Primitivas

$\int k\,dx = kx + C$

$\int 1\,dx = x + C$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

$\int u' \sec u \tan u\,dx = \sec u + C$

$\int u' \cosh u\,dx = \operatorname{senh} u + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

$\int u' \tan u\,dx = -\log|\cos u| + C$

$\int u' \sec u\,dx = \log|\sec u + \tan u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan u + C$

$\int u' \cot u\,dx = \log|\operatorname{sen} u| + C$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

se $n \neq -1$

$\int u' e^u\,dx = e^u + C$

$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$

$\int u' \operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + C$

$\int u' \cos u\,dx = \operatorname{sen} u + C$

$\int u' \sec^2 u\,dx = \tan u + C$

$\int u' \csc^2 u\,dx = -\cot u + C$

$\int u' \csc u \cot u\,dx = -\csc u + C$

$\int u' \operatorname{senh} u\,dx = \cosh u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

$\int \frac{u'}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

$\int u' \csc u\,dx = \log|\csc u - \cot u| + C$

Derivadas

$c' = 0$

$(u^a)' = a \cdot u' \cdot u^{a-1}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(\log u)' = \frac{u'}{u}$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \log a$

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$

$(cu)' = c(u)'$

Fórmulas

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cot(\pi - x) = -\cot x$

$\cot(\pi/2 - x) = \tan x$

$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$

$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$\cot^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1$

$\operatorname{sen} 0 = 0$ $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$

$\cos 0 = 1$ $\cos(\pi/2) = 0$

$\tan 0 = 0$ $\tan(\pi/2) = \infty$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$e^0 = 1$

$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = \cos(\arccos x) = x$

$\operatorname{sen}(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\operatorname{sen}(\arccos x) = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$

$\tan(\arctan x) = \cot(\operatorname{arccot} x) = x$

$\operatorname{sen}(\operatorname{arccot} x) = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\tan(\operatorname{arccot} x) = \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$

$\tan(\operatorname{arcsen} x) = \cot(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\tan(\arccos x) = \cot(\operatorname{arcsen} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\operatorname{arcsen} 0 = 0$

$\arccos(0) = \pi/2$

$\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$

$\arccos(1) = 0$

$\operatorname{arcsen}(-1) = 3\pi/2$

$\arccos(-1) = \pi$

$\arctan(0) = 0$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\arctan(-1) = -\pi/4$

$\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$

Coordenadas Polares

Cilíndricas

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \\ |J| = \rho \end{cases}$

ρ = raio $\theta \in [0, \ ]$

θ = angulo $\in [0, 2\pi]$

Esféricas

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

$\rho = [0, R]$

$\theta = [0, 2\pi]$

$\varphi = [0, \pi]$

Primitiva por partes

$u' =$ o que $\quad u =$ o que

$v =$ tenho $\quad v' =$ eu faço

$[u\,v] - \int u \cdot v'\,dx$

Inércia (fórmulas)

$\mathbb{R}^3$

$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \times \delta(x,y,z)\,dv$

$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \times \delta(x,y,z)\,dv$

$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \times \delta(x,y,z)\,dv$

em relação à origem $- I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \times \delta(x,y,z)\,dv$

$\mathbb{R}^2$

$I_x = \iint_A y^2 \times \delta(x,y)\,dA$

$I_y = \iint_A x^2 \times \delta(x,y)\,dA$

origem $I_0 = \iint_A (x^2+y^2) \times \delta(x,y)\,dA$

Em linha (c)

$\mathbb{R}^2$

$I_x = \int_a^b (y(t))^2 \times \delta(x(t), y(t)) \times \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

$I_y = \int_a^b (x(t))^2 \times \delta(x(t), y(t)) \times \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

$\mathbb{R}^3$

$I_x = \int_a^b [(y(t))^2 + (z(t))^2] \times \delta(x(t), y(t), z(t)) \times \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$

Em origem $\leftarrow I_0 = \int_a^b [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2 \times \delta(x(t), y(t), z(t)) \times \quad dt$

Massa (fórmula)

$\mathbb{R}^3 \quad m = \iiint_V \overbrace{\delta(x,y,z)}^{\text{densidade}}\,dv$

$\mathbb{R}^2 \quad m = \iint_A \delta(x,y)\,dA$

em C $\quad m = \int_a^b \delta(x(t), y(t)) \times \overbrace{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}^{\text{Comprimento}}\,dt$

Parametrização

P.I.

