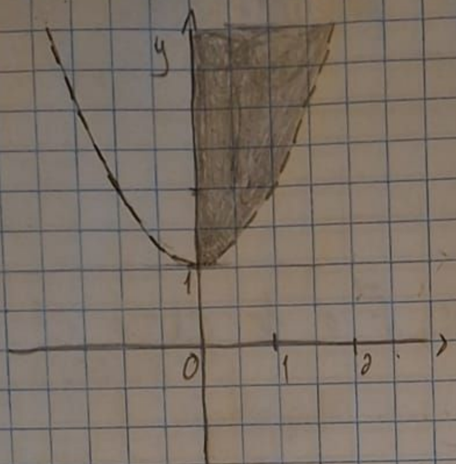
2023/2024

1-

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \ \wedge \ y - 1 - x^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)) \wedge$
$\wedge \ y > 1 + x^2\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y > 1 + x^2\}$



b)
$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 1 + x^2\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \wedge y \geq 1 + x^2) \vee (x \geq 0 \wedge y = 1 + x^2)\}$

$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 1 + x^2\}$

D não é aberto pois $\text{int}(D) \neq D$, nem é fechado pois $\overline{D} \neq D$

D é ilimitado pois $\nexists L > 0, \ \forall \vec{x} \in D : \|\vec{x}\| < L$

2-

a) Como f resulta de produtos, somas e quocientes de funções projeção, esta vai ser contínua no seu domínio. Isto vem também porque o denominador não se anula no domínio

b) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{y=mx}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0$

Vamos provar que $\forall \delta > 0$ arbitrário, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ temos que

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \delta$

$\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon = \delta$

Então, basta tomar $\varepsilon = \delta$ para provarmos o pretendido

Logo, $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c)

Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - 2x^2y\,(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - 2y^2x\,(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

d)

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

A função g é contínua pois é o resultado de somas, produtos e quociente de funçois contínuas, onde o denominador não anula. Logo, g é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$

Para $(x,y) = (0,0)$:

Se $g(x,y)$ for deferenciável em $(0,0)$ então

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).x - \frac{\partial g}{\partial y}(0,0).y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Então

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).x - \frac{\partial g}{\partial y}(0,0).y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{y=mx}{=} \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Como depende de m então, não existe o limite logo, g não é diferenciável em $(0,0)$

e)
$f(1,0) = 0$

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,y = y$$

f)
$$f'_{(2,3)}(1,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1+2t, 3t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1+2t)3t}{t\sqrt{(1+2t)^2 + (3t)^2}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+2t)3}{\sqrt{(1+2t)^2 + (3t)^2}} = 3$$

g) $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\} = A$ logo, A é conjunto fechado

A é limitado pois $\exists L > 0, \forall \vec{x} \in A: \|\vec{x}\| < L$, basta tomar $L = 3$, por exemplo.

Como f é contínua onde A está definido e A é um conjunto limitado e fechado, pelo Teorema Weierstrass, $f(A)$ é fechado e limitado.

Logo a afirmação é verdadeira

3-

a)
$$\vec{F}(x,y,u,v) = (x-u-v,\ y-3u-2v)$$

$\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x}(x,y,u,v) = 1$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}(x,y,u,v) = 0$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial u}(x,y,u,v) = -1$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial v}(x,y,u,v) = -1$

$\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x}(x,y,u,v) = 0$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y}(x,y,u,v) = 1$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial u}(x,y,u,v) = -3$ $\quad \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial v}(x,y,u,v) = -2$

... logo F é contínua

$$F(2,5,1,1) = (2-1-1,\ 5-3-2) = \vec{0}$$

$$\det(J\vec{F}_{(u,v)}(2,5,1,1)) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita e concluir que existe f tal que $(u,v) = f(x,y)$ numa vizinhança de $(2,5,1,1)$

b)

$$-\left(J\vec{F}_{(u,v)}(2,5,1,1)\right)^{-1} = -\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J\vec{F}_{(x,y)}(2,5,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Jf(2,5) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -2$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 1$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 3$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1$

4-

a) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2+2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \lor x=\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$ $\quad$ Logo, P.C.: $(0,0)$ e $(2/3, 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x+2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \end{cases}$ mínimo local

