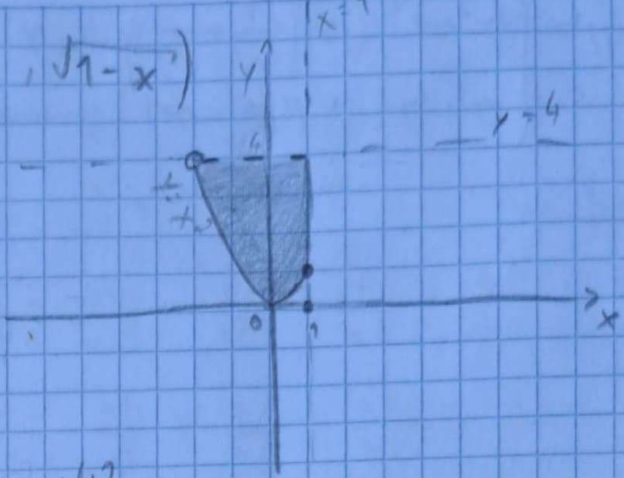
1º Frequência 2024/25

1.

a) $f(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{4-y}}, \ln(y-x^2), \sqrt{1-x} \right)$



Condições:

$4-y>0 \Leftrightarrow y<4$

$y-x^2>0 \Leftrightarrow y>x^2$

$1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$

$D_f = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\leq 1 \wedge x^2<y \wedge y<4\}$

b)

$\text{int}(D) = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x<1 \wedge x^2<y \wedge y<4\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : (x=1 \wedge 1\leq y\leq 4) \vee (y=x^2 \wedge -2\leq x\leq 1) \vee (y=4 \wedge -2\leq x\leq 1)\}$

$\overline{D} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\leq 1 \wedge x^2\leq y \wedge y\leq 4\}$

$D' = \overline{D}$

Como $D \neq \text{int}(D)$, D não é aberto

Como $D \neq \overline{D}$, D não é fechado

Para $L = 8$, $\forall \vec{x} \in D, \|\vec{x}\| < L$, logo D é limitado

2.

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$

$f(x,y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$

f(x,y) resulta da soma, multiplicação e quociente entre funções projeção contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pelo que f é igualmente contínua nesse intervalo.

Para $(x,y)=(0,0)$

L.I.

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$

Vamos provar que, para qualquer $\delta > 0$ arbitrário, conseguimos encontrar um $\varepsilon > 0$ de forma a que, para quaisquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, temos:

$0 < |\vec{x} - (0,0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 1| < \delta$

$$\left| \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2+y^2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2+2xy+y^2 - x^2 - y^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{2xy}{x^2+y^2} \right| = \frac{2|x||y|}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2$$

Não se consegue estabelecer uma relação entre ε e δ, logo $f(x,y)$ não é contínua em $(x,y) = (0,0)$

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+2xy+y^2)'(x^2+y^2) - (x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(2x+2y)(x^2+y^2) - (x^2+2xy+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+2xy+y^2)'(x^2+y^2) - (x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(2x+2y)(x^2+y^2) - (x^2+2xy+y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 0}{h} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 0}{h} = \frac{1}{0} = \infty$$

Embora diferenciabilidade implique continuidade, provamos na mesma que o limite dá ∞, logo não existem derivadas parciais para $(x,y) = (0,0)$. Assim, apenas existem derivadas parciais em $(x,y) \neq (0,0)$

c) As derivadas parciais para $(x,y) \neq (0,0)$ resultam da soma, produto e quociente de funções projeção contínuas para $(x,y) \neq (0,0)$, pelo que ambas as derivadas parciais também são contínuas, também pois não se anula o denominador no intervalo. Assim, f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$.
Para $(x,y) = (0,0)$, f não é contínua nem tem derivadas parciais, logo não é diferenciável.

d) $$f'_{(1,2)}(1,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((1,0)+(1,2)t) - f(1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1+1t, 2t) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(1+t)^2 + 2(1+t)(2t) + 4t^2}{(1+t)^2 + 4t^2} - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{4t(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{4+4t}{1} \overset{\text{R.C.}}{=} \frac{4}{1} = 4$$

e) Como f é diferenciável em $(1,0)$, podemos calcular o plano tangente.

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}_{(a,b)}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}_{(a,b)}(y-b) \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}_{(1,0)} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}_{(1,0)}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}_{(1,0)}(y-0) \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}_{(1,0)} = 2$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + 2y \Leftrightarrow -2y + z = 1$$

f) Se f tem derivadas de segunda ordem contínuas num conjunto aberto contendo $(1,1)$, então $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}$. Como f é diferenciável em $(1,1)$, as derivadas de segunda ordem serão contínuas nesse ponto. Logo, o teorema de Schwartz aplica-se.

3.

a) $f(x,y) = (x-1)\,sen\left(\frac{1}{y^2}\right)$

L.I.

$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} (x-1) \cdot sen\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) \overset{?}{=} 0$ o mesmo se aplica na outra ordem

infinitésimo × limitado

Vamos provar que, para qualquer $\delta > 0$ arbitrário, conseguimos encontrar um $\varepsilon > 0$ de forma a que, para qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, temos:

$0 < \|\vec{x} - (1,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|(x-1)\,sen\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| < \delta$

$\left|sen\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \leq 1 \Leftrightarrow |x-1| \cdot \left|sen\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \leq |x-1|$

$\Leftrightarrow |f(x,y)| \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$

Portanto, basta encontrar um $\varepsilon = \delta$ para provar o limite. Assim, o limite existe e obtemos a seguinte função prolongada:

$$g(x,y) = \begin{cases} (x-1)\,sen\left(\frac{1}{y^2}\right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Falso

b) O conjunto A é fechado e limitado. Então, pelo teorema de Weierstrass, f tem um máximo e um mínimo. Verdadeiro

c) Contraexemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

Existe derivada

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

L.D. $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(mx)}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1+m^2}$$ Como o limite depende do m, não existe logo não é contínua. Falso

A existência de derivadas parciais de primeira ordem não implica diferenciabilidade. Apenas a diferenciabilidade implicaria a continuidade.

d) $f(x,y) = (1 + e^{2x} + y, 1 - x + y)$

$$D_g(2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$h = g \circ f = g(f)$

1) $f(0,0) = (2,1)$ $\quad g(f(0,0)) = g(2,1)$

2) $J_f(0,0)$

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2x} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Como $h = g \circ f$, temos

$J_h = J_g(2,1) \cdot J_f(0,0)$, pois $g(f(0,0)) = g(2,1)$

$$J_h = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, $\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0) = -5$ Verdadeiro

e) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial f_1} \times \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \times \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial f_1} - \frac{\partial z}{\partial f_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial f_1} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \times \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial f_1} + \frac{\partial z}{\partial f_2}$$

Assim, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial f_1} - \frac{\partial z}{\partial f_2} - 2\frac{\partial z}{\partial f_1} + \frac{\partial z}{\partial f_2} = 0$ Verdadeiro