ponto onde a função muda de ramo, f é diferenciável em $a = (a_1, a_2)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \times (x - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \times (y - a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0$$

Matriz jacobiana

De uma função vetorial $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Jacobiano = Determinante da matriz

Divergência (em $\mathbb{R}^3$)

$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

É o traço da matriz jacobiana

$$|H - I\lambda| = 0$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} 10-\lambda & \cdots & \\ \vdots & 5-\lambda & \cdots \\ \cdot & & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Derivada da função implícita

• $f(x,y) = 0$ ($\mathbb{R}^2$) definida

Dizemos que φ é implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$, $\forall x \in I$ se tivermos

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

se $\frac{\partial y}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}}$

se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = y'(x)$

- Quando perguntam para mostrar que a função é implícita numa vizinhança (ponto)

① Provar que as derivadas são classe C^1 ou contínuas

② Provar que f no ponto é igual a 0

③ Provar que $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto é $\neq 0$

④ se pedir expressar em termos de x e y

• $\mathbb{R}^3$

A equação $F(x,y,z)$ define implicitamente z como função de x e y, isto é $z = f(x,y)$ se:

→ f for de classe C^1 ou contínuas

→ $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$

Em caso afirmativo podemos calcular

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Derivada da função inversa

A função $f(x,y) = (f_1, f_2) = (u,v)$ é localmente invertível numa vizinhança de (x_0, y_0) se:

→ f for de classe C^1

→ O jacobiano de f em (x_0, y_0) for $\neq 0$

Em caso afirmativo podemos calcular a matriz jacobiana da função inversa

$$Df^{-1} = \left[Df(x_0,y_0)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Pontos críticos / pontos de estacionaridade

• Para $\mathbb{R}^2$ (para cada ponto crítico)

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c) \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c) \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c)$$

1) se $AC - B^2 > 0$

(i) $A > 0$ mínimo

(ii) $A < 0$ máximo

2) se $AC - B^2 < 0$ ponto de sela

• Para $\mathbb{R}^3$

Calcular a matriz hessiana em cada ponto crítico e os menores principais

1) se $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_n > 0$ mínimo

2) se $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0, \ldots$ máximo

3) se $Hf(c)$ tiver valores próprios positivos e negativos é um ponto sela

O que fazer

① Calcular as derivadas

② Descobrir os pontos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

③ Fazer matriz hessiana

Diferencial de 2ª ordem

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} v_2 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} v_2 v_2$$

Derivadas

$\text{sen } x = \cos x$ $\qquad (e^t)' = e^t$

$\cos x = -\text{sen } x$

$(\log(t))' = \frac{t'}{t}$

$(f(x)^\alpha)' = \alpha f'(x) \times f(x)^{\alpha - 1}$

$(\text{arctg}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$

—//—

→ Det diferencial f no ponto segundo um vetor

$(df)_v(\text{ponto}) = J_{\text{ponto}} \times \text{vetor} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

→ se são diferenciáveis em (0,0) usar $f(0+h) - f(0) = \alpha_1 h_1 + \ldots \alpha_n h_n + \varepsilon(\|h\|)$ e conceito de limite

Fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\log 1 = 0$

$\text{sen } 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

$\tan 0 = 0$

Estudar continuidade → Função ramos (i) $(x,y) \neq (0,0)$ (é função contínua porque …) (ii) $(x,y) = (0,0)$ → Provar que o limite $(x,y) \to (0,0)$ é igual a $f(0,0)$

—//—

Quando pedem as derivadas parciais → que as funções estão em ramos podemos usar as regras das derivadas

—//—

No fazer limites e obtivermos $0/0$ → regra de Cauchy (ou seja fazer as derivadas)

Norma ($\| \ \|$)

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

Tipos de Norma

$\|x\|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$\|x\|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$

$\Leftrightarrow \|x\| = \sqrt{x|x}$

Produto interno

$x|y \Leftrightarrow x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$|x|y| \leq \|x\| . \|y\|$

