Espaços Amostrais Finitos

Pedro Henrique González

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Espaço Amostral Finito

Neste capítulo, nos ocuparemos unicamente de experimentos para os quais o espaço amostral S seja formado de um número finito de elementos.

Isto é, admitiremos que S possa ser escrito sob a forma

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Se nos reportarmos aos exemplos de espaços amostrais da aula anterior, observaremos que S_1, S_2, S_3, S_4, S_6, S_7 e S_9 são todos finitos.

Evento Simples

Para caracterizarmos $P(A)$ para este modelo, deveremos inicialmente considerar o evento formado por um resultado simples, algumas vezes denominado **evento simples** ou elementar, $A = \{a_i\}$.

A cada evento simples $\{a_i\}$ associaremos um número p_i, denominado **probabilidade** de $\{a_i\}$, que satisfaça às seguintes condições:

1. $p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k,$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$

Probabilidade de Um Evento Simples

Em seguida, suponha que um evento A seja constituído por r resultados, $1 \leq r \leq k$,

$$A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}\},$$

em que $j_1, j_2, \ldots, j_r$ representam um qualquer dos r índices, de 1 até k.

Conseqüentemente, concluímos, pela definição de probabilidade, Propriedade 4, que

$$P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{j_r}.$$

Probabilidade de Um Evento Simples

Em resumo: a atribuição de probabilidades P_i a cada evento elementar $\{a_i\}$, sujeito às condições (a) e (b) citadas anteriormente, determina unicamente $P(A)$ para cada evento $A \subset S$.

Para avaliarmos os p_j individuais, alguma hipótese referente aos resultados individuais deve ser feita.

Exemplo

Suponha que somente três resultados sejam possíveis em um experimento: a_1, a_2 e a_3.

Além disso, suponha- se que a_1 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_2, o qual, por sua vez, é duas vezes mais provável de ocorrer que a_3.

Portanto, $p_1 = 2p_2$ e $p_2 = 2p_3$. Como $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, teremos $4p_3 + 2p_3 + p_3 = 1$, o que finalmente dá

$$p_3 = \frac{1}{7}, \qquad p_2 = \frac{2}{7} \qquad \text{e} \qquad p_1 = \frac{4}{7}.$$

Resultados Igualmente Verossímeis

A hipótese mais comumente feita para espaços amostrais finitos é a de que todos os resultados sejam igualmente verossímeis.

Existem muitos experimentos para os quais tal hipótese é assegurada, mas existem também muitas situações experimentais nas quais seria absolutamente errôneo aceitar essa suposição.

Por exemplo, seria bastante irreal supor que seja igualmente verossímil ocorrerem chamadas telefônicas em um centro de comunicação entre 1 e 2 horas da madrugada e entre 17 e 18 horas da tarde.

Resultados Igualmente Verossímeis

Se todos os k resultados forem igualmente verossímeis, cada probabilidade será $p_i = 1/k$. Conseqüentemente, a condição $p_1 + \ldots + p_k = 1$ torna-se $kp_i = 1$, para todo i.

Disto decorre que, para qualquer evento A formado de r resultados, teremos

$$P(A) = \frac{r}{k}.$$

Resultados Igualmente Verossímeis

Este método de avaliar $P(A)$ é freqüentemente enunciado da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{numero de casos favoráveis a } A \text{ pelos quais } E \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } E \text{ pode ocorrer.}}$$

É muito importante compreender que a expressão de $P(A)$ acima é apenas uma conseqüência da suposição de que todos os resultados sejam igualmente verossímeis e é aplicável somente quando essa suposição for atendida.

Exemplo

Um dado é lançado e todos os resultados se supõem igualmente verossímeis.

O evento A ocorrerá se, e somente se, um número maior do que 4 aparecer, isto é, $A = \{5, 6\}$.

Conseqüentemente,

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

Exemplo

Uma moeda equilibrada é lançada duas vezes. Seja A o evento: $\{$aparece uma cara$\}$. Qual o valor de $P(A)$?

Exemplo

Uma moeda equilibrada é lançada duas vezes. Seja A o evento: $\{$aparece uma cara$\}$. Qual o valor de $P(A)$?

Na avaliação de $P(A)$, a análise do problema poderia ser a seguinte: o espaço amostral é $S = \{0, 1, 2\}$, em que cada resultado representa o número de caras que ocorre.

