UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2024/25

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

1.ª Frequência **22/03/2025**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere a função $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{4-y}}, \ln\left(y - x^2\right), \sqrt{1-x} \right).$$

a) Determine e represente geometricamente o domínio D de $\mathbf{f}$.

b) Indique o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D. Diga ainda, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estude a função f quanto à continuidade.

b) Determine, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

c) Estude a função f quanto à diferenciabilidade.

d) Determine a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vector $(1,2)$, $f'_{(1,2)}(1,0)$.

e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,f(1,0))$.

f) Diga, justificando, se pode aplicar-se o Teorema de Schwarz à função f no ponto $(1,1)$.

3) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) A função definida por $f(x,y) = (x-1)\operatorname{sen}\dfrac{1}{y^2}$ não é prolongável por continuidade ao ponto $(1,0)$.

b) Seja $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0\right\}$. Então, a função $f(x,y) = x + y$ tem máximo e mínimo no conjunto A.

c) A existência de todas as derivadas parciais de primeira ordem finitas num ponto implica a continuidade da função nesse ponto.

$d)$ Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $\mathbf{f}(x, y) = \left(1 + e^{2x} + y, 1 - x + y\right)$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(2, 1)$ dada por $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Então, $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(0, 0) = -5$.

$e)$ Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, $z = f(2x - 2y, y - x)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$