

# Interpolacja Hermite'a

## Treść zadania

Dla funkcji  $f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$ , gdzie  $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$ , wyznacz dla zagadnienia Hermite'a wielomian interpolujący w postaci Hermite'a. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np.  $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$ ). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

## 1. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.

Biblioteki z których korzystałem w zadaniu:

- `import matplotlib.pyplot as plt`
- `import numpy as np`
- `import pandas as pd`
- `import math`
- `import sympy`

## 2. Interpolowana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie  $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

## 3. Wstęp

**Interpolacje Hermite'a** to uogólnienie interpolacji Newtona, które pozwala nie tylko na dopasowanie wielomianu do wartości funkcji w określonych punktach, ale także do jej pochodnych w tych punktach.

### 3.1. Wzór na wielomian interpolacyjny Hermite'a

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $n$  – stopień wielomianu
- $k + 1$  – liczba różnych węzłów
- $m_0, m_1, \dots, m_k$  – tzw. krotności węzłów dane liczbami naturalnymi, przy czym  $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$

Wtedy:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot P_{(s(i)+j)}(x) \quad (1)$$

gdzie  $H_n(x)$  - wielomian interpolacyjny Hermite'a stopnia  $n$ , a  $P_{(s(i)+j)}(x)$  definiujemy następująco:

$$P_{s(0)}(X) = 1$$

$$P_{s(i+j)}(X) = (X - X_0)^{m_0} (X - X_1)^{m_1} \dots (X - X_i)^{m_i-1} (X - X_i)^j$$

$$\text{gdzie: } i = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

$$s(i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}, & i > 0 \end{cases}$$

Współczynniki  $b_{(s(i)+j)}$  otrzymujemy tworząc tablicę ilorazów różnicowych i odczytaniu wartości na jej przekątnej, identycznie jak w interpolacji Newton'a.

### 3.2. Obliczanie błędów

Niech  $K = 1000$  oznacza liczbę równomiernie rozłożonych w przedziale punktów, dla których obliczamy błędy interpolacji.

**Błąd bezwzględny:**

$$\max_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} |f(x) - H_n(x)|$$

**Błąd średniokwadratowy:**

$$\frac{1}{K} \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} (f(x) - H_n(x))^2$$

### 3.3. Obliczanie pochodnych

Do obliczania pochodnych wykorzystałem bibliotekę **sympy** w Pythonie. Stworzyłem przy jej pomocy funkcję, przyjmującą inną funkcję, której pochodną chcemy obliczyć oraz rząd tej pochodnej.

## 4. Opracowanie

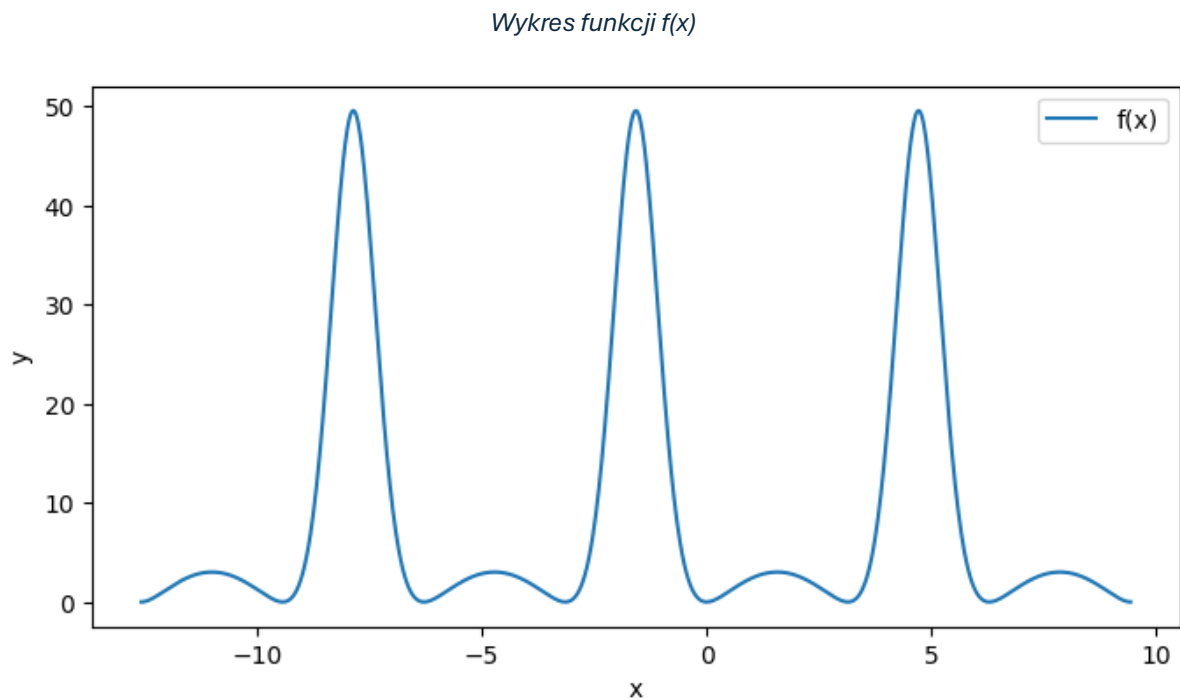
Przypomnijmy jeszcze raz wzór interpolowanej funkcji:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie  $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