Portanto, seria encontrada $P(A) = 1/3$.

Exemplo

Esta análise é obviamente incorreta, porque no espaço amostral considerado acima, todos os resultados não são igualmente verossímeis.

Para aplicarmos os métodos expostos, deveremos considerar em seu lugar o espaço amostral $S' = \{HH, HT, TH, TT\}$, em que H representa cara (*heads*) e T coroa (*tales*).

Neste espaço amostral, todos os resultados são igualmente verossímeis e, por isso, obteremos como solução correta de nosso problema:

$$P(A) = 2/4 = 1/2.$$

Exemplo

Poderíamos empregar corretamente o espaço S da seguinte maneira: os resultados 0 e 2 são igualmente verossímeis, enquanto o resultado 1 é duas vezes mais provável que qualquer um dos outros.

Portanto, $P(A) = 1/2$, o que concorda com a resposta anterior.

Resultados Igualmente Verossímeis

Este exemplo ilustra dois aspectos.

Primeiro, deveremos estar bastante seguros de que todos os resultados sejam igualmente verossímeis, antes de empregar o procedimento acima.

Segundo, poderemos freqüentemente, por uma escolha apropriada do espaço amostral, reduzir o problema a outro, em que todos os resultados sejam igualmente verossímeis.

Sempre que possível isto deve ser feito, porque geralmente torna o cálculo mais simples.

Resultados Igualmente Verossímeis

Muito freqüentemente, a maneira pela qual o experimento é executado determina se os resultados possíveis são igualmente verossímeis ou não.

Por exemplo, suponha que retiremos um parafuso de uma caixa que contenha três parafusos de tamanhos diferentes.

Se simplesmente escolhermos o parafuso estendendo a mão dentro da caixa e apanhando aquele que tocarmos primeiro, é óbvio que o parafuso maior terá maior probabilidade de ser escolhido que os outros dois.

Resultados Igualmente Verossímeis

No entanto, etiquetando cuidadosamente cada parafuso com um número, escrevendo o número em um cartão e escolhendo um cartão, tentaremos garantir que cada parafuso tenha, de fato, a mesma probabilidade de ser escolhido.

Assim, poderemos nos assegurar que a suposição matemática de resultados igualmente verossímeis seja, de fato, apropriada.

Experimentos Controlados

Nos exemplos já vistos e em muitos que se seguirão, trataremos da escolha ao acaso de um ou mais objetos de uma dada coleção de objetos.

Suponhamos que se tenha N objetos, $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

Experimentos Controlados

1. Escolher ao acaso um objeto, dentre N objetos, significa que cada objeto tem a mesma probabilidade de ser escolhido, isto é,

$$\text{Prob (escolher } a_i) = \frac{1}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Experimentos Controlados

2. Escolher ao acaso dois objetos, dentre N objetos, significa que cada par de objetos (deixada a ordem à parte) tem a mesma probabilidade de ser escolhido que qualquer outro par.

Por exemplo, se devemos escolher ao acaso dois objetos dentre (a_1, a_2, a_3, a_4), obter a_1 e a_2 é então tão provável quanto obter a_2 e a_3, etc.

Esta formulação levanta imediatamente a questão de quantos pares diferentes existem.

Admita que existam K desses pares. Então, a probabilidade de cada par seria $1/K$.

Experimentos Controlados

3. Escolher ao acaso n objetos $(n \leq N)$ dentre N objetos significa que cada ênupla, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, é tão provável de ser escolhida quanto qualquer outra ênupla.

Métodos de Enumeração

Considere, novamente, a forma já vista de $P(A)$,

$$P(A) = \frac{r}{k},$$

em que k é igual ao número total de maneiras pelas quais E pode ocorrer, enquanto r é igual ao número de maneiras pelas quais A pode ocorrer.

Nos exemplos apresentados até aqui, pequena dificuldade foi encontrada para calcular r e k.

Mas nós precisamos estudar situações apenas um pouco mais complicadas para percebermos a necessidade de alguns procedimentos sistemáticos de contagem ou enumeração.

Exemplo

Um lote de cem peças é composto de 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas.

Dez dessas peças são escolhidas ao acaso, sem reposição de qualquer peça escolhida antes que a seguinte seja escolhida.

