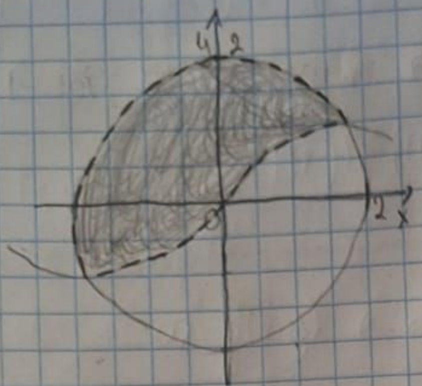
Extra

1-

a)




b)

$int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \operatorname{sen} x \wedge x^2+y^2 < 4\}$

$fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = \operatorname{sen} x \wedge x^2+y^2 < 4) \vee (x^2+y^2 = 4 \wedge y < \operatorname{sen} x)\}$

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \operatorname{sen} x \wedge x^2+y^2 \leq 4$

A é aberto pois $int(A) = A$ mas não é fechado pois $\bar{A} \neq A$.

A é um conjunto limitado pois $\exists L > 0$ tal que $\forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| < L$, basta tomar $L = 3$, por exemplo.

2-

a) Limites iterados

$$\lim_{x \to 0} \left( \lim_{y \to 0} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left( \lim_{x \to 0} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Limites direcionais

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \overset{y=mx}{=} \lim_{x \to 0} \frac{m x^4}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m x^2}{1+m^2} = 0$$

Vamos provar que $\forall \delta > 0$ arbitrário, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \right| < \delta$$

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\right| = (x^2+y^2) < \varepsilon^2 = \delta$$

Então, basta tomarmos $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ para provarmos o que queríamos

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ logo $f$ é contínua

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) + 2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2) + 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Logo existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(0,0)$

c) Se $f(x,y)$ for diferenciável em $(0,0)$ então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{y=mx}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4m}{(x^2+m^2x^2)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{(1+m^2)\sqrt{1+m}} = 0$$

Vamos provar que $\forall \delta > 0$ arbitrário, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \delta$$

$$\left|\frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| \leq x^2+y^2 < \varepsilon = \delta$$

Então, basta tomar $\varepsilon = \delta$ para provarmos o que queríamos

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Por isso, $f(x,y)$ é diferenciável em $(0,0)$

3-

a)

$$\begin{cases} x = u^2+v \\ y = uv+v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-u^2-v=0 \\ y-uv-v^2=0 \end{cases}$$

Logo, temos $\vec{F}(x,y,u,v) = (x-u^2-v,\ y-uv-v^2)$

$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,u,v) = 1$ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,u,v) = 0$ $\frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) = -2u$ $\frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) = -1$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,u,v) = 0$ $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,u,v) = 1$ $\frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) = -v$ $\frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) = -u-2v$

... logo $\vec{F}$ é contínua

$\vec{F}(2,2,1,1) = (2-1-1,\ 2-1-1) = (0,0)$

$$\det(J\vec{F}_{(u,v)}(2,2,1,1)) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5 \neq 0$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita e concluir que existe $f$ tal que $(u,v) = f(x,y)$ numa vizinhança de $(x,y,u,v) = (2,2,1,1)$

b)

$$-(J\vec{F}_{(u,v)}(2,2,1,1))^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J\vec{F}_{(x,y)}(2,2,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Jf(2,2) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Logo, $\frac{\partial u}{\partial x}(2,2) = \frac{3}{5}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(2,2) = \frac{2}{5}$

4-

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x^9 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Se } x=-1 \Rightarrow y=-1 \text{; Se } x=1 \Rightarrow y=1 \text{; Se } x=0 \Rightarrow y=0 \\ \end{cases}$$

Logo, P.C: $(-1,-1), (0,0), (1,1)$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4$$

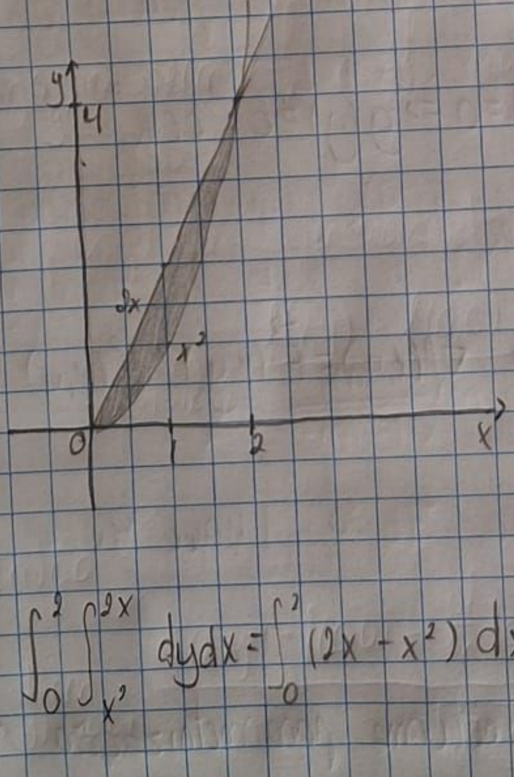
$$H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \end{matrix} \right\} \text{mínimo local}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} d_1 = 0 \\ d_2 < 0 \end{matrix} \right\} \text{ponto sela}$$

