UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2023/24

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

Exame normal **07/06/2024**

Observações: (**i**) Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

(**ii**) Numere todas as folhas de teste que entregar. Por exemplo, para 3 folhas de teste, escreva na primeira 1/3, na segunda 2/3 e na terceira 3/3.

1) Considere a função $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y) = \left(\sqrt{xy}, \operatorname{sen}\left(y + x^2\right), \dfrac{1}{\sqrt{y - 1 - x^2}} \right)$.

a) Determine e represente geometricamente o domínio D de $\mathbf{f}$.

b) Indique o interior, a fronteira e o fecho de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

a) Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

b) Indique a função prolongamento g por continuidade da função f ao ponto $(0, 0)$.

c) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

d) Estude a diferenciabilidade de g em todos os pontos do seu domínio.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1, 0))$.

f) Determine a derivada de f no ponto $(1, 0)$ segundo o vector $(2, 3)$.

g) Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:

"Se $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\right\}$, então o conjunto $f(A)$ pode ser fechado e limitado.".

3) Considere as equações $x - u - v = 0$ e $y - 3u - 2v = 0$.

a) Mostre que as equações anteriores definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(2, 5, 1, 1)$.

b) Indique qual das opções seguintes é a verdadeira:

☐ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(2, 5) = -2$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}(2, 5) = -1$. ☐ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(2, 5) = -2$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}(2, 5) = 1$.

☐ $\dfrac{\partial v}{\partial x}(2, 5) = -3$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}(2, 5) = 1$. ☐ $\dfrac{\partial v}{\partial x}(2, 5) = -3$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}(2, 5) = -1$.

4) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = y^2 - x^3 + x^2$.

a) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela de f.

b) Determine o terceiro termo (termo de ordem 2) da Fórmula de Taylor de f no ponto $(1,1)$.

c) Determine o laplaciano de f no ponto $(1,1)$.

5) Considere o integral

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{x^2} f(x,y)\,dydx.$$

a) Esboce a região de integração D e inverta a ordem de integração.

b) Calcule, usando integrais duplos, a área da região de integração.

6) Considere a região M de $\mathbb{R}^3$ limitada superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Indique, em coordenadas cartesianas, um integral, duplo ou triplo, que define o volume de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

b) Indique, em coordenadas cilíndricas, um integral triplo que define o volume de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

c) Indique, em coordenadas esféricas, um integral triplo que define a massa de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda), sabendo que a densidade é dada por $\rho(x,y,z) = x$.

7) Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1 \wedge -1 \leq x \leq 2\right\} \text{ e } \mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \wedge -1 \leq x \leq 2\right\}.$$

a) Calcule, usando integrais de linha, o comprimento de $\mathcal{C}_2$.

b) Indique um integral de linha que define a área da superfície limitada inferiormente por $\mathcal{C}_1$ e superiormente por $f(x,y) = x^2y^4$ (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

c) Mostre que o campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(3yx^2 - 2x, 2y + x^3\right)$ é conservativo e determine uma função potencial de $\mathbf{F}$.

d) Calcule o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $\mathcal{C}_2$ orientada da esquerda para a direita.

e) Sem calcular, diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ orientada no sentido indirecto, então $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}|ds = 0$".

8) Seja $\mathcal{S}$ a superfície cilíndrica $y^2+z^2=9$ entre os planos $x=2$ e $x=3$. Considerando a parametrização definida por

$$\boldsymbol{\phi}\,(u,v) = (\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots)\,,$$

a área da superfície é dada por

$$A\,(\mathcal{S}) = \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \dots\dots\dots\dots \,\|(\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots\dots)\|\, dudv = \dots\dots\dots \ .$$