Lista de Exercícios – Variáveis Aleatórias Discretas

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a v.a. X igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de X.
2. Repita o problema anterior, mas considerando extrações com reposição.
3. Suponha que uma moeda perfeita é lançada até que cara apareça pela primeira vez. Seja X o número de lançamentos até que isso aconteça. Obtenha a distribuição de X. (Observe que, nesse problema, pelo menos teoricamente, X pode assumir um número infinito de valores.) Veja também o Problema 55.
4. Uma moeda perfeita é lançada quatro vezes. Seja Y o número de caras obtidas. Calcule a distribuição de Y.
5. Repita o problema anterior, considerando agora que a moeda é viciada, sendo a probabilidade de cara dada por p, $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$.
6. Generalize o Problema 5, para n lançamentos da moeda.
7. Obtenha a média e a variância da v.a. X dos Problemas 1 e 2.
8. Obter a média e a variância da v.a. Y do Problema 4.

9. No Problema 1, obtenha as distribuições das v.a. $3X$ e X^2.

10. Considere o lançamento de três moedas. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma *seqüência*, ao passo que se ocorre o evento CRC temos *três seqüências*. Defina a v.a. X = número de caras obtidas e Y = número de seqüências, isso para cada resultado possível. Assim, $X(CRR) = 1$ e $Y(CRR) = 2$. Obtenha as distribuições de X e Y. Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$.

11. Suponha que a v.a. V tem a distribuição seguinte:

v	0	1
$p(v)$	q	$1-q$

Obtenha $E(V)$ e $\text{Var}(V)$.

12. Seja X com distribuição dada abaixo; calcule $E(X)$. Considere a v.a. $(X-a)^2$ e calcule $E(X-a)^2$ para $a = 0,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1$. Obtenha o gráfico de $E(X-a)^2 = g(a)$. Para qual valor de a, $g(a)$ é mínimo?

x	0	1	2
$p(x)$	1/2	1/4	1/4

13. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de 1/3 ou 2/3, respectivamente. De cada contato, pode resultar a venda de um equipamento por \$50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10). Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

14. Calcule a variância da v.a. Y definida no Problema 13.

15. Obter a *f.d.a.* para a v.a. V do Problema 11. Faça seu gráfico.

16. Calcule a *f.d.a.* da v.a. Y do Problema 10 e faça seu gráfico.

17. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade.

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

(a) Calcule o tempo médio de processamento.
Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$2,00, mas, se ele processa a peça em menos de seis minutos, ganha \$0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de \$1,00.

(b) Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em \$ ganha por peça.

18. Sabe-se que a v.a. X assume os valores 1, 2 e 3 e que sua *f.d.a.* $F(x)$ é tal que

$$F(1) - F(1-) = 1/3,$$
$$F(2) - F(2-) = 1/6,$$
$$F(3) - F(3-) = 1/2.$$

Obtenha a distribuição de X, a *f.d.a.* $F(x)$ e os gráficos respectivos.

19. Obtenha a *f.d.a.* $F(t)$ da v.a. T do Problema 17.

20. Para os exercícios *(a)* a *(e)* abaixo, considere o enunciado:

Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.

(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.

(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.

(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

21. Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

(a) n

(b) p

(c) $P(X < 12)$

(d) $P(X \geqslant 14)$

(e) $E(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$, onde $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$

(f) $P(Y \geqslant 14/16)$, onde $Y = X/n$

(g) $P(Y \geqslant 12/16)$, onde $Y = X/n$

22. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

23. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2.000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 pés de fita magnética tenha:
   (a) nenhum corte?
   (b) no máximo dois cortes?
   (c) pelo menos dois cortes?

24. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

25. Examinaram-se 2.000 ninhadas de cinco porcos cada uma, segundo o número de machos. Os dados estão representados na tabela abaixo.

Nº de Machos	Nº de Ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40
Total	2.000

   (a) Calcule a proporção média de machos.
   (b) Calcule, para cada valor de X, o número de ninhadas que você deve esperar se $X \sim b(5, p)$, onde p é a proporção média de machos calculada em (a).

26. Se X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 1/2$, faça os gráficos da distribuição de X e da f.d.a. $F(x)$.

27. Considere, agora, $n = 5$ e $p = 1/4$. Obtenha o gráfico da distribuição de X. Qual a diferença entre esse gráfico e o correspondente do Problema 26? O que ocasionou a diferença?

28. Refaça o Problema 26, com $n = 6$ e $p = 1/2$.