

Arytmetyka komputerowa

1. Treść zadania

2. Wykonać obliczenia (dla zmiennych typu *float*, *double*, *long double*) wg podanych poniżej wzorów dla 101 równoodległych wartości x z przedziału $[0.99, 1.01]$:

- $f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$
- $f(x) = ((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$
- $f(x) = (x - 1)^8$
- $f(x) = e^{(8 \ln(\text{abs}(x-1)))}$, $x \neq 1$

Porównać wyniki. Objaśnić różnice w wynikach.

2. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku C++ z kompilatorem MinGW, na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.

3. Uzyskane wyniki

Tabela 1. Wartości funkcji

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

x	Wartość (float)	Wartość (double)	Wartość (long double)
0.99	2.38419e-006	-7.6813555516253e-015	1.00613961606654811e-016
0.9902	2.38419e-007	-2.96984659087229e-015	8.06646416329215299e-017
0.9904	-1.43051e-006	-2.40953090813179e-015	7.24247051220316962e-017
0.9906	1.43051e-006	2.82412981889024e-015	5.9414279052205643e-017
0.9908	9.53674e-007	2.18922102668273e-015	5.33427468862868182e-017
0.991	1.19209e-006	4.50681159058774e-015	4.33680868994201774e-017
0.9912	2.38419e-007	-8.76035355368288e-016	3.55618312575245454e-017
0.9914	-2.14577e-006	2.4980018054066e-016	2.94902990916057206e-017
0.9916	-1.90735e-006	2.49973652888258e-015	2.12503625807158869e-017
0.9918	2.86102e-006	-1.12063136548102e-015	2.21177243187042905e-017
0.992	-2.38419e-006	1.76247905159244e-015	1.60461921527854656e-017

0.9922	2.6226e-006	4.9960036108132e-016	1.47451495458028603e-017
0.9924	7.15256e-007	-1.36522737559375e-015	1.56125112837912638e-017
0.9926	3.09944e-006	1.45716771982052e-015	7.80625564189563192e-018
0.9928	-5.24521e-006	-5.15212872365112e-015	8.2399365108898337e-018
0.993	4.76837e-007	1.85094994886725e-015	2.16840434497100887e-018
0.9932	4.76837e-006	-2.40259201422788e-015	3.03576608295941242e-018
0.9934	2.38419e-007	6.956241138667e-015	-3.03576608295941242e-018
0.9936	4.05312e-006	6.79664657887713e-015	2.60208521396521064e-018
0.9938	-2.38419e-007	-2.80157841370254e-015	5.20417042793042128e-018
0.994	-1.90735e-006	4.76702011198427e-015	6.07153216591882483e-018
0.9942	2.86102e-006	4.63171168085807e-015	3.03576608295941242e-018
0.9944	4.76837e-007	3.45209971719385e-016	2.16840434497100887e-018
0.9946	-3.09944e-006	4.31078783780237e-015	1.30104260698260532e-018
0.9948	-2.38419e-006	2.38177533251616e-015	3.46944695195361419e-018
0.995	3.09944e-006	-3.6949610038306e-015	-4.33680868994201774e-018
0.9952	-7.15256e-007	2.86229373536173e-016	6.93889390390722838e-018
0.9954	2.38419e-007	3.66894015169095e-015	4.33680868994201774e-019
0.9956	7.15256e-007	-2.45289899503121e-015	-3.90312782094781596e-018
0.9958	-1.90735e-006	-2.61943244872498e-016	-1.30104260698260532e-018
0.996	0	-2.22391549620227e-015	-2.60208521396521064e-018
0.9962	2.38419e-006	-1.22818422099158e-015	0
0.9964	-5.96046e-006	-8.32667268468867e-016	6.07153216591882483e-018
0.9966	-2.38419e-006	-2.83280343627013e-015	1.30104260698260532e-018
0.9968	3.8147e-006	3.47638584585752e-015	4.33680868994201774e-019
0.997	1.19209e-006	-1.47278023110431e-015	-3.90312782094781596e-018
0.9972	2.86102e-006	8.50014503228635e-017	3.46944695195361419e-018
0.9974	-3.09944e-006	1.04777297948999e-015	2.60208521396521064e-018
0.9976	2.6226e-006	3.17280923756158e-015	0
0.9978	-4.05312e-006	-7.71778474462081e-015	3.90312782094781596e-018
0.998	1.19209e-006	-1.44502465548868e-015	1.30104260698260532e-018
0.9982	1.43051e-006	6.80011602582908e-016	2.16840434497100887e-018
0.9984	-1.66893e-006	2.2065682614425e-015	4.33680868994201774e-018
0.9986	-4.05312e-006	1.34961486430996e-015	-3.46944695195361419e-018
0.9988	2.86102e-006	-1.87176663057897e-015	2.60208521396521064e-018
0.999	2.6226e-006	1.41553435639707e-015	3.03576608295941242e-018
0.9992	1.19209e-006	-3.00107161343988e-015	-3.03576608295941242e-018
0.9994	2.38419e-006	-9.10729824887824e-016	-4.33680868994201774e-019
0.9996	2.14577e-006	-1.19522447494802e-015	3.46944695195361419e-018
0.9998	-3.09944e-006	-2.98372437868011e-016	-2.60208521396521064e-018
1	0	0	0
1.0002	3.8147e-006	3.25434124093249e-015	8.67361737988403547e-019
1.0004	3.33786e-006	-1.196959198424e-015	-3.46944695195361419e-018
1.0006	4.76837e-007	-2.69055611124003e-015	1.73472347597680709e-018
1.0008	-4.29153e-006	-4.78089789979208e-015	-6.07153216591882483e-018
1.001	-1.90735e-006	3.18668702536939e-015	0
1.0012	3.8147e-006	3.46597750500166e-015	-4.33680868994201774e-018
1.0014	0	-3.97078203651091e-015	1.73472347597680709e-018
1.0016	3.33786e-006	5.759281940243e-015	-8.67361737988403547e-019
1.0018	-3.33786e-006	6.80011602582908e-016	4.33680868994201774e-018
1.002	8.58307e-006	2.10768902331182e-015	5.20417042793042128e-018