$H(\frac{2}{3},0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} d_1 < 0 \\ d_2 < 0 \end{cases}$ ponto sela

b)

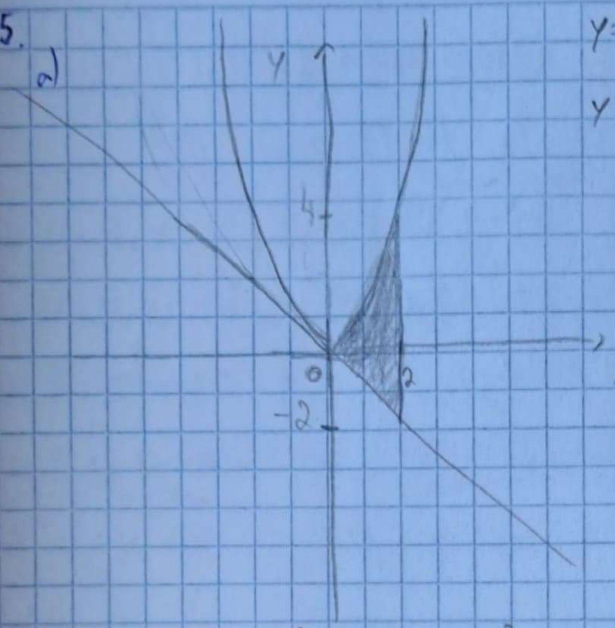
O terceiro termo é: $\frac{1}{2}(-4h_1^2 + 2h_2^2) = -2h_1^2 + h_2^2$

Sendo $h_1 = (x-1)$ e $h_2 = (y-1)$

c) $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x+2+2 = -6x+4$

Logo, $\Delta f(1,1) = -2$

5.
a)



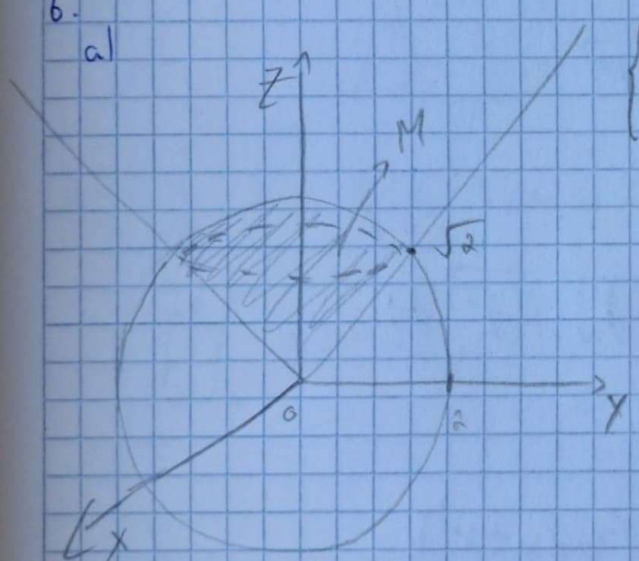
$y = x^2 \Leftrightarrow x = +\sqrt{y}$

$y = -x \Rightarrow x = -y$

$$\int_{-2}^{0}\int_{-y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

b) $A(D) = \int_0^2 \int_{-x}^{x^2} 1\,dy\,dx = \int_0^2 x^2 + x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{14}{3}$

6.
a)

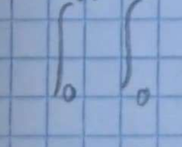


$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

b) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \; dz\,d\theta\,d\rho$

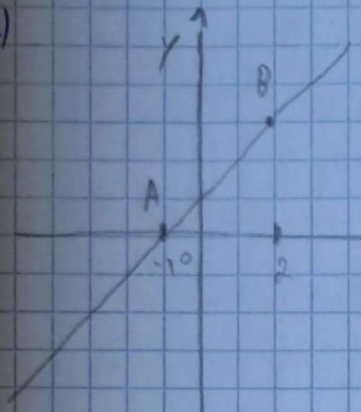
c) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi \; d\varphi\,d\theta\,dr$



$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4}$

7. a)



