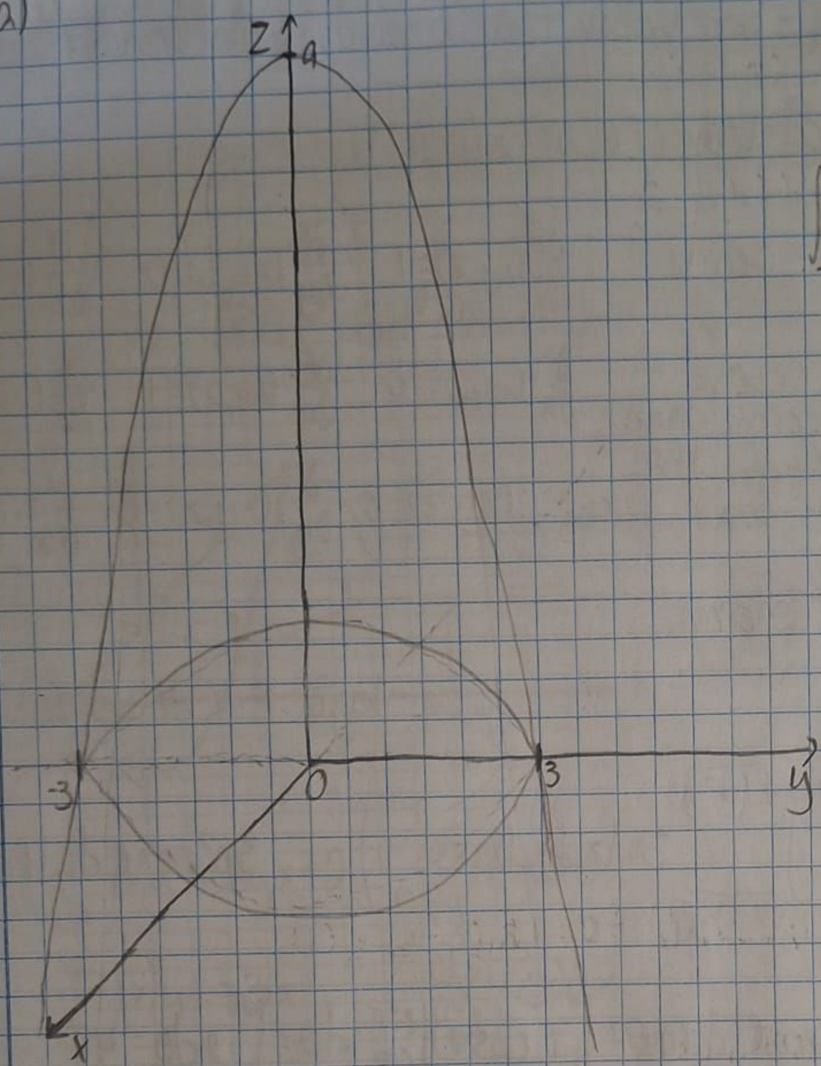
Extra

1.

a)



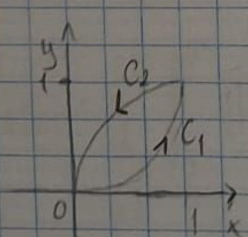
$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx$$

b) $$\int_{0}^{3}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9-\rho^2} 1\,dz\,d\theta\,d\rho$$

c) $$\int_{0}^{3}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9-\rho^2} z\,dz\,d\theta\,d\rho$$

2.

a)



$\vec{F}(x,y) = (y,x)$

$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = 0$

todas contínuas pois são funções constantes logo $\vec{F}(x,y)$ é de classe C^1

$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1(t) = (t, t^3) \\ \vec{r}_2(t) = (t, \sqrt{t})\end{array}\right\} t \in [0,1] \qquad \left.\begin{array}{l}\vec{r}_1\,'(t) = (1, 3t^2) \\ \vec{r}_2\,'(t) = (1, \frac{1}{2\sqrt{t}})\end{array}\right\} \neq \vec{0}\ \forall t \in \mathrm{int}([0,1])$

Como C é uma curva de Jordan, parametrizada regularmente e orientada diretamente podemos aplicar o Teorema de Green

$$\int_C F\,ds = \iint_{C_{int}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) dy\,dx = \iint_{C_{int}} 0\,dy\,dx = 0$$

b) $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = -y\operatorname{sen}x$ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \cos x$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen}y$ $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = x\cos y$ $\Bigg\}$ ... logo F é de classe C^1