Noções topológicas

1) Bola (aberta) de centro A e raio r

$B_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}$

2) V é vizinhança do ponto a se:

$B_r(a) \subset V$

3) a é um ponto interior de S quando existe $B_r(a) \subset S$

4) $Int(S) = \{$pontos interiores de S$\}$

5) a é ponto exterior de S se existir uma bola centrada em a contida no complementar de S ($E \setminus S$)

se $S =]3,7[\rightarrow$ complementar $\mathbb{R} \setminus S =]-\infty, 3] \cup [7, +\infty[$

6) $Ext(S) = \{$pontos exteriores de S$\}$

$Ext(S) =]-\infty, 3[\cup]7, +\infty[$

7) a é ponto fronteira de S quando todas as bolas centradas em a intersetam S e o seu complementar.

8) $fr(S) = \{$pontos fronteira$\}$

$fr(S) = \{3, 7\}$ espaço

9) $Int(S) \cup fr(S) \cup Ext(S) = E$

10) $Int(S) \cap Ext(S) = \emptyset$

11) $Ext(S) \cap fr(S) = \emptyset$

12) a é ponto isolado se

$S =]-\infty, 5[\cup \{7\} \cup]9, +\infty[$

13) a é ponto de acumulação de S se existir uma sucessão de pontos de S que convergem para a

14) Derivado de S, S', é o conjunto dos pontos de acumulação

15) Aderência ou fecho de S

$ad(S) = \overline{S} = fr(S) \cup S$

NOTA

S é aberto quando $S = Int(S)$

S é fechado quando $S = ad(S)$

S é denso quando $ad(S) = E$

Limite

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon, \ x \in D) \Rightarrow \|f(x) - b\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$

Continuidade

- f é contínua em a quando:

$\forall (x_n) \subset D, \ x_n \rightarrow a$, $n \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$, $n \rightarrow +\infty$

- sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$h : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

se f, g, h são contínuas em a, $a \in D$ então:

- $(f+g)$ é contínua em a
- $(h . f)$ é contínua em a
- $\frac{f}{h}$ é contínua em a

- se g é contínua em a e se f é contínua em $b = g(a)$ então $(f \circ g)$ é contínua

$a \rightarrow g(a) = b$

$f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$b \rightarrow f(b)$

Função harmónica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

Teorema de Schwarz

Seja $f \in C^2(D)$, D aberto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$(s,t) \rightarrow (x,y,z) = (\dots) \longrightarrow g(x,y,z)$

$(s,t) \longrightarrow \dots u(s,t)$

calcular $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial s}$ sendo

$u(s,t) = g(x,y,z)$

Teorema

g é diferenciável em a e f é diferenciável em g(a)

$D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} g(D) \subset E \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$

$a \longrightarrow g(a) = b \longrightarrow f(b) = f(g(a))$

então $(f \circ g)$ é diferenciável em a e

$(f \circ g)'(a) = f' g(a) \times g'(a)$

$f \circ g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Em termos matriciais:

$J(f \circ g) = Jf_{(g(a))} \times Jg(a)$

Derivadas parciais

- Relativamente a x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

- Relativamente a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Limites Notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Derivada de f no ponto a segundo um vetor v (Derivada direcional)

$$f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

$v = (v_1, \dots, v_n)$

Diferenciável

f é diferenciável em a quando existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que para vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ se verificar a igualdade

$f(a+h) - f(a) = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n + \varepsilon(\|h\|)$

$\lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$ $\quad \|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$

→ f é de classe C^1 quando as derivadas parciais (para 1) são contínuas

→ f é de classe $C^1 \Rightarrow$ f é diferenciável $\Rightarrow$ f é contínua

(o recíproco não é válido)

Diferencial

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$

A soma $\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$ chama-se diferencial de f no ponto a segundo o vetor h ($h = (h_1, \dots, h_n)$)

$$(df)_h(a) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), h \right\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n$$

consideremos $a = (1,1)$

Exemplo $f(1.02, 0.96)$

para obter h:

