Introdução à Probabilidade

Pedro Henrique González

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Experimentos Determinísticos

Vamos examinar, inicialmente, o que se pode adequadamente denominar **modelo deteminístico**.

Por essa expressão pretendemos nos referir a um modelo que estipule que **as condições sob as quais um experimento seja executado determinem o resultado do experimento**.

Experimentos Determinísticos

Por exemplo, se introduzirmos uma bateria em um circuito simples, o modelo matemático que, presumivelmente, descreveria o fluxo de corrente elétrica observável seria $I = E/R$, isto é, a Lei de Ohm.

O modelo encontra o valor de I tão logo os valores de E e R sejam fornecidos. Dizendo de outra maneira, se o experimento mencionado for repetido um certo número de vezes, toda vez utilizando o mesmo circuito (isto é, conservando-se fixados E e R), poderemos presumivelmente esperar observar o mesmo valor para I.

Experimentos Determinísticos

Quaisquer desvios que pudessem ocorrer seriam tão pequenos que, para a maioria das finalidades, a descrição acima (isto é, o modelo) seria suficiente.

O importante é que a bateria, o fio e o amperômetro particulares utilizados para gerar e observar a corrente elétrica, e a nossa capacidade de empregar o instrumento de medição, determinam o resultado em cada repetição.

Experimentos Determinísticos

Existem determinados fatores que poderão ser diferentes de repetição para repetição mas que, no entanto, não influenciarão muito o resultado.

Por exemplo, a temperatura e a umidade no laboratório, ou a estatura da pessoa que lê o amperômetro provavelmente não terão influência no resultado.

Experimentos Determinísticos

Na natureza, existem muitos exemplos de experimentos para os quais modelos determinísticos são apropriados.

Por exemplo, as leis da gravitação explicam bastante precisamente o que acontece a um corpo que cai sob determinadas condições.

As leis de Kepler nos dão o comportamento dos planetas.

Em cada situação, o modelo específica que as condições sob as quais determinado fenômeno acontece determinam o valor de algumas variáveis observáveis: a grandeza da velocidade, a área varrida durante determinado período de tempo, etc.

Experimentos Determinísticos

Sabemos que, sob determinadas condições, a distância percorrida (verticalmente, acima do solo) por um objeto é dada por

$$s = -16t^2 + v_0 t,$$

em que v_o é a velocidade inicial e t o tempo gasto na queda.

O ponto no qual desejamos fixar nossa atenção não é a forma particular da equação acima, mas o fato de que existe uma relação definida entre t e s, a qual determina **univocamente** a quantidade no primeiro membro da equação, se os valores no segundo membro forem fornecidos.

Experimentos Não-Determinísticos

Para um grande número de situações, o modelo matemático determinístico apresentado é suficiente.

Contudo, existem também muitos fenômenos que requerem um modelo matemático diferente para a sua investigação.

São os que denominaremos modelos **não-determinísticos** ou **probabilísticos**.

Outra expressão muito comumente empregada é modelo **estocástico**.

Experimentos Não-Determinísticos

Estamos, agora, em condições de examinar o que entendemos por um experimento **aleatório** ou **não-determinístico**.

Mais precisamente, daremos exemplos de fenômenos, para os quais modelos não-determinísticos são apropriados.

Portanto, nos referiremos freqüentemente a experimentos não-determinísticos ou aleatórios, quando de fato estaremos falando de um modelo não-determinístico para um experimento.

Não nos esforçaremos em dar uma definição precisa deste conceito. Em vez disso, citaremos um grande número de exemplos que ilustrarão o que temos em mente.

Exemplos – Experimentos

- E_1: Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.
- E_2: Jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido.
- E_3: Jogue uma moeda quatro vezes e observe a seqüência obtida de caras e coroas.
- E_4: Em uma linha de produção, fabrique peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.
- E_5: Uma asa de avião é fixada por um grande número de rebites. Conte o número de rebites defeituosos.

