UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

1ª Frequência 7 de Novembro de 2014

Tempo: 2h 15m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em <u>folhas de teste separadas</u>.

Grupo I

(4) **1.** Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência

$$u_n = \begin{cases} u_1 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases} .$$

a) Prove por indução matemática que $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que a sucessão u_n é convergente.

c) A sucessão u_n é limitada ? Justifique.

(3) **2.** Calcule, caso existam, os seguintes limites :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5 + sen\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 n}{2n^2+k}$

Grupo II

(6) **3**. Estude a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, calcule a respectiva soma:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos^n(3)}{3^n}\right)$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$.

(2) **4.** Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos, indique, justificando com pormenor, qual a natureza das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$.

b) $\sum a_n b_n$.

Grupo III

(2) **5.** Determine o domínio da função:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right).$$

(2) **6.** Estude a continuidade da função $f(x)$ no ponto $x=1$, sendo

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin(x-1)-\sin(x-1)}{x^2-2x+1} & \text{se} \quad x\neq 1\\ 0 & \text{se} \quad x=1.\end{cases}$$

(1) **7.** Mostre que a seguinte equação

$$\ln x+2x-1=0$$

tem pelo menos uma raíz real.

Justifique rigorosamente a sua resposta.

F1_07-11-2014