$1.02 - 1 = 0.02$

$0.96 - 1 = -0.04$

$h = (0.02, -0.04)$

NOTA

$\sqrt{x^2} = |x|$

Operador gradiente

$$\text{grad} f \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Definição

Seja $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f_1}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

$\vdots$

$\frac{\partial f_n}{\partial v}(a) = \dots$

$\langle \text{grad} f, v \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), (v_1, \dots, v_n) \right\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana

Integrais de superfície

• Quando o campo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é escalar

$$\iint_S f = \iint_D f(r(u,v)) \cdot \left\| \frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} \right\| du dv$$

$$\frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\|(u_1, u_2, u_3)\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

• Quando o campo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é vetorial

$$\text{fluxo} = \iint_S f = \iint_D f(r(u,v)) \cdot \frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} \, du dv$$

onde a superfície S é parametrizada por $r(u,v)$ e os parâmetros u e v estão na região D.

• Quando a superfície é dada na forma $z = g(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_D f(x,y,g(x,y)) \times \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2} \, dx dy$$

$$\text{fluxo} = \iint_S F(x,y,z) = \iint_D F(x,y,g(x,y)) \cdot \left(-\frac{dg}{dx}, -\frac{dg}{dy}, 1\right) dx dy$$

Área de uma superfície S

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \left\| \frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} \right\| du dv$$

ou se a superfície é dada por $z = g(x,y)$

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2} \, dx dy$$

Teorema de Stokes

(faz a ligação entre um integral de superfície e um curvilíneo)

$$\int_C f d\alpha = \iint_{g(D)} \langle \text{rot} f, n \rangle dS$$

ou $$\iint_S \text{rot}(F) = \oint_C f d\alpha$$

$$\text{rot} f = \frac{d}{dy} f_3 \vec{e_1} + \frac{d}{dz} f_1 \vec{e_2} + \frac{d}{dx} f_2 \vec{e_3} - \frac{d}{dy} f_1 \vec{e_3} - \frac{d}{dz} f_2 \vec{e_1} - \frac{d}{dx} f_3 \vec{e_2}$$

Teorema da Divergência (Gauss)

$$\int_{g(D)} \langle f, n \rangle dS = \iiint_V (\text{div} F) \, dx dy dz$$

$$\text{div}(F) = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} + \frac{df_3}{dz}$$

Grupo I

1. $f(x,y) = (-y, x+y)$
C o arco da parábola $y = x^2$
une os pontos $(0,0)$ e $(2,4)$

Parametrização

$x(t) = t$
$y(t) = t^2$ $\quad 0 < t < 2$

$$\int_0^2 \langle f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \rangle dt$$

2. fio homogéneo
(a) densidade constante
forma circular
$r = 2$
comprimento $= 12\pi$
massa?

$$M = \int_C d(x,y) \, dA$$ (densidade)

$$\int_0^{2\pi} x \cdot 12\pi \, d(t)$$

(b) Prove que a ordenada do centróide é nula

$$y_0 = \frac{1}{M} \int y \, d(x,y) \, dA$$

coordenadas polares
$y = \rho \operatorname{sen} \theta$
$\rho = \text{raio} = 2$
$y = 2 \operatorname{sen} \theta$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int 2 \operatorname{sen} \theta \, x \, 12\pi \, dt$$

3. função vetorial
$p(x,y,z) = (p_1(x,y,z), p_2(x,y,z), \ldots)$
(a) condição para que seja gradiente

$$\frac{dp_1}{dy} = \frac{dp_2}{dx}, \quad \frac{dp_1}{dz} = \frac{dp_3}{dx}, \quad \frac{dp_2}{dz} = \frac{dp_3}{dy}$$

(b) Det função potencial
1.° Det. se é grad
2.° fazer primitivas
$\int p_1 \quad \int p_2 \quad \int p_3$
3.° somar primitivas
(os elementos que se repetirem só se escreve uma vez)
4.° fórmula

$$\varphi(x,y,z) = \_ + \_ + \_ + C$$

4. vetorial
$\gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 3\theta)$
densidade $d(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
momento de inércia $\to z$?