$t(B)+(1-t)A = t(2,3)+(1-t)(-1,0)$

$=(2t,3t)+(t-1,0)$

$=(3t-1,3t)$

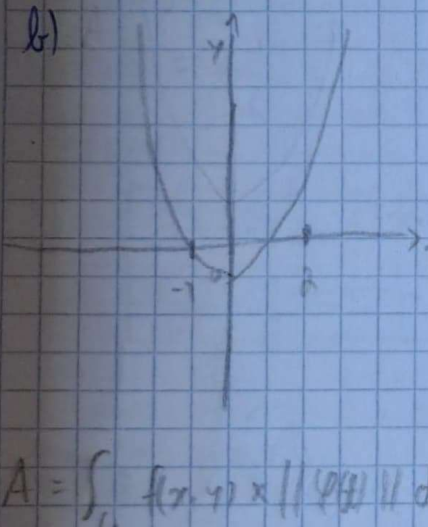
$\varphi(t)=(3t-1,3t),\ t\in[0,1]$

$\varphi'(t)=(3,3)\neq\vec{0}\ \forall t\in[0,1] \therefore \varphi$ regular

$\|\varphi'(t)\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$L(\mathcal{C}_2)=\int_0^1 \|\varphi'(t)\|\,dt=\int_0^1 3\sqrt{2}\,dt = 3\sqrt{2}$

b)



$\varphi(t)=(t,t^2-1)$

$\varphi'(t)=(1,2t)\neq\vec{0}\ \forall t\in[-1,2] \therefore \varphi$ regular

$\|\varphi'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$

$A=\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\times\|\varphi'(t)\|\,dt=\int_{-1}^{2}\left(t^2(t^2-1)^4\right)\sqrt{1+4t^2}\,dt$

c) $F(x,y)=(3yx^2-2x,\ 2y+x^3)$

$\vec{\nabla} f = F(x,y) \Leftrightarrow \left(\frac{df}{dx},\frac{df}{dy}\right)=(3yx^2-2x,\ 2y+x^3)$

$\frac{df}{dx}=3yx^2,\ P_x(3yx^2)=yx^3 \qquad f(x,y)=yx^3+g(y)$

$\frac{df}{dy}=x^3+\frac{dg}{dy} \Rightarrow \frac{dg}{dy}=2y,\ P_y(2y)=y^2 \qquad f(x,y)=yx^3+y^2+c,$

$c\in\mathbb{R}$

Como existe uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 : \vec{\nabla} f=\vec{F}$, então $\vec{F}$ é um campo conservativo.

d) $W = \int_{(\mathcal{C},\varphi)} F \mid ds = \int_{-1}^{2} (3(t+1)t^2 - 2t, 2t+2+t^3) \cdot 1 \, dt$

$= \int_{-1}^{2} 4t^3 + 3t^2 + 2 \, dt$

$\varphi(t) = (t, t+1), t \in [-1, 2]$

$\varphi'(t) = (1, 1) \neq \vec{0} \therefore$ r.r. $= [t^4 + t^3 + 2t]_{-1}^{2} = 30$

$\|\varphi'(t)\| = 1$

e) F é conservativo e $\mathcal{C}$ é uma curva fechada, logo $\int_{\mathcal{C}} F \mid ds = 0$.

8. $S: y^2 + z^2 = 9$, com $x \in [2, 3]$

$\varphi(u, v) = (v, 3\cos u, 3 \operatorname{sen} u), u \in [0, 2\pi], v \in [2, 3]$

$$\frac{d\varphi}{du} \times \frac{d\varphi}{dv} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{d\varphi_1}{du} & \frac{d\varphi_2}{du} & \frac{d\varphi_3}{du} \\ \frac{d\varphi_1}{dv} & \frac{d\varphi_2}{dv} & \frac{d\varphi_3}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -3\operatorname{sen} u & 3\cos u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 3\cos u, 3\operatorname{sen} u) \neq \vec{0} \; \forall (u,v) \in [0, 2\pi] \times [2, 3]$$

$\vec{\varphi}$ é regular

$A(S) = \int_2^3 \int_0^{2\pi} 1 \, \|(0, 3\cos u, 3\operatorname{sen} u)\| \, du \, dv$

$= \int_2^3 \int_0^{2\pi} 3 \, du \, dv = \int_2^3 6\pi \, dv = 18\pi - 12\pi = 6\pi$