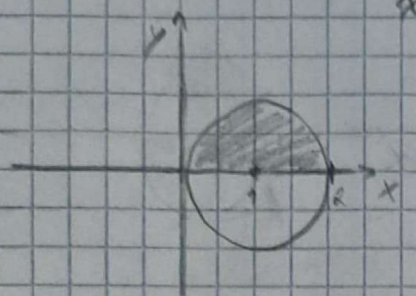
1ª Frequência 2022/23

1.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-(x-1)^2-y^2} > 0 \wedge xy \geq 0\}$

$1-(x-1)^2-y^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 < 1$

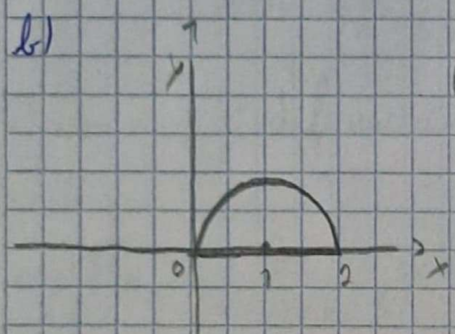
$xy \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \vee x \leq 0 \wedge y \leq 0$



$(x-1)^2+y^2 < 1 \wedge x \geq 0$

Opção A

b)



$(x-1)^2+y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \vee y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2$

Opção B

c) Aberto? Fechado?

$A = \text{int}(A)$ $A = \bar{A}$

Como $\text{int}(A) \neq A$, A não é aberto

$\bar{A} = \text{int}(A) \cup Fr \neq A$, logo A não é fechado

Opção B

2.

a) Vamos avaliar a continuidade de f em $(0,0)$

Limites iterados

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

Como os limites iterados são diferentes, não existe limite, logo f não é contínua em $(0,0)$

Continuidade em $(x,y) \neq (0,0)$

A função f resulta da soma e multiplicação de funções projeção contínuas, pelo que f é contínua também em $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Para $(x,y) \neq 0$, temos $f(x,y) = \frac{2x^2}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x^2)'(x^2+y^2) - (2x^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4x(x^2+y^2) - 2x^2(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4x^3+4xy^2-4x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(2x^2)'(x^2+y^2) - (2x^2)(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{0(x^2+y^2) - (2x^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$, a função não é contínua, pelo que não existe derivada neste ponto.

e) Para $(x,y) \neq (0,0)$

A função $f(x,y) = \frac{2x^2}{x^2+y^2}$ é composta por produtos e somas de funções projeção contínuas e diferenciáveis, uma vez que o denominador não se anula. Deste modo, f é diferenciável para $(x,y) \neq (0,0)$.

Para $(x,y) = (0,0)$

A função não é contínua em $(x,y) = (0,0)$. Como a diferenciabilidade em qualquer ponto $\vec{a}$ implica continuidade em $\vec{a}$, podemos concluir que f não é diferenciável para $(x,y) = (0,0)$.

d) $f'_{(1,2)}(1,1) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f((1,1)+t(1,2)) - f(1,1)}{t}$ $\qquad f(1,1) = \frac{2}{2} = 1$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{f(1+t, 1+2t) - 1}{t}$ $\qquad f(1+t, 1+2t) = \dfrac{2(1+t)^2}{(1+t)^2 + (1+2t)^2}$

$= \dfrac{2t^2+4t+2}{5t^2+6t+2}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{2t^2+4t+2-5t^2-6t-2}{(t)(5t^2+6t+2)}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{-3t^2-2t}{5t^3+6t^2+2t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{-3t-2}{5t^2+6t+2} = -1$

e) Como f é diferenciável em $(1,1)$, podemos calcular o plano tangente.

$z = f(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}_{(a,b)}(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}_{(a,b)}(y-b) \Leftrightarrow$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}_{(1,1)} = \dfrac{4}{4} = 1$

$\Leftrightarrow z = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}_{(1,1)}(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}_{(1,1)}(y-1) \Leftrightarrow$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}_{(1,1)} = \dfrac{-4}{4} = -1$

$\Rightarrow z = 1 + 1(x-1) - 1(y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 + x - 1 - y + 1 \Leftrightarrow -x + y + z = 1$

3.

a) $f(x,y) = (1 + e^{2x} + y, 1 - x + y)$ $\qquad Jh = Jg(f(0,0)) \cdot Jf(0,0)$

$Dg(2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$h = g \circ f = g(f)$

1) $f(0,0) = (1+1, 1-0+0) = (2,1)$

$g(f(0,0)) = g(2,1)$

2) $Jf(0,0)$

$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2x} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad J_{f(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3) Como $h = g \circ f$, temos:

$Jh = Jg(2,1) \cdot Jf(0,0)$, pois $g(f(0,0)) = g(2,1)$

$$Jh = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, $\frac{\partial h_1}{\partial x} = -5$ Opção A

b) $\operatorname{div} h(0,0) = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0) = -5 + 3 = -2$ Opção C

4.

a) Para A ser fechado, então $\bar{A} = A$

Será $\bar{A} = A'$? $\bar{A} = A' \Leftrightarrow A = A'$

Exemplo do conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \vee x = 3 \wedge y = 3\}$

$\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) = A \Leftrightarrow \bar{A} = A$, logo é fechado. No entanto, $\bar{A} \neq A'$:

$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$. $(x,y) = (3,3)$ não tem pontos de A na vizinhança sem ser ele próprio, logo não é ponto aderente. Falso.

b) Limites iterados

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \overset{\text{l.m.}}{=} 0 = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y \to 0} y^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y^2} \overset{\text{l.m.}}{=} 0$$

Vamos provar que, para qualquer $\delta > 0$ arbitrário, conseguimos encontrar um $\varepsilon > 0$ de forma a que, para qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$0 < \|\vec{x} - (0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \delta \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{(x^2+y^2)}\right| < \delta$$

Como $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |x^2+y^2| \cdot \left|\frac{1}{\operatorname{sen} x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2 \leq \varepsilon^2 = \delta$

Basta tomar $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ para provar que:

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$. Sendo o limite $= 0$, podemos prolongar a continuidade:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)}\right)\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verdadeiro

c) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial f_1}\times\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial f_2}\times\frac{\partial f_2}{\partial x}=2x\left(\frac{\partial z}{\partial f_1}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial f_1}\times\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial f_2}\times\frac{\partial f_2}{\partial y}=-2y\left(\frac{\partial z}{\partial f_1}\right)+2y\left(\frac{\partial z}{\partial f_2}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial f_1}\times\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial f_2}\times\frac{\partial f_2}{\partial t}=-2t\left(\frac{\partial z}{\partial f_2}\right)$

$(yt)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(xt)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xy\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=$

$=\cancel{2xyt\left(\frac{\partial z}{\partial f_1}\right)}-\cancel{2xyt\left(\frac{\partial z}{\partial f_1}\right)}+\cancel{2xyt\left(\frac{\partial z}{\partial f_2}\right)}-\cancel{2xyt\left(\frac{\partial z}{\partial f_2}\right)}=0$

Falso