**Uwaga:** Będziemy badali interpolację Hermite'a, wykorzystując dla każdego węzła wartość funkcji oraz jej pierwszej pochodnej w tym węźle.

### 4.1. Wykres funkcji $f(x)$

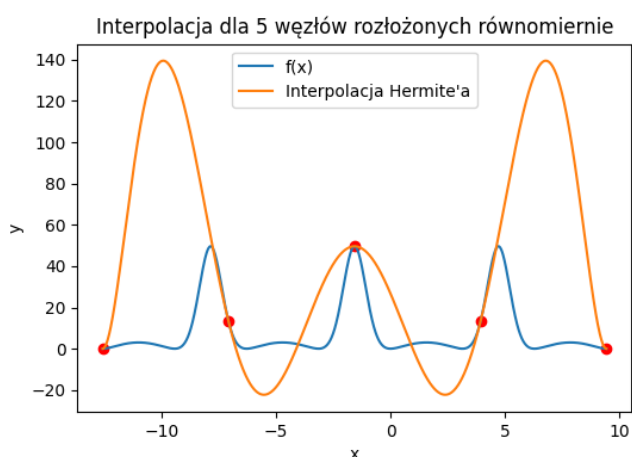


Wykres 4.1.1

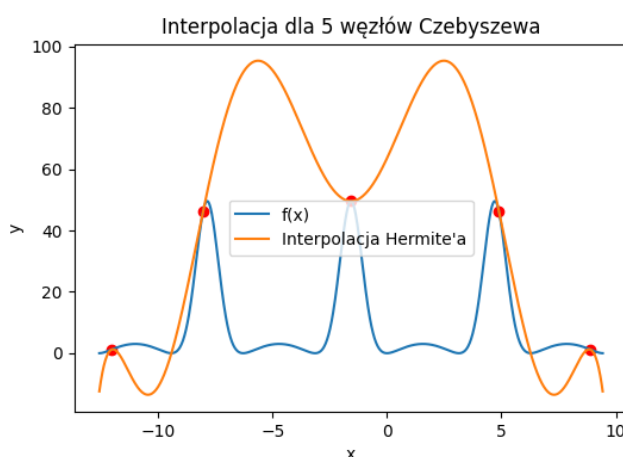
## 4.2. Analiza interpolacji Hermite'a dla różnej liczby węzłów $N$

Wartości funkcji  $f(x)$  w węzłach są zaznaczone na wykresach czerwonymi kropkami.

- $N = 5$ , otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 9. stopnia



Wykres 4.2.1



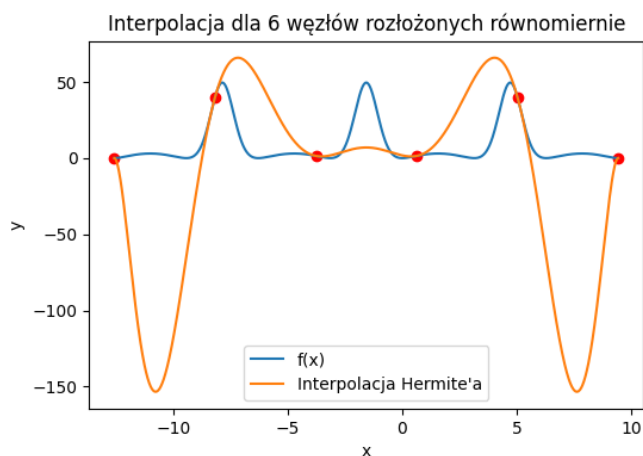
Wykres 4.2.2

	Rozłożenie równomierne	Węzły Czebyszewa
<b>Błąd bezwzględny</b>	138.4736	94.1302
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	4090.18	2872.7475

