Exame 2022/23

1.

a) B

b) C

c) D

2.

a) Para $(x,y) \neq (0,1)$

$$f(x,y) = \frac{2x^2}{x^2+(y-1)^2}$$

$f(x,y)$ resulta da soma, multiplicação e quociente de funções projeção contínuas para $(x,y) \neq (0,1)$, pelo que f é igualmente contínua neste intervalo.

Para $(x,y) = (0,1)$

L.I.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1} \frac{2x^2}{x^2+(y-1)^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+(y-1)^2}\right) = \lim_{y\to 1} \frac{0}{(y-1)^2} = 0$$

Como os limites são diferentes, f não é contínua para $(x,y) = (0,1)$.

b) Para $(x,y) \neq (0,1)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(2x^2)'(x^2+(y-1)^2) - (2x^2)(x^2+(y-1)^2)'}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

$$= \frac{4x(x^2+(y-1)^2) - 4x^3}{(x^2+(y-1)^2)^2} = \frac{4x(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{(2x^2)'(x^2+(y-1)^2) - (2x^2)(x^2+(y-1)^2)'}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2(2y-2)}{(x^2+(y-1)^2)^2} = \frac{-4x^2y+4x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

Para $(x, y) = (0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-0}{h} = \infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Apenas existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

e) Para $(x,y) \neq (0,1)$

As derivadas parciais resultam da soma, multiplicação e quociente de funções projeção contínuas, pelo que ambas as derivadas também o são, também pois o denominador não se anula. Sendo f e as derivadas parciais de f contínuas para $(x,y) \neq (0,1)$, podemos afirmar que f é diferenciável no intervalo $(x,y) \neq (0,1)$.

Para $(x,y) = (0,1)$

A função f não é contínua no ponto, logo não é diferenciável.

d) $$f'_{(3,2)}(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,2)+(3,2)t) - f(1,2)}{t}$$

$$9t^2 + 6t + \cancel{1} + 4t^2 + 4t - \cancel{1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+3t, 2+2t) - 1}{t}$$

$$(1+3t)^2 - (1+2t)^2$$

$$5t^2 + 2t$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2(1+3t)^2}{(1+3t)^2 + (2+2t-1)^2} - 1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{5t + 2}{13t^2 + 10t + 2} = 1$$

e) Como f é diferenciável em (1,2), podemos calcular o plano tangente.

$$z = f(a,b) + \frac{df}{dx}_{(a,b)}(x-a) + \frac{df}{dy}_{(a,b)}(y-b) \Leftrightarrow \qquad \frac{df}{dx}_{(1,2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow z = f(1,2) + \frac{df}{dx}_{(1,2)}(x-1) + \frac{df}{dy}_{(1,2)}(y-2) \Leftrightarrow \qquad \frac{df}{dy}_{(1,2)} = -1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + x - 1 - (y-2) \Leftrightarrow z = x - y + 2 \Leftrightarrow x - y - z = -2$$

3.

a) $J_f = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3x^2 - 2y & 2y - 2x \end{bmatrix}$ $\quad \det(J_{f(1,-1)}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (5)(1) = -8 - 5 = -13 \neq 0$

Como o determinante da Jacobiana de f em (1,-1) é diferente de 0, f é invertível na vizinhança deste ponto.

b) $J_f^{-1} = \frac{1}{-13} \times \operatorname{adj} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/13 & 5/13 \\ 1/13 & -2/13 \end{bmatrix}$

adj = transposta dos cofatores

$\operatorname{adj} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\operatorname{div} f(1,-1) = \frac{df_1}{dx}_{(1,-1)} + \frac{df_2}{dy}_{(1,-1)} = 2 + (-4) = -2$

4.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

$\frac{df}{dx} = 2x - y + 1 \qquad \frac{df}{dy} = 2y - x \qquad \frac{df}{dz} = 2z - 2$

