Física Geral I • FIS0703

Aula prática 04 17/10/2016

Regressão linear

Trabalho prático 1: Movimento de uma massa ligada a uma mola

Regressão linear

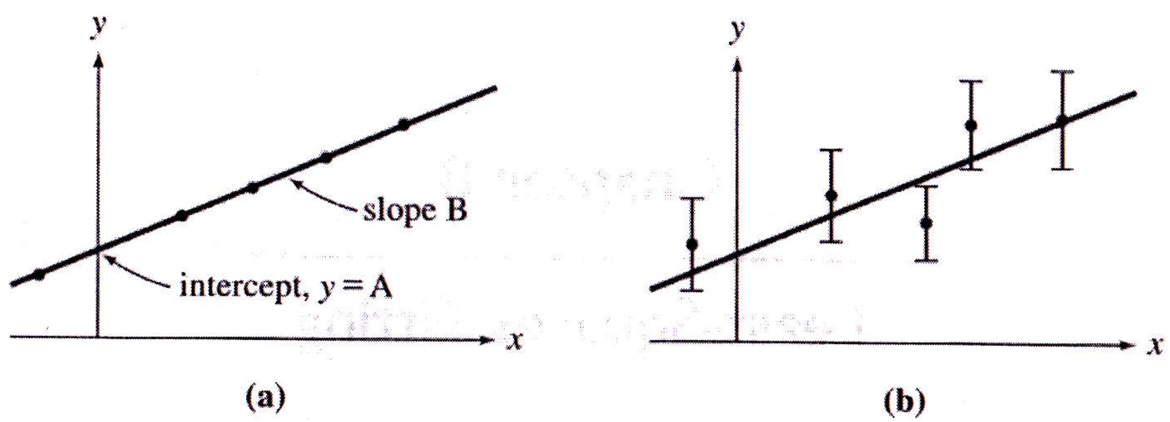

Figure 8.1. (a) If the two variables y and x are linearly related as in Equation (8.1), and if there were no experimental uncertainties, then the measured points (x_i, y_i) would all lie exactly on the line $y = A + Bx$. (b) In practice, there always are uncertainties, which can be shown by error bars, and the points (x_i, y_i) can be expected only to lie reasonably close to the line. Here, only y is shown as subject to appreciable uncertainties.

Modelo: relação da forma

$$y = A + Bx$$

Problema: encontrar A e B assim que a recta passa "de melhor forma" pelos pontos experimentais

Dados $\quad (x_i, y_i)\,, \quad i = 1, N$

Método dos mínimos quadrados: $\quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2 \quad$ minimizar!

medida da diferença entre modelo e dados

Condições $\quad \dfrac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0$

As condições para o mínimo de χ^2 determinam:

$$\boxed{A = \frac{S_{x^2} S_y - S_x S_{xy}}{\Delta} \qquad B = \frac{N S_{xy} - S_x S_y}{\Delta}}$$

com

$$\Delta = N S_{x^2} - (S_x)^2 \qquad S_x = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad S_y = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \quad S_{x^2} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

A e *B* dependem dos pontos observados ⇨ erros em x_i e y_i propagam-se para *A* e *B*

$$\boxed{\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{S_{x^2}}{\Delta}} \qquad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - B x_i)^2}$$

<u>Caso simples: recta pela origem</u> $\qquad y = Bx$

$$\boxed{B = \frac{S_{xy}}{S_{x^2}} \qquad \sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{S_{x^2}}}}$$

com $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - B x_i)^2}$

Regressão de funções não lineares

Certas funções não lineares podem ser transformadas numa forma linear

Exemplos: (a) $$y = ae^{Bx} \quad \to \quad \ln y = \ln a + Bx$$

$$z = \ln y\,, \quad A = \ln a \quad \to \quad z = A + Bx$$

Atenção: $\sigma_a \neq \sigma_A$

(b) $$y = A + Bx^2\,, \quad u = x^2 \quad \to \quad y = A + Bu$$

(c) $$y = A + \frac{B}{x^2}\,, \quad u = \frac{1}{x^2} \quad \to \quad y = A + Bu$$

Em geral: $\chi^2 \to$ min

(i) funções lineares dos parâmetros livres
$\to$ sistema linear de equações para os parâmetros

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^n$$

$$y = A \sin x + B \cos x$$

(ii) funções não lineares dos parâmetros livres
$\to$ minimização numérica

$$y = Ae^{Bx} + Ce^{-Dx}$$

$$y = A + Bx^C$$

Estrutura de um relatório

- **Título** do trabalho
- **Autores:** Curso, turma, grupo, nomes e números de todos os autores do relatório.
- **Introdução:** descrição breve (um parágrafo) dos objetivos do trabalho e dos métodos usados.
- **Procedimento experimental**: descrição da montagem da experiência (desenho schemático), listagem dos aparelhos e instrumentos com indicação da precisão, atividades desenvolvidas.
- **Apresentação das medidas**: dados originais (tabelas, com unidades!), definição dos símbolos usados.
- **Análise dos dados**: fórmulas e operações matemáticas usadas para chegar ao resultado final. Análise de erros.
- **Apresentação e discussão dos resultados**: tabelas e/ou gráficos (com legendas e unidades)
- **Conclusões**: O que pode ser concluído dos resultados, tomando em conta a estimativa dos erros.