UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

1.ª Frequência **18/03/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere o conjunto

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-(x-1)^2-y^2} > 0 \wedge xy \geq 0 \right\}.$$

Em cada uma das alíneas seguintes escolha uma opção de modo a obter uma afirmação verdadeira.

a) O interior do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \wedge x > 0 \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \wedge y > 0 \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 > 1 \wedge y > 0 \right\}$.

b) A fronteira do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left((x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \right) \vee (y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2) \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left((x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0 \right) \vee (y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2) \right\}$.

☐ $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \vee y = 0 \right\}$.

c) O conjunto A

☐ é aberto e é fechado.

☐ não é aberto e não é fechado.

☐ não é aberto e é fechado.

☐ é aberto e não é fechado.

2) Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Estude a função f quanto à continuidade.

b) Determine, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

c) Estude a função f quanto à diferenciabilidade.

d) Determine a derivada de f no ponto $(1,1)$ segundo o vector $(1,2)$, $f'_{(1,2)}(1,1)$.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

3) Sejam $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $\mathbf{f}(x,y)=\left(1+e^{2x}+y, 1-x+y\right)$, $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(2,1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Em cada uma das alíneas seguintes escolha uma opção de modo a obter uma afirmação verdadeira.

a) Seja $\mathbf{h}=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$, então

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=-5.$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=5.$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=3.$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)=-1.$

b) A divergência de $\mathbf{h}$ no ponto $(0,0)$ é dada por

☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=-1.$

☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=2.$

☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=-2.$

☐ $\operatorname{div}\mathbf{h}(0,0)=1.$

4) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Seja $A\subseteq\mathbb{R}^2$ um conjunto fechado. Então, $\overline{A}=A'$.

b) A função definida por $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ tem por domínio o conjunto $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ e é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

c) Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, $z=f\left(x^2-y^2, y^2-t^2\right)$ satisfaz a equação

$$yt\frac{\partial z}{\partial x}+xt\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial t}=0.$$