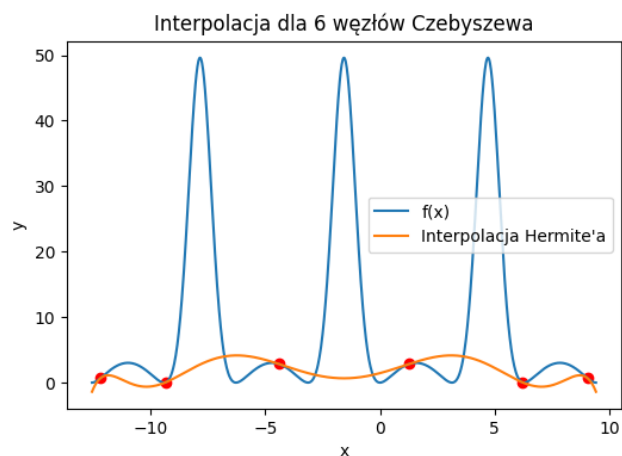
Tabela 4.2.1 Wartości błędów interpolacji Hermite'a dla 5 węzłów

Dla 5 węzłów dobrze widać na wykresach, że nie tylko wartości wielomianu interpolacyjnego są równe wartościom  $f(x)$  w węzłach, lecz także pochodne pierwszego rzędu tych funkcji są sobie równe. Nie obserwujemy ich „przecinania” się w węzłach, tylko są w nich sobie równoległe.

- $N = 6$ , otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 11. stopnia



Wykres 4.2.4



Wykres 4.2.5

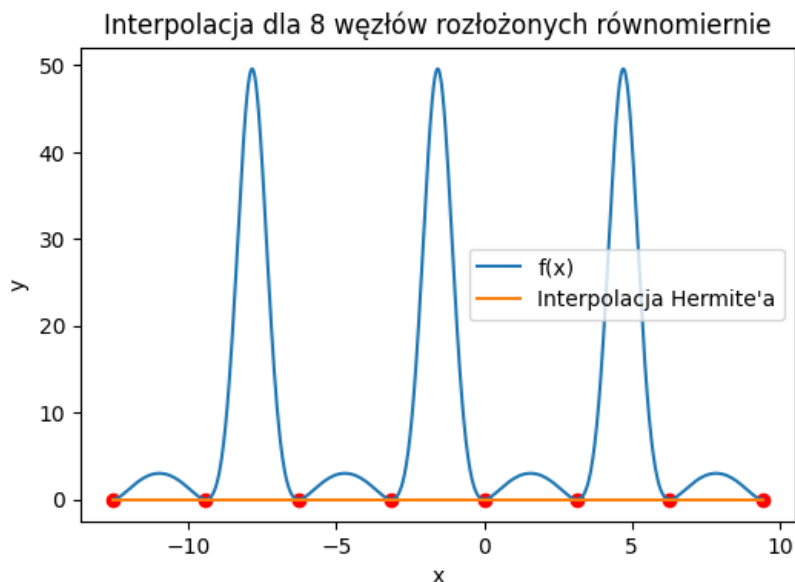
	Rozłożenie równomierne	Węzły Czebyszewa
<b>Błąd bezwzględny</b>	156.3418	48.9267
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	4260.7111	257.5376

Tabela 4.2.2 Wartości błędów interpolacji Hermite'a dla 6 węzłów

Dla 6 węzłów możemy zauważyć **efekt Runge'go** dla równomiernego rozmieszczenia węzłów. Wielomian na krańcach przedziału zaczyna mieć oscylacje o amplitudzie znacznie odstającej od wartości interpolowanej funkcji. Zaczyna gwałtownie rosnąć zarówno błąd bezwzględny jak i średniokwadratowy. W przypadku węzłów Czebyszewa ten efekt nie zachodzi, ponieważ węzły zagęszczają się ku krańcom przedziału, co pozwala lepiej związać wielomian. Dodatkowo dokładność wielomianu interpolującego wzrasta.