Como C é uma curva de Jordan, parametrizada regularmente e orientada diretamente e $\vec{F}$ é de classe C^1, podemos aplicar o teorema de Green.

$$W = \int_{(C,\ell)} F\,ds = \int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (\operatorname{sen}y - \cos x)\,dy\,dx$$

3-

a) $f(x,y,z) = xyz + g(y,z)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) = c, c \in \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xyz + h(z)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = c,\ c \in \mathbb{R}$

Logo $f(x,y,z) = xyz + c,\ c \in \mathbb{R}$

Então, como existe uma função potencial $f(x,y,z)$ tal que

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$$

podemos afirmar que $\vec{F}(x,y,z)$ é um campo conservativo

b) $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) = 0$ $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = z$ $\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = y$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = z$ $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = 0$ $\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = x$ $\Bigg\}$ ... logo F é de classe C^1

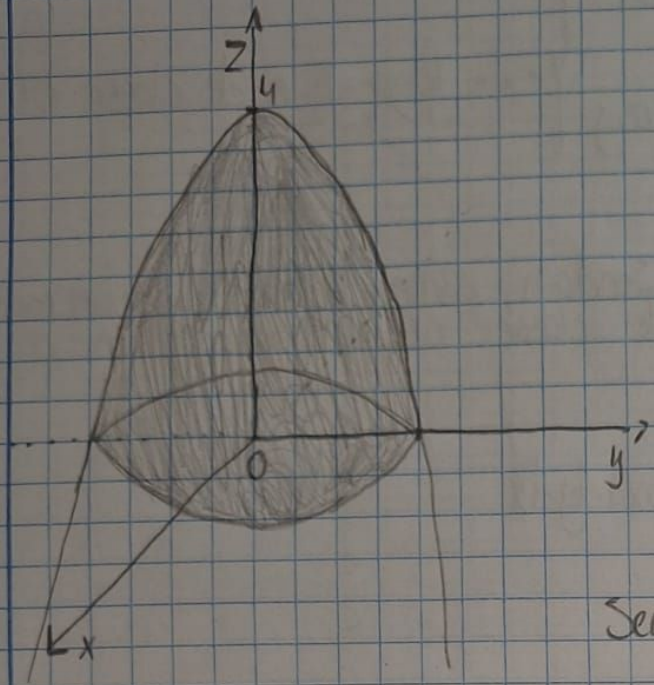
$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) = y$ $\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = x$ $\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = 0$

Como $\vec{F}$ é um campo conservativo de classe C^1 e C é uma curva parametrizada regularmente, então:

$\ell'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq \vec{0}\ \forall t \in \operatorname{int}([0,1])$

$$W = \int_{(C,\ell)} F\,ds = f(\ell(1)) - f(\ell(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1$$

4.



$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)=0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)=0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)=1$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z)=1 \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z)=0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z)=0$

$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)=0 \quad \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)=1 \quad \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)=0$

$\therefore$ Logo F é de classe C^1

Sendo $g(x,y)=4-x^2-y^2$

$\vec{\ell}_S(x,y)=(x,y,g(x,y))=(x,y,4-x^2-y^2)$; $\vec{\ell}(x,y):[0,2]\times[0,2]$

$\left\|\frac{\partial \vec{\ell}_S}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial \vec{\ell}_S}{\partial y}(x,y)\right\|=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),1\right)=(2x,2y,1)\neq\vec{0}\ \forall(x,y)\in \mathrm{int}(\ )$ logo é parametrização regular

$\vec{\ell}_C(t)=(2\cos(t),2\mathrm{sen}(t),0)$, $t\in[0,2\pi]$

$\vec{\ell}_C'(t)=(-2\mathrm{sen}(t),2\cos(t),0)\neq\vec{0}\ \forall t\in \mathrm{int}([0,2\pi])$ logo é parametrização regular

Como S é uma superfície orientável e regular, e C (fronteira de S) uma curva simples, fechada e regular, com orientação positiva induzida pela orientação de S e F é de classe C^1, podemos aplicar o Teorema de Stokes.

$\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z)=(1,1,1)$

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\overbrace{(0,2\cos t,2\mathrm{sen}t)}^{\vec{F}(\ell_C(t))}\cdot(-2\mathrm{sen}t,2\cos t,0)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}4\cos^2 t\,dt$$