UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2023/24

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

1.ª Frequência **23/03/2024**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere a função $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}, \ln\left(y - 2 - x^2\right)\right).$$

a) Determine e represente geometricamente o domínio D de $\mathbf{f}$.

b) Indique o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}.$$

a) Estude a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio.

b) Indique a função prolongamento g por continuidade da função f ao ponto $(0,0)$.

c) Determine $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

d) Estude a função g quanto à diferenciabilidade.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

f) Diga, justificando, sem calcular, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "A função f tem máximo e mínimo no conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \land 1 \le y \le 2\right\}$".

3) Seja $z = xy + f\left(x^2 + y^2\right)$, onde f é uma função diferenciável. Mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2.$$

4) Sejam $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $(0,1)$, $f(0,1)=(1,0)$ e $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $(1,0)$. Indique qual das opções seguintes corresponde à matriz jacobiana de $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ no ponto $(0,1)$:

- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(1,0)) \times J\mathbf{f}(1,0)$.
- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(1,0) \times J\mathbf{f}(1,0)$.
- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(0,1) \times J\mathbf{f}(0,1)$.
- ☐ $J(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(0,1) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(0,1)) \times J\mathbf{f}(0,1)$.

5) Das opções seguintes indique, com V ou F, as que são **verdadeiras** ou **falsas**, respectivamente.

____ A existência de todas as derivadas parciais de primeira ordem finitas num ponto implica a continuidade da função nesse ponto.

____ Se uma função é diferenciável num ponto, então a função é contínua nesse ponto.

____ Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existem todos os limites direccionais e com o mesmo valor na origem, então existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

____ Se não existe alguma derivada parcial de primeira ordem num ponto, então a função não é diferenciável nesse ponto.

____ Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$ e $f'_{(1,2)}(1,0) = 4$. Então, f não é diferenciável em $(1,0)$.