Algumas Variáveis Aleatórias Contínuas Importantes

Pedro Henrique González

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Introdução

Neste capítulo, estudaremos minuciosamente algumas **variáveis aleatórias contínuas** importantes e suas características.

Como já salientamos anteriormente que, em muitos problemas, se torna matematicamente mais simples considerar um espaço amostral idealizado para uma variável aleatória X, no qual todos os números reais possíveis possam ser considerados como resultados possíveis.

As variáveis que agora introduziremos possuem importantes aplicações.

A Distribuição Normal

Definição

A variável aleatória X, com todos os valores reais $-\infty < x < \infty$, tem uma distribuição **normal** (ou **Gaussiana**) se a sua fdp for da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Os parâmetros μ e σ devem satisfazer às condições

$$-\infty < \mu < \infty \qquad \text{e} \qquad \sigma > 0.$$

A Distribuição Normal

Empregaremos a seguinte notação: X terá distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se, sua distribuição de probabilidade for normal.

A distribuição normal serve como uma excelente aproximação para uma grande classe de distribuições que têm enorme importância prática.

Além disso, esta distribuição apresenta algumas propriedades matemáticas muito desejáveis, que permitem concluir importantes resultados teóricos.

Propriedades da Distribuição Normal

A função f é uma fdp legítima. Logo,

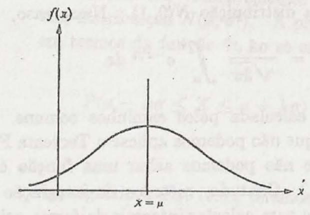
$$f(x) \geq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Propriedades da Distribuição Normal

O gráfico de f apresenta a bem conhecida forma de sino.



Como f depende de x somente através da expressão $(x-\mu)^2$, torna-se evidente que o gráfico de f será **simétrico** em relação a μ.

Propriedades da Distribuição Normal

O parâmetro σ também pode ser interpretado geometricamente.

Observamos que, para $x = \mu$, o gráfico de f tem **concavidade para baixo**.

Quando $x \to \pm\infty, f(x) \to 0$, assintoticamente.

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, isto significa que, para valores grandes de x (positivos ou negativos), o gráfico de f tem a **concavidade para cima**.

Propriedades da Distribuição Normal

O ponto no qual a concavidade muda é denominado **ponto de inflexão** e será localizado pela resolução da equação $f''(x) = 0$.

Ao fazer isso, verificamos que os pontos de inflexão ocorrem para

$$x = \mu \pm \sigma.$$

Isto é, σ unidades para a direita e para a esquerda de μ, o gráfico de f muda de concavidade.

Por isso, se σ for relativamente grande, o gráfico de f tende a ser **achatado**, enquanto que se σ for pequeno, o gráfico de f tende a ser bastante **pontiagudo**.

O Valor Esperado e a Variância da Distribuição Normal

Em complemento à interpretação geométrica dos parâmetros μ e σ, o seguinte significado probabilístico importante pode ser associado a essas quantidades:

$$E(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad V(x) = \sigma^2.$$

Deste modo, vemos que os dois parâmetros, μ e σ^2, que caracterizam a distribuição normal, são o valor esperado e a variância de X, respectivamente.

O Valor Esperado e a Variância da Distribuição Normal

Para dizê-lo de outra maneira, se supormos que X é distribuída normalmente, suporemos apenas que a sua distribuição de probabilidade é de um certo tipo.

Se, além disso, conhecermos $E(X)$ e $V(X)$, a distribuição de X estará completamente especificada.

Distribuição Normal Reduzida

Se X tiver a distribuição $N(0,1)$, diremos que X possui a **distribuição normal reduzida**.

Isto é, a fdp de X pode ser escrita como

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

A importância da distribuição normal reduzida está no fato de que ela está tabelada.

Sempre que X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, poderemos obter a forma reduzida pela adoção de uma função **linear** de X.