1.0022	1.43051e-006	-6.1409211049579e-016	-2.60208521396521064e-018
1.0024	-1.90735e-006	-3.93088339656344e-015	-1.73472347597680709e-018
1.0026	-4.76837e-007	-7.45931094670027e-016	-2.60208521396521064e-018
1.0028	-4.76837e-006	1.84574577843932e-015	1.73472347597680709e-018
1.003	-1.43051e-006	3.8372083288607e-015	-1.73472347597680709e-018
1.0032	2.86102e-006	1.71737624121704e-015	4.33680868994201774e-018
1.0034	-4.76837e-007	2.51881848711832e-015	3.46944695195361419e-018
1.0036	3.33786e-006	2.72004641033163e-015	-8.67361737988403547e-019
1.0038	-2.38419e-006	-1.22818422099158e-015	-6.93889390390722838e-018
1.004	-4.76837e-006	-5.77489445152679e-015	4.33680868994201774e-018
1.0042	-9.53674e-006	-3.814656923673e-015	5.20417042793042128e-018
1.0044	-2.86102e-006	4.6525283625698e-015	-8.67361737988403547e-018
1.0046	2.86102e-006	-1.68615121864946e-015	6.07153216591882483e-018
1.0048	-2.38419e-006	2.03309591384482e-015	-3.46944695195361419e-018
1.005	-2.86102e-006	-1.94982918699793e-015	8.67361737988403547e-019
1.0052	4.76837e-007	6.38378239159465e-016	-3.46944695195361419e-018
1.0054	3.33786e-006	-9.87057657830803e-016	2.60208521396521064e-018
1.0056	4.76837e-007	3.45209971719385e-016	-7.80625564189563192e-018
1.0058	4.76837e-006	-2.47371567674293e-015	-1.73472347597680709e-018
1.006	-6.67572e-006	-2.33667252214076e-015	7.80625564189563192e-018
1.0062	9.53674e-007	7.52869988573934e-016	8.67361737988403547e-018
1.0064	-3.8147e-006	6.79664657887713e-015	6.07153216591882483e-018
1.0066	1.43051e-006	5.13998565931928e-015	0
1.0068	3.8147e-006	2.88311041707345e-015	1.73472347597680709e-018
1.007	2.38419e-006	3.58046925441613e-015	4.33680868994201774e-018
1.0072	4.76837e-007	3.77302356024956e-015	6.93889390390722838e-018
1.0074	-1.43051e-006	3.28209681654812e-015	1.30104260698260532e-017
1.0076	7.15256e-006	-1.36522737559375e-015	1.56125112837912638e-017
1.0078	-8.58307e-006	-6.60582699651968e-015	2.688821387764051e-017
1.008	-4.29153e-006	1.76421377506841e-015	2.16840434497100887e-017
1.0082	1.90735e-006	-1.12063136548102e-015	1.56125112837912638e-017
1.0084	-7.62939e-006	-1.05297714991792e-015	2.51534904016637029e-017
1.0086	-5.72205e-006	1.97411531566161e-015	2.94902990916057206e-017
1.0088	-4.76837e-006	-2.70443389904784e-015	3.20923843055709312e-017
1.009	-7.15256e-006	-4.42874903416879e-015	3.98986399474665632e-017
1.0092	-6.67572e-006	4.70110061989715e-016	5.72458747072346341e-017
1.0094	-2.38419e-006	1.10501885419723e-015	6.15826833971766519e-017
1.0096	-4.29153e-006	4.69763117294519e-015	7.2858385991025898e-017
1.0098	-6.67572e-006	-2.96984659087229e-015	9.28077059647591796e-017
1.01	4.29153e-006	6.5294991635767e-015	9.54097911787243902e-017

Tabela 2. Wartości funkcji

$$f(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$$

x	Wartość (float)	Wartość (double)	Wartość (long double)
0.99	9.70361e-017	9.95839695427936e-017	9.83371370444352522e-017
0.9902	8.43509e-017	8.51098705401121e-017	8.31040965210139149e-017
0.9904	7.36173e-017	7.30210163168987e-017	7.32378567513958245e-017
0.9906	5.76796e-017	6.05526913333154e-017	6.0877951985061074e-017
0.9908	4.98191e-017	5.71374544899861e-017	5.14996031930614606e-017
0.991	4.3856e-017	4.29886161390503e-017	4.47775497236513331e-017
0.9912	3.67545e-017	3.81639164714898e-017	3.71339244076285269e-017
0.9914	2.90566e-017	3.06287113727155e-017	2.84603070277444914e-017
0.9916	2.62919e-017	2.17924636669586e-017	2.41777084464267489e-017
0.9918	2.26056e-017	2.16298333410858e-017	1.81603863891321993e-017
0.992	1.78351e-017	1.64256629131554e-017	1.61546123700340161e-017
0.9922	1.37694e-017	1.26309553094561e-017	1.50704101975485116e-017
0.9924	1.23599e-017	1.19262238973405e-017	1.2468324983583301e-017
0.9926	7.58942e-018	6.66784336078585e-018	7.31836466427715493e-018
0.9928	6.9931e-018	4.82469966756049e-018	7.80625564189563192e-018
0.993	6.83047e-018	4.11996825544492e-018	1.07336015076064939e-017
0.9932	4.11997e-018	4.82469966756049e-018	6.07153216591882483e-018
0.9934	6.28837e-018	2.60208521396521e-018	5.47522097105179739e-018
0.9936	1.95156e-018	2.00577401909818e-018	4.71627945031194429e-018
0.9938	3.90313e-018	4.28259858131774e-018	3.41523684332933897e-018
0.994	8.67362e-019	9.75781955236954e-019	-1.08420217248550443e-019
0.9942	3.25261e-018	2.71050543121376e-018	-1.51788304147970621e-018
0.9944	-6.50521e-019	-8.67361737988404e-019	-3.57786716920216463e-018
0.9946	1.35525e-018	4.22838847269347e-018	2.22261445359528409e-018
0.9948	3.1984e-018	-4.44522890719057e-018	2.71050543121376109e-019
0.995	-9.75782e-019	5.42101086242752e-020	-9.75781955236953991e-019
0.9952	-6.50521e-019	-5.42101086242752e-019	3.08997619158368764e-018
0.9954	-3.90313e-018	1.02999206386123e-018	1.08420217248550443e-018
0.9956	7.58942e-019	-1.19262238973405e-018	-1.51788304147970621e-018
0.9958	1.02999e-018	6.50521303491303e-019	-1.95156391047390798e-018
0.996	-6.50521e-019	3.08997619158369e-018	-1.40946282423115576e-018
0.9962	-4.33681e-019	-6.50521303491303e-019	2.60208521396521064e-018
0.9964	-8.67362e-019	-1.73472347597681e-018	2.71050543121376109e-018
0.9966	-4.33681e-019	2.98155597433514e-018	-1.73472347597680709e-018
0.9968	-2.81893e-018	3.52365706057789e-018	-4.33680868994201774e-019
0.997	-1.0842e-019	2.71050543121376e-019	-1.08420217248550443e-018
0.9972	-1.6263e-018	-1.19262238973405e-018	-1.30104260698260532e-018
0.9974	1.89735e-018	-3.57786716920216e-018	5.42101086242752217e-019
0.9976	-3.25261e-019	4.82469966756049e-018	5.42101086242752217e-020
0.9978	3.36103e-018	-5.42101086242752e-019	-9.75781955236953991e-019
0.998	-9.75782e-019	-2.81892564846231e-018	1.02999206386122921e-018
0.9982	2.1684e-019	-4.33680868994202e-018	2.11419423634673365e-018
0.9984	-9.75782e-019	2.65629532258949e-018	-8.67361737988403547e-019
0.9986	1.95156e-018	2.65629532258949e-018	-1.73472347597680709e-018
0.9988	-6.50521e-019	5.42101086242752e-020	-4.33680868994201774e-019
0.999	-2.49366e-018	5.20417042793042e-018	1.73472347597680709e-018

