Tytuł: 3.6 Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Crouta.	Imię i nazwisko: Tomasz Pućka	Numer indeksu: 132310	Grupa: I6, wtorek – 11:45

1. Wstęp.

Program rozwiązuje układy równań liniowych metodą Crouta przedstawione w postaci macierzy w arytmetyce zwykłej (extended) i przedziałowej dla ilości zmiennych mniejszej niż 2000. Dla obu arytmetyk obliczane są błędy bezwzględne (maksymalny, minimalny, średni) jakimi obarczone są rozwiązania układu, przy czym dla arytmetyki przedziałowej w celu obliczenia błędu wyznaczany jest środek wynikowego przedziału jako rozwiązanie układu.
Aplikacja jest wyposażona w funkcje takie jak:

- generowanie liczb losowych całkowitych lub rzeczywistych z określonego przedziału liczb (integer),
- generowanie macierzy rzadkiej na podstawie bieżącej macierzy z określonym procentażem nasycenia zerami,
- generowanie macierzy Hilberta oraz Boothroyda-Dekkera.

Aby uniknąć otrzymywania rozwiązań układu oscylujących w granicach 0, każdy wylosowany element wektora B jest mnożony przez ilość zmiennych.
Program został napisany w środowisku Lazarus w języku Pascal z wykorzystaniem biblioteki z arytmetyką przedziałową pobranej ze strony dr inż. Barbary Szyszka.

2. Testy.

Oznaczenie poszczególnych nagłówków w tabelach:
Z – zbiór liczb całkowitych,
R – zbiór liczb rzeczywistych,
S – arytmetyka zwykła,
I – arytmetyka przedziałowa,
N – ilość zmiennych.
Ze względu na znaczny wzrost czasu obliczania przy uwzględnieniu arytmetyki przedziałowej, zostały dokonane osobne testy dla arytmetyki zwykłej oraz zwykłej z przedziałową.

Testy dla arytmetyki zwykłej			Błędy rozwiązania					
Typ losowanych liczb			Z	R	Z	R	Z	R
N	Przedział losowanych liczb		Maksymalny		Minimalny		Średni	
10	-1000	1000	3,55 E-15	9,41 E-14	2,22 E-16	8,88 E-16	1,62 E-15	2,62 E-14
10	-1000000	1000000	9,41 E-14	2,76 E-10	8,88 E-16	2,27 E-13	2,62 E-14	4,46 E-11
10	-1000000000	1000000000	1,74 E-9	1,51 E-8	0	0	4,24 E-10	5,40 E-9
100	-1000	1000	2,55 E-10	2,22 E-10	7,10 E-15	5,55 E-15	2,23 E-11	5,67 E-11
100	-1000000	1000000	4,52 E-7	1,11 E-7	5,82 E-11	1,63 E-11	5,97 E-8	1,54 E-8
100	-1000000000	1000000000	8,14 E-6	2,38 E-4	1,39 E-9	1,60 E-7	1,17 E-6	2,02 E-5
1000	-1000	1000	4,77 E-7	9,23 E-7	6,30 E-12	9,66 E-13	5,99 E-8	2,02 E-7
1000	-1000000	1000000	9,19 E-5	6,24 E-3	4,65 E-10	2,41 E-9	1,79 E-5	3,27 E-4
1000	-1000000000	1000000000	2,42 E-3	2,01 E-1	1,97 E-9	8,94 E-7	2,62 E-4	4,41 E-2
2000	-1000	1000	7,77 E-6	2,99 E-5	3,52 E-12	3,33 E-11	9,74 E-7	2,82 E-6
2000	-1000000	1000000	8,46 E-3	4,92 E-2	4,77 E-9	1,00 E-8	3,41 E-4	7,04 E-3
2000	-1000000000	1000000000	6,55 E-2	2,74	1,88 E-8	1,19 E-6	1,10 E-2	4,24 E-1

Na podstawie powyższych danych można stwierdzić, że błędy rosną zarówno wraz ze wzrostem ilości zmiennych, jak i wzrostem przedziału losowanych liczb. Oprócz tego należy zaznaczyć, że błędy dla liczb całkowitych są prawie zawsze mniejsze od błędów dla liczb rzeczywistych. Ilość obliczeń zwiększa się wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, dlatego dla małej ilości zmiennych można zaobserwować zerowe błędy. Różnica w rzędach liczb między błędami maksymalnym i minimalnym rośnie wraz ze wzrostem ilości zmiennych, ze względu na wielkość wektora X.