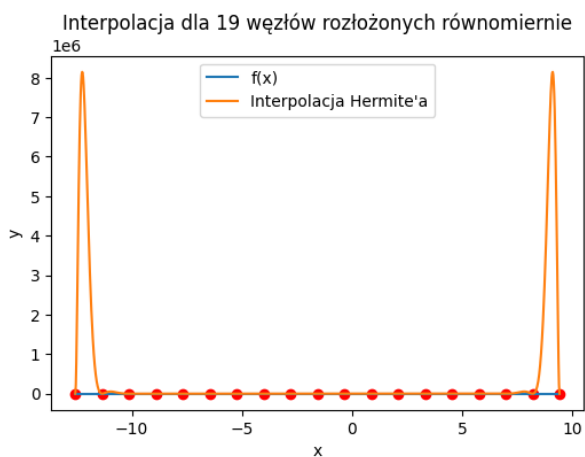
- $N = 8$ , otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 15. stopnia

Dla 8 równoodległych węzłów dostajemy wielomian stale równy 0. Wszystkie węzły są miejscami zerowymi funkcji  $f(x)$ , więc jej pierwsza pochodna w tych punktach jest równa 0. Natomiast pochodna wielomianu interpolacyjnego jest stale równa 0, a zatem wykres dobrze pokazuje poprawność interpolacji.

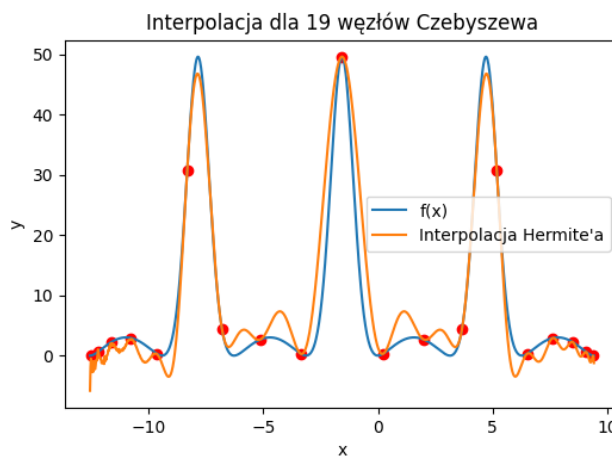


Wykres 4.2.3

- $N = 19$ , otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 37. stopnia



Wykres 4.2.6



Wykres 4.2.7

	Rozłożenie równomierne	Węzły Czebyszewa
<b>Błąd bezwzględny</b>	8145640.8633	14.3057
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	2149627254024.15	16.3684

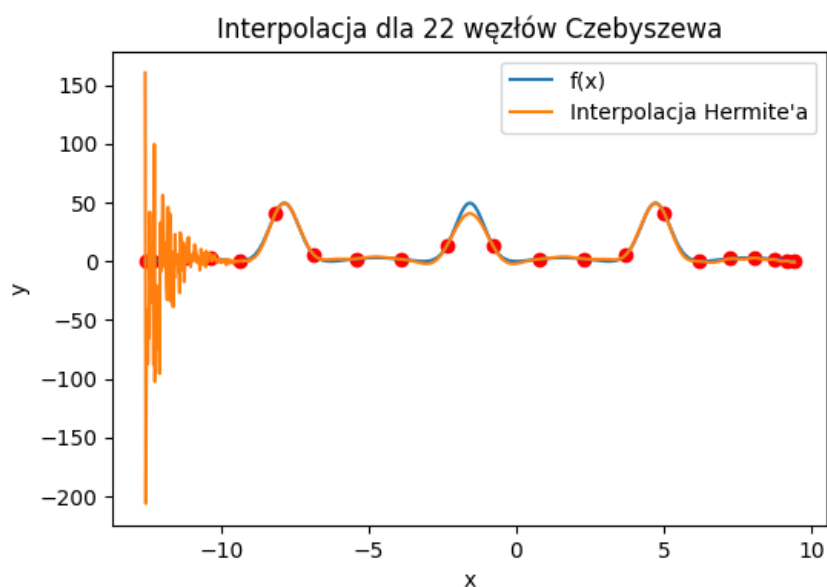
Tabela 4.2.3 Wartości błędów interpolacji Hermite'a dla 19 węzłów

Dla 19 węzłów **efekt Runge’go** dla równomiernego rozmieszczenia węzłów znacznie się nasila. Wartości przy krańcach przedziału są na tyle duże, że na wykresie nie jesteśmy w stanie zobaczyć już kształtu funkcji interpolowanej. Błąd bezwzględny jest już aż ponad **52101 razy** większy niż wtedy, gdy zaobserwowaliśmy po raz pierwszy efekt Runge’go dla 6 węzłów, a błąd średniokwadratowy – **aż 504 523 119 razy większy**.

