1)

a) $\begin{cases} x^2+y^2=3u+v \\ x^2y=4uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3u-v=0 \\ x^2y-4uv=0 \end{cases}$

Então, temos $\vec{F}(x,y,u,v)=(x^2+y^2-3u-v,\ x^2y-4uv)$

$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial u}=-3 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial v}=-1$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}=2xy \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}=x^2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}=-4v \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}=-4u$

Todas funções contínuas pois são: constantes, ou produto de constantes com funções projecção, ou produto de funções projecção com funções projecção.

Então, F é de classe C_1 e, por isso, é contínua, logo, também é contínua numa vizinhança do ponto (1,0,0,1)

$\vec{F}(1,0,0,1)=(1+0-3.0-1,\ 1.0-4.0.1)=(0,0)=\vec{0}$

$\det(J\vec{F}_{(u,v)}(1,0,0,1))=\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4v & -4u \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}=\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

Portanto podemos aplicar TFI e concluir que existe f tal que $(u,v)=f(x,y)$ numa vizinhança de $(x,y,u,v)=(1,0,0,1)$.

b) $Jf(1,0)=-(J\vec{F}_{(u,v)}(1,0,0,1))^{-1}\cdot J\vec{F}_{(x,y)}(1,0,0,1)=$

$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

2-

a) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\cdot e^{1+x^2-y^2}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y\cdot e^{1+x^2-y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ Pontos críticos: (0,0)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2e^{1+x^2-y^2}+4x^2e^{1+x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-4xy\,e^{1+x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4y^2\,e^{1+x^2-y^2}-2e^{1+x^2-y^2}$

Logo, $H(0,0)=\begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & -2e \end{bmatrix}$ $\begin{cases} d_1>0 \\ d_2<0 \end{cases}$

$\Downarrow$

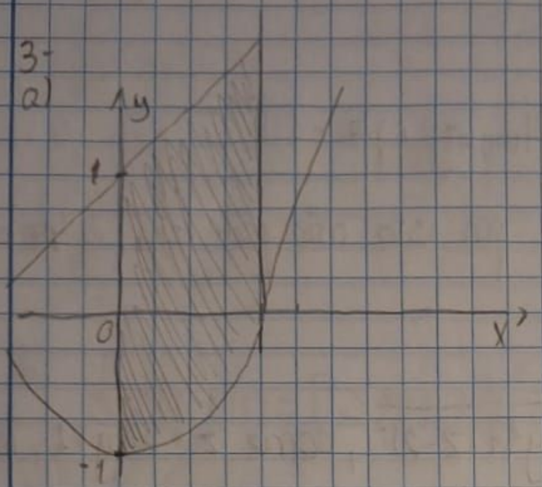
(0,0) é um ponto sela

b) $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,h_2^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right) =$

$= \frac{1}{2}(2e h_1^2 - 2e h_2^2 + 2.0) = e h_1^2 - e h_2^2$

3-

a)

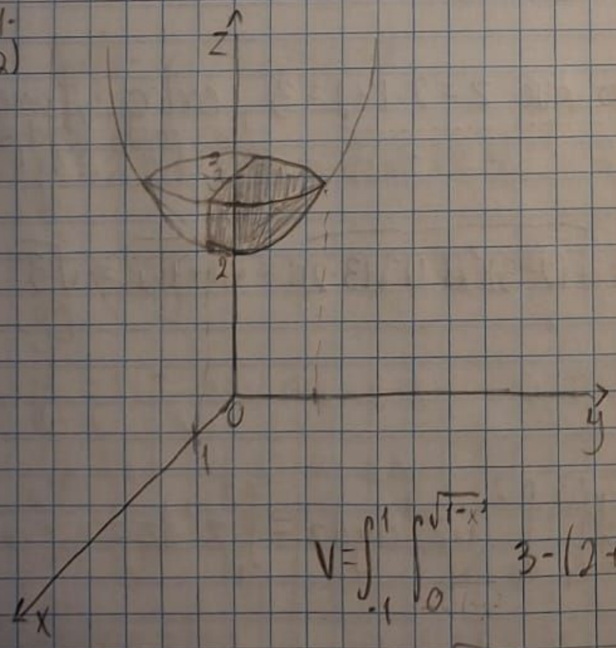


b) $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

c) $\int_{0}^{1}\int_{x^2-1}^{1+x} dy\,dx = \int_{0}^{1}(1+x-x^2+1)\,dx = \left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$

4-

a)



$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 3-(2+x^2+y^2)\,dy\,dx =$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\,dx =$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi} (1-\rho^2)\,\rho\,d\theta\,d\rho = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$

b)
densidade $\rho = k$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} (1-\rho^2)\rho k \, d\theta d\rho = \pi k \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \pi k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi k}{4}$$

5-
a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -(\text{sen}\, x + \text{sen}(x+y))\Big|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = -1$

Logo, não é ponto crítico e por isso não pode ser extremante

Então, Falso

b) $d((3,0,2),(x,y,z)) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2}$, como $z = x+y+2$, temos

$d((3,0,2),(x,y,z(x,y))) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (x+y)^2}$

$f(x,y) = d^2(x,y) = (x-3)^2 + y^2 + (x+y)^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-3) + 2(x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y+y=3 \\ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Logo, temos que $z = 2-1+2 = 3$, então, temos o ponto $(2,-1,3)$

Então $d((3,0,2),(x,y,z)) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Logo, Verdadeiro

c) $$\int_1^3 \int_0^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx dy dz = \frac{1}{2}\int_1^3 \int_0^2 yz^2 \, dy dz = \int_1^3 z^2 dz =$$

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

Logo, Verdadeira