→ Parametrização
$x(t) = 2\cos t \quad 0 \le t < 2\pi$
$y(t) = 2\operatorname{sen} t$
(...)

$$I_z = \int_0^{2\pi} \left([x(t)]^2 + [y(t)]^2 \right) \cdot d(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

(...)

5.
(a)

$$\int_0^a \int_0^{\pi^{4/3}} x^{1/3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx dy$$

$$\frac{3}{4} \iint \frac{4}{3} x^{1/3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx dy$$

$$= \frac{3}{4} \int \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x^{4/3}\right) \right]_0^{\pi^{4/3}} dy \ldots$$

(b)
coordenadas polares $\sqrt{x^2 + y^2} \le b$
$\rho \in [0, b]$
$\theta \in [0, 2\pi]$
substituir e fazer

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{3 + x^2 + y^2}} \, dx dy$$

7. Volume sólido limitado por $y = 4 - x^2$
$y = x^2 + 2$ e pelos planos
$z = -1$ e $z = 2$

$x^2 + 2 < y < 4 - x^2$
$-1 < z < 2$

$4 - x^2 = x^2$
$(\ldots) \Leftrightarrow x = \pm 1$

$-1 < x < 1$

$$\iiint 1 dV = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{2} \int_{x^2+2}^{4-x^2} 1 \, dy dz dx$$

8. Área da superfície definida por $z = x\pi y$
$x^2 + y^2 \le 4$

$z = g(x,y)$
$\hookrightarrow p(x, y, g(x,y))$

$\frac{dp}{dx} = (1, 0, y\pi)$

$\frac{dp}{dy} = (0, 1, x\pi)$

$$\frac{dp}{dx} \times \frac{dp}{dy} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, \ldots$$

$(\ldots) = (-y\pi, -x\pi, 1)$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(-y\pi)^2 + (-x\pi)^2 + 1^2} \, dx dy$$

Trocar coordenadas polares

(...)

Métodos de multiplicadores de Lagrange

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 p_1(x,y,z) + \lambda_2 p_2(x,y,z)$

1.° $\begin{cases} \frac{dL}{dx} = 0 \\ \ldots \\ \frac{dL}{d\lambda_1} = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \frac{df}{dx} + \lambda_1 \frac{dp_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dp_2}{dx} = 0 \\ \ldots \\ p_1(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & J_p \\ J_p^T & H_L \end{bmatrix} \quad H_L \begin{bmatrix} \frac{d^2L}{dx^2} & \ldots \\ \frac{d^2L}{dzdx} & \ldots \end{bmatrix}$$

* $\Delta_{2n+1}, \Delta_{2n+2}, \ldots \Delta_{n+m}$
n – restrições
n – variáveis
(1) se $(-1)^m \Delta_{2n+1}$, $(-1)^m \Delta_{2n+2} \ldots (-1)^m \Delta_{n+m}$ (...) > 0 ponto mín
(2) se $(-1)^n \Delta_{2n+1} < 0$ e nos outros alternados → máx

Exer.: Seja C o seg. de reta que une os pontos $(2,1,3)$ e $(-4,6,8)$. Det $\int_C f d\alpha$ onde $f(x,y,z) = (x, -y, xz)$

Parametrização
$\alpha(t) = (1-t)(2,1,3) + t(-4,6,8)$
$= (2 - 6t, 1 - 5t, 3 + 5t)$

$\alpha'(t) = (-6, -5, 5)$
$f(\alpha(t)) = \ldots (2-6t, -1-5t, 2+4t-30t^2)$

$$\int_0^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt \quad (\ldots)$$
produto interno

Exer.: Cal. integral de linha em respeito ao comp. de arco $\int_C (x+y) ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$
$0 \le t \le 1$
$\alpha_1(t) = (1-t)(0,0) + t(1,0) = (t, 0)$
$\alpha_2(t) = (1-t)(1,0) + t(0,1) =$
$\alpha_3(t) = (1-t)(0,1) + t(0,0) =$
(...)