Exemplos – Experimentos

- E_6: Uma lâmpada é fabricada. Em seguida, é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.
- E_7: Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas, uma a uma (sem reposição da peça retirada), até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.
- E_8: Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.
- E_9: De uma urna que só contém bolas pretas, retiramos uma bola e verificamos a sua cor.

Experimentos Não-Determinísticos

O que os experimentos anteriores têm em comum?

1. Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente, sob condições essencialmente inalteradas.

2. Muito embora não sejamos capazes de afirmar que um **resultado particular** ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de **todos os possíveis resultados** do experimento.

Experimentos Não-Determinísticos

3. Quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá.

É esta regularidade que toma possível construir um modelo matemático preciso, com o qual analisaremos o experimento.

Experimentos Não-Determinísticos

Em breve teremos muito que dizer sobre a natureza e a importância desta regularidade. Por ora, podemos apenas pensar nas repetidas jogadas de uma moeda equilibrada.

Muito embora caras e coroas apareçam sucessivamente, em uma maneira quase arbitrária, é fato empírico bem conhecido que, depois de um grande número de jogadas, a proporção de caras e a de coroas serão aproximadamente iguais.

O Espaço Amostral

Definição

Para cada experimento E do tipo que estamos considerando, definiremos o **espaço amostral** como o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Geralmente, representaremos esse conjunto por S.

O Espaço Amostral

Vamos considerar cada um dos experimentos anteriores e descrever um espaço amostral para cada um deles.

O espaço amostral S_i se referirá ao experimento E_i.

Exemplos – O Espaço Amostral

- $S_1 : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $S_2 : \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- S_3 : {todas as seqüências possíveis da forma a_1, a_2, a_3, a_4}, em que cada $a_i = H$ ou T, conforme apareça cara ou coroa na i-ésima jogada.
- $S_4 : \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, em que N é o número máximo que pode ser produzido em 24 horas.

Exemplos – O Espaço Amostral

- $S_5 : \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, em que M é o número de rebites empregado.
- $S_6 : \{t, t \geq 0\}$.
- $S_7 : \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- $S_8 : \{10, 11, 12, \ldots\}$.
- $S_9 : \{\text{bola preta}\}$.

Observações

Para descrevermos um espaço amostral associado a um experimento, devemos ter uma idéia bastante clara daquilo que estamos mensurando ou observando.

Por isso, devemos falar de **um** espaço amostral associado a um experimento, e não de **o** espaço amostral.

A esse respeito, notamos a diferença entre S_2 e S_3.

Observações

Vale ressaltar, também, que o resultado de um experimento não é, necessariamente, um número.

Por exemplo, em E_3, cada resultado é uma seqüência de caras (H) e coroas (T).

Tamanho de Um Espaço Amostral

Será também importante estudar o número de resultados em um espaço amostral.

Surgem três possibilidades: o espaço amostral pode ser **finito**, **infinito enumerável** ou **infinito não-enumerável**.

Relativamente aos exemplos anteriores, observamos que S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7 e S_{12} são finitos, S_8 é infinito enumerável e S_6 é infinito não-enumerável.

Eventos

Outra noção fundamental é o conceito de **evento**.

Um evento A (relativo a um espaço amostral S, associado a um experimento E) é simplesmente um conjunto de resultados possíveis.

Na terminologia dos conjuntos, um evento é um subconjunto de um espaço amostral S.

Considerando nossa exposição anterior, isto significa que o próprio S constitui um evento, bem como o conjunto vazio $\emptyset$.

Qualquer resultado individual pode também ser considerado como um evento.

Eventos

Alguns exemplos de eventos são dados a seguir.

Novamente, nos referimos aos experimentos relacionados anteriormente: A_i se referirá ao evento associado ao experimento E_i.

Quando o espaço amostral S for finito ou infinito enumerável, todo subconjunto poderá ser considerado um evento.

