

Estruturas de Dados e Algoritmos II

2ª Frequência e Exame

Departamento de Informática
Universidade de Évora

8 de Junho de 2017

Os símbolos à esquerda de cada pergunta identificam a prova ou provas a que ela pertence:

♣ assinala as perguntas do exame;

◇ assinala as perguntas da 2ª frequência.

- ♣ 1. [2,5 valores] Assumindo que o alfabeto consiste nas 26 letras minúsculas, desenhe uma *trie* cujo conteúdo sejam as seis palavras

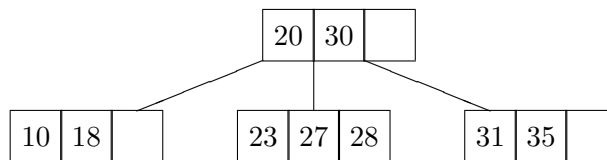
gado gordo mordo salgado sal salto

Qual seria a memória ocupada por uma implementação em C da *trie* que desenhou, numa máquina com endereços e palavras de 64 bits? (Não precisa de calcular o valor, mas apresente e justifique todos os cálculos efectuados ou a efectuar.)

- ♣ 2. [2,5 valores] A *B-tree* da figura tem grau de ramificação mínimo 2. Apresente o seu estado depois da execução de *cada uma* das operações da sequência

i 32 r 23 r 20 i 33 i 25 i 26 r 31 r 35

pela ordem apresentada. As letras **i** e **r** indicam, respectivamente, a inserção e a remoção do elemento que se lhes segue.



- ♣ 3. [2,5 valores] Um PERCURSO NUMA PIRÂMIDE é um percurso desde o vértice da pirâmide até uma posição da sua base, passando por uma única posição em cada linha intermédia. Quando o percurso passa para a linha abaixo, ele pode fazê-lo para a posição imediatamente à esquerda ou imediatamente à direita da vertical da posição corrente. O custo de um percurso é a soma dos valores em cada posição visitada durante o percurso.

Por exemplo, dada a pirâmide à direita, só há quatro percursos distintos desde o vértice até à base da pirâmide. Os valores contidos nas posições por que esses percursos passam são 5-4-7, 5-4-2, 5-6-2 e 5-6-3, e o custo desses percursos é, respectivamente, 16, 11, 13 e 14.

```

      5
     4 6
    7 2 3
```

Repare que não é possível um percurso passar pelas posições com os valores 5-6-7 (porque o 7 não está abaixo e imediatamente à esquerda ou à direita da vertical da posição que contém o 6), 5-4-6-3 (porque o 4 e o 6 estão na mesma linha), ou 5-4-5-6-3 (porque o 5 está na linha acima do 4).

Seja $n > 0$ a altura da pirâmide e seja $P = (p_{ij})$, com $1 \leq j \leq i \leq n$, a sequência dos valores contidos na pirâmide, tal que p_{11} corresponde ao valor no vértice da pirâmide, p_{21} corresponde ao valor mais à esquerda na 2ª linha da pirâmide a contar do topo, etc., tal como é mostrado na figura à direita.

```

      p11
     p21 p22
    p31 p32 p33
```

Apresente *uma função recursiva* que, dadas a altura da pirâmide e a sequência dos valores contidos na pirâmide, calcula o custo mínimo de efectuar um percurso na pirâmide.

Indique claramente o que representa cada uma das variáveis que utilizar e explicita a chamada inicial. (Note que não é pedido que escreva código.)

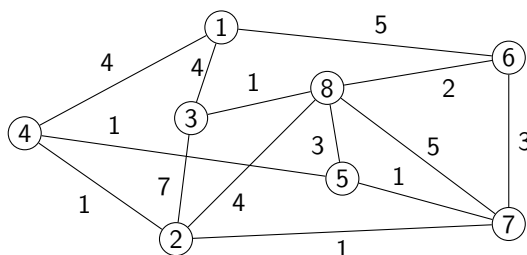
♣ 4. [2,5 valores] Considere a função recursiva $M_V[i, j]$, onde:

- $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ é uma sequência não vazia de inteiros;
- $0 \leq i \leq n$; e
- $0 \leq j \leq n$.

$$M_V[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j - 1 \\ \max \{ v_i - M_V[i + 1, j], v_j - M_V[i, j - 1] \} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

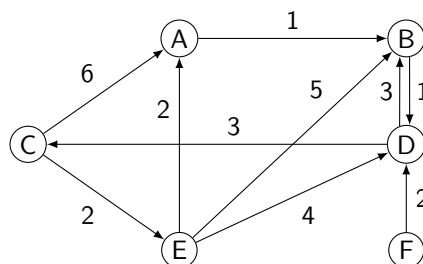
Apresente o pseudo-código de um algoritmo iterativo que, dada uma sequência não vazia de inteiros $V = v_1, v_2, \dots, v_n$, calcula e devolve o valor de $M_V[1, n]$.

