Primitivas		Derivadas
$\int c dx = cx, \quad c \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrows$	$(c)' = 0$
$\int u' u^a = \frac{u^{a+1}}{a+1}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\leftrightarrows$	$(u^a)' = a.u'.u^{a-1}$
$\int u'.e^u = e^u$	$\leftrightarrows$	$(e^u)' = u'.e^u$
$\int \frac{u'}{u} = \log u$	$\leftrightarrows$	$(\log u)' = \frac{u'}{u}$
$\int u'.\cos u = \sin u$	$\leftrightarrows$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$\int -u'.\sin u = \cos u$	$\leftrightarrows$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$\int u'.a^u = \frac{a^u}{\log a}, \quad a > 0$	$\leftrightarrows$	$(a^u)' = u'.a^u.\log a$
$\int \frac{u'}{1+u^2} = arctg\, u$	$\leftrightarrows$	$(arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$		$(u \times v)' = u'v + uv'$
$\int -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\int u \pm v = \int u \pm \int v$	$\leftrightarrows$	$(u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$
$\int cu = c \int u$	$\leftrightarrows$	$(cu)' = c(u)'$

Primitivação por Partes (utilizar quando há 2 funções a multiplicar)

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$u' = \cdots \rightarrow u = \cdots$
$v = \cdots \rightarrow v' = \cdots$

	$\underline{u'}$	$\underline{v}$
Critério	e^x	$\ln(x)$
	$\sin x$ ou $\cos x$	*polinómios*

$\int \ln(x)\, dx = \int 1 \times \ln(x)\, dx$ escolhe-se $u' = 1$ e $v = \ln(x)$

Primitivação por Substituição (utilizar quando há algo a chatear)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \times x' dt \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \\ t &= \varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

O que está a chatear = ***t***. Isola-se o ***x*** e essa função é o $\varphi(t)$. Após resolver a primitiva com ***t*** não esquecer de voltar a ***x***.

Primitivação de Funções Racionais (utilizar quando há uma fracção de polinómios)

- Se o grau do numerador for **maior ou igual** ao grau do denominador ⇨ **dividir** os polinómios
- Se não proceder da seguinte forma:

1. Factoriza-se o denominador (encontrar os zeros) e colocar na forma $(x-a)(x-b)$ ...
2. Igualar a fracção inicial em fracções simples

$$\frac{\text{polinómio}}{(x-a)(x-b)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

3. As primitivas resultantes são da forma:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(x-a)$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^2} dx = B \int (x-b)^{-2} dx = B \frac{(x-b)^{-1}}{-1}$$

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+1} dx = \int \frac{Dx}{x^2+1} dx + \int \frac{E}{x^2+1} dx = \frac{D}{2} \ln(x^2+1) + E \operatorname{arctg}(x)$$

Atenção à multiplicidade das raízes.

Integrais de Linha ou Curvilíneos

- Quando o campo $f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ é **<u>escalar</u>** (a primeira notação é usado quando a curva é fechada)

$$\oint_C f d\alpha = \int_C f\, d\alpha = \int_a^b f(\alpha(t)) \times \|\alpha'(t)\| dt$$

- Quando o campo $F: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ é **<u>vetorial</u>** (a notação _·_ diz respeito a um produto interno)

$$W = \oint_C F d\alpha = \int_C F\, d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Onde a curva **C** é parametrizada por $\boldsymbol{\alpha(t)}$ e $\boldsymbol{a \le t \le b}$

Este último integral também é chamado de trabalho (Work) do campo de forças F ao deslocar uma partícula ao longo da curva C

- Quando o campo vectorial F é um campo **<u>potencial</u>** (**<u>gradiente</u>**, **<u>conservativo</u>**), ié existe uma função escalar f tal que $F = \nabla f$ e a curva **C** liga o ponto **A** ao ponto **B**, então

$$\int_C F\, d\alpha = f(B) - f(A)$$

Se a curva é fechada e o campo F é conservativo, então o integral de linha é 0.

Se $F(x, y) = (F_1, F_2)$, F é gradiente se $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$

Se $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$, F é gradiente se $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}, \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}, \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z}$

(com esta propriedade também se diz que o campo F é irrotacional, ou que o seu rotacional é 0)

Parametrizar curvas

- Segmento de recta entre o ponto A e o ponto B $\quad \alpha(t) = (1 - t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}, 0 \le t \le 1$
- Circunferência de raio R (no plano) $\quad \alpha(t) = (R \cos t, R \sin t), 0 \le t \le 2\pi$
- Outra curva qualquer: chamar *x=t* ou *y=t*

- O tamanho de uma linha (Length) é um integral de linha com a função integranda igual a 1.

$$L = \int_C 1\, d\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Integrais Duplos

$$\iint_\Omega f(x, y) dA \longrightarrow$$ ordem de integração *dxdy* ou *dydx*

$\downarrow$ região de integração (no plano $\mathbb{R}^2$)

- **<u>Esboçar a região de integração e encontrar a ordem certa de integração</u>**

Tentar colocar uma das varáveis entre duas constantes sem que a região "*apresente cantos/vértices*".

- **<u>Inverter a ordem de integração</u>**

Para inverter a ordem de integração faz-se o esboço da região e troca-se a variável que está entre duas constantes, isto é, tenta-se limitar a outra variável entre duas constantes e adapta-se o restante.

- **<u>Coordenadas polares</u>** $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho \sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Quando existirem regiões definidas com x^2+y^2, ou com porções de círculos, é habitual mudar as coordenadas cartesianas para as polares.

Desta forma onde está x^2+y^2 passará a estar apenas ρ^2 e na região será muito mais simples limitar o raio ρ e o ângulo θ.

