UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE MATEMÁTICA II – 2024/25

EER, EGI, EI, EM, FQ, IACD, M, MAEG

2.ª Frequência **03/05/2025**

Observação: Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar nas resoluções.

1) Considere as equações $x^2+y^2=3u+2v$ e $xy^2+y=uv$.

a) Mostre que as equações anteriores definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(2,0,0,2)$.

b) Sendo $\mathbf{f}$ a função implícita na alínea anterior, determine a matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ em $(2,0)$.

c) Determine a divergência de $\mathbf{f}$ no ponto $(2,0)$.

2) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y)=5+4x+6y-y^2-3x^3$.

a) Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela de f.

b) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 de f no ponto $(1,2)$.

3) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Seja $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y)=(x^2+y,x-3xy+y^2)$. Então, pode aplicar-se o Teorema da derivação da função inversa à função $\mathbf{f}$ numa vizinhança do ponto $(1,1)$.

b) O ponto do plano de equação $z-2x-y=2$ mais próximo do ponto $(1,0,2)$ é o ponto $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$.

4) Considere o integral

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{-4x}^{5-x^2} f(x,y)\,dydx.$$

a) Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração.

b) Calcule, utilizando integrais duplos, a área da região de integração.

5) Considere uma lâmina com a forma da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq x \wedge x \geq 0\}$ e com densidade igual a x.

$a)$ Indique, em coordenadas cartesianas, um integral duplo que define a massa da lâmina (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

$b)$ Indique, em coordenadas polares, um integral duplo que define a massa da lâmina (com indicação dos extremos do integral e função integranda).

$c)$ Indique, utilizando integrais duplos, a primeira coordenada do centro de massa da lâmina (com indicação dos extremos dos integrais e função integranda).

6) Calcule, utilizando integrais triplos, o volume do sólido S no primeiro octante limitado por $x + y + z = 4$ e limitado inferiormente por $z = 3$.