0.9992	1.6263e-019	2.16840434497101e-018	-2.16840434497100887e-018
0.9994	1.84314e-018	3.25260651745651e-019	3.03576608295941242e-018
0.9996	3.52366e-018	-3.90312782094782e-018	-1.08420217248550443e-018
0.9998	-2.38524e-018	-1.84314369322536e-018	1.08420217248550443e-018
1	0	0	0
1.0002	-1.19262e-018	-3.90312782094782e-018	-3.2526065174565133e-019
1.0004	-1.51788e-018	-2.38524477946811e-018	-2.16840434497100887e-018
1.0006	-3.25261e-019	-4.01154803819637e-018	-2.81892564846231153e-018
1.0008	9.75782e-019	3.03576608295941e-018	-3.03576608295941242e-018
1.001	-3.25261e-019	-1.95156391047391e-018	4.33680868994201774e-019
1.0012	1.84314e-018	2.87313575708659e-018	-7.58941520739853104e-019
1.0014	2.27682e-018	-2.38524477946811e-018	6.5052130349130266e-019
1.0016	1.68051e-018	-2.38524477946811e-018	-3.03576608295941242e-018
1.0018	2.00577e-018	-7.58941520739853e-019	-2.27682456221955931e-018
1.002	8.13152e-019	-6.50521303491303e-019	1.08420217248550443e-018
1.0022	9.75782e-019	9.21571846612679e-019	2.43945488809238498e-018
1.0024	-2.05998e-018	4.33680868994202e-019	3.46944695195361419e-018
1.0026	-5.42101e-019	-8.67361737988404e-019	3.2526065174565133e-018
1.0028	-8.67362e-019	-4.33680868994202e-019	-3.2526065174565133e-019
1.003	-4.11997e-018	8.13151629364128e-019	9.75781955236953991e-019
1.0032	1.40946e-018	3.95733792957209e-018	2.16840434497100887e-018
1.0034	2.05998e-018	-3.03576608295941e-018	-3.2526065174565133e-018
1.0036	-2.92735e-018	-1.0842021724855e-019	-1.40946282423115576e-018
1.0038	-9.75782e-019	-1.19262238973405e-018	-8.67361737988403547e-019
1.004	4.33681e-019	2.49366499671666e-018	3.79470760369926552e-019
1.0042	-7.58942e-019	3.25260651745651e-019	-2.81892564846231153e-018
1.0044	2.22261e-018	3.25260651745651e-019	-8.67361737988403547e-019
1.0046	-1.51788e-018	1.57209315010398e-018	-2.27682456221955931e-018
1.0048	1.84314e-018	-1.40946282423116e-018	2.16840434497100887e-019
1.005	3.36103e-018	-1.73472347597681e-018	-9.75781955236953991e-019
1.0052	-3.25261e-019	2.16840434497101e-018	-3.79470760369926552e-018
1.0054	-2.49366e-018	5.42101086242752e-019	2.27682456221955931e-018
1.0056	1.89735e-018	1.73472347597681e-018	-2.16840434497100887e-019
1.0058	6.50521e-019	-7.58941520739853e-019	3.7404974950749903e-018
1.006	5.74627e-018	-1.51788304147971e-018	3.30681662608078852e-018
1.0062	3.30682e-018	3.63207727782644e-018	1.89735380184963276e-018
1.0064	4.11997e-018	9.21571846612679e-019	-1.73472347597680709e-018
1.0066	7.20994e-018	1.19262238973405e-018	4.17417836406919207e-018
1.0068	4.8247e-018	2.98155597433514e-018	3.2526065174565133e-018
1.007	4.55365e-018	8.45677694538693e-018	3.90312782094781596e-018
1.0072	5.85469e-018	7.37257477290143e-018	4.93311988480904517e-018
1.0074	9.75782e-018	9.05308814025396e-018	7.42678488152570537e-018
1.0076	1.09504e-017	1.00288700954909e-017	8.83624770575686114e-018
1.0078	1.35525e-017	1.47451495458029e-017	1.0028870095490916e-017
1.008	1.78351e-017	1.74014448683923e-017	2.09251019289702356e-017
1.0082	2.20635e-017	2.17924636669586e-017	2.18466737755829143e-017
1.0084	2.33103e-017	2.77013655070046e-017	2.07624716030974099e-017
1.0086	3.05203e-017	2.78097857242532e-017	3.14418630020796286e-017
1.0088	3.4586e-017	3.5453411040276e-017	3.56702514747730959e-017
1.009	4.62412e-017	4.32596666821716e-017	4.31512464649230765e-017

1.0092	5.23128e-017	5.3180116560414e-017	5.29632761259168916e-017
1.0094	6.25043e-017	5.95226992694542e-017	6.4564239371511789e-017
1.0096	7.172e-017	7.13947130581705e-017	7.12862928409219165e-017
1.0098	8.44593e-017	8.46761896711179e-017	8.81456366230715105e-017
1.01	1.01861e-016	9.99634403031635e-017	9.95839695427935823e-017

