

TEAP, LS 202/2023
midterm, 12. 4. 2023

- Máme n vrcholov očíslovaných $0, 1, \dots, n - 1$. Na vstupe je m dvojic čísel $[a_i, b_i]$. Každá dvojica znamená, že sa pridá hrana medzi vrcholmi a_i a b_i . Navrhnite efektívny algoritmus, ktorý postupne pre každú dvojicu vypíše počet (neuspriadaných) dvojíc vrcholov, medzi ktorými neexistovala cesta, ale po pridaní hrany a_i, b_i už existuje (napr. pre $n = 5$ a dvojice $[0, 1][0, 2][3, 4][1, 2][0, 3]$ je riešenie $1, 2, 1, 0, 6$). Dokážte jeho správnosť a odvodte zložitosť.
- Majme nasledovný problém: na vstupe je daná postupnosť n prirodzených čísel a_0, \dots, a_{n-1} . Cieľom je nájsť v nej najdlhšiu: (nie nutne súvislú) rastúcu podpostupnosť. Napríklad pre postupnosť $[1, 3, 2, 9, 3, 4]$ je najdlhšia rastúca podpostupnosť $[1, 2, 3, 4]$.

Uvažujme nasledujúci greedy algoritmus:

```
int max = 1;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int m = 1, k = i, j = i + 1; j < n; j++)
        if (a[k] < a[j]) {
            k = j;
            m++;
        }
    if (m > max) max = m;
}
return max;
```

Pre dané (ľubovoľné prirodzené číslo) n zostrojte vstup dĺžky $O(n)$, ktorý obsahuje rastúcu postupnosť dĺžky $\Omega(n)$, ale výstup algoritmu je $O(1)$.

Aká je asymptotická zložitosť predchádzajúceho algoritmu (v závislosti od n)?

- Čo ráta volanie $f(n, n)$? Má toto volanie polynomiálnu zložitosť? Prečo?

```
int f(int a, int b) {
    if (a < 3) return a * b;
    if (b == 1) return f(a - 1, a);
    return f(a, 1) + f(a, b - 1);
}
```

- V lyžiarskom stredisku je jeden kopec a na ňom jeden vlek. Na kopci je n význačných miest, ktoré sú očíslované zhora dole od 0 (vrch kopca = vrch vleku) po $n - 1$ (spodok kopca = spodok vleku). Na kopci je z zjazdoviek. Zjazdovka číslo i začína na nejakom význačnom mieste $A[i]$ a končí na nejakom nižšie položenom význačnom mieste $B[i]$. Zjazdovky sa navzájom nekrižujú ani neprechádzajú inými význačnými miestami. Každá zjazdovka má krásu $K[i]$. Krása zjazdu je rovná súčtu krás zjazdoviek, ktorými pôjdeme. Navrhnite efektívny algoritmus, ktorý zistí najväčšiu možnosť krásu zjazdu. Dokážte jeho správnosť a odvodte zložitosť.