Lista de Exercícios – Variáveis Aleatórias Contínuas

1. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x \geqslant 0 \\ \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

   (a) Mostre que esta é uma f.d.p.
   (b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

2. Uma v.a. X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Cx, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ C(1-x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

   (a) Qual valor deve ter a constante C?
   (b) Faça o gráfico de $f(x)$.
   (c) Determine $P(X \leqslant 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leqslant X \leqslant 3/4)$.

3. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio 10 cm, e seja X a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A f.d.p. de X é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ \\ 0, & \text{para os demais valores.} \end{cases}$$

   (a) Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de 1 cm de raio?
   (b) Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.

4. Encontre o valor da constante c se

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & x \geqslant 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre $P(X > 15)$.

5. Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da v.a. X do Problema 2.

6. Determine a esperança e a variância da v.a. cuja f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

7. Calcule a média da v.a. X do Problema 4.

8. A v.a. contínua X tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Se b for um número que satisfaz $-1 < b < 0$, calcule $P(X > b \mid X < b/2)$.
   (b) Calcule $E(X)$ e $\operatorname{Var}(X)$.

9. Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X, que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \frac{3}{5}\, 10^{-5}\, x(100 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 100.$$

   Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por $L = C_1 + C_2X$. Calcule $E(L)$, o lucro esperado por unidade.

10. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ -x/3 + 1, & \text{se } 1 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

   (a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?
   (b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
   (c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

11. Suponha que X tenha f.d.p. $f(x)$ do Problema 1. Calcule $E(X)$ e $\operatorname{Var}(X)$.

12. Seja X com densidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Calcule a média e a variância de X.

13. A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo (150, 300). Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo

seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a 200°, o produto obtido é vendido a C_2 reais; se a temperatura for superior a 200°, o produto é vendido a C_3 reais.

(a) Fazer o gráfico da f.d.p. de T.

(b) Qual o lucro médio por galão?

14. Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$,

(b) $P(9 \leqslant X \leqslant 12)$,

(c) $P(X > 10)$,

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

15. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:

(a) $P(X < 115)$,

(b) $P(X \geqslant 80)$,

(c) $P(|X - 100| \leqslant 10)$,

(d) o valor a, tal que $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = 0{,}95$.

16. Para a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:

(a) $P(X \leqslant \mu + 2\sigma)$,

(b) $P(|X - \mu| \leqslant \sigma)$,

(c) o número a tal que $P(\mu - a\sigma \leqslant X \leqslant \mu + a\sigma) = 0{,}99$,

(d) o número b tal que $P(X > b) = 0{,}90$.

17. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.

(a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?

(b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

18. As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

19. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

20. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $N(0{,}6140; (0{,}0025)^2)$. O lucro T de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,

$T = 0{,}10$, se o rolamento for bom $(0{,}610 < X < 0{,}618)$;

$T = 0{,}05$, se o rolamento for recuperável $(0{,}608 < X < 0{,}610)$ ou $(0{,}618 < X < 0{,}620)$;

$T = -0{,}10$, se o rolamento for defeituoso $(X < 0{,}608 \text{ ou } X > 0{,}620)$.

Calcule:

(a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.

(b) $E(T)$.

21. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leqslant 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

22. Seja Y com distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}4$. Determine a aproximação normal para:
(a) $P(3 < Y < 8)$, (b) $P(Y \geqslant 7)$, (c) $P(Y < 5)$.

23. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use também a aproximação normal.

24. A confiabilidade de um mecanismo eletrônico é a probabilidade de que ele funcione sob as condições para as quais foi planejado. Uma amostra de 1.000 desses itens é escolhida ao acaso e os itens são testados, obtendo-se 30 defeituosos. Calcule a probabilidade de se obter pelo menos 30 itens defeituosos, supondo que a confiabilidade de cada item é 0,95.