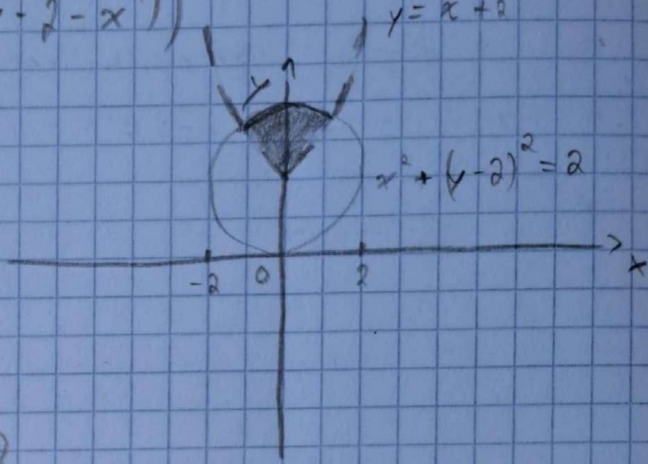
1ª Frequência 2023/24

1.

a) $f(x,y) = \left(\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}, \ln(y-2-x^2)\right)$



Condições

$4-x^2-(y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 \leq 4$

$y-2-x^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y > x^2+2$

$D_f = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 \leq 4 \land y > x^2+2\}$

b)

$\text{int}(D) = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 < 4 \land y > x^2+2\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 = 4 \land y \geq x^2+2 \lor y = x^2+2 \land x^2+(y-2)^2 \leq 4$

$\bar{D} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-2)^2 \leq 4 \land y \geq x^2+2\}$

$D' = \bar{D}$

Como $D \neq \text{int}(D)$, D não é aberto

Como $D \neq \bar{D}$, D não é fechado

Para $L = 6$, $\forall \vec{x} \in D, \|\vec{x}\| < L$, logo D é limitado

2.

a) Para $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$

$f(x,y)$ resulta da soma, multiplicação e quociente de funções projeção contínuas em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, pelo que f é igualmente contínua nesse intervalo.

b)

L.I.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Vamos provar que, para qualquer $\delta > 0$ arbitrário, conseguimos encontrar um $\varepsilon > 0$ de forma a que, para qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, temos:

$0 < |\vec{x} - \vec{0}| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \delta$

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^2 . |x|^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \varepsilon^2 = \delta$$

Basta tomar $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ para provar que:

$\lim\limits_{(x,y) \to \vec{0}} f(x,y) = 0$ Sendo o limite $= 0$, podemos prolongar a continuidade:

$$g(x,y) \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e) Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{(x^4)'(x^2+y^2) - (x^4)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{dg}{dy} = \frac{(x^4)'(x^2-y^2) - (x^4)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$\frac{df}{dy} = \lim_{h \to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

d) Para $(x,y) \neq (0,0)$

As derivadas parciais resultam da soma, produto e quociente de funções projeção contínuas, pelo que ambas as derivadas parciais também o são, também pois não se anula o denominador. Sendo g e as derivadas parciais em g contínuas, podemos afirmar que g é diferenciável no intervalo $(x,y) \neq (0,0)$

Para $(x, y) = (0, 0)$

As derivadas parciais são contínuas pois são constantes. Sendo g e as derivadas parciais contínuas em $(x, y) = (0,0)$, podemos afirmar que g é diferenciável para $(x, y) = (0,0)$.

Assim, g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

e) Como f é diferenciável em $(1,0)$, podemos calcular o plano tangente.

$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \Leftrightarrow$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$

$\Leftrightarrow z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) \Leftrightarrow$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1 + 2x - 2 \Leftrightarrow 2x - z = 1$

f) O conjunto A é fechado e limitado, logo, pelo Teorema de Weierstrass, uma função contínua atinge máximo e mínimo neste conjunto, como f. Verdadeiro

3.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial f} \times \frac{\partial f}{\partial x} + y = \frac{\partial z}{\partial f} \times 2x + y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial f} \times \frac{\partial f}{\partial y} + x = \frac{\partial z}{\partial f} \times 2y + x$

$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y)\left(\frac{\partial z}{\partial f}\right)(2x) + y^2 - \left((x)\left(\frac{\partial z}{\partial f}\right)(2y) + x^2\right) = y^2 - x^2$

4.

$J(g \circ f)(a, b) = Jg(f(a,b)) \times Jf(a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J(g \circ f)(0,1) = Jg(f(0,1)) \times Jf(0,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J(g \circ f)(0,1) = Jg(1,0) \times Jf(0,1)$ Opção D

5.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

L. D.

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{x\,mx}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$ o limite depende de m, logo a função não é contínua em $(x,y)=(0,0)$

No entanto, as derivadas parciais em $(x,y)=(0,0)$ existem e são contínuas:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ Falso

b) A diferenciabilidade implica continuidade. Verdadeiro

c) Os limites direcionais são apenas algumas de várias formas de nos aproximarmos de uma função. Se optar-mos por uma aproximação quadrática como $y = x^2$, o limite pode ser diferente.

Ex:

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{x^3 m}{x^4 + x^2m^2} = \lim_{x \to 0} \frac{xm}{x^2+m^2} = \frac{0}{m^2} = 0$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x^2}} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ São diferentes

Falso

d) Para uma função ser diferenciável, esta tem de ser contínua e ter todas as derivadas parciais contínuas. Verdadeira

e) $f'_{(1,2)}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot (1,2)$

$= (1,1) \cdot (1,2)$

$= 1 + 2 = 3 \neq 4$

$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)$

$= (1,1)$

Como $f'_{(1,2)}(1,0) \neq \nabla f(1,0) \cdot (1,2)$, concluímos que f não é diferenciável. Verdadeiro