Tabela 3. Wartości funkcji

$$f(x) = (x - 1)^8$$

x	Wartość (float)	Wartość (double)	Wartość (long double)
0.99	9.99992e-017	1.000000000000001e-016	9.999999999999993e-017
0.9902	8.50775e-017	8.50763022581807e-017	8.50763022581785606e-017
0.9904	7.2138e-017	7.21389578983865e-017	7.21389578983833584e-017
0.9906	6.09574e-017	6.09568938541063e-017	6.09568938541081595e-017
0.9908	5.13209e-017	5.13218873137555e-017	5.13218873137561604e-017
0.991	4.30468e-017	4.30467210000003e-017	4.30467209999999989e-017
0.9912	3.59625e-017	3.59634524805539e-017	3.59634524805529596e-017
0.9914	2.99217e-017	2.992179271066e-017	2.99217927106585602e-017
0.9916	2.47867e-017	2.47875891108241e-017	2.47875891108249593e-017
0.9918	2.04412e-017	2.04414085865495e-017	2.04414085865497597e-017
0.992	1.67775e-017	1.67772160000001e-017	1.67772160000000001e-017
0.9922	1.37009e-017	1.37011437068318e-017	1.37011437068313596e-017
0.9924	1.11305e-017	1.11303478745504e-017	1.11303478745497598e-017
0.9926	8.99172e-018	8.99194740203739e-018	8.99194740203776001e-018
0.9928	7.22206e-018	7.22204136308723e-018	7.22204136308735973e-018
0.993	5.7646e-018	5.76480100000004e-018	5.76480099999999989e-018
0.9932	4.57161e-018	4.57163239653391e-018	4.57163239653376e-018
0.9934	3.60024e-018	3.60040606269718e-018	3.60040606269696008e-018
0.9936	2.81471e-018	2.81474976710642e-018	2.81474976710655994e-018
0.9938	2.18344e-018	2.18340105584891e-018	2.18340105584896e-018
0.994	1.67958e-018	1.67961600000001e-018	1.67961600000000004e-018
0.9942	1.28065e-018	1.28063081718021e-018	1.28063081718015996e-018
0.9944	9.67139e-019	9.67173115740228e-019	9.67173115740159996e-019
0.9946	7.23022e-019	7.23019613391318e-019	7.23019613391360015e-019
0.9948	5.34572e-019	5.34597285314545e-019	5.34597285314559982e-019
0.995	3.90622e-019	3.90625000000003e-019	3.9062499999999997e-019
0.9952	2.81775e-019	2.81792804290572e-019	2.81792804290560007e-019
0.9954	2.00472e-019	2.00476122319377e-019	2.00476122319359992e-019
0.9956	1.40486e-019	1.4048223625215e-019	1.40482236252159998e-019
0.9958	9.68231e-020	9.68265199641566e-020	9.68265199641600021e-020
0.996	6.55371e-020	6.55360000000005e-020	6.5535999999999968e-020
0.9962	4.34756e-020	4.34779213849623e-020	4.34779213849599993e-020
0.9964	2.82112e-020	2.8211099074563e-020	2.82110990745600006e-020
0.9966	1.78566e-020	1.78579390489583e-020	1.78579390489599988e-020
0.9968	1.0995e-020	1.09951162777595e-020	1.09951162777599998e-020
0.997	6.56032e-021	6.56100000000005e-021	6.5610000000000015e-021
0.9972	3.77789e-021	3.77801998336027e-021	3.77801998335999969e-021
0.9974	2.08836e-021	2.0882706457603e-021	2.08827064575999993e-021
0.9976	1.10068e-021	1.10075314175984e-021	1.10075314176000002e-021

0.9978	5.48774e-022	5.4875873535996e-022	5.48758735359999941e-022
0.998	2.55974e-022	2.560000000000002e-022	2.5599999999999987e-022
0.9982	1.102e-022	1.10199605760012e-022	1.10199605760000002e-022
0.9984	4.29427e-023	4.29496729600098e-023	4.2949672959999932e-023
0.9986	1.47574e-023	1.47578905599964e-023	1.4757890559999988e-023
0.9988	4.3004e-024	4.29981695999939e-024	4.29981696000000009e-024
0.999	9.99897e-025	1.000000000000001e-024	9.999999999999734e-025
0.9992	1.67795e-025	1.67772160000038e-025	1.6777215999999974e-025
0.9994	1.67918e-026	1.67961600000101e-026	1.6796160000000003e-026
0.9996	6.55449e-028	6.5535999999423e-028	6.553599999999541e-028
0.9998	2.5573e-030	2.5599999999774e-030	2.559999999999821e-030
1	0	0	0
1.0002	2.5634e-030	2.5599999999774e-030	2.559999999999821e-030
1.0004	6.5623e-028	6.5535999999423e-028	6.553599999999541e-028
1.0006	1.67918e-026	1.6796159999852e-026	1.67961600000000125e-026
1.0008	1.67795e-025	1.6777215999852e-025	1.67772160000000065e-025
1.001	1.00037e-024	9.999999999119e-025	1.00000000000000017e-024
1.0012	4.29869e-024	4.29981696000258e-024	4.29981696000000009e-024
1.0014	1.47574e-023	1.47578905600057e-023	1.4757890559999988e-023
1.0016	4.29555e-023	4.29496729600098e-023	4.2949672959999932e-023
1.0018	1.10229e-022	1.10199605760012e-022	1.10199605760000029e-022
1.002	2.55974e-022	2.560000000000002e-022	2.56000000000000043e-022
1.0022	5.48774e-022	5.4875873535996e-022	5.48758735360000049e-022
1.0024	1.1009e-021	1.10075314175984e-021	1.10075314176000002e-021
1.0026	2.08798e-021	2.08827064575959e-021	2.0882706457599993e-021
1.0028	3.77789e-021	3.77801998335907e-021	3.7780199833599969e-021
1.003	6.56137e-021	6.560999999981e-021	6.5610000000000011e-021
1.0032	1.09966e-020	1.09951162777625e-020	1.09951162777600012e-020
1.0034	1.78566e-020	1.78579390489629e-020	1.78579390489600012e-020
1.0036	2.82112e-020	2.8211099074563e-020	2.82110990745600006e-020
1.0038	4.34811e-020	4.34779213849623e-020	4.34779213849599993e-020
1.004	6.55449e-020	6.55360000000005e-020	6.553599999999968e-020
1.0042	9.68231e-020	9.68265199641566e-020	9.68265199641599921e-020
1.0044	1.40486e-019	1.4048223625215e-019	1.40482236252160012e-019
1.0046	2.00493e-019	2.00476122319338e-019	2.00476122319360011e-019
1.0048	2.81775e-019	2.8179280429052e-019	2.81792804290560007e-019
1.005	3.90622e-019	3.90624999999933e-019	3.906249999999997e-019
1.0052	5.34621e-019	5.34597285314637e-019	5.34597285314559982e-019
1.0054	7.23086e-019	7.23019613391437e-019	7.23019613391359958e-019
1.0056	9.67139e-019	9.67173115740228e-019	9.6717311574016007e-019
1.0058	1.28065e-018	1.28063081718021e-018	1.28063081718016006e-018
1.006	1.67971e-018	1.67961600000001e-018	1.6796160000000004e-018
1.0062	2.18328e-018	2.18340105584891e-018	2.18340105584896e-018
1.0064	2.81471e-018	2.81474976710642e-018	2.81474976710655994e-018
1.0066	3.6005e-018	3.60040606269669e-018	3.60040606269695984e-018
1.0068	4.57193e-018	4.57163239653331e-018	4.5716323965337603e-018
1.007	5.7646e-018	5.76480099999931e-018	5.76480100000000025e-018
1.0072	7.22206e-018	7.22204136308812e-018	7.22204136308736015e-018
1.0074	8.9923e-018	8.99194740203847e-018	8.99194740203776001e-018
1.0076	1.11298e-017	1.11303478745504e-017	1.11303478745497598e-017