Dla węzłów Czebyszewa dokładność wzrosła wraz z ilością węzłów. Możemy jednak zaobserwować na lewym krańcu przedziału, że wielomian nie zachowuje się stabilnie, a dokładność przybliżenia jest tam mniejsza. Wynika to z skumulowania się błędu zaokrąglenia podczas obliczania wartości wielomianu w tych punktach.

- $N = 22$ , otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite’a 43. stopnia

Dla 22 węzłów Czebyszewa dokładność przybliżenia na lewym krańcu przedziału drastycznie spada. Błąd obliczeniowy gwałtownie rośnie. Błąd bezwzględny jest **ponad 14 razy większy**, a błąd średniokwadratowy – **ponad 10 razy większy** niż dla 19 węzłów Czebyszewa.



Wykres 4.2.8

#### Węzły Czebyszewa

<b>Błąd bezwzględny</b>	206.194
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	172.1466

Tabela 4.2.4 Wartości błędów interpolacji Hermite’a dla 22 węzłów Czebyszewa

### 4.3. Wyznaczanie wielomianu najlepiej przybliżającego zadaną funkcję.

W celu wyznaczenia wielomianu, który najlepiej przybliży zadaną funkcję, będę sprawdzał wielomiany interpolujące Hermite’a dla kolejnej liczby węzłów zaczynając od 2 i liczył dla nich

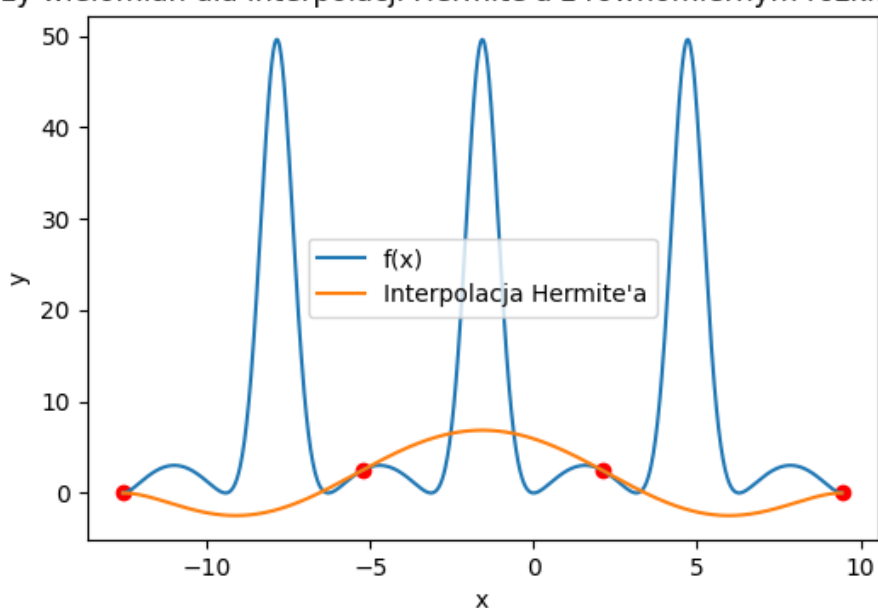
błędy średniokwadratowe. Wielomian z najniższym błędem średniokwadratowym będzie tym najlepiej przybliżającym zadaną funkcję.

#### 4.3.1 Najlepszy wielomian dla interpolacji Hermite'a z równomiernym rozkładem węzłów

Sprawdzone zostały wielomiany dla liczby węzłów w przedziale od 2 do 15, ponieważ efekt Runge'go jest widoczny już od 9 węzłów, więc dla większej ilości nie znajdziemy bardziej dokładnego wielomianu.

Algorytm znalazł wielomian o 4 węzłach, czyli 7 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 15 sekund.

Najlepszy wielomian dla interpolacji Hermite'a z równomiernym rozkładem węzłów



Wykres 4.3.1

#### Rozłożenie równomierne

<b>Błąd bezwzględny</b>	51.4241
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	279.9968

