UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática II

2^a Frequência 26 de Maio de 2017

Tempo: 2h 00 m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

(1,5) **1.** Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função dada por $f(x, y) = (-y, x + y)$ e C o arco da parábola $y = x^2$, gerado pela função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, que une a origem ao ponto $(2, 4)$, calcule

$$\int_C f(x, y) \cdot d\alpha.$$

(2) **2.** Considere um fio homogéneo, isto é, com densidade constante, com forma circular, de raio 2 e com o comprimento 12π.

a) Calcule a massa do fio.

b) Prove, com detalhe, que a ordenada do centróide é nula.

(2) **3**. Seja a função vectorial $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z)),$$

com $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, funções de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$.

a) Indique uma condição necessária e suficiente para que a função g seja um gradiente.

b) Determine a função potencial de g para

$$g_1(x, y, z) = 2x + 2z,\ \ g_2(x, y, z) = -2y - 2z,\ \ g_3(x, y, z) = 2x - 2y.$$

(1,5) **4.** Considere uma espira completa de uma mola helicoidal cilíndrica dada, na forma vectorial, por

$$\gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\ \text{sen}\ \theta, 3\theta),$$

cuja densidade num ponto (x, y, z) é dada por $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Determine o seu momento de inércia em relação ao eixo das cotas.

Grupo II

(3) **5**. Calcule os seguintes integrais em função das constantes $a, b > 0$
:

a) $\int_0^a \int_0^{\pi^{\frac{3}{4}}} x^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} + x^{\frac{4}{3}}\right)\, dx\, dy$.

b) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{3+x^2+y^2}} : dx\, dy$ com $D = \left\{(x, y) :\ \sqrt{x^2 + y^2} \le b\right\}$.

(3) **6.** Inverta a ordem de integração das variáveis x e y nos seguintes casos:

a) $$\int_0^3 \int_1^{x+1} f(x, y)\, dy\, dx$$

b) $$\int_0^2 \int_{x^3}^{4\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Grupo III

(2) **7.** Calcule o volume do sólido limitado pelos cilindros $y = 4 - x^2$, $y = x^2 + 2$ e pelos planos $z = -1$ e $z - 2 = 0$.

(1,5) **8.** Determinar a área da superfície definida por $z = x\pi y$ no conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

(2) **9.** Seja S uma superfície definida por $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, com

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho \text{ sen } \theta, \theta),\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Calcule o fluxo de

$$F(x,y,z) = (x\cos z,\ y \text{ sen } z,\ 0)$$

ao longo de S, supondo a normal a S orientada para cima.

(1,5) **10.** S é uma figura plana limitada no plano $z = 0$, de área A, e C o cone de base S e vértice em $V = (0,0,h)$, $h > 0$.

Calcule o fluxo do fluido $F(x,y,z) = (x,\ y, z - h)$ ao longo da superfície de C.

Sugestão: Utilize o Teorema de Gauss.