1.0078	1.37009e-017	1.37011437068318e-017	1.37011437068313596e-017
1.008	1.67775e-017	1.67772160000001e-017	1.6777216000000001e-017
1.0082	2.04424e-017	2.04414085865495e-017	2.04414085865497608e-017
1.0084	2.47867e-017	2.47875891108241e-017	2.47875891108249606e-017
1.0086	2.99217e-017	2.99217927106569e-017	2.99217927106585602e-017
1.0088	3.59644e-017	3.59634524805503e-017	3.59634524805529596e-017
1.009	4.30491e-017	4.304672099999961e-017	4.30467209999999989e-017
1.0092	5.13209e-017	5.13218873137605e-017	5.13218873137561627e-017
1.0094	6.09574e-017	6.09568938541121e-017	6.09568938541081623e-017
1.0096	7.21416e-017	7.21389578983865e-017	7.21389578983833617e-017
1.0098	8.50733e-017	8.50763022581807e-017	8.50763022581785606e-017
1.01	9.99992e-017	1.00000000000001e-016	9.999999999999993e-017

Tabela 4. Wartości funkcji

$$f(x) = e^{(8 \ln(\text{abs}(x-1)))}, x \neq 1$$

x	Wartość (float)	Wartość (double)	Wartość (long double)
0.99	9.99993e-017	1.00000000000001e-016	1.00000000000000195e-016
0.9902	8.50777e-017	8.50763022581808e-017	8.50763022581787279e-017
0.9904	7.21382e-017	7.21389578983865e-017	7.2138957898383501e-017
0.9906	6.09574e-017	6.09568938541065e-017	6.09568938541082805e-017
0.9908	5.13209e-017	5.13218873137556e-017	5.13218873137562627e-017
0.991	4.30469e-017	4.30467210000004e-017	4.30467210000000851e-017
0.9912	3.59625e-017	3.59634524805539e-017	3.5963452480553032e-017
0.9914	2.99218e-017	2.992179271066e-017	2.99217927106586206e-017
0.9916	2.47867e-017	2.47875891108241e-017	2.47875891108250097e-017
0.9918	2.04412e-017	2.04414085865496e-017	2.04414085865498015e-017
0.992	1.67775e-017	1.67772160000001e-017	1.67772160000000345e-017
0.9922	1.37009e-017	1.37011437068318e-017	1.37011437068313879e-017
0.9924	1.11305e-017	1.11303478745504e-017	1.11303478745497829e-017
0.9926	8.99172e-018	8.99194740203743e-018	8.9919474020377788e-018
0.9928	7.22207e-018	7.22204136308727e-018	7.22204136308737488e-018
0.993	5.7646e-018	5.76480100000007e-018	5.7648010000001206e-018
0.9932	4.57162e-018	4.57163239653391e-018	4.57163239653376971e-018
0.9934	3.60024e-018	3.60040606269719e-018	3.60040606269696777e-018
0.9936	2.81472e-018	2.81474976710644e-018	2.81474976710656598e-018
0.9938	2.18345e-018	2.18340105584892e-018	2.18340105584896472e-018
0.994	1.67958e-018	1.67961600000001e-018	1.67961600000000369e-018
0.9942	1.28065e-018	1.28063081718022e-018	1.28063081718016277e-018
0.9944	9.67139e-019	9.67173115740227e-019	9.67173115740162129e-019
0.9946	7.23023e-019	7.23019613391321e-019	7.23019613391361622e-019
0.9948	5.34572e-019	5.34597285314545e-019	5.34597285314561177e-019
0.995	3.90622e-019	3.90625000000005e-019	3.90625000000000877e-019
0.9952	2.81776e-019	2.81792804290572e-019	2.81792804290560646e-019
0.9954	2.00472e-019	2.00476122319378e-019	2.00476122319360451e-019
0.9956	1.40486e-019	1.4048223625215e-019	1.40482236252160323e-019
0.9958	9.68231e-020	9.68265199641565e-020	9.68265199641602278e-020
0.996	6.5537e-020	6.55360000000008e-020	6.5536000000001506e-020
0.9962	4.34758e-020	4.34779213849625e-020	4.34779213849601024e-020
0.9964	2.82112e-020	2.82110990745631e-020	2.82110990745600682e-020

