3. Princípio de indução matemática

Uma das ferramentas mais utilizadas em demonstrações que envolvem números naturais é a indução:

Princípio de indução matemática. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

1. $\Phi(0)$ *e*

2. $\forall n \in \mathbb{N}\big(\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)\big)$

então

$$\forall n \in \mathbb{N}\big(\Phi(n)\big).$$

Uma consequência deste princípio, também útil, é a indução completa:

Princípio de indução completa. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

$$\forall n \in \mathbb{N}\big(\forall m < n \Phi(m) \Rightarrow \Phi(n)\big)$$

então

$$\forall n \in \mathbb{N}\big(\Phi(n)\big).$$

Exercícios e problemas

1. Mostre que as seguintes igualdades são válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $$\sum_{i=0}^{n} i = \tfrac{n(n+1)}{2};$$

   (b) $$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1;$$

   (c) Se $n \geq 3$, então $$\sum_{l=3}^{n}(4l - 11) = 2n^2 - 9n + 10;$$

   (d) $$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

   (e) Se $n \geq 1$, então $$\sum_{m=1}^{n}(2m-1)^2 = \tfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

   (f) Se $n \geq 1$, então $$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

   (g) Se $n \geq 1$, então $$\sum_{j=1}^{n}(6j-2) = n(3n+1);$$

   (h) $$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2.$$

   Sugestão: utilize o resultado da alínea (1a).

   (i) $$\sum_{l=0}^{n} r^l = \tfrac{r^{n+1}-1}{r-1},$$

   para qualquer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

   (j) $$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} = 2^n.$$

2. Sejam a e b números reais. Considere a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada recursivamente por $s_0 = a$ e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 2s_n + b$. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n a + (2^n - 1)b$.

3. Mostre que $$\sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \tfrac{m}{4m+1},$$ para qualquer natural $m \geq 1$.

4. (a) Mostre que $11^r - 4^r$ é múltiplo de 7, para qualquer natural $r \geq 1$.

   (b) Mostre que $13^t - 8^t$ é múltiplo de 5, para qualquer natural $t \geq 1$.

   (c) Sejam a, b e c inteiros tais que $a - b = c$. Mostre que $a^u - b^u$ é múltiplo de c, para qualquer natural $u \geq 1$.

5. Mostre que $p! > 2^p$, para qualquer natural $p \geq 4$.

6. Mostre que se A é um conjunto de n elementos ($n \in \mathbb{N}$), então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

7. Mostre que $s^2 > s + 1$, para qualquer natural $s \geq 2$.

8. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1).$$

   (a) Calcule os sete primeiros termos da sucessão.

   (b) Adivinhe uma expressão geral para a sucessão e mostre que é válida utilizando o princípio de indução matemática.

9. Adivinhe uma expressão sem envolver somatórios para

$$\sum_{j=1}^{n} j!j$$

   e mostre-a por indução matemática.

10. Considere a proposição "$p(n) : n^2 + 5n + 1$ é par".

   (a) Mostre que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

   (b) Para que valores de n é veradeira a proposição?

11. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(2k+1) = 3n^2,$$

   para qualquer natural $n \geq 1$.

12. Mostre que $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16, para qualquer natural $n \geq 1$.

13. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \tfrac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k},$$

   para qualquer natural $n \geq 1$.

14. Mostre a fórmula de De Moivre: para qualquer natural n,

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

15. Construa o Triângulo de Pascal até à linha de ordem dez (chamando linha de ordem zero à primeira).

   (a) Calcule a soma dos quadrados dos elementos da linha de ordem 3. Qual é a linha onde este valor aparece no centro? Faça o mesmo para as linhas de ordem 4 e 5.

   (b) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todas as linhas do Triângulo de Pascal, mostrando por indução que

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}^2 = \tbinom{2n}{n}.$$

   (c) Calcule a soma dos elementos indicados na figura:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

   Encontre o valor que calculou no Triângulo de Pascal. Dê exemplos de outras somas análogas.

   (d) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todo o Triângulo de Pascal, mostrando por indução em n que para qualquer natural k,

$$\sum_{i=0}^{n} \tbinom{i}{k} = \tbinom{n+1}{k+1}.$$

   (e) Mostre por indução em n que para qualquer natural m,

$$\sum_{i=0}^{n} \tbinom{m+i}{i} = \tbinom{m+n+1}{n}.$$

   Sem recorrer à indução, mostre que esta igualdade se pode deduzir da igualdade da alínea anterior.