$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \\ \frac{df}{dz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - y = -1 \\ x = 2y \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/3 \\ x = -2/3 \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad$ P.C. $= \{(-2/3, -1/3, 1)\}$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 2 \qquad \frac{d^2f}{dx\,dy} = -1 \qquad \frac{d^2f}{dx\,dz} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy\,dx} = -1 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 2 \qquad \frac{d^2f}{dy\,dz} = 0$

$\frac{d^2f}{dz\,dx} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dz\,dy} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dz^2} = 2$

$$H(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dzdx} \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dy^2} & \frac{d^2f}{dzdy} \\ \frac{d^2f}{dxdz} & \frac{d^2f}{dydz} & \frac{d^2f}{dz^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H(-1/3, -2/3, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 2 > 0$

$d_2 = 5 > 0$ $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ é um

$d_3 = 10 > 0$ mínimo local

b) $\vec{f}(\vec{a}+h) = f(\vec{a}) + \frac{df}{dx}(\vec{a})\, h_1 + \frac{df}{dy}(\vec{a})\, h_2 + \frac{df}{dz}(\vec{a})\, h_3 + R_2(\vec{h})$

$\vec{f}((0,1,0)+h) = 1 + 0(h_1) + 2h_2 - 2h_3 + R_2(\vec{h})$

$= 2h_2 - 2h_3 + 1 + R_2(\vec{h})$

5.

a) Os limites iterados apenas são uma forma de abordar uma função.

$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ tem limites iterados 0, mas para $y=x^2$, temos o limite igual a $\frac{1}{2}$. Falso

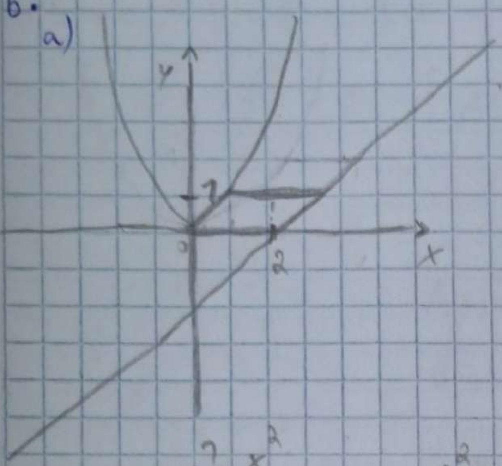
b) Não necessariamente, pode ser um ponto de sela. Falso

c) $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{df_1} \times \frac{df_1}{dx} + \frac{dz}{df_2} \times \frac{df_2}{dx} = \frac{dz}{df_1} - \frac{dz}{df_2}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{df_1} \times \frac{df_1}{dy} + \frac{dz}{df_2} \times \frac{df_2}{dy} = -\frac{dz}{df_1} + \frac{dz}{f_2}$

$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = 0$ Verdadeiro

6. a) $\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3\int_{x-2}^1 f(x,y)\,dy\,dx$



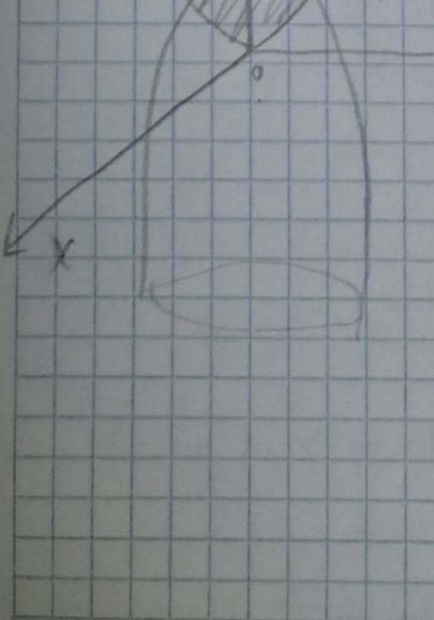
b) $M = \int_0^1\int_0^{x^2} 1\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^1 1\,dy\,dx + \int_2^3\int_{x-2}^1 1\,dy\,dx$