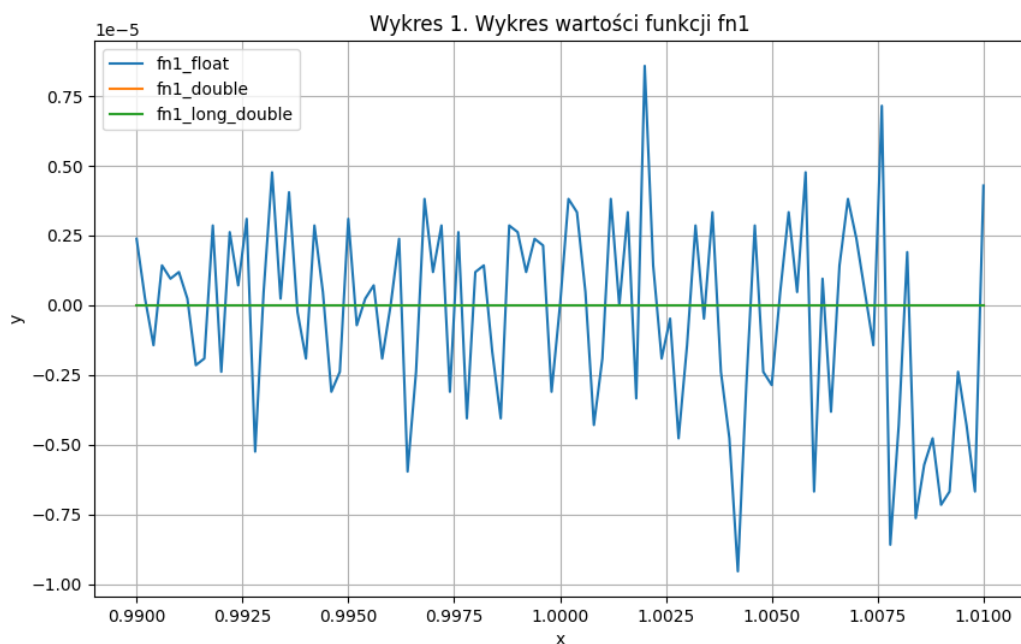
0.9966	1.78566e-020	1.78579390489583e-020	1.7857939048960042e-020
0.9968	1.0995e-020	1.09951162777595e-020	1.09951162777600266e-020
0.997	6.56033e-021	6.56100000000005e-021	6.5610000000001637e-021
0.9972	3.77789e-021	3.77801998336029e-021	3.77801998336000914e-021
0.9974	2.08836e-021	2.08827064576031e-021	2.08827064576000522e-021
0.9976	1.10069e-021	1.10075314175984e-021	1.10075314176000285e-021
0.9978	5.48774e-022	5.4875873535996e-022	5.48758735360001369e-022
0.998	2.55974e-022	2.56000000000003e-022	2.56000000000000663e-022
0.9982	1.102e-022	1.10199605760012e-022	1.10199605760000299e-022
0.9984	4.29428e-023	4.294967296001e-023	4.29496729600001108e-023
0.9986	1.47574e-023	1.47578905599964e-023	1.475789056000004e-023
0.9988	4.30041e-024	4.29981695999942e-024	4.29981696000001239e-024
0.999	9.99898e-025	1.00000000000001e-024	1.0000000000000267e-024
0.9992	1.67795e-025	1.67772160000039e-025	1.67772160000000483e-025
0.9994	1.67918e-026	1.67961600000101e-026	1.67961600000000534e-026
0.9996	6.55451e-028	6.55359999999426e-028	6.55360000000001722e-028
0.9998	2.5573e-030	2.5599999999774e-030	2.56000000000000749e-030
1	0	0	0
1.0002	2.56341e-030	2.5599999999774e-030	2.56000000000000749e-030
1.0004	6.56231e-028	6.55359999999426e-028	6.55360000000001722e-028
1.0006	1.67918e-026	1.67961599999853e-026	1.67961600000000655e-026
1.0008	1.67795e-025	1.67772159999853e-025	1.67772160000000573e-025
1.001	1.00037e-024	9.999999999124e-025	1.00000000000000311e-024
1.0012	4.29871e-024	4.2998169600026e-024	4.29981696000001239e-024
1.0014	1.47574e-023	1.47578905600057e-023	1.475789056000004e-023
1.0016	4.29556e-023	4.294967296001e-023	4.29496729600001108e-023
1.0018	1.10229e-022	1.10199605760012e-022	1.10199605760000325e-022
1.002	2.55974e-022	2.56000000000003e-022	2.5600000000000072e-022
1.0022	5.48774e-022	5.4875873535996e-022	5.48758735360001477e-022
1.0024	1.1009e-021	1.10075314175984e-021	1.10075314176000285e-021
1.0026	2.08798e-021	2.0882706457596e-021	2.08827064576000522e-021
1.0028	3.77789e-021	3.77801998335908e-021	3.77801998336000914e-021
1.003	6.56138e-021	6.56099999999813e-021	6.56100000000001728e-021
1.0032	1.09966e-020	1.09951162777626e-020	1.09951162777600281e-020
1.0034	1.78566e-020	1.7857939048963e-020	1.78579390489600444e-020
1.0036	2.82112e-020	2.82110990745631e-020	2.82110990745600682e-020
1.0038	4.34811e-020	4.34779213849625e-020	4.34779213849601024e-020
1.004	6.5545e-020	6.55360000000008e-020	6.5536000000001506e-020
1.0042	9.68231e-020	9.68265199641565e-020	9.68265199641602175e-020
1.0044	1.40486e-019	1.4048223625215e-019	1.40482236252160337e-019
1.0046	2.00493e-019	2.00476122319339e-019	2.0047612231936047e-019
1.0048	2.81776e-019	2.8179280429052e-019	2.81792804290560646e-019
1.005	3.90622e-019	3.90624999999935e-019	3.90625000000000877e-019
1.0052	5.34621e-019	5.3459728531464e-019	5.34597285314561177e-019
1.0054	7.23086e-019	7.2301961339144e-019	7.23019613391361563e-019
1.0056	9.67139e-019	9.67173115740227e-019	9.67173115740162205e-019
1.0058	1.28065e-018	1.28063081718022e-018	1.28063081718016287e-018
1.006	1.67971e-018	1.67961600000001e-018	1.6796160000000369e-018
1.0062	2.18328e-018	2.18340105584892e-018	2.18340105584896472e-018
1.0064	2.81472e-018	2.81474976710644e-018	2.81474976710656598e-018

