

TEAP, LS 2020/2021
skúška, 3. 6. 2021

1. Máme dve utriedené polia a_0, \dots, a_{n-1} , b_0, \dots, b_{n-1} . Navrhните algoritmus, ktorý v čase $O(\log n)$ nájde ich medián (t.j. prvok x , ktorý by bol na n -tej pozícii, keby sme obe polia zmergovali do jedného utriedeného poľa). Zdôvodnite, prečo Váš algoritmus funguje a prečo má požadovanú zložitosť.
2. Majme nasledovnú procedúru:

```
int f(int n) {
    for (int i = n; i > 0; i--) {
        for (int j = 1; j < i; j *= 2) {
            for (int k = 0; k < j; k++)
                // ... konštantne veľa operácií
        }
    }
}
```

Aká je asymptotická zložitosť volania $f(n)$?

3. Dobrý reťazec je definovaný nasledovne: "{}" je dobrý reťazec. Ak T je dobrý reťazec, aj " $\{T\}$ " je dobrý reťazec. Ak S a T sú dobré reťazce, tak ST (keď ich napíšeme za sebou) je dobrý reťazec. Nič iné nie je dobrý reťazec. Navrhните algoritmus, ktorý pre zadaný reťazec párnej dĺžky povie, koľko najmenej znakov treba prepísať, aby sme dostali dobrý reťazec. Napr. pre vstupy "{}", "{}{}{}", "{}{}{}" by boli odpovede 2, 0, 1. Zdôvodnite korektnosť a odvodďte zložitosť.
4. Máme pole a dĺžky n , ktoré obsahuje rôzne kladné čísla, z ktorých všetky sú menšie ako MAX . Zároveň je dané pole p rovnakej dĺžky, inicializované na -1. Uvažujme dve procedúry

```
int h1(int l, int r) {
    if (l == r) return l;
    int mi, m = MAX;
    for (int i = l; i <= r; i++)
        if (a[i] < m) {
            m = a[i];
            mi = i;
        }
    if (mi > l) p[h1(l, mi - 1)] = mi;
    if (mi < r) p[h1(mi + 1, r)] = mi;
    return mi;
}

void h2() {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int j, oj;
        for (j = oj = i - 1; p[j] != -1 && a[i] < a[j];) {
            oj = j;
            j = p[j];
        }
        if (a[i] < a[j]) {
            p[j] = i;
        } else {
            if (oj != j) p[oj] = i;
            p[i] = j;
        }
    }
}
```

Nájdite vstup, na ktorom volania $h1(0, n-1)$ a $h2()$ vyrobia rôzne polia p , alebo zdôvodnite, že vždy urobia to isté. Odvodte zložitosť oboch procedúr.

5. Majme funkciu `int f(int a, int b)`, ktorá pristupuje do globálneho poľa A na úseku od a po b . Pre krátke úseky funkcia vráti 1, inak raz prejde pole od a po b a rekurzívne sa zavolá na prvú polovicu úseku a potom ešte raz na prvú štvrtinu. Napísali sme príslušnú rekurenciu

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \end{aligned}$$

kde n je dĺžka úseku, t.j. $n = b - a$. Aká je asymptotická zložitosť volania $f(0, n)$? Svoju odpoveď zdôvodnite!

6. Máme danú štvorcovú maticu $D \times D$, ktorá obsahuje nuly a jednotky. Povolená operácia je vyškrtnúť jeden celý riadok alebo jeden celý stĺpec. Navrhните algoritmus, ktorý zistí, koľko najmenej operácií treba na vyškrtnutie všetkých jednotiek. Napr. ak $D = 5$ a jednotky sú na pozíciách $[0, 2]$, $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[2, 4]$ a $[4, 2]$, stačí vyškrtnúť stĺpec 2 a riadok 2 (t.j. dve operácie). (Hint: MaxFlow-MinCut veta môže pomôcť)