UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2022/23

EER, EGI, EI, EM, FQ, M, MAEG

Exame normal **09/06/2023**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere o conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} > 0 \wedge y \geq |x| \right\}.$$

Em cada uma das alíneas seguintes escolha uma opção de modo a obter uma afirmação verdadeira.

a) O interior do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1 \vee (y > x \wedge y > -x) \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1 \wedge (y > x \wedge y > -x) \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1 \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1 \wedge (y > x \vee y > -x) \right\}$.

b) A fronteira do conjunto A é o conjunto

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + (y-1)^2 = 1 \wedge x \geq 1 \right) \vee ((y = x \vee y = -x) \wedge 0 \leq y \leq 1) \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + (y-1)^2 = 1 \wedge y \geq 1 \right) \vee ((y = x \vee y = -x) \wedge 0 \leq y \leq 1) \right\}$.

☐ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \vee y = |x| \right\}$.

c) O conjunto A

☐ é aberto e é fechado.

☐ não é aberto e não é fechado.

☐ não é aberto e é fechado.

☐ é aberto e não é fechado.

2) Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+(y-1)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,1)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,1)\,. \end{cases}$$

$a)$ Estude a função f quanto à continuidade.

$b)$ Determine, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

$c)$ Estude a função f quanto à diferenciabilidade.

$d)$ Determine a derivada de f no ponto $(1,2)$ segundo o vector $(3,2)$, $f'_{(3,2)}(1,2)$.

$e)$ Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,f(1,2))$.

3) Seja $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y)=(x^2+y, x^3-2xy+y^2)$.

$a)$ Mostre que a função $\mathbf{f}$ é localmente invertível numa vizinhança de $(1,-1)$.

$b)$ Determine a matriz jacobiana de $\mathbf{f}^{-1}$ no ponto $\mathbf{f}(1,-1)$.

$c)$ Determine a divergência de $\mathbf{f}$ no ponto $(1,-1)$

4) Considere a função definida em $\mathbb{R}^3$ por $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

$a)$ Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela de f.

$b)$ Determine o segundo termo (termo de ordem 1) da Fórmula de Taylor de f no ponto $(0,1,0)$.

5) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

$a)$ Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que existem todos os limites iterados e com o mesmo valor no ponto $(0,0)$, então existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$b)$ Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Se $\nabla f(a,b)=(0,0)$, então f tem um máximo ou um mínimo em (a,b).

$c)$ Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, $z=f(x-y,y-x)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

6) Considere o integral

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2+y} f(x,y)\,dxdy.$$

$a)$ Inverta a ordem de integração.

$b)$ Calcule a massa de uma lâmina com a forma de D e densidade constante.

7) Considere a região M do 1.º octante limitada inferiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e superiormente pelo parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$.

$a)$ Indique, em coordenadas cartesianas, um integral, duplo ou triplo, que define o volume de M (com indicação dos extremos dos integrais).

$b)$ Indique, em coordenadas cilindrícas, um integral triplo que define o volume de M (com indicação dos extremos dos integrais).

$c)$ Calcule o volume de M.

8) Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge y \geq 0\right\} \text{ e } \mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2\right\}.$$

$a)$ Calcule, usando integrais de linha, o comprimento de $\mathcal{C}_1$.

$b)$ Indique um integral de linha que define a área da superfície limitada inferiormente por $\mathcal{C}_1$ e superiormente por $f(x,y) = x^2 y$.

$c)$ Mostre que o campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y) = \left(2x + y^3, 3xy^2 - 2y\right)$ é conservativo e determine uma função potencial de $\mathbf{F}$.

$d)$ Calcule, usando o Teorema fundamental dos integrais de linha, o integral $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}|ds$, com $\mathcal{C}_1$ orientada no sentido directo.

$e)$ Calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}|ds$, onde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ orientada no sentido directo.

9) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 1 + 2x$ e seja $\mathcal{S}$ o cilindro $x^2 + z^2 = 9$ entre os planos $y = 2$ e $y = 3$. Considerando a parametrização definida por

$$\boldsymbol{\phi}(u,v) = (\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots),$$

tem-se que

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS = \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \int_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots \,\|(\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots)\|\, dudv.$$