$\int_c \langle f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\rangle\,dt$

caso tenha $\gamma(t)$ ñ tenho de Parametrizar caso ñ tenha, Parametrizo se for círculo $\rightarrow$ coordenadas Polares

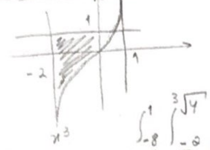
Teorema de Green

$\int P\,dx + Q\,dy$

$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\,dx$

$\rightarrow$ círculo utilizo coordenadas Polares

Inverter ordem do $\int_{-2}^{1} \int_{x^3} dy\,d$



$\int_{-8}^{1} \int_{-2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy$

Centro de massa (centróide)

$\mathbb{R}^3 \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \times \overbrace{\delta(x,y,z)}^{\text{densidade}}\,dv}{m \to \text{massa}}$

$\bar{y} = \frac{\iiint_V y \times \delta(x,y,z)\,dv}{m}$

$\bar{z} = \frac{\iiint_V z \times \delta(x,y,z)\,dv}{m}$

$\mathbb{R}^2 \quad (\bar{x}, \bar{y})$

$\bar{x} = \frac{\iint_A x \times \delta(x,y)\,dA}{m}$

$\bar{y} = \frac{\iint_A y \times \delta(x,y)\,dA}{m}$

Em C $(\bar{x}, \bar{y})$

$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(t) \times \delta(x(t), y(t)) \times \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}{m}$

$\bar{y} = \frac{\int_a^b y(t) \times \delta(x(t), y(t)) \times \overbrace{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}^{\text{comprimento}}}{m}$

Cálculo da reta

$y = mx + b$

$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

uso o (x_1, y_1) para descobrir o b

Mudança de Variável

- o mais fácil

$u =$ (expressão) $\Rightarrow x$ resolvo em ordem

$v =$ (expressão) $\Rightarrow y$

$w =$ (expressão) $\Rightarrow z$

faço o Integral $\times$ Jacobiano

Jacobiano

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

Ser Conservativo = Gradiente

$\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad F = (P, Q)$

ou faço Rot e tem que dar zero

$\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \wedge \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \wedge \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$F = (P, Q, R)$

Função Potencial

Para ser 1 função Potencial tem que ser Conservativa e

$\int dx = \underset{\text{em } x}{\text{Primitiva}} + f(y) + f(z)$

$\int dy = \underset{\text{de ordem } y}{\text{Primitiva}} + f(x) + f(z)$

$\int dz \rightarrow$ em $\mathbb{R}^3$

Potencial = φ + as que ... contam 1 vez

Teorema de Stokes

$F(x,y,z)$

$S = \{ \_\_\_\_\_\_ \}$

$g(x,y) = S$

$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = n = \underbrace{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ - & & \\ - & & \end{vmatrix}}_{*}$

$\iint_S \langle \text{Rot } F \,.\, n \rangle$

Rotacional de F

$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \to f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix}$

Teorema de Gauss (Fluxo)

$\iiint_V \text{div } f \; dxdydz$

$F = (f_1, f_2, f_3)$

$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Fluxo ~~ou~~ Quando é vetorial

$\text{Fluxo} = \iint_D F(R(u,v)) \,.\, \underbrace{\frac{\partial R}{\partial u} \,.\, \frac{\partial R}{\partial v}}_{*} \, dudv$

$u = x$
$v = y$

quando dão o vetor $F = (\;)$

Fluxo

Quando dão $g(x,y) = \underline{z} = z$ é igual a qualquer coisa

$\text{Fluxo} = \iint_D F(x,y,g(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dudv$

Determino a Área da superfície definida por $z =$

$z = f(x,y)$

$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dxdy$

volume $= \iiint$

Área $= \iint$

Quando não tenho expressamente $f(x,y,z) = 1$

Parametrização com 2 Pontos

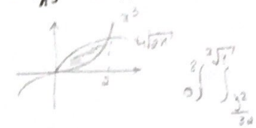
vai de $A \to B$

$A + t(B - A)$

- Faço iguais depois
- Porque o resultado é 1 vetor

Inverter Integral (2)

- $\int_0^2 \int_{x^3}^{4\sqrt{2x}} f(x,y)\, dydx$



- $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dxdy$

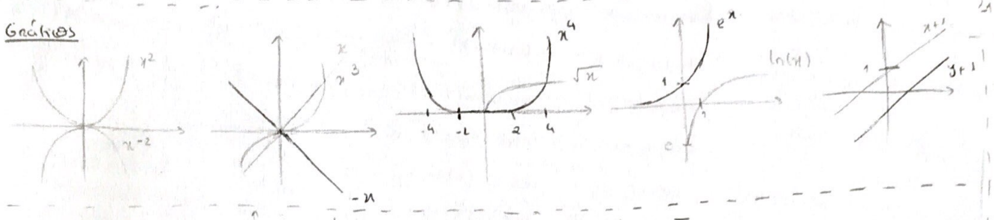
$x = -\sqrt{1-y^2}$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+1}$