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \end{matrix} \right\} \text{mínimo local}$$

5-

a)



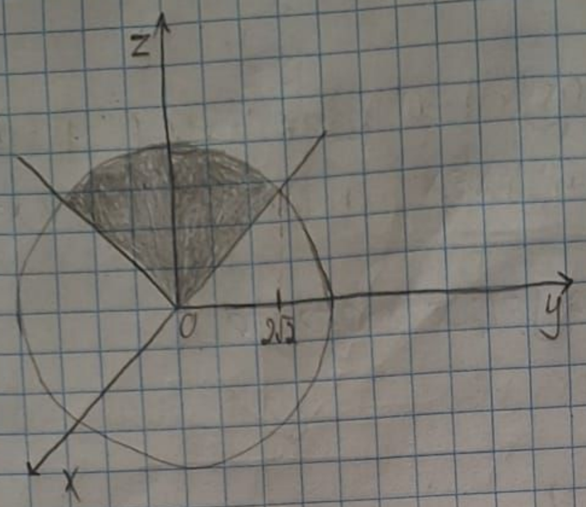

b)

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

c)

$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

6-
a)




$z=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z^2=x^2+y^2$

$x^2+y^2+z^2=16 \Leftrightarrow 2z^2=16 \Leftrightarrow z=\pm 2\sqrt{2}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\rho}^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

b) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4} r^3 \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \; dr \, d\varphi \, d\theta$$

7-
a)

$f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)+g(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\cos(xy)+g'(y) \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Logo $f(x,y)=x\operatorname{sen}(xy)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Então, como existe $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y)=\vec{F}(x,y)$, $\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo

b) $\vec{F}$ é um campo conservativo

$\vec{r}(t)=(t,t),\ t\in[0,1]$

$\vec{r}'(t)=(1,1)\neq\vec{0},\ \forall t\in \operatorname{int}([0,1])$ logo é uma parametrização regular

$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)=-y^2\operatorname{sen}(xy)$ $\quad\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)=\cos(xy)-xy\operatorname{sen}(xy)$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)=\cos(xy)-xy\operatorname{sen}(xy)$ $\quad\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)=-x^2\operatorname{sen}(xy)$

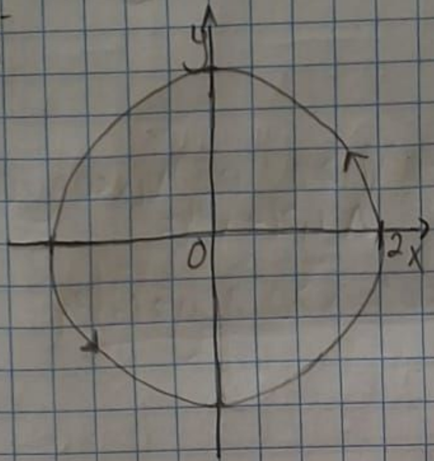
$\therefore$ logo $\vec{F}$ é de classe $C^1$

Então, podemos aplicar o Teorema Fundamental das Integrais de Linha

$\int_C \vec{F}\,ds = f(1,1)-f(0,0)=\operatorname{sen}(1)$

8-

a)




$\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}\,'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t)) \neq \vec{0},\ \forall t \in \text{int}([0, 2\pi])$

logo é parametrização regular

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \vec{F}_1}{\partial x}(x,y) = 0 & \dfrac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}(x,y) = -1 \\ \dfrac{\partial \vec{F}_2}{\partial x}(x,y) = 1 & \dfrac{\partial \vec{F}_2}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right\} \ldots \text{ logo, } \vec{F} \text{ é de classe } C^1$$

Então, podemos aplicar o Teorema de Green

$$\int_C \vec{F}\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (1-(-1))\,\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} 4\, d\theta = 8\pi$$

b) Sendo a área do círculo $= \pi r^2 = 4\pi$, então $8\pi$ é o dobro, logo, como o Teorema de Green mede o "giro total" do campo dentro da curva, e como é o dobro, então o campo gira duas vezes no círculo.

Além disso, como o resultado é positivo, o campo tem o mesmo sentido de orientação que a curva