Distribuição Normal Reduzida

Teorema

Se X tiver a distribuição

$$N(\mu, \sigma^2)$$

e se

$$Y = aX + b,$$

então Y terá a distribuição

$$N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Distribuição Normal Reduzida

Corolário

Se X tiver distribuição

$$N(\mu, \sigma^2)$$

e se

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

então Y terá distribuição

$$N(0, 1).$$

Tabulação da Distribuição Normal

Suponha que X tenha distribuição $N(0, 1)$.

Nesse caso,

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Esta integral não pode ser calculada pelos caminhos comuns.

Contudo, métodos de integração numérica podem ser empregados para calcular integrais da forma acima e, de fato, $P(X \leq s)$ tem sido tabelada.

Tabulação da Distribuição Normal

A fd da distribuição normal reduzida, denotada por Φ, é dada por

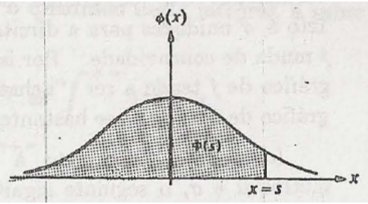
$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

A função Φ tem sido tabelada extensivamente.

Tabulação da Distribuição Normal

Podemos, agora, utilizar a tabulação da função Φ para calcularmos $P(a \leq X \leq b)$, em que X tem a distribuição reduzida $N(0,1)$, pois

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$



Tabulação da Distribuição Normal

A utilidade notável da tabulação da distribuição normal é devida ao fato de que, se X tiver qualquer distribuição, $N(\mu, \sigma^2)$, a função tabelada Φ pode ser empregada para calcular as probabilidades associadas a X.

É também evidente, pela definição de Φ, que

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esta relação é particularmente útil, porque na maioria das tábuas, a função Φ está tabulada somente para valores positivos de x.

Exemplo

Suponha que X tenha distribuição $N(3, 4)$.

Desejamos achar um número c, tal que $P(X > c) = 2P(X \leq c)$.

Observamos que $\dfrac{X-3}{2}$ tem distribuição $N(0, 1)$.

Exemplo

Logo,

$$P(X > c) = P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{c-3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right).$$

Também,

$$P(X \leq c) = P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{c-3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right).$$

Exemplo

A condição $P(X > c) = 2P(X \leq c)$ pode ser escrita como

$$1 - \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right).$$

Isto se torna $\phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Logo, a partir das tabulações da distribuição normal, encontramos que

$$\left(\frac{c-3}{2}\right) = -0.43,$$

fornecendo $c = 2.14$.

Exemplo

Suponha que a carga de ruptura de um tecido de algodão, X, seja normalmente distribuída, com $E(X) = 165$ e $V(X) = 9$.

Além disso, admita que uma amostra desse tecido seja considerada defeituosa se $X < 162$.

Qual é a probabilidade de que um tecido escolhido ao acaso seja defeituoso?

Devemos calcular $P(X < 162)$. Logo,

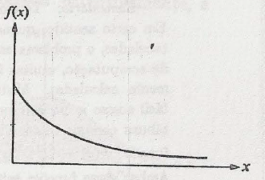
$$P(X < 162) = P\left(\frac{X - 165}{3} < \frac{162 - 165}{3}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.159.$$

A Distribuição Exponencial

Definição

Uma variável aleatória contínua X, que tome todos os valores não-negativos, terá uma **distribuição exponencial**, com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$



A Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial desempenha importante papel na descrição de uma grande classe de fenômenos, particularmente nos assuntos da teoria da confiabilidade.

Por enquanto, vamos apenas estudar algumas das propriedades da distribuição exponencial.

Propriedades da Distribuição Exponencial

A fd F da distribuição exponencial é dada por

$$
\begin{aligned}
F(x) = P(X \leq x) &= \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\, dt \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto, $P(X > x) = e^{-\alpha x}$.

O Valor Esperado e a Variância da Distribuição Exponencial

Se X tiver uma distribuição exponencial, teremos

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{e} \qquad V(X) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Propriedades da Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial apresenta a seguinte interessante propriedade, análoga para a distribuição geométrica.

Considere para quaisquer $s, t > 0$, $P(X > s + t|X > s)$. Teremos

$$P(X > s + t|X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t}.$$

Portanto,

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t).$$

Desta maneira, mostramos que a distribuição exponencial também apresenta a propriedade de **não possuir memória**, tal como a distribuição geométrica.

