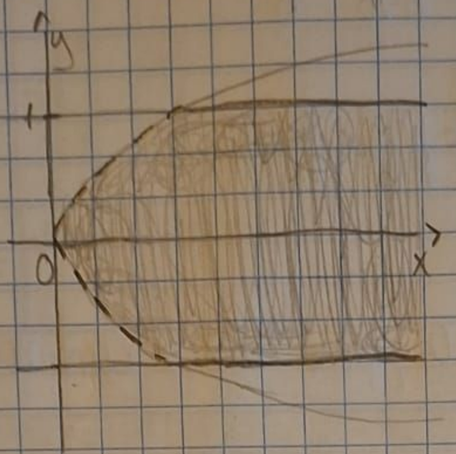
Extra

1-

a)

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-y^2 \geq 0 \wedge x-y^2 > 0\}$



b)

$int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-y^2 > 0 \wedge x > y^2\}$

$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1-y^2 = 0 \wedge x > y^2) \vee (1-y^2 > 0 \wedge x = y^2)\}$

$\overline{D_f} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-y^2 \geq 0 \wedge x \geq y^2\}$

$D_f' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-y^2 \geq 0 \wedge x \geq y^2\}$

Não é aberto pois $int(D_f) \neq D_f$ e não é fechado pois $\overline{D_f} \neq D_f$

É ilimitado pois $\nexists L > 0$ tal que $\forall \vec{x} \in D_f : \|\vec{x}\| < L$

2-

a) Limites iterados

$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^4} = 0$

Limite direcional

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \underset{y=mx}{=} \lim_{x \to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0$

Se considerarmos a restrição $x = y^2$ temos:

$\lim_{y \to 0} \frac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$ logo, não existe limite, então não é contínua em $(0,0)$

b) Como é um ponto de transição, usamos a definição de derivada parcial no ponto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} = \frac{0}{h} = 0$$

c) f não é diferenciável em $(0,0)$, pois não é contínua nesse ponto

d)

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$f(1,1) = \frac{1 \cdot 1^2}{1^2 + 1^4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4xy^5}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$$

Logo, $z = \frac{1}{2}$

3-

a) $h(x,y) = g(f(x,y)) = g(e^{xy}, \arctan(x+y))$

$h_1(x,y) = u + v^2 = e^{xy} + \arctan^2(x+y)$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2 \cdot \arctan(x+y) \cdot \frac{1}{1+(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2 \cdot \arctan(x+y) \cdot \frac{1}{1+(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Logo $\nabla h_1(0,0) = (0,0)$

b)

$$Jh(0,0) = Jg(f(0,0)) \cdot Jf(0,0)$$

$$Jg(f(0,0)) = Jg(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Jf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Jh(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\operatorname{div}(h(0,0)) = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0) = 0 + 1 = 1$$