UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2023/24

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

2.ª Frequência **27/04/2024**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, x^3 - 2xy + y^2)$.

a) Mostre que a função $\mathbf{f}$ é localmente invertível numa vizinhança de $(-1, 1)$.

b) A matriz jacobiana de $\mathbf{f}^{-1}$ no ponto $\mathbf{f}(-1, 1)$ é dada por

☐ $J\mathbf{f}^{-1}(-1, 1)$. ☐ $(J\mathbf{f}(2, 2))^{-1}$. ☐ $(J\mathbf{f}(-1, 1))^{-1}$. ☐ $J\mathbf{f}(2, 2)$.

c) Seja $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1}$, então

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(2, 2) = -\dfrac{1}{9}$.

☐ $\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(2, 2) = -\dfrac{4}{9}$.

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(2, 2) = \dfrac{2}{9}$.

☐ $\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(2, 2) = \dfrac{1}{9}$.

d) Determine a divergência de $\mathbf{f}$ no ponto $(-1, 1)$.

2) Considere a função definida em $\mathbb{R}^3$ por $f(x, y, z) = (2x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$.

a) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela de f.

b) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 de f no ponto $(3, 2, 2)$.

3) Determine a distância mínima entre o ponto $(2, 0, -1)$ e o plano de equação $x + y - z = 1$.

4) Considere o integral

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{\frac{y-1}{2}}^{2-y} f(x,y)\,dxdy.$$

a) Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração.

b) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

c) Indique, utilizando integrais duplos, a primeira coordenada do centro de massa de uma lâmina com a forma de D e densidade constante igual a k (com indicação dos extremos do integrais e função integranda).

5) Considere o sólido S no primeiro octante limitado por $z = 3 + x^2 + y^2$ e por $z = 5 - x^2 - y^2$.

a) Indique, em coordenadas cartesianas, um integral duplo que define o volume de S (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

b) Indique, em coordenadas polares, um integral duplo que define o volume de S (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

c) Calcule o volume de S.