Qual é a probabilidade de que exatamente metade das peças escolhidas seja defeituosa?

Exemplo

Para analisarmos este problema, consideremos o seguinte espaço amostral S.

Cada elemento de S é constituído de dez possíveis peças do lote, $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$.

Quantos resultados desses existem?

E, dentre esses resultados, quantos têm a característica de que exatamente a metade das peças seja defeituosa?

Regra da Multiplicação

Suponha que um procedimento designado por 1 possa ser executado de n_1 maneiras.

Admita que um segundo procedimento, designado por 2, possa ser executado de n_2 maneiras.

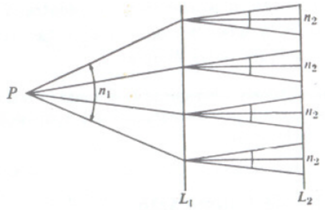
Suponha, também, que cada maneira de executar 1 possa ser seguida por qualquer daquelas para executar 2.

Então, o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser executado de $n_1 \times n_2$ maneiras.

Regra da Multiplicação

Para indicar a validade deste principio, é mais fácil considerar o seguinte tratamento sistemático.

Considere um ponto P e duas retas L_1 e L_2. Admita que o procedimento 1 consista em ir de P até L_1, enquanto o procedimento 2 consista em ir de L_1 até L_2. A figura a seguir indica como o resultado final é obtido.



Exemplo

Uma peça manufaturada deve passar por três estações de controle.

Em cada estação, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente.

Na primeira estação, três classificações são possíveis, enquanto que nas duas últimas, quatro classificações são possíveis. Conseqüentemente, existem $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneiras pelas quais uma peça pode ser marcada.

Regra da Adição

Suponha que um procedimento, designado por 1, possa ser realizado de n_1 maneiras.

Admita que um segundo procedimento, designado por 2, possa ser realizado de n_2 maneiras.

Além disso, suponha que não seja possível que ambos os procedimentos 1 e 2 sejam realizados em conjunto.

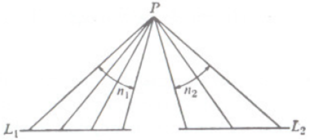
Então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou 1 ou 2 será $n_1 + n_2$.

Regra da Adição

Novamente, empregaremos um tratamento esquemático para nos convencermos da validade da regra da adição, como a figura a seguir indica.

Suponha que estejamos planejando uma viagem e devamos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem.

Se existirem três rodovias e duas ferrovias, então existirão $3 + 2 = 5$ caminhos disponíveis para a viagem.



Permutações e Arranjos

Suponha que tenhamos n objetos diferentes.

De quantas maneiras poderemos dispor (permutar) esses objetos?

Por exemplo, se tivermos os objetos a, b e c, poderemos considerar as seguintes permutações: abc, acb, bac, bca, cab e cba.

Portanto, a resposta é 6.

Permutações e Arranjos

Considere, em geral, o seguinte esquema: permutar os n objetos equivale a colocá-los dentro de uma caixa com n compartimentos, em alguma ordenação:

1	2	·	·	·	n

Permutações e Arranjos

O primeiro compartimento pode ser ocupado por qualquer um dos n objetos, o segundo compartimento por qualquer um dos $(n-1)$ objetos, etc, e o último compartimento apenas por um objeto.

Portanto, aplicando a regra da multiplicação, verificamos que a caixa poderá ser montada de

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

maneiras.

Este número aparece tão freqüentemente em Matemática que se adotam um nome e um símbolo especiais para ele.

Fatorial

Definição

Seja n um inteiro positivo. Definimos

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

e o denominamos **fatorial** de n.

Também definimos $0! = 1$.

Dessa maneira, o número de permutações de n objetos diferentes é dado por $n!$.

Permutações e Arranjos

Considere novamente n objetos diferentes. Agora desejamos escolher r desses objetos, $0 \leq r \leq n$, e permutar os r escolhidos.

Recorremos, novamente, ao esquema anterior, de encher uma caixa de n compartimentos. Desta vez, simplesmente paramos depois que o compartimento de ordem r tenha sido ocupado.

Assim, o primeiro compartimento pode ser preenchido de n maneiras, o segundo de $(n-1)$ maneiras e o de ordem r de $n-(r-1)$ maneiras.