$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 3-x\,dx$

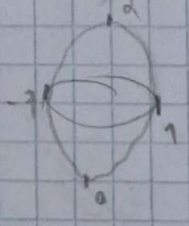
$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [x]_1^2 + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3$

$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{9}{2} - 4 = \frac{11}{6}$

7. a)



Interseção $\rightarrow x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$



$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{2-x^2-y^2}_{\text{f. sup.}} - \underbrace{x^2-y^2}_{\text{f. inf}}\,dy\,dx$

$\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz = 2-x^2-y^2-x^2-y^2$

b)

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r^2}^{2-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr$$

c)

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r^2}^{2-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r - 2r^3 \, d\theta \, dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 2r - 2r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} \left[r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

8.

a)

$L(\mathcal{C}_1)$

$\varphi(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t),\ t \in [0, \pi]$

$\varphi'(t) = (-2\,\text{sen}\, t, 2\cos t) \neq \vec{0}\ \forall_{t \in [0,\pi]}$

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{4} = 2$

$L(\mathcal{C}_1) = \int_0^{\pi} 2 \, dt = 2\pi$

b)

$$A = \int_{\mathcal{C}_1} f(x,y) \, \|\varphi'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2\cos t)^2 \, 2\,\text{sen}\, t \times 2 \, dt = \int_0^{\pi} 16 \cos^2 t \,\text{sen}\, t \, dt$$

c) $F(x,y) = (2x + y^3, 3xy^2 - 2y)$

$\vec{\nabla f} = F(x,y) \Leftrightarrow \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) = (2x + y^3, 3xy^2 - 2y)$

$\frac{df}{dx} = 2x + y^3$, $P_x\,(2x + y^3) = x^2 + y^3 x$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^3 x + g(y)$

$\frac{df}{dy} = 3y^2 x + \frac{dg}{dy} \Rightarrow \frac{dg}{dy} = -2y$, $P(-2y) = -y^2$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^3 x - y^2 + c,$

$c \in \mathbb{R}$

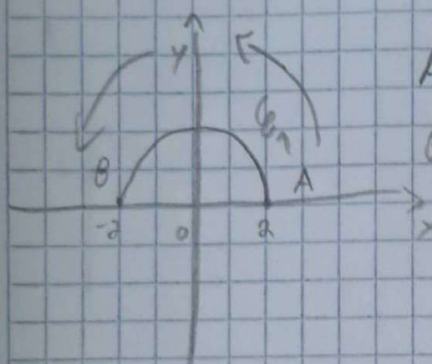
Como existe uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \nabla f = \vec{F}$, então $\vec{F}$ é um campo conservativo.

d) Como $\nabla f = \vec{F}$ e f é potencial, temos:

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-2,0) - f(2,0) = 4 - 4 = 0$$

$f(-2,0) = (-2)^2 = 4$

$f(2,0) = 2^2 = 4$



$A = (2,0)$

$B = (-2,0)$

e) F é um campo conservativo e C uma curva fechada, logo:

$$\int_C F\,ds = 0$$

9. $S: x^2 + z^2 = 9$, com $2 < y < 3$

$f(x,y,z) = 1 + 2x$

$\varphi(u,v) = (3\cos u, v, 3\,\text{sen}\,u)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [2,3]$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3\,\text{sen}\,u & 0 & 3\cos u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3\cos u, 0, -3\,\text{sen}\,u) \neq \vec{0},\ \forall (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]$$

$\vec{\varphi}$ é regular

$$\iint_S f\,dS = \int_2^3 \int_0^{2\pi} (1 + 6\cos u)\,\|(-3\cos u, 0, -3\,\text{sen}\,u)\|\,du\,dv$$

$f(\vec{\varphi}(u,v)) = 1 + 6\cos u$