$x = -1 - y \Leftrightarrow y = -x + 1$

Tenho de fazer 2 Integrais

$\int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{x^2+1}} f(x,y)\, dydx + \int_0^1 \int_0^{-x+1} f(x,y)\, dx$

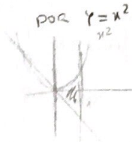
Gráficos



Perguntas (Green)

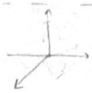
$\oint_C (x^2 + y^2)\, dx + (xy^2)\, dy$

C é a curva fechada definida por $y = x^2$, $y = -x$, $0 \le x \le 1$



$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} (y^2 - 2y)$ derivada

Equação $\mathbb{R}^3$



esfera : $x^2 + y^2 + z^2 = R$

cilindro : $x^2 + y^2 = R$

Cone

$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Parabolo : $z = x^2 + y^2 + 3$ ou $z = -x^2 - y^2 + 1$

Equação $\mathbb{R}^2$

elipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = R$

circulo $x^2 + y^2 = R$

Area de superfície $z = x\tilde{n}y$ de uma região R

$A_z = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$

mudança de variável polar

Parametrização

calcule $\int_C x\,dx + (x^2 + y + 3)\,dy + xyz\,dz$ onde C é parametrizada por $\gamma(t) = (t, 2t, 1)$ para $t \in [0,1]$

$\int_C \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \int_0^1 \langle (t, t^2 + 2t + 1, 2t^2), (1, 2, 0) \rangle dt$

calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y) = (-y, x)$ ao longo da elipse C definida $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

coordenadas Polares para fazer a Parametrização

$\int_C \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (-3\sin t, 2\cos t), (-2\sin t, 3\cos t) \rangle dt$

Inverter Integral (em cima)

$\int_0^2 \int_{x^3}^{4\sqrt{2x}} f(x,y)\, dydx$

Mudança de variáveis

Considere o integral triplo $\iiint_D 4(x-y)z \, dxdydz$ onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$ $0 \le \underbrace{x - 2y + 2z}_{u} \le 1$, $0 \le \underbrace{3x - y + z}_{v} \le 5$, $0 \le \underbrace{z}_{w} \le 3\}$ usando a mudança de variáveis adequada calcule o Integral.

$\begin{cases} u = x - 2y + 2z \\ v = 3x - y + z \\ w = z \end{cases} = \begin{cases} x = u/5 + 2/5\, v \\ y = \frac{v}{5} + w - 3/5\, u \\ z = w \end{cases}$

$J = \frac{1}{5}$ → calculo a jacobi e multiplico a pelo Integral

$I = \int_0^3 \int_0^5 \int_0^1 4\left(-\frac{u}{5} + \frac{2}{5}v - \left(\frac{v}{5} + w - \frac{3}{5}u\right)\right) w \frac{1}{5} \, dudvdw$

Potencial

Potencial : tem de se verificar gradiente

$g(x,y,z) = (g_1, g_2, g_3)$

$\phi(x,y,z) \to$ função potencial

$[\phi(x,y,z)]'_x = g_1$

$[\phi(x,y,z)]'_y = g_2$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = g_1 \Leftrightarrow \phi(x,y,z) = \int g_1 \, dx$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = g_2 \Leftrightarrow [\phi(x,y,z)]'_y$

$= g_2 \Leftrightarrow \ldots + f(y,z)$

$= g_2 \ldots \Leftrightarrow f(y,z)$

$= \int g_2 \, dy \ldots$

repetir até ter função final

Perguntas (Stokes)

→ considere o integral , onde C é a curva orientada positivamente resultante da interseção do cilindro de $x^2 + y^2 = 1$ e do plano $(x + y + z = 1)$. calcule o Integral usando o teorema de Stokes

$S = \{(x, y, 1 - x - y)\} = g(x,y)$

→ seja $F(x,y,z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$, mostre que o $\int$ de linha de F ao longo da curva fechada C (que é a fronteira da superfície S é zero (Teorema de Stokes) calcular o rot e tem que ser $= 0$) porque se $S = 0$ então $\int = 0$

Perguntas (Gauss)

→ Determine o fluxo dado por $F(x,y,z) =$ para o exterior da superfície S, situada no 1º octante e formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ e ...

→ calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ através da superfície esfera unitária

NOTA: se $\text{div} = 0$, então o fluxo é constante