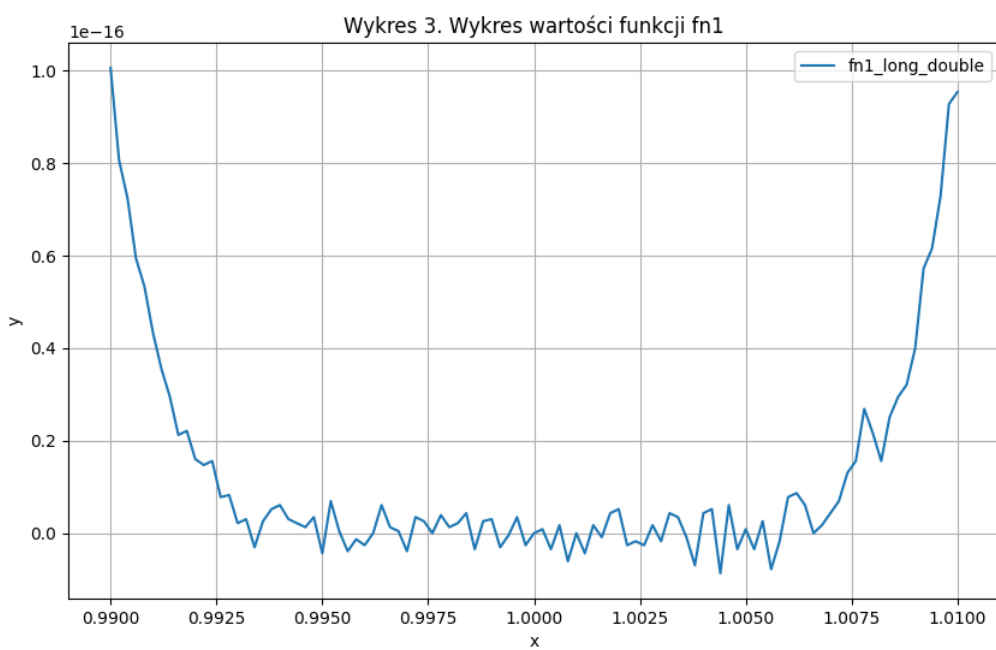
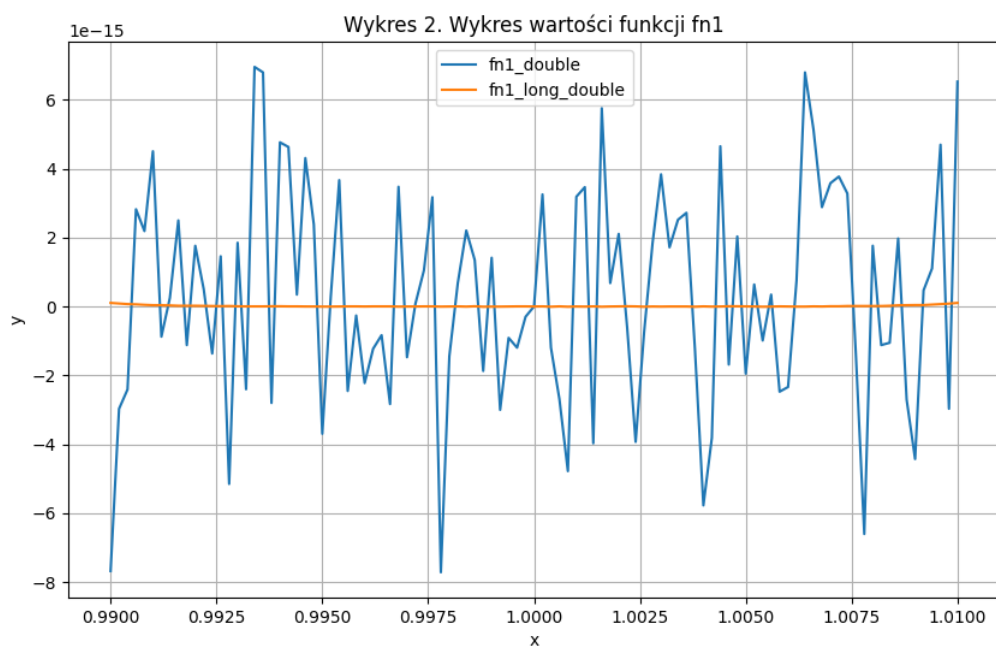
1.0066	3.60051e-018	3.6004060626967e-018	3.60040606269696754e-018
1.0068	4.57193e-018	4.57163239653332e-018	4.57163239653377e-018
1.007	5.7646e-018	5.76480099999933e-018	5.7648010000001242e-018
1.0072	7.22207e-018	7.22204136308815e-018	7.22204136308737531e-018
1.0074	8.9923e-018	8.99194740203851e-018	8.9919474020377788e-018
1.0076	1.11298e-017	1.11303478745504e-017	1.11303478745497829e-017
1.0078	1.37009e-017	1.37011437068318e-017	1.37011437068313879e-017
1.008	1.67775e-017	1.67772160000001e-017	1.67772160000000354e-017
1.0082	2.04424e-017	2.04414085865496e-017	2.04414085865498026e-017
1.0084	2.47867e-017	2.47875891108241e-017	2.47875891108250109e-017
1.0086	2.99218e-017	2.9921792710657e-017	2.99217927106586206e-017
1.0088	3.59644e-017	3.59634524805503e-017	3.5963452480553032e-017
1.009	4.30492e-017	4.30467209999961e-017	4.30467210000000851e-017
1.0092	5.13209e-017	5.13218873137607e-017	5.13218873137562652e-017
1.0094	6.09574e-017	6.09568938541122e-017	6.09568938541082833e-017
1.0096	7.21417e-017	7.21389578983865e-017	7.21389578983835043e-017
1.0098	8.50735e-017	8.50763022581808e-017	8.50763022581787279e-017
1.01	9.99993e-017	1.00000000000001e-016	1.00000000000000195e-016