Exemplos – Eventos

- A_1: Um número par ocorre; $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
- $A_2 : \{2\}$, duas caras ocorrem.
- $A_3 : \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$; mais caras do que coroas ocorreram.
- $A_4 : \{0\}$; todas as peças são perfeitas.
- $A_5 : \{3, 4, \ldots, M\}$; mais do que dois rebites eram defeituosos.
- $A_6 : \{t | t < 3\}$; a lâmpada queima em menos de 3 horas.

Eventos de Eventos

Agora, poderemos empregar várias técnicas de combinar conjuntos (eventos) e obter novos conjuntos (eventos).

1. Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

2. Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

3. Se A for um evento, $\bar{A}$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer.

Eventos de Eventos

4. Se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então, $\cup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.

5. Se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então $\cap_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem.

6. Se $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.

Eventos de Eventos

7. Se $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem.

8. Suponha que S represente o espaço amostral associado a algum experimento E e que executemos E duas vezes. Então, $S \times S$ poderá ser empregado para representar todos os resultados dessas duas repetições. Portanto, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultou quando E foi executado a primeira vez e s_2 quando E foi executado pela segunda vez.

Eventos de Eventos

9. O exemplo anterior pode, obviamente, ser generalizado. Considere n repetições de um experimento E cujo espaço amostral seja S:

$$S \times S \times \ldots \times S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n), s_i \in S, i = 1, \ldots, n\}$$

representa o conjunto de todos os possíveis resultados, quando E for executado n vezes.

De certo modo, $S \times S \times \ldots \times S$ é, ele próprio, um espaço amostral: o espaço amostral associado a n repetições de E.

Eventos Mutuamente Excludentes

Definição

Dois eventos, A e B, são denominados **mutuamente excludentes** se eles não puderem ocorrer juntos.

Representaremos isso escrevendo $A \cap B = \emptyset$, isto é, a interseção de A e B é o conjunto vazio.

Exemplo

Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço, t, é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $\{t|t \geq 0\}$.

Sejam A, B e C três eventos definidos da seguinte maneira:

$$A = \{t|t < 100\};$$

$$B = \{t|50 \leq t \leq 200\};$$

$$C = \{t|t > 150\}.$$

Exemplo

Consequentemente,

$$A \cup B = \{t | t \leq 200\} \qquad A \cap B = \{t | 50 \leq t < 100\}$$

$$B \cup C = \{t | t \geq 50\} \qquad B \cap C = \{t | 150 < t \leq 200\}$$

$$A \cup C = \{t | t < 100 \text{ ou } t > 150\} \qquad A \cap C = \emptyset$$

$$A \cup B \cup C = \{t | t \geq 0\} \qquad A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\bar{A} = \{t | t \geq 100\} \qquad \bar{B} = \{t | t < 50 \text{ ou } t > 200\} \qquad \bar{C} = \{t | t \leq 150\}$$

Teoria da Probabilidade

Uma das características fundamentais do conceito de **experimento** é que nós não sabemos qual resultado particular ocorrerá quando o experimento for realizado.

Em outras palavras, se A for um evento associado a um experimento, então não poderemos afirmar com certeza que A irá ocorrer ou não.

Por isso, torna-se muito importante tentar associar um número ao evento A, o qual medirá, de alguma maneira, quão verossímil o evento A venha a ocorrer.

Essa tarefa nos leva à **teoria da probabilidade**.

Freqüência Relativa

Para motivarmos a maneira de tratar o assunto, considere o seguinte procedimento.

Suponha que repetimos n vezes o experimento E e sejam A e B dois eventos associados a E.

Admitamos que sejam, respectivamente, n_A e n_B o número de vezes que o evento A e o evento B ocorram nas n repetições.

Freqüência Relativa

Definição

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

é denominada **freqüência relativa** do evento A nas n repetições de E.

Freqüência Relativa

A freqüência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades, de fácil verificação:

1. $0 \leq f_a \leq 1$.
2. $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as n repetições.
3. $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas n repetições.
4. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes e se $f_{A \cup B}$ for a freqüência relativa associada ao evento $A \cup B$, então, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
5. f_A, com base em n repetições do experimento e considerada como uma função de n, "converge", em certo sentido probabilístico, para $P(A)$, quando $n \to \infty$.