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \int_{C_3} f ds$$

$$= \int_0^1 f(\alpha_1(t)) \cdot \|\alpha_1'(t)\| dt + (\ldots)$$

Aparte:

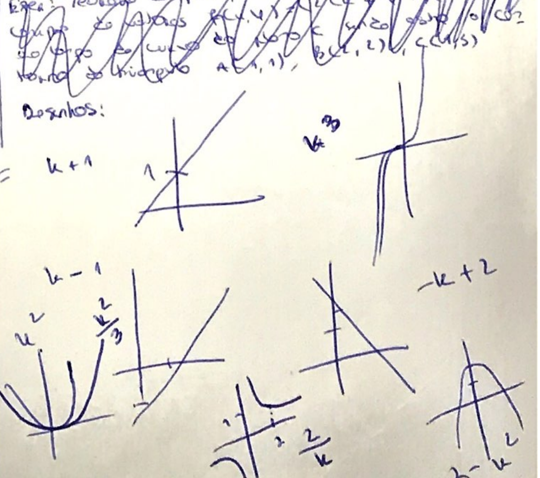
$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

$$\iint_T f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \, |J(u,v)| \, du dv$$

$$n = \frac{\frac{dp}{du} \times \frac{dp}{dv}}{\left\| \frac{dp}{du} \times \frac{dp}{dv} \right\|}$$ vetor normal unitário

~~Exer.: Teorema de Green, calc. trabalho realizado ... campo de forças ... ao longo do ... curva ... A(1,1), B(1,2), C(1,5) ... sentido anti-horário~~

Desenhos:



Derivadas

$\operatorname{sen} x = \cos x$

$\cos x = -\operatorname{sen} x$

$(\log(t))' = \dfrac{t'}{t}$

$(f(x)^a)' = a\, f'(x) \cdot f(x)^{a-1}$

$(e^t)' = e^t$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Primitivas

$\int u^{\alpha} \cdot u' = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\quad \int u' \operatorname{sen} u = -\cos u$

$\int \dfrac{u'}{u} = \ln(u)$ $\quad \int u' \cos u = \operatorname{sen} u$

$\int e^u \cdot u' = e^u$

$\cos(bx + ay) = \dfrac{1}{b}(\operatorname{sen}(bx + ay))$

$\operatorname{sen}(bx + ay) = -\dfrac{1}{b}(\cos(bx + ay))$

$\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)$

Integrais de linha ou curvilíneos

- Quando o campo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é escalar (a primeira notação é usada quando a curva é fechada)

$$\oint_C f\,d\alpha = \int_C f\,d\alpha = \int_a^b f(\alpha(t)) \times \|\alpha'(t)\|\,dt$$

ou $\int f\,ds$ $\quad ds \to$ comprimento do arco

[integral de linha de f segundo o comprimento do arco α]

- Quando o campo $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é vetorial

$$W = \oint_C F\,d\alpha = \int_C F\,d\alpha = \int_a^b \langle F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \rangle dt$$

Onde a curva C é parametrizada por $\alpha(t)$ e $a < t < b$

Este último integral também é chamado de trabalho (work) do campo de forças F ao deslocar uma partícula ao longo da curva C

Função vetorial continuamente diferenciável com gradiente contínuo (função potencial)

$f = \nabla\varphi(x, y)$ $\quad f = (f_1, f_2) = \left(\dfrac{d\varphi}{dx}, \dfrac{d\varphi}{dy}\right)$

$$\int_a^b \nabla f\,d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$$

⚠ Se a curva é fechada e o campo f é conservativo, então o integral de linha é 0.