♣ ◇ 5. Seja G_5 o grafo seguinte:



- [1 valor] Diga, justificando se G_5 é conexo.
- [1 valor] Apresente uma árvore de cobertura mínima para G_5 .
- [1,5 valores] Apresente uma ordem pela qual os arcos poderiam ter sido considerados durante uma aplicação do algoritmo de Kruskal ao grafo, indicando quais seriam incluídos na árvore de cobertura mínima e quais não seriam.

♣ ◇ 6. Suponha que o algoritmo de Dijkstra é aplicado ao grafo seguinte a partir do vértice C.



- [1 valor] Apresente a ordem pela qual os vértices do grafo são retirados da fila com prioridade.
- [1,5 valores] Identifique os arcos cuja exploração leva à descoberta de um novo caminho mais curto para algum vértice.
- [1,5 valores] Considere uma variante do algoritmo de Dijkstra em que a distância (pesada) de um vértice à origem (inicializada a $-\infty$) é actualizada sempre que se encontra um caminho com maior peso do que o encontrado até essa altura (i.e., a comparação na função RELAX é invertida), e em que é o vértice com maior distância (pesada) que é retirado da fila com prioridade.

Mostre que essa variante não é apropriada para encontrar os caminhos com maior peso de um vértice aos outros vértices do grafo.

- ◇ 7. O algoritmo IN-CYCLE, cujo pseudo-código é mostrado na figura, detecta se o nó s do grafo orientado $G = (V, E)$ pertence a um ciclo de comprimento maior que 1.

```
IN-CYCLE( $G, s$ )
1.  for each nó  $u \in G.V$  do
2.       $u.colour \leftarrow WHITE$ 
3.  return REACHES( $G, s, s$ )

REACHES( $G, u, s$ )
4.   $u.colour \leftarrow GREY$ 
5.  for each nó  $v \in G.adj[u]$  do                // explore edge  $(u, v)$ 
6.      if  $v = s \wedge u \neq s$  then
7.          return TRUE
8.      if  $v.colour = WHITE$  then
9.          if REACHES( $G, v, s$ ) then
10.             return TRUE
11. return FALSE
```

- (a) [1 valor] Como classificaria o percurso que o algoritmo faz no grafo a partir do nó s ?
- (b) [2 valores] Identifique o melhor e o pior casos do comportamento do algoritmo, dizendo que características poderão ter G e s para que cada um deles se dê, e explicando brevemente.
- (c) [2 valores] Analise a complexidade temporal do algoritmo no pior caso, assumindo que o grafo está implementado através de listas de adjacências.

- ♣ ◇ 8. [2,5 valores] O Landiquistão, país em vias de desenvolvimento, descobriu, recentemente, a existência de grandes reservas de gás natural no seu território. Com o influxo de dinheiro, o governo pretende melhorar a sua rede viária, em que a maior parte das estradas é de terra batida.

Como primeiro passo do processo, foi feito um estudo que determinou quanto custaria asfaltar cada uma das estradas existentes, que já ligam todas as localidades do país. O custo calculado depende de vários factores, que incluem a distância a asfaltar e a geografia do terreno. (Naturalmente, o custo de asfaltar uma estrada já asfaltada é zero.)

Como o país é grande e bastante populoso, e embora o dinheiro esteja a entrar a bom ritmo, não é possível tratar de todas as estradas em simultâneo. Por isso, antes de dar início às obras, o governo quer determinar um subconjunto das estradas a asfaltar que, com o menor custo possível, permitirá passar a viajar entre quaisquer duas localidades recorrendo somente a estradas asfaltadas.

A sua empresa foi a escolhida para calcular esse subconjunto. Como resolverá o problema? Descreva detalhadamente como modelaria os dados e como os representaria, e diga que algoritmo(s) utilizaria, porquê, e como obteria o resultado pretendido.