Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA I

2^a Frequência **21/12/12**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Encontre $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$ de modo a que a função:

$$f(x) := \begin{cases} \beta + (1-x)^{-\frac{1}{2x}}, & x < 0; \\ \alpha, & x = 0; \\ \dfrac{x}{x^3 + \sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$.

2. Recorde que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Calcule $\operatorname{ch}(0)$, $\operatorname{sh}(\log 5)$ e $\operatorname{sh}(-\log 5)$.

b) Esboce o gráfico da função $\operatorname{ch} x$.

c) Mostre que a equação:

$$\frac{x}{2} + 2 - \operatorname{sh} x = 0$$

tem uma **única** solução em $\mathbb{R}$.

Sugestão: use a diferenciabilidade para demonstrar a unicidade de solução.

3. Caracterize os extremos locais da função:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\,.$$

II

4. Indique a expressão geral das primitivas da função:

$$\text{a)} \quad f(x) = e^{2x}\,\mathrm{sen}(3x); \qquad \text{b)} \quad g(x) = \frac{3}{5+x^2}.$$

5. Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(3x)\; dx; \qquad \text{b)} \quad \int_0^{62} \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\, dx; \qquad \text{c)} \quad \int_2^3 \frac{1}{x^3+x}\; dx.$$

6. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x^3} \mathrm{sen}\,(t)\; dt.}{x}.$$

III

7. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases} \end{array}$$

a) Verifique que g é contínua em $\mathbb{R}$.
b) Mostre que se f é constante então g também é constante em $\mathbb{R}$.

8. Calcule a área da região plana situada na região $x \geq 1$ e limitada pelas curvas $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ e $y = \dfrac{1}{x^2}$.