Permutações e Arranjos

Portanto, o procedimento completo poderá ser executado, novamente, aplicando a regra da multiplicação, de

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

maneiras.

Empregando a notação de fatorial, introduzida acima, poderemos escrever

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Combinações

Considere, novamente, n objetos diferentes.

Agora, trataremos da contagem do número de maneiras de escolher r dentre esses n objetos sem considerarmos a ordem.

Por exemplo, temos os objetos a, b, c e d, e $r = 2$.

Desejamos contar ab, ac, ad, bc, bd e cd.

Não contaremos ab e ba, porque os mesmos objetos estão incluídos e somente a ordem é diversa.

Combinações

O número de maneiras de escolher r objetos dentre n e permutar os r escolhidos é

$$\frac{n!}{(n-r)!}.$$

Considere, agora, o número de maneiras de escolher r dentre os n, não considerada a ordem. Observe que, uma vez que r objetos tenham sido escolhidos, existirão $r!$ maneiras de permutá-los.

Conseqüentemente, aplicando novamente a regra da multiplicação, juntamente com esse resultado, obteremos

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Combinações

Portanto, o número de maneiras de escolher r dentre n objetos diferentes, não se considerando a ordem, é dado por

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Este número surge em muitas passagens da Matemática e, por isso, um símbolo especial é empregado para ele. Escreveremos

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Coeficientes Binomiais

Para nossos objetivos atuais, $\binom{n}{r}$ somente fica definido para n inteiro positivo e r um inteiro tal que $0 \leq r \leq n$.

Contudo, poderemos definir $\binom{n}{r}$ de modo mais geral, para qualquer número real n e para qualquer inteiro não negativo r, na forma seguinte:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!}.$$

Coeficientes Binomiais

Os números $\binom{n}{r}$ são freqüentemente denominados **coeficientes binomiais**, porque eles aparecem como coeficientes no desenvolvimento da expressão binomial $(a+b)^n$.

Se n for um inteiro positivo,

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b).$$

Quando a multiplicação tiver sido executada, cada termo será formadode k elementos a e de $(n-k)$ elementos b, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Quantos termos da forma $a^k b^{n-k}$ existirão?

Teorema Binomial

Simplesmente contaremos o número de maneiras possíveis de escolher k dentre os n elementos a, deixando de lado a ordem.

Mas isto é justamente dado por $\binom{n}{k}$.

Obtemos, então, o que é conhecido como o **teorema binomial**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Coeficientes Binomiais

Os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ têm sentido somente se n e k forem inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq n$. Todavia, se escrevermos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$$

observaremos que a última expressão tem sentido se n for qualquer número real e k for qualquer inteiro não-negativo.

Portanto,

$$\binom{-3}{5} = \frac{(-3) \times (-4) \times \ldots \times (-7)}{5!}$$

e assim por diante.

Forma Generalizada do Teorema Binomial

Empregando esta versão estendida dos coeficientes binomiais, poderemos estabelecer a forma generalizada do teorema binomial:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

Esta série tem significado para qualquer n real e para todo x tal que $|x| < 1$.

Observe que, se n for um inteiro positivo, a série infinita se reduz a um número finito de termos porque, neste caso, $\binom{n}{k} = 0$, se $k > n$.

Exemplo

1. Dentre oito pessoas, quantas comissões de três membros podem ser escolhidas?

Exemplo

1. Dentre oito pessoas, quantas comissões de três membros podem ser escolhidas?

Desde que duas comissões sejam a mesma comissão se forem constituídas pelas mesmas pessoas (não se levando em conta a ordem em que sejam escolhidas), teremos $\binom{8}{3} = 56$ comissões possíveis.

Exemplo

2. Com oito bandeiras diferentes, quantos sinais feitos com três bandeiras se podem obter?

Exemplo

2. Com oito bandeiras diferentes, quantos sinais feitos com três bandeiras se podem obter?

Este problema parece muito com o anterior. No entanto, aqui a ordem acarreta diferença e, por isso, obteremos $8!/5! = 336$ sinais.

Exemplo

3. Um grupo de oito pessoas é formado de cinco homens e três mulheres. Quantas comissões de três pessoas podem ser constituídas, incluindo exatamente dois homens?