Exemplo

Suponha que um fusível tenha uma duração de vida X, a qual pode ser considerada uma variável aleatória contínua com uma distribuição exponencial.

Existem dois processos pelos quais o fusível pode ser fabricado.

O processo I apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas (isto é, o parâmetro é igual a 100^{-1}), enquanto o Processo II apresenta uma duração de vida esperada de 150 horas (isto é, o parâmetro é igual a 150^{-1}).

Exemplo

Suponha que o processo II seja duas vezes mais custoso (por fusível) que o processo I, que custa C dólares por fusível.

Admita, além disso, que se um fusível durar menos que 200 horas, uma multa de K dólares seja lançada sobre o fabricante.

Que processo deve ser empregado?

Exemplo

Vamos calcular o custo esperado para cada processo.

Para o processo I, teremos

$$\begin{aligned} C_I = \text{custo (por fusível)} &= C, & \text{se } X > 200, \\ &= C + K, & \text{se } X \leq 200. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(C_I) &= CP(X > 200) + (C + K)P(X \leq 200) \\ &= Ce^{(-1/100)200} + (C + K)(1 - e^{-1/100}200) \\ &= Ce^{-2} + (C + K)(1 - e^{-2}) \\ &= K(1 - e^{-2}) + C. \end{aligned}$$

Exemplo

Por um cálculo semelhante, encontraremos

$$E(C_{II}) = K(e^{-2} - e^{-4/3}) + 2C.$$

Portanto,

$$E(C_{II}) - E(C_I) = C + K(e^{-2} - e^{-4/3}) = C - 0.13K.$$

Conseqüentemente, preferiremos o processo I, pois $C > 0.13K$.

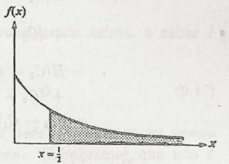
Exemplo

Suponhamos que X tenha uma distribuição exponencial com parâmetro α. Nesse caso,

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}.$$

Vamos calcular a probabilidade de que X ultrapasse o seu valor esperado. Teremos

$$P\left(X > \frac{1}{\alpha}\right) = e^{-\alpha(1/\alpha)} = e^{-1} < \frac{1}{2}.$$



A Função Gama

Definição

A **função gama**, denotada por Γ, é assim definida:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \, dx, \qquad p > 0.$$

A Função Gama

A função gama obedece a uma interessante relação de recorrência:

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Suponha que p seja um um inteiro positivo, digamos $p = n$. Então, aplicando a definição repetidamente, obteremos

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\
&= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= \vdots \\
&= (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1).
\end{aligned}$$

A Função Gama

Porém, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ dx = 1$ e, por isso, teremos

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

se n for um inteiro positivo.

Portanto, poderemos considerar a função gama como uma **generalização da função fatorial**.

É também fácil verificar que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

A Distribuição Gama

Definição

Seja X uma variável aleatória contínua, que tome somente valores não-negativos.

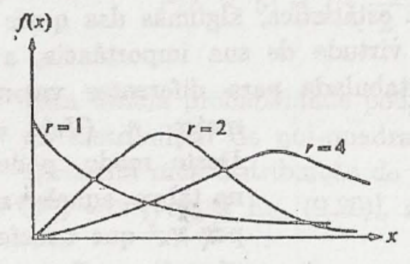
Diremos que X tem uma **distribuição de probabilidade gama** se a sua fdp for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

A Distribuição Gama

A distribuição gama depende de dois parâmetros, r e α, dos quais se exige $r > 0$ e $\alpha > 0$.

A figura a seguir mostra o gráfico para vários valores de r e $\alpha = 1$.



Propriedades da Distribuição Gama

Se $r = 1$, a fdp se reduz a $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$.

Portanto, a **distribuição exponencial** é um caso particular da **distribuição gama**.

Na maioria de nossas aplicações, o parâmetro r será um inteiro positivo.