Observações

A Propriedade 5 está evidentemente expressada um tanto vagamente, nesta seção.

Por enquanto, podemos apenas afirmar que a Propriedade 5 envolve a noção nitidamente intuitiva de que a freqüência relativa, baseada em um número crescente de observações, tende a se "estabilizar" próximo de algum valor definido.

Este não é o mesmo conceito usual de convergência encontrado em outras áreas da Matemática.

De fato, tal como afirmamos aqui, esta não é, de modo algum, uma conclusão matemática, mas apenas um fato empírico.

Observações

A maioria de nós está intuitivamente a par deste fenômeno de estabilização, muito embora nunca o tenhamos verificado.

Fazê-lo exige considerável quantidade de tempo e de paciência, porque inclui um grande número de repetições de um experimento.

Regularidade Estatística

Esta propriedade de estabilidade da freqüênda relativa é, por enquanto, uma noção inteiramente intuitiva.

A essência desta propriedade é que, se um experimento for executado um grande número de vezes, a freqüência relativa da ocorrência de algum evento A tenderá a variar cada vez menos à medida que o número de repetições for aumentada.

Esta característica é também conhecida como **regularidade estatística**.

Experimentos

Fomos um tanto vagos em nossa definição de **experimento**.

Quando um procedimento ou mecanismo constituirá, em nossa acepção, um experimento capaz de ser estudado matematicamente por meio de um modelo não-determinístico?

Já afirmamos, anteriormente, que um experimento deve ser capaz de ser realizado repetidamente, sob condições essencialmente inalteradas.

Experimentos

Agora, podemos acrescentar outra condição.

Quando o experimento for repetidamente realizado, ele deverá apresentar a **regularidade estatística** mencionada.

No curso de Inferência Estatística será estudado um teorema, denominado **Lei dos Grandes Números**, que mostrará que a regularidade estatística é, de fato, uma conseqüência da primeira condição: **reprodutibilidade**.

Ocorrências de Eventos

Voltemos, agora, ao problema proposto: atribuir um número a cada evento A, o qual avaliará quão verossímil será a ocorrência de A quando o experimento for realizado.

Uma possível maneira de tratar a questão seria a seguinte: repetir o experimento um grande número de vezes, calcular a freqüência relativa f_A e utilizar esse número.

Ocorrências de Um Evento

Quando recordamos as propriedades de f_A, torna-se evidente que este número fornece uma informação muito precisa de quão verossímil é a ocorrência de A.

Além disso, sabemos que, à medida que o experimento se repetir mais e mais vezes, a freqüência relativa f_A se estabilizará próxima de algum número, suponhamos p.

Ocorrências de Um Evento

Há, contudo, duas sérias objeções a esta maneira de tratar a questão:

1. Não está esclarecido quão grande deva ser n, antes que se conheça o número. 1.000? 2.000? 10.000?
2. Uma vez que o experimento tenha sido completamente descrito e o evento A especificado, o número que estamos procurando não deverá depender do experimentador ou da particular sorte que ele possua.

Ocorrências de Um Evento

Por exemplo, é possível que uma moeda perfeitamente equilibrada, quando jogada 10 vezes, venha a apresentar 9 caras e 1 coroa.

A freqüência relativa do evento $A = \{\text{ocorrer cara}\}$ seria, nesse caso, igual a $9/10$. No entanto, é evidente que, nas próximas 10 jogadas, o padrão de caras e coroas possa se inverter.

Ocorrências de Um Evento

O que desejamos é um meio de obter tal número sem recorrer à experimentação.

Naturalmente, para que o número que convencionarmos tenha significado, qualquer experimentação subseqüente deverá produzir uma freqüência relativa que seja "próxima" do valor convencionado, particularmente se o número de repetições, no qual a freqüência relativa calculada esteja baseada, for muito grande.