Tabela 4.3.1

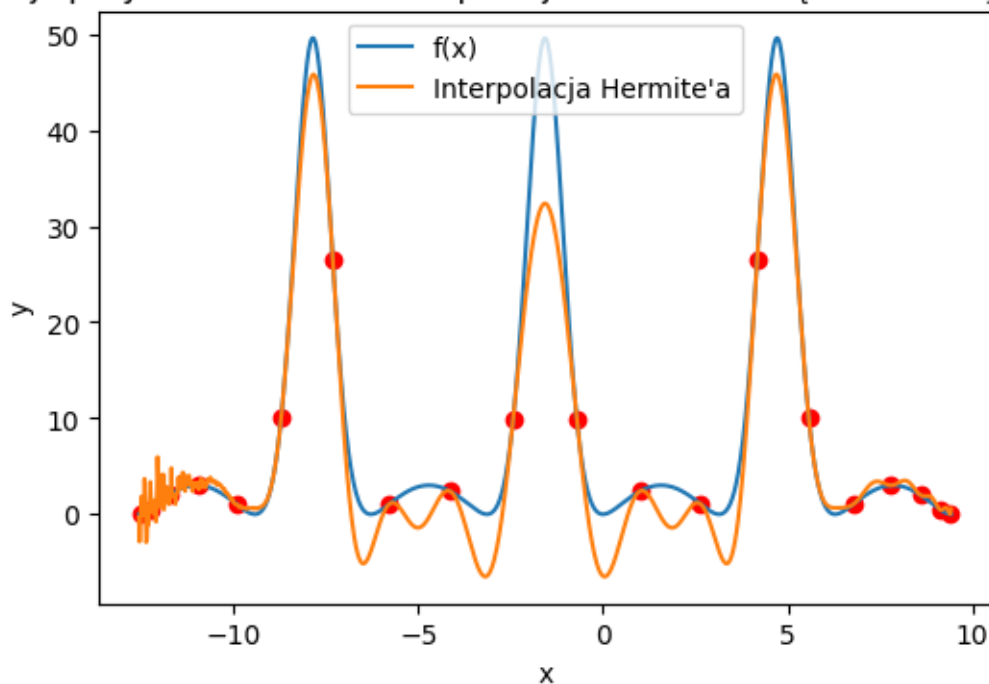
#### 4.3.2 Najlepszy wielomian dla interpolacji Hermite'a z węzłami Czebyszewa

Sprawdzone zostały wielomiany dla liczby węzłów w przedziale od 2 do 30, ponieważ błędy obliczeniowe wynikające z zaokrąglania zaczęły pojawiać się już dla 19 węzłów, więc dla większej ilości nie znajdziemy bardziej dokładnego wielomianu.



Algorytm znalazł wielomian o 20 węzłach, czyli 39 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 45 sekund.

### Najlepszy wielomian dla interpolacji Hermite'a z węzłami Czebyszewa



Wykres 4.3.2

Węzły Czebyszewa	
<b>Błąd bezwzględny</b>	17.2323
<b>Błąd średniokwadratowy</b>	14.3239

Tabela 4.3.2

Błędy numeryczne zostały zaobserwowane po raz pierwszy dla 19 węzłów Czebyszewa, jednak dla 20 węzłów jeszcze został znaleziony bardziej dokładny wielomian niż dla 19 węzłów. Później rosną one na tyle szybko na lewym krańcu przedziału, że kolejne wielomiany są sumarycznie mniej dokładne, zgodnie z założeniem jakie przyjęliśmy, na temat co rozumiemy przez dokładność wielomianu.

## 5. Podsumowanie i wnioski

- Dla równomiernego rozkładu węzłów interpolacji bardzo szybko pojawia się **efekt Runge'go**, znacznie pogarszający jakość interpolacji wielomianowej. W naszym wypadku zaobserwowaliśmy go już od **6** węzłów.
- Wykorzystanie węzłów Czebyszewa skutecznie minimalizuje **efekt Runge'go**. Dzięki temu, że miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, pozwala to lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom.
- Wielomianem interpolacyjnym, który najlepiej przybliży interpolowaną funkcję, jest wielomian Hermite'a z węzłami Czebyszewa dla 20 węzłów. Błąd średniokwadratowy wynosi dla niego 14.3239.
- Dla interpolacji Hermite'a z rozkładem równomiernym najlepszy wielomian dostajemy dla 4 węzłów. Błąd średniokwadratowy wynosi dla niego 279.9968.
- Dla liczby węzłów większej niż 18, wielomian interpolacyjny Hermite'a, dla węzłów Czebyszewa, zaczyna tracić dokładność na lewym krańcu przedziału. Jest to spowodowane niedokładnością zapisu liczb zmiennoprzecinkowych w pamięci komputera i sposobem obliczania wartości wielomianu. Błędy zaokrąglenia są co raz bardziej skumulowane, a wyniki mniej dokładne.