Neste caso, existe uma interessante relação entre a fd da distribuição gama e a distribuição de Poisson: a fd da distribuição gama pode ser expressa em termos da fd tabulada da distribuição de Poisson.

O Valor Esperado e a Variância da Distribuição Gama

Se X tiver uma distribuição gama, teremos

$$E(X) = \frac{r}{\alpha} \qquad \text{e} \qquad V(X) = \frac{r}{\alpha^2}.$$

A Distribuição de Qui-Quadrado

Um caso particular muito importante da distribuição gama será obtido se fizermos

$$\alpha = 1/2 \qquad \text{e} \qquad er = n/2,$$

em que n é um inteiro positivo.

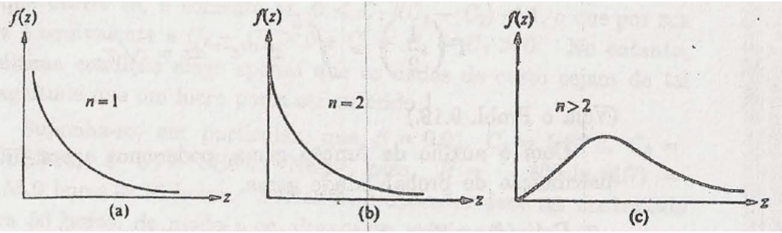
Obteremos uma **família de distribuições** de um parâmetro, com fdp

$$f(z) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}, \qquad z > 0.$$

A Distribuição de Qui-Quadrado

Uma variável aleatória Z que tenha a fdp anterior terá uma **distribuição de qui-quadrado**, com n graus de liberdade, denotada por χ_n^2.

Na figura a seguir, a fdp está apresentada para $n = 1$, 2 e $n > 2$.



O Valor Esperado e a Variância da Distribuição de Qui-Quadrado

Uma conseqüência imediata da definição é que, se Z tiver a fdp da distribuição de qui-quadrado, teremos

$$E(Z) = n \qquad \text{e} \qquad V(Z) = 2n.$$

Tabulação da Distribuição de Qui-Quadrado

A distribuição de qui-quadrado possui numerosas aplicações importantes em **inferência estatística**.

Em virtude de sua importância, a distribuição de qui-quadrado está tabulada para diferentes valores do parâmetro n.

Relação entre as Distribuições de Qui Quadrado e Normal

Teorema

Suponha que a variável aleatória Y tenha distribuição de χ_n^2.

Então, para n suficientemente grande, a variável aleatória $\sqrt{2Y}$ tem, aproximadamente, a distribuição $N(\sqrt{2n-1}, 1)$.

Relação entre as Distribuições de Qui Quadrado e Normal

Este teorema pode ser empregado da seguinte maneira.

Suponha que desejamos encontrar $P(Y \leq t)$, em que Y tem distribuição de χ^2_n e n é tão grande que essa probabilidade não possa ser diretamente obtida da tábua da distribuição de qui-quadrado.

Empregando o teorema, poderemos escrever

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= P(\sqrt{2Y} \leq \sqrt{2t}) \\ &= P(\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} \leq \sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}) \\ &\approx \Phi(\sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}). \end{aligned}$$

O valor de Φ será obtido das tábuas da distribuição normal.

Comparações entre Diversas Distribuições

Admita provas independentes de Bernoulli.

1. **Variável Aleatória**: número de ocorrências do evento A em um número fixo de provas.
   Distribuição: binomial.

2. **Variável Aleatória**: número de provas de Bernoulli necessárias para obter a primeira ocorrência de A.
   Distribuição: geométrica.

3. **Variável Aleatória**: número de provas de Bernoulli necessárias para obter a r-ésima ocorrência de A.
   Distribuição: Pascal.

Comparações entre Diversas Distribuições

Admita um Processo de Poisson.

1. **Variável Aleatória**: Número de ocorrências do evento A, durante um intervalo de tempo fixado.
   Distribuição: Poisson.

2. **Variável Aleatória**: Tempo necessário até a primeira ocorrência de A.
   Distribuição: exponencial.

3. **Variável Aleatória**: Tempo necessário até a r-ésima ocorrência de A.
   Distribuição: gama.