Exemplo

3. Um grupo de oito pessoas é formado de cinco homens e três mulheres. Quantas comissões de três pessoas podem ser constituídas, incluindo exatamente dois homens?

Aqui deveremos fazer duas coisas: escolher dois homens (dentre cinco) e escolher uma mulher (dentre três).

Daí obtermos como número procurado $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30$ comissões.

Exemplo

4. De um lote formado por 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas, escolhemos ao acaso 10 (sem reposição). O número de maneiras de fazer isso é $\binom{100}{10}$.

Exemplo

4. De um lote formado por 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas, escolhemos ao acaso 10 (sem reposição). O número de maneiras de fazer isso é $\binom{100}{10}$.

Portanto, a probabilidade de achar exatamente 5 peças defeituosas e 5 perfeitas entre as 10 escolhidas é dada por

$$\frac{\binom{20}{5} \times \binom{80}{5}}{\binom{100}{10}}.$$

Por meio de logaritmos de fatoriais (os quais se acham tabulados), a expressão acima pode ser avaliada como igual a 0.021.

Probabilidade Hipergeométrica

Vamos generalizar o problema anterior. Admitamos que temos N peças. Se escolhermos ao acaso n delas, sem reposição, teremos $\binom{N}{n}$ diferentes amostras possíveis, todas elas com a mesma probabilidade de serem escolhidas.

Se as N peças forem formadas por r_1 da classe A e r_2 da classe B (com $r_1 + r_2 = N$), então, a probabilidade de que as n peças escolhidas sejam exatamente s_1 da classe A e $n - s_1$ da classe B será dada por

$$\frac{\binom{r_1}{s_1} \times \binom{r_2}{n - s_1}}{\binom{N}{n}}.$$

A expressão acima se denomina **probabilidade hipergeométrica** e será ainda reencontrada.

Escolha Com ou Sem Reposição

É muito importante especificar, quando falarmos de peças extraídas ao acaso, se a escolha é **com ou sem reposição**. Na maioria dos casos concretos, pretenderemos a última.

Por exemplo, quando inspecionamos certo número de peças manufaturadas para descobrirmos quantas defeituosas poderiam existir, geralmente não pensamos em examinar a mesma peça duas vezes.

O número de maneiras de escolher r objetos dentre n objetos, não considerada a ordem, é dado por $\binom{n}{r}$.

O número de maneiras de escolher r objetos dentre n objetos, com reposição, é dado por n^r. Neste caso, estaremos interessados na ordem em que as peças sejam escolhidas.

Exemplo

Admitamos que se escolham ao acaso dois objetos, dentre os quatro denominados a, b, c e d.

Se escolhermos **sem reposição**, o espaço amostral S poderá ser representado da forma abaixo:

$$S = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (a, d)\}.$$

Existem $\binom{4}{2} = 6$ resultados possíveis. Cada um desses resultados indica somente quais os dois objetos que foram escolhidos e, e não a ordem em que eles foram escolhidos.

Exemplo

Se escolhermos **com reposição**, o espaço amostral S' poderá ser representado por:

$$\begin{aligned} S' &= \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),\\ &\quad (c,a),(c,b),(c,c,),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}. \end{aligned}$$

Existem $4^2 = 16$ resultados possíveis. Aqui, cada um desses resultados indica quais objetos foram escolhidos e a ordem em que eles o foram.

Exemplo

Escolher ao acaso implica que, se escolhermos sem reposição, todos os resultados em S serão igualmente verossímeis, enquanto que se escolhermos com reposição, então todos os resultados em S' serão igualmente verossímeis.

Portanto, se A for o evento $\{$o objeto c é escolhido$\}$, então teremos:

$$P(A) = 3/6 = 1/2,$$

se escolhermos sem reposição (S), e

$$P(A) = 7/16,$$

se escolhermos com reposição (S').

Permutações com Alguns Elementos Repetidos

Em todas as técnicas de enumeração já apresentadas, admitimos que todos os objetos considerados fossem diferentes (isto é, distinguíveis).

No entanto, não é sempre essa a situação que ocorre.

Suponha, a seguir, que temos n objetos, tais que n_1 sejam de uma primeira espécie, n_2 de uma segunda espécie, etc., n_k de uma k-ésima espécie, com $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Nesse caso, o número de permutações possíveis desses n objetos é dado por

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}.$$