

TEAP, LS 2019/2020
skúška, 3. 6. 2020

1. Dobře uzátvorkovaný výraz je pro účely tohoto příkladu buď otevřená a zatvorená zátvorka, t.j. "()", alebo dva za sebou idúce dobre uzátvorkované výrazy, uzavreté v zátvorkách, t.j. " $\langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle$ ". Nič iné dobre uzátvorkovaný výraz nie je. Napríklad " $((())())$ " je dobre uzátvorkovaný výraz, ale " $()()$ " ani " $()()()$ " nie sú. Napíšte algoritmus, ktorý pre zadané n zistí, koľko je rôznych dobre uzátvorkovaných výrazov dĺžky n (dĺžkou rozumieme počet znakov). Váš algoritmus musí pracovať v čase polynomiálnom od n . Zdôvodnite správnosť a zložitosť.
2. Majme dve utriedené polia A, B , každé dĺžky n . Na vstupe je dané číslo k , $1 \leq k \leq 2n$. Napíšte algoritmus, ktorý v čase $O(\log n)$ nájde k -ty najmenší prvok zo zjednotenia polí A, B . Môžete predpokladať, že všetky prvky sú navzájom rôzne. Napr. pre $A = [1, 10, 11, 50]$, $B = [7, 8, 15, 16]$, $k = 4$ je odpoveď 10. Zdôvodnite správnosť a zložitosť (pozor, za zložitosť horšiu ako $O(\log n)$ nie sú žiadne body).

3. Uvažujme nasledovnú procedúru:

```
int f(int a, int b, int c) {
    int i,r=0;

    printf("kuk\n");
    if (b>=c) return a;
    for(i=b;i<c;i++)
        r = r + f(a,b,i) + f(a,i+1,c);
    return r/(c-b);
}
```

Koľkokrát sa vypíše slovo "kuk" pri volaní $f(3, 6, 2020)$ (stačí, keď napíšete zvyšok po delení 243)? Aká je výsledná hodnota? Aké sú odpovede pre všeobecný prípad $f(a, b, c)$? (boduje sa hlavne zdôvodnenie riešenia)

4. Daná je postupnosť prirodzených čísel v_1, v_2, \dots, v_n . Navrhňte algoritmus, ktorý vyberie niektoré čísla tak, aby z každej trojice po sebe idúcich čísel bolo aspoň jedno vybrané a aspoň jedno nevybrané a aby súčet vybraných čísel bol maximálny. Napr. pre vstup $[1, 2, 12, 14, 13, 3, 10]$ vyberie napr. čísla $1, 2, 14, 13, 10$ so súčtom 40. Zdôvodnite správnosť a zložitosť.
5. Určite tesnú asymptotickú zložitosť každého z nasledovných troch programov:

<pre>sum = 0; for (n=N; n>0; n/=2) for (i=0; i<n; i++) sum++;</pre>	<pre>sum = 0; for (i=1; i<N; i*=2) for (j=0; j<i; j++) sum++;</pre>	<pre>sum = 0; for (i=1; i<N; i*=2) for (j=0; j<N; j++) sum++;</pre>
------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------

6. Majme dané pole n reálnych čísel $a[0], \dots, a[n-1]$. Treba nájsť maximum spomedzi rozdielov $a[j] - a[i]$ pre $j \geq i$. Nájdite algoritmus pracujúci v lineárnom čase (pozor, za horšiu ako lineárnu zložitosť nie sú žiadne body). Zdôvodnite jeho správnosť a zložitosť.
7. Na vstupe je daných n prirodzených čísel $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Cieľom je zistiť, či sa dajú rozdeliť na dve skupiny s rovnakým súčtom (napr. $9\ 6\ 2\ 2\ 1$ sa dá rozdeliť na $9 + 1 = 6 + 2 + 2 = 10$). Uvažujme greedy algoritmus, ktorý prechádza čísla v utriedenom poradí a vytvára dve skupiny tak, že každé číslo priradí do skupiny, ktorá má momentálne menší súčet (pre predchádzajúci príklad by mal postupne skupiny $9 : 0$, $9 : 6$, $9 : 6 + 2$, $9 : 6 + 2 + 2$, $9 + 1 : 6 + 2 + 2$). Ukážte, že existuje nekonečne veľa vstupov, pre ktoré tento algoritmus dá nesprávnu odpoveď.
8. Majme takýto problém: daných je n množín čísel A_1, \dots, A_n . Cieľom je vybrať z nich čo najmenej tak, aby zjednotenie ostalo rovnaké (t.j. ak vyberieme množiny A_{i_1}, \dots, A_{i_k} tak musí platiť $A_1 \cup \dots \cup A_n = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$). Napríklad pre $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{5, 6\}$, $A_3 = \{2, 3, 6\}$ stačí vybrať množiny A_1, A_2 . Úlohu riešime greedy algoritmom, ktorý vyberie najväčšiu množinu¹, všetky jej prvky odstráni z ostatných množín, a postup opakuje. V našom prípade by vybral A_1 , po odstránení prvkov $1, 2, 3, 4$ by ostali $A_2 = \{5, 6\}$, $A_3 = \{6\}$, a preto by v druhom kroku vybral A_2 .

Ukážte, že tento algoritmus nie je korektný: pre každé r nájdite vstup, v ktorom optimálne riešenie má veľkosť $s \geq r$, ale greedy algoritmus vyberie aspoň $3s/2$ množín.

¹ak je takých viac, tak vyberie tú s najmenším poradovým číslom