Função / campo gradiente

Se $F(x, y) = (F_1, F_2)$, F é gradiente se $\dfrac{dF_2}{dx} = \dfrac{dF_1}{dy}$

Se $P(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$, P é gradiente se

$\dfrac{dF_2}{dx} = \dfrac{dF_1}{dy}$, $\dfrac{dF_2}{dz} = \dfrac{dF_3}{dy}$, $\dfrac{dF_3}{dx} = \dfrac{dF_1}{dz}$

Parametrizar curvas

- Função (x, y)

$x(t) = t \to$ sempre

- Segmento de reta entre A e B

$\alpha(t) = (1 - t)A + tB$

$0 \le t \le 1$

- Circunferência de raio R (plano)

$\alpha(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$

$0 \le t \le 2\pi$

Integrais duplos

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$$

(1) Esboçar a região de integração

(2) Inverter a ordem

Ex: Fazer o esboço simétrico em relação à bissetriz $y = x$

$y = 4\sqrt{2x}$ ou $x = \dfrac{y^2}{32}$

$y = x^3$ ou $x = \sqrt{3}$

$\int_0^4 \int_{x^3}^{4\sqrt{2x}}$ substituir com 4 e 0

Coordenadas polares

$(x, y) \to (\rho, \theta)$

$|J| = \rho$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint_T f(\rho\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

Área de uma figura plana / Área de uma região

$$\text{Área} = \iint_S 1\,dA = \iint_S 1\,dx\,dy$$

Volume de uma região S

$$V = \iint_S \underbrace{f(x, y)}_{\text{topo}} - \underbrace{p(x, y)}_{\text{base}}\,dx\,dy$$

Massa e centro de massa de uma figura plana

$$M = \int_{t_0}^{t_1} f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\,dt$$

ou $M = \iint d(x, y)\,dA$ onde

d é a densidade

- Com coordenadas

$x_0 = \dfrac{1}{M}\iint x\,d(x, y)\,dA$

$y_0 = \dfrac{1}{M}\iint y\,d(x, y)\,dA$

(...)

ou

$x_0 = \dfrac{1}{M}\int x\,f(x, y, z)\,ds$

$y_0 = \dfrac{1}{M}\int y\,f(x, y, z)\,ds$

Momento de inércia de uma figura plana em relação à origem

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2)\,d(x, y)\,dA$$

Momento de inércia de uma figura plana em relação ao eixo dos xx e dos yy

$$I_{xx} = \iint y^2\,d(x, y)\,dA;$$

$$I_{yy} = \iint x^2\,d(x, y)\,dA$$

⚠ Quando a figura é homogénea a densidade é constante

Teorema de Green

(faz a ligação entre um integral de linha e um duplo)

$$\oint_C F\,d\alpha = \iint_R \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\,dA$$

ou

$$\iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy = \oint P\,dx + Q\,dy$$

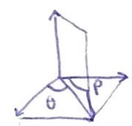
Integrais triplos

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \qquad B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

Coordenadas cilíndricas

$(x, y, z) \to (\rho, \theta, z)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad |J| = \rho$



$$I = \iiint_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(\rho, \theta, z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$0 \le \rho \le R$

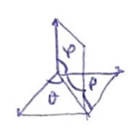
$0 \le \theta \le 2\pi$

Coordenadas esféricas

$(x, y, z) \to (\rho, \theta, \varphi)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

$|J| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$



$0 \le \rho \le R$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

$$\iiint_T f(\rho, \varphi, \theta)\,\rho^2\operatorname{sen}\rho\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Volume de uma figura no espaço

$$V = \iiint 1\,dV = \iiint 1\,dx\,dy\,dz$$

Momento de inércia de uma figura no espaço em relação aos eixos Ox, Oy e Oz

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)\,d(x, y, z)\,dV$$

$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2)\,d(x, y, z)\,dV$$

$$I_{zz} = \iiint (x^2 + y^2)\,d(x, y, z)\,dV$$