

Lista de Exercícios – Várias Variáveis

1. Lançam-se, simultaneamente, uma moeda e um dado.
 - (a) Determine o espaço amostral correspondente a esse experimento.
 - (b) Obtenha a tabela da distribuição conjunta, considerando X o número de caras no lançamento da moeda e Y o número da face do dado.
 - (c) Verifique se X e Y são independentes.
 - (d) Calcule:
 1. $P(X=1)$
 2. $P(X \leq 1)$
 3. $P(X < 1)$
 4. $P(X=2, Y=3)$
 5. $P(X \geq 0, Y \leq 4)$
 6. $P(X=0, Y \geq 1)$
2. A tabela abaixo dá a distribuição conjunta de X e Y .
 - (a) Determine as distribuições marginais de X e Y .
 - (b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y .
 - (c) Verifique se X e Y são independentes.
 - (d) Calcule $P(X=1|Y=0)$ e $P(Y=2|X=3)$.
 - (e) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X=2, Y \leq 1)$.

$Y \backslash X$	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0	0,3
2	0	0,1	0,1

3. Considere a distribuição conjunta de X e Y , parcialmente conhecida, dada na tabela abaixo.
 - (a) Complete a tabela, considerando X e Y independentes.
 - (b) Calcule as médias e variâncias de X e Y .
 - (c) Obtenha as distribuições condicionais de X , dado que $Y=0$, e de Y , dado que $X=1$.

$Y \backslash X$	-1	0	1	$P(Y=y)$
-1	1/12			1/3
0				
1	1/4		1/4	
$P(X=x)$				1

4. No Problema 2, obtenha as distribuições de $X + Y$ e de XY . Calcule $E(X + Y)$, $E(XY)$, $\text{Var}(X + Y)$, $\text{Var}(XY)$.
5. (a) No Problema 3, calcule $E(X + Y)$ e $\text{Var}(X + Y)$.
 (b) Se $Z = aX + bY$, calcule a e b de modo que $E(Z) = 10$ e $\text{Var}(Z) = 600$.
6. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de um a quatro são lançados e os números das faces voltadas para baixo são anotados. Sejam as v.a.:
 X : maior dos números observados;
 Y : menor dos números observados;
 $Z = X + Y$.
 (a) Construa a tabela da distribuição conjunta de X e Y .
 (b) Determine as médias e as variâncias de X , Y e Z .
7. Numa urna têm-se cinco tiras de papel, numeradas 1, 3, 5, 5, 7. Uma tira é sorteada e recolocada na urna; então, uma segunda tira é sorteada. Sejam X_1 e X_2 o primeiro e o segundo números sorteados.
 (a) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2 .
 (b) Obtenha as distribuições marginais de X_1 e X_2 . Elas são independentes?
 (c) Encontre a média e a variância de X_1 , X_2 e $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$.
 (d) Como seriam as respostas anteriores se a primeira tira de papel não fosse devolvida à urna antes da segunda extração?
8. Numa urna têm-se cinco bolas marcadas com os seguintes números: -1, 0, 0, 0, 1. Retiram-se três bolas, simultaneamente; X indica a soma dos números extraídos e Y o maior valor da trinca. Calcule:
 (a) Função de probabilidade de (X, Y) .
 (b) $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
 (c) $\text{Var}(X + Y)$.
9. Dada a distribuição conjunta de X e Y abaixo, determine a média e a variância de:
 (a) $X + Y$.
 (b) XY .

$\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}$	1	2	3
1	5/27	1/27	3/27
2	4/27	3/27	4/27
3	2/27	3/27	2/27

10. Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta:

$\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}$	1	2	3
1	0,1	0,1	0,0
2	0,1	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0,0

- (a) Determine a f.p. de $X + Y$ e, a partir dela, calcule $E(X + Y)$. Pode-se obter a mesma resposta de outra maneira?
- (b) Determine a f.p. de XY e, em seguida, calcule $E(XY)$.
- (c) Mostre que, embora $E(XY) = E(X)E(Y)$, X e Y não são independentes.

18. As v.a. X e Y têm distribuição conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}x(x-y), & 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Faça um gráfico do domínio de variação de x e y .
- (b) Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.
- (c) Encontre as f.d.p. marginais de X e Y .
- (d) Encontre a $P(X \leq 1)$.

19. Suponha que as v.a. X e Y tenham f.d.p.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{nos demais pontos.} \end{cases}$$

- (a) Calcule as f.d.p. marginais de X e Y .
- (b) Calcule $P(0 < X < 1, 1 < Y < 2)$.
- (c) Calcule $\rho(X, Y)$.

20. Calcule $f_{Y|X}(y|x)$ e $f_{X|Y}(x|y)$ para a densidade do Problema 18.

21. Calcule as densidades condicionais para o Problema 19. Comente.

22. Calcule as densidades marginais e condicionais para a v.a. (X, Y) , com f.d.p.

$$f(x, y) = (1/64)(x+y), \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

23. Mesmos itens do Problema 22 para a f.d.p. conjunta

$$f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

24. Calcule as esperanças condicionais $E(Y|x)$ e $E(X|y)$ para o Problema 21.