Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame **4/Janeiro/2016**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^{n-1}+4^n} \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\sqrt{n}}{n-1}\right)^{2\sqrt{n}}.$$

Sugestão: mostre primeiro que $\frac{n+\sqrt{n}}{n-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}-1}$.

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{(x-2)\left(e^{x-1}-1\right)}{x^2-3x+2}$.

a) Determine o domínio, D_f, de f .

b) Estude a seguinte função quanto à continuidade em $\mathbb{R}$:

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \{1,2\} \\ 1 & \text{se } x \in \{1,2\}. \end{cases}$$

c) Diga se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 2$.

3. Moste que a equação $\log(x) = (2-x)(x+1)$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

II

4. Estude quanto a convergência/divergência, as séries:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^{\frac{n}{3}}}\,; \qquad b)\ \sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^c,\ c\in\mathbb{R}.$$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Estude quanto a crescimento/decrescimento e extremos, a função $f(x) = x^3 + ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é α-Lipschitziana em $[a,b]$ se existem $M > 0, \alpha > 0$ tais que $|f(y) - f(x)| \le M\,|y-x|^{\alpha}$, para $x, y \in [a,b]$.
Mostre que, se f é α-Lipschitziana então f é contínua; e, ademais, se $\alpha > 1$, f é constante.

III

7. a) Determine o conjunto de todas as primitivas da função $f(x) = \dfrac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}$ no intervalo $(0, +\infty)$.
Sugestão: considere a substituição $x = \log t$.

b) Determine o valor dos integrais:

$$a) \int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx\,; \qquad b) \int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x \; dx.$$

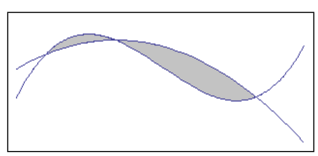
c) Calcule o limite $\lim_{x\to 0} \; x\dfrac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{1-e^{-x^2}}$.

8. Seja f uma função com derivada contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(e) = f'(e) = 0$.

Defina-se $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \displaystyle\int_{\log x}^{e^x} f(t) \; dt$.

Calcule g' e g'' e mostre que $g'(1) + g''(1) = -f'(0)$.

9. Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas $y = x^3 - 2x^2 - 2x$ e $y = -x^2$, sombreada na figura.



Nome:
N^o:
Curso: