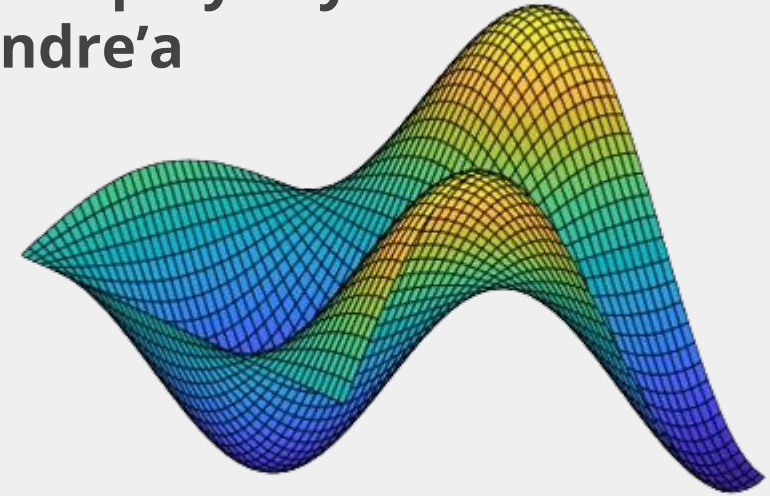
Obliczanie całek podwójnych na kole przy użyciu złożonej kwadratury Gaussa-Legendre’a



Autor: Tomasz Pawlaczyk
Indeks: xxxxxx
Grupa: 6a
Dzień i godzina zajęć: czwartek, 15:15
Projekt: 1
Zadanie: 36

Obliczanie $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

przez transformację na kwadrat [-1,1]x[-1,1] i zastosowanie złożonych 2-punktowych kwadratur Gaussa-Legendre'a ze względu na każdą zmienną.

Opis zastosowanych metod numerycznych

I. Złożona kwadratura Gaussa-Legendre’a 2-punktowa.
Polega ona na podziale obszaru całkowania na siatkę małych prostokątów, a następnie zastosowaniu w każdym z nich standardowej 2-punktowej reguły Gaussa z wagami i węzłami:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} w_p w_q f(x_{i,p}, y_{j,q})\,|J|$$

Gdzie:

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_{i,p} = x_i + \frac{h}{2}\,\xi_p \qquad y_{j,q} = y_j + \frac{h}{2}\,\xi_q$$

Opis zastosowanych metod numerycznych

I. Złożona kwadratura Gaussa-Legendre’a 2-punktowa.

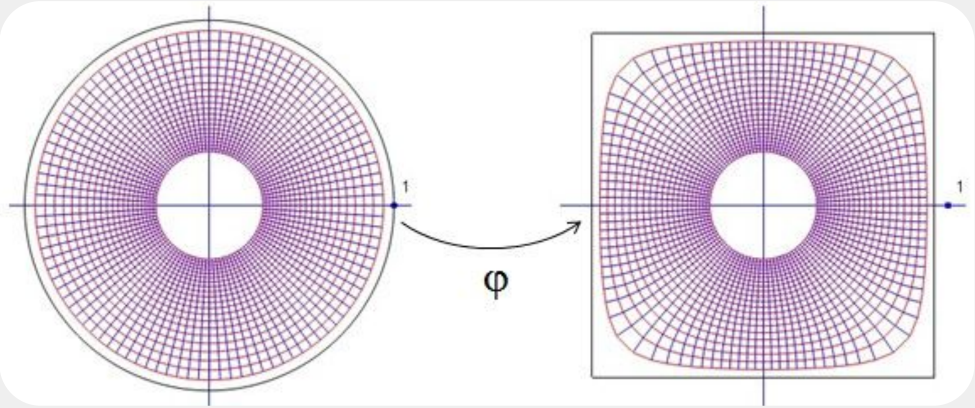
Własności kwadratury 2-punktowej:

- Dokładna dla funkcji wielomianowych stopnia <= 3 w każdej zmiennej
- Dla wyższych stopni funkcji: przybliżenie, dokładność poprawia się przy zwiększeniu liczby podprzedziałów
- Szybka i stabilna dla funkcji gładkich
- Wykorzystuje minimalną liczbę węzłów dla danego stopnia dokładności

Opis zastosowanych metod numerycznych

II. Zmiana obszaru całkowania

Funkcja transformuje obszar, dzięki czemu można zastosować
złożone kwadratury Gaussa-Legendre'a w obu zmiennych.
Współrzędne biegunowe zapewniają odpowiednie mapowanie punktów
i uwzględnienienie zmiany pola powierzchni przez Jacobian.



Opis zastosowanych metod numerycznych

II. Zmiana obszaru całkowania
Użyte wzory matematyczne do zmiany obszaru:

Wstępne zmienne:

$$r = \frac{x+1}{2}$$

$$\phi = \pi(y+1)$$

$$u = r\cos(\phi)$$

$$v = r\sin(\phi)$$

Liczenie pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\cos(\phi) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = r(-\sin(\phi))\pi \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = r\cos(\phi)\pi$$

Jakobian: $J = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}$

Testy funkcjonalne - poprawność programu

Cel: sprawdzenie, czy program daje poprawne wyniki dla znanych funkcji.

Przykładowe testy:

Funkcja	**Oczekiwana wartość**	**Wynik metody**	**Błąd**
$f(x,y) = 1$	3.1415926535897931	3.1415926535897931	0.0000000000000000
$f(x,y) = y^2 + x/10$	0.7853981633974483	0.7853981633974484	0.0000000000000001
$f(x,y) = x^2 + y^2$	1.5707963267948966	1.5707963267948963	0.0000000000000002
$f(x,y) = x^3 + y^3$	0.0000000000000000	0.0000000000000001	0.0000000000000001

Testy zbieżności - numeryczne

Cel: sprawdzenie zachowania błędu przy zwiększaniu liczby podprzedziałów dla funkcji wyższego stopnia.

Funkcja testowa: $f(x, y) = x^4 y^2 + y^6$.

n	szerokość	wartość całki I_n	Błąd
10	0.20	0.2945129011840583	1.141009e-05
20	0.10	0.2945235960981116	7.151759e-07
50	0.04	0.2945242929508778	1.832317e-08
100	0.02	0.2945243101287154	1.145328e-09
200	0.01	0.2945243112024589	7.158418e-11

Testy zbieżności - numeryczne

Funkcja testowa: $f(x, y) = x^4 y^2 + y^6$.

Para (n1, n2)	Rząd zbieżności
(10, 20)	3.995868
(50, 100)	3.999836
(100, 200)	3.999976

Wzór użyty do badania zbieżności:

$$p \approx \frac{\log(\mathrm{blad}(n)/\mathrm{blad}(2n))}{\log 2} .$$

Interpretacja: metoda zachowuje **czwarty** rząd zbieżności, zgodny z teorią dla gładkiej funkcji stopnia >3.
Oznacza to, że gdy zwiększymy ilość podprzedziałów **2-krotnie**, dokładność programu zwiększy się **16-krotnie.**

Dziękuję za uwagę!

Tomasz Pawlaczyk