UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2023/24

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

3.ª Frequência **07/06/2024**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere a região M de $\mathbb{R}^3$ limitada superiormente por $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente por $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

a) Indique, em coordenadas cartesianas, um integral triplo que define o volume de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

b) Indique, em coordenadas cilíndricas, um integral triplo que define o volume de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

c) Indique, em coordenadas esféricas, um integral triplo que define a massa de M (com indicação dos extremos do integral e função integranda), sabendo que a densidade é dada por $\rho(x,y,z)=x$.

2) Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2-1 \wedge -1\leq x\leq 2\right\} \text{ e } \mathcal{C}_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x+1 \wedge -1\leq x\leq 2\right\}.$$

a) Calcule, usando integrais de linha, o comprimento de $\mathcal{C}_2$.

b) Indique um integral de linha que define a área da superfície limitada inferiormente por $\mathcal{C}_1$ e superiormente por $f(x,y)=x^2y^4$ (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

c) Mostre que o campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y)=\left(3yx^2-2x, 2y+x^3\right)$ é conservativo e determine uma função potencial de $\mathbf{F}$.

d) Calcule o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $\mathcal{C}_2$ orientada da esquerda para a direita.

e) Sem calcular, diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: "Seja $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ orientada no sentido indirecto, então $\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}|ds=0$".

3) Seja $\mathcal{S}$ a superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 2$ e $x = 3$. Considerando a parametrização definida por

$$\boldsymbol{\phi}\,(u, v) = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\,,$$

a área da superfície é dada por

$$A\,(\mathcal{S}) = \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,\|(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\|\, du dv = \ldots\ldots\ldots\ldots \;.$$

4) Determine o integral de superfície $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}|dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\mathcal{S}$ é a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1 e orientada para o exterior.