Probabilidade

Definição

Seja E um experimento. Seja S um espaço amostral associado a E. A cada evento A associaremos um número real, representado por $P(A)$ e denominado **probabilidade** de A, que satisfaça às seguintes propriedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots .$$

Probabilidade

Observe que, da Propriedade 3, decorre imediatamente que, para qualquer n finito,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

A Propriedade 4 não é automática. No entanto, quando considerarmos o espaço amostral idealizado, esta propriedade será definida e, por isso, foi incluída aqui.

Probabilidade e Freqüência Relativa

A escolha das propriedades da probabilidade é, obviamente, sugerida pelas correspondentes características da freqüência relativa.

Por enquanto, apenas afirmamos que se pode mostrar que os números $P(A)$ e f_A são "próximos" um do outro (em determinado sentido), se f_A for baseado em um grande número de repetições.

É este fato que nos dá a justificativa da utilização de $P(A)$ para avaliarmos quão verossímil é a ocorrência de A.

Probabilidade $P(A)$

Por enquanto, não sabemos como calcular $P(A)$.

Nós apenas descobrimos algumas propriedades gerais que $P(A)$ possui.

Antes de voltarmos a esta questão, vamos enunciar e demonstrar várias conseqüências relacionadas a $P(A)$, que decorrem das condições anteriores e que não dependem da maneira pela qual realmente calculamos $P(A)$.

Teorema – Evento Vazio

Teorema 1.1

Se $\emptyset$ for o conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$.

Teorema – Evento Vazio

Demonstração

Para qualquer evento A, podemos escrever $A = A \cup \emptyset$.

Uma vez que A e $\emptyset$ são mutuamente excludentes, decorre da Propriedade 3 que $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$.

Daqui, a conclusão do teorema é imediata.

Observações

Em breve veremos que a recíproca do teorema anterior não é verdadeira.

Isto é, se $P(A) = 0$, não poderemos, em geral, concluir que $A = \emptyset$, porque existem situações nas quais atribuímos probabilidade zero a um evento que pode ocorrer.

Teorema – Evento Complementar

Teorema 1.2

Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Teorema – Evento Complementar

Teorema 1.2

Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstração

Podemos escrever $S = A \cup \bar{A}$ e, empregando as Propriedades 2 e 3, obteremos $1 = P(A) + P(\bar{A})$.

Teorema – União de Dois Eventos

Teorema 1.3

Se A e B forem dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Teorema – União de Dois Eventos

Teorema 1.3

Se A e B forem dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Este teorema representa uma extensão imediata da Propriedade 3, porque se $A \cap B = \emptyset$, obteremos do enunciado acima a Propriedade 3.

Teorema – União de Dois Eventos

Teorema 1.3

Se A e B forem dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Este teorema representa uma extensão imediata da Propriedade 3, porque se $A \cap B = \emptyset$, obteremos do enunciado acima a Propriedade 3.

Demonstração

A idéia desta demonstração é decompor $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente excludentes e, em seguida, aplicar a Propriedade 3.

Teorema – União de Dois Eventos

Desse modo escreveremos

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}), \qquad B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Conseqüentemente,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}), \qquad P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}).$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

e, então, chegamos ao resultado.

Teorema – União de Múltiplos Eventos

Teorema 1.4

Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Teorema – União de Múltiplos Eventos

Teorema 1.4

Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Demonstração

A demonstração consiste em escrever $A \cup B \cup C$ na forma $(A \cup B) \cup C$ e aplicar a resultado do teorema anterior.

Deixamos ao aluno completar a demonstração.

Teorema – Subconjuntos de Eventos

Teorema 1.5

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Teorema – Subconjuntos de Eventos

Teorema 1.5

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Este resultado é, certamente, intuitivo, pois ele afirma que, se B deve ocorrer sempre que A ocorra, conseqüentemente, B é mais provável do que A.

Teorema – Subconjuntos de Eventos

Teorema 1.5

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Este resultado é, certamente, intuitivo, pois ele afirma que, se B deve ocorrer sempre que A ocorra, conseqüentemente, B é mais provável do que A.

Demonstração

Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$.

Conseqüentemente, $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$, porque $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, pela Propriedade 1.