UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

2.ª Frequência **22/04/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere as equações $x^2 + y^2 = 3u + v$ e $x^2 y = 4uv$.

a) Mostre que as equações anteriores definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(1, 0, 0, 1)$.

b) Sendo $\mathbf{f}$ a função implícita na alínea anterior, indique qual das opções seguintes é a verdadeira:

☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$. ☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. ☐ $J\mathbf{f}\,(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f\,(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$.

a) Determine, caso existam, os extremos locias e os pontos de sela de f.

b) Indique qual das opções seguintes corresponde ao terceiro termo (termo de ordem 2) da Fórmula de Taylor de f no ponto $(0, 0)$:

☐ $eh_1^2 + 2e^2 h_1 h_2$. ☐ $eh_1^2 - eh_2^2$. ☐ $eh_1^2 + eh_2^2$. ☐ $eh_1^2 - 2e^2 h_1 h_2$.

3) Considere o integral

$$\iint\limits_D f\,(x, y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{x^2-1}^{1+x} f\,(x, y)\,dydx.$$

a) Esboce a região de integração.

b) Inverta a ordem de integração.

c) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

4) Considere o sólido S limitado superiormente por $z = 3$, inferiormente por $z = 2 + x^2 + y^2$ e tal que $y \geq 0$.

a) Sendo V o volume do sólido S, indique qual das opções seguintes é a verdadeira:

- ☐ $V = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dydx.$
- ☐ $V = \displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} \left(1 - \rho^2\right) d\rho d\theta.$
- ☐ $V = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2+x^2+y^2}^{3} dzdydx.$
- ☐ $V = \displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \left(1 - \rho^2\right) \rho\, d\rho d\theta.$

b) Supondo que o sólido S tem a densidade constante igual a k, detemine a massa do sólido.

5) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) A função $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$ definida na região do plano dada por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$ tem um extremante no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) A distância mínima entre o ponto $(3, 0, 2)$ e o plano de equação $z = x + y + 2$ é igual a $\sqrt{3}$.

c) Seja $M = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$. Então, $\displaystyle\iiint_M xyz^2 dxdydz = \frac{26}{3}$.