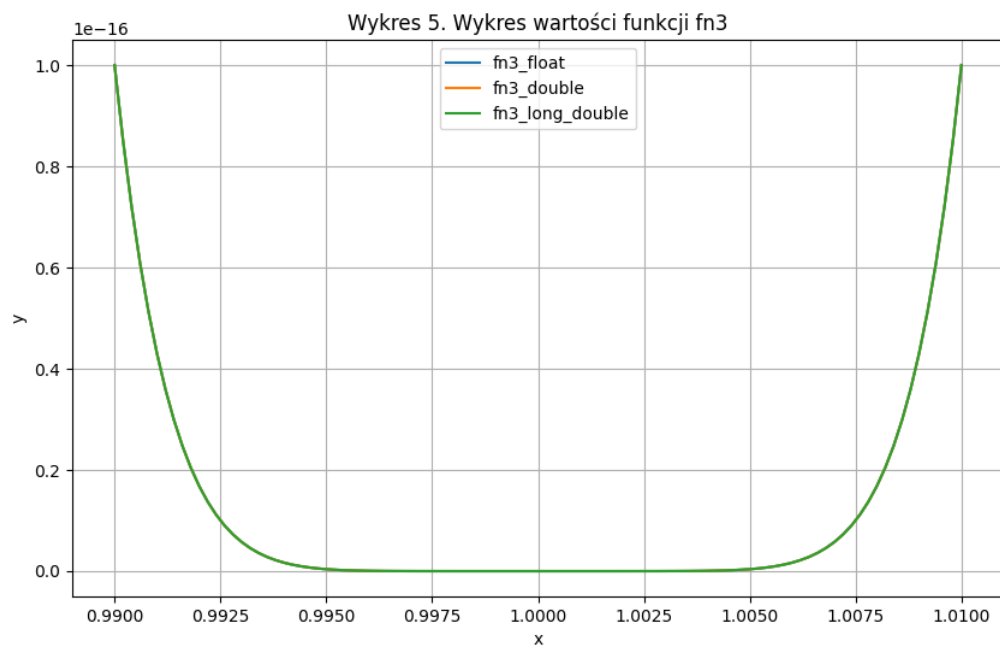
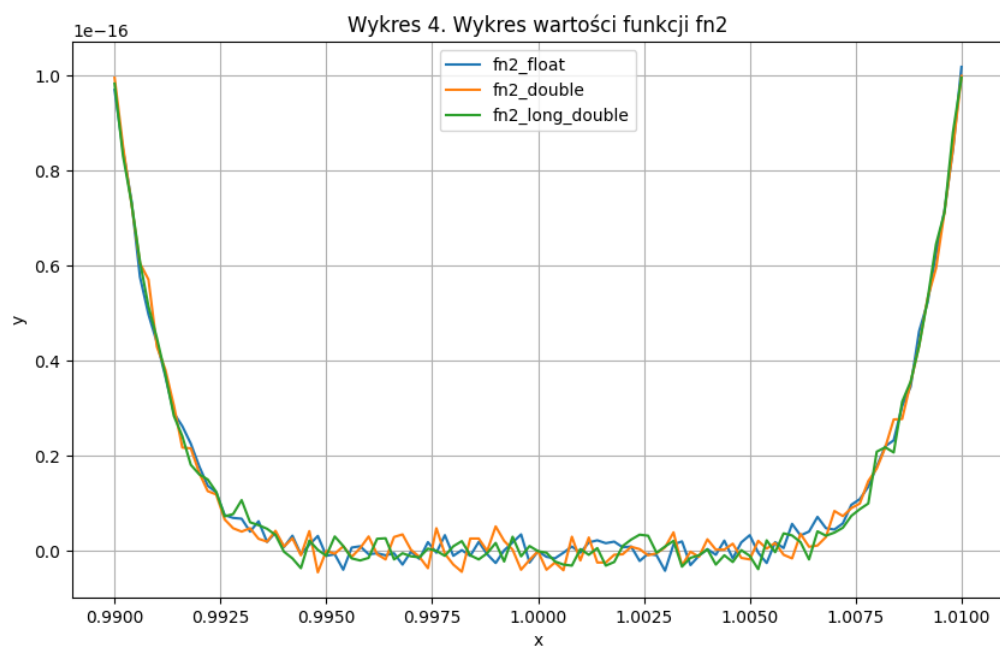
4. Opracowanie wyników

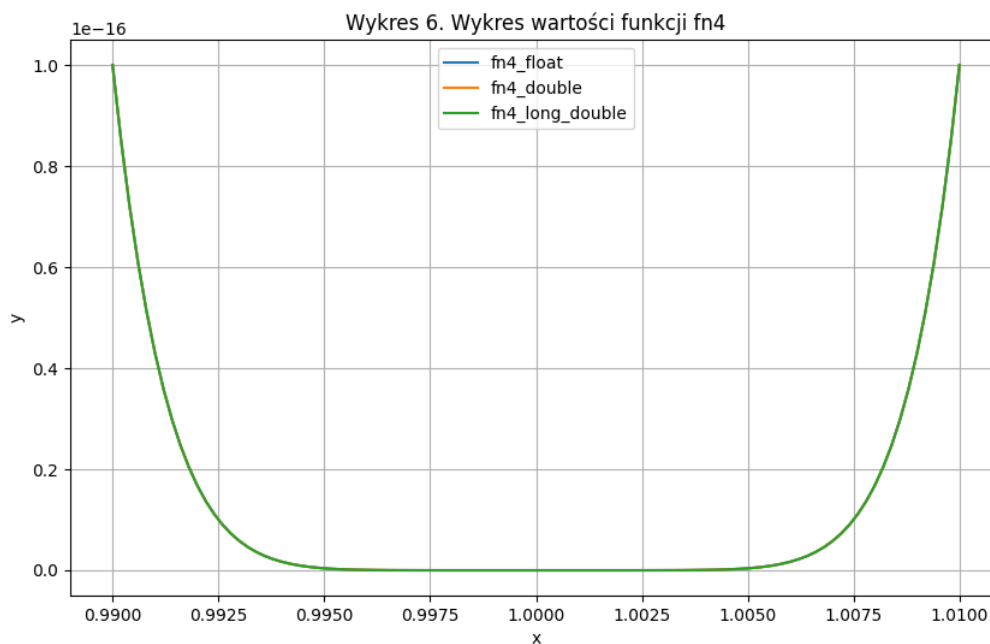
4.1. Wykresy

Kolejne funkcje podane w treści zadania oznaczmy przez fn1, fn2, fn3, fn4 w tej samej kolejności.









4.2. Omówienie

W tabelach 1,2,3,4 ilość cyfr dla poszczególnych wyników jest zależna od precyzji danego typu: zostały przