UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

3.ª Frequência **20/05/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e S a região definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

Então,

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} f(\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots) \dots\dots\dots\dots\; dzd\theta d\rho,$$

onde (ρ, θ, z) são as coordenadas cilíndricas.

2) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e M a região definida por

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge y \geq 0\right\}.$$

Então,

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} f(\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots) \dots\dots\dots\dots\; drd\phi d\theta,$$

onde (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas.

3) Considere o triângulo $\mathcal{C}$ de vértices $(0,0)$, $(0,4)$ e $(2,0)$.

$a)$ Calcule, usando integrais de linha, o comprimento de $\mathcal{C}$.

$b)$ Calcule, usando integrais de linha, o trabalho realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x,y) = (1 + xy, x - y)$ ao longo do triângulo $\mathcal{C}$, orientado no sentido indirecto.

$c)$ Pode aplicar-se o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo do triângulo $\mathcal{C}$? Em caso de resposta afirmativa, confirme o resultado obtido na alínea $b)$.

4) Considere o campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{3y} + y \operatorname{sen} x, 3xe^{3y} - \cos x\right)$ e $\mathcal{C}$ a curva definida por $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \wedge y \geq 0\right\}$ e orientada no sentido directo.

$a)$ Mostre que F é conservativo e determine uma função potencial de F.

$b)$ Calcule, usando o Teorema fundamental dos integrais de linha, o integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}|ds$.

$c)$ Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "Existem curvas $\widetilde{\mathcal{C}}$ para as quais o integral $\int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \mathbf{F}|ds = 0$".

5) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2$ e seja $\mathcal{S}$ uma superfície parametrizada por $\boldsymbol{\phi} : [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\phi}(u,v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u)$.

Então,

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \dots\dots\dots\dots \|(\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots)\| \; dudv =$$

$$= \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \int_{\dots\dots}^{\dots\dots} \dots\dots\dots\dots (\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots) \; dudv = \dots\dots\dots\dots$$