Testy dla arytmetyki zwykłej (S) i przedziałowej (I)			Błędy rozwiązania											
Typ losowanych liczb			Z		R		Z		R		Z		R	
Typ arytmetyki			S	I	S	I	S	I	S	I	S	I	S	I
N	Przedział losowanych liczb		Maksymalny				Minimalny				Średni			
4	-10^3	10^3	2,22E-16	2,22E-16	1,95E-14	5,10E-15	1,11E-16	0	1,99E-15	2,22E-16	1,94E-16	5,55E-17	8,27E-15	1,83E-15
4	-10^6	10^6	2,27E-12	9,09E-13	9,09E-13	6,82E-13	2,27E-13	0	1,13E-13	0	1,13E-12	5,11E-13	4,01E-13	3,69E-13
4	-10^9	10^9	1,62E-9	1,28E-9	2,32E-10	1,16E-10	2,32E-10	0	0	0	6,11E-10	3,49E-10	7,27E-11	4,36E-11
7	-10^3	10^3	1,77E-14	4,88E-15	3,15E-14	1,03E-11	1,11E-16	0	0	2,49E-12	4,80E-15	1,26E-15	6,91E-15	4,86E-12
7	-10^6	10^6	4,54E-12	1,36E-12	5,91E-12	6,30E-9	8,52E-14	0	4,54E-13	6,65E-10	1,36E-12	5,11E-12	1,47E-12	3,19E-9
7	-10^9	10^9	4,39E-9	2,91E-9	4,19E-9	9,27E-6	5,82E-11	5,82E-11	9,31E-10	2,58E-6	1,25E-9	9,72E-10	2,12E-9	5,24E-6
12	-10^3	10^3	5,86E-14	1,24E-14	1,78E-12	5,25E-10	0	2,22E-16	1,62E-14	3,01E-11	2,06E-14	5,49E-15	5,14E-13	2,72E-10
12	-10^6	10^6	3,30E-9	2,03E-9	1,90E-11	1,66E-8	2,91E-11	2,18E-11	4,54E-13	2,16E-9	6,53E-10	4,25E-10	3,43E-12	9,73E-9
12	-10^9	10^9	4,13E-9	4,59E-9	1,65E-6	7,67E-5	2,32E-10	0	9,31E-10	1,33E-6	1,17E-9	1,21E-9	1,52E-7	2,48E-5
20	-10^3	10^3	1,98E-12	2,90E-4	7,24E-13	3,26E-4	1,42E-14	6,71E-13	0	3,86E-11	6,70E-13	2,88E-5	1,96E-13	1,78E-5
20	-10^6	10^6	6,11E-10	2,32E+0	6,44E-10	1,96E+1	0	6,46E-10	2,38E-12	5,70E-7	1,07E-10	2,19E-1	1,20E-10	1,99E+1
20	-10^9	10^9	9,74E-7	1,69E+1	4,40E-7	2,65E+3	0	7,63E-8	1,86E-9	1,99E-5	2,29E-7	1,75E+0	1,10E-7	1,88E+2

Na podstawie powyższych danych można stwierdzić, że właściwości błędów dla arytmetyki przedziałowej są takie same jak dla arytmetyki zwykłej, z tą różnicą, że błędy dla arytmetyki przedziałowej rosną o wiele szybciej. Dla małych macierzy (mniejszych niż 12) arytmetyka przedziałowa sprawdza się nieco lepiej, jednak wraz ze wzrostem ilości zmiennych zwiększa się szerokość przedziałów w wektorze X, co sprawia, że otrzymany wynik staje się nieużyteczny, a błędy rosną. Interesujący jest fakt, że dla małych macierzy strategia z obieraniem środka przedziału jako rozwiązania jest bardzo efektywna i zdarza się, że jest obarczona błędem równym 0 dla komputera, w przeciwieństwie do rozwiązań arytmetyki zwykłej. Znaczną przewagę arytmetyki zwykłej nad przedziałową dobrze widać już przy układzie z 20 zmiennymi dla największego przedziału losowanych liczb, gdzie różnica rzędów między średnimi błędami wynosi E+9, między maksymalnymi błędami wynosi aż E+10 dla liczb rzeczywistych, a minimalny błąd dla arytmetyki przedziałowej jest rzędu E-8, podczas gdy dla arytmetyki zwykłej wynosi 0.

3. Podsumowanie i uwagi.

Przy obliczaniu układu równań w arytmetyce przedziałowej dla więcej niż 20 zmiennych można zaobserwować drastycznie rosnącą szerokość przedziałów rozwiązań układu, przy czym jest ona mniejsza dla każdego kolejnego elementu wektora X. Dzieje się tak, ponieważ aby rozwiązać układ, wykonywane jest wiele mnożeń, które dla dowolnego przedziału przemnożonego przez przedział przechodzący przez zbiór liczb ujemnych i dodatnich zwracają przedział o jeszcze większej szerokości (np. [-1,1]*[2,3]=[-3,3]) (wynika to z implementacji mnożenia w arytmetyce przedziałowej). Oprócz tego wiele obliczeń w metodzie Crouta bazuje na wcześniejszych kalkulacjach, więc gdy podczas rozwiązywania układu pojawi się choć jeden przedział o właściwościach wspomnianych wyżej, każdy następny obliczony współczynnik najczęściej będzie miał jeszcze większą szerokość od poprzedniego. Rodzi to kolejny problem, jakim jest dzielenie przez przedziały obejmujące 0. W takim wypadku rozwiązanie układu dla dużej ilości zmiennych staje się trudniejsze. Jednym z etapów, w którym obliczenie zmiennej opiera się na wykorzystaniu wcześniejszych kalkulacji jest moment, w którym obliczany jest wektor X w równaniu Ux=y, gdzie każda poprzednia zmienna X jest niezbędna do obliczenia kolejnej. Szerokości przedziałów mogą wtedy osiągnąć ogromne wartości rzędu do E+12 dla pierwszej zmiennej i E+0 dla ostatniej zmiennej wektora X dla układu równań o ilości zmiennych wynoszącej zaledwie 25. Zdarzają się również rozwiązania z małą szerokością przedziałów, jednak bardzo rzadko dla dużych układów równań. Nie ma więc sensu używać arytmetyki przedziałowej do rozwiązywania układów równań metodą Crouta z duża ilością zmiennych. Testy dla macierzy Hilberta i Boothroyda-Dekkera nie zostały przeprowadzone ze względu na fakt, że dla większości rozmiarów układu program kończył się błędem w wyniku dzielenia przez przedział zawierający 0.