Não esquecer de multiplicar a função por ρ que é o Jacobiano da transformação das coordenadas.

- **<u>Área de uma figura plana Ω</u>**

$$\text{Área} = \iint_\Omega 1 dA$$

- **<u>Massa e centro de massa de uma figura plana Ω</u>**

$$M = \iint_\Omega \delta(x, y) dA$$ onde δ é a densidade

O centro de massa é o ponto (x_*, y_*) dado por $x_* = \dfrac{1}{M} \iint_\Omega x\delta(x, y) dA \;;\; y_* = \dfrac{1}{M} \iint_\Omega y\delta(x, y) dA$.

- **<u>Momento de Inércia de uma figura plana Ω em relação à origem</u>**

$$I_O = \iint_\Omega (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA$$

- **<u>Momento de Inércia de uma figura plana Ω em relação ao eixo dos xx e dos yy</u>**

$$I_{xx} = \iint_\Omega y^2 \delta(x, y) dA \;;\; I_{yy} = \iint_\Omega x^2 \delta(x, y) dA$$

Quando a figura é homogénea então a densidade é constante ***$\delta(x,y) = c$***
Por vezes diz-se que: a *densidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem*. Fica:

$$\delta(x,y)=\frac{c}{\|(x,y)-(0,0)\|^2}=\frac{c}{\|(x,y)\|^2}=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}=\frac{c}{x^2+y^2}.$$

Ou então diz-se que: *a densidade é proporcional à distância à recta y=2*. Fica:

$$\delta(x,y)=c\|(x,y)-(x,2)\|=c\|(0,y-2)\|=c\sqrt{(y-2)^2}=c(y-2).$$

Teorema de Green (faz a ligação entre um integral de linha e um duplo)

INGREDIENTES:

- $F(x,y)=(F_1,F_2)$ é uma função vectorial de classe C^1 (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- a curva C é regular, fechada e percorrida no sentido positivo (anti-horário);
- a curva C delimita uma região R no plano.

$$\oint_C F\,d\alpha=\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA$$

Integrais Triplos

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV \longrightarrow \text{ordem de integração}$$

$\downarrow$ região de integração (no espaço $\mathbb{R}^3$)

- **Coordenadas Cilíndricas** $(x,y,z)\mapsto(\rho,\theta,z)$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\le\rho\le R \\ y=\rho\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z=z & \end{cases}$$

Usar quando existirem regiões definidas com x^2+y^2 mas no espaço, em R^3.
Desta forma onde está x^2+y^2 passará a estar apenas ρ^2.
Não esquecer de multiplicar a função por ρ que é o Jacobiano da transformação das coordenadas.

- **Coordenadas Esféricas** $(x,y,z)\mapsto(\rho,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi & 0\le\rho\le R \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi & 0\le\theta\le 2\pi \\ z=\rho\cos\varphi & 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$

Note-se que **R** é o raio da esfera; **θ** é o ângulo no *"chão"* plano z=0, isto é o ângulo no *equador*; **φ** é o ângulo com o eixo dos zz, isto é com o *pólo norte*. Para a semiesfera superior fica $0\le\varphi\le\pi/2$.

Usar quando existirem regiões definidas com $x^2+y^2+z^2$.
Desta forma onde está $x^2+y^2+z^2$ passará a estar apenas ρ^2.
Não esquecer de multiplicar a função por ***$\rho^2\sin(\varphi)$*** que é o Jacobiano da transformação.

- **Volume de uma figura Ω no espaço**

$$\text{Volume}=\iiint_\Omega 1\,dV$$

- **Momentos de Inércia de uma figura Ω no espaço em relação aos eixos Ox, Oy e Oz**

$$I_{xx}=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\delta(x,y,z)\,dV \;;\; I_{yy}=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\delta(x,y,z)\,dV \;;\; I_{zz}=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\delta(x,y,z)\,dV.$$

Integrais de Superfície

- Quando o campo $f\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ é <u>escalar</u>

$$\iint_S f = \iint_D f\big(r(u,v)\big) \times \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv.$$

- Quando o campo $F\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ é <u>**vectorial**</u> (a notação _•_ diz respeito a um produto interno)

$$Fluxo = \iint_S F = \iint_D F\big(r(u,v)\big) \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} dudv$$

Onde a superfície **S** é parametrizada por ***r(u,v)*** e os parâmetros ***u*** e ***v*** estão na região ***D***.
Note-se que em ambos os casos o primeiro integral é de superfície e o segundo é um duplo.

- Quando a superfície é dada na forma $z = g(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big) \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

$$Fluxo = \iint_S F(x,y,z) = \iint_D F\big(x,y,g(x,y)\big) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dudv.$$

- A <u>**área da superfície S**</u> é um integral de superfície (escalar) com a função integranda igual a 1.

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv.$$

Ou se a superfície é dada na forma $z = g(x,y)$

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Teorema de Stokes (faz a ligação entre um integral de superfície e um curvilíneo)

INGREDIENTES:

- $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ é uma função vectorial de classe C^1 (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- D é uma região fechada no plano cuja fronteira é C (percorrida no sentido anti-horário;

$$\iint_S rot(F) = \oint_C F d\alpha.$$

Teorema da Divergência (Gauss) (liga um integral de superfície com um triplo)

INGREDIENTES:

- $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ é uma função vectorial de classe C^1 (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- S é uma superfície que limita um sólido V.

$$\iint_S F = \iiint_V div(F) dV$$

A **divergência** de um campo vectorial $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ é

$$div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3)$$

A divergência é um escalar.

O **rotacional** de um campo vectorial $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ é o seguinte vector

$$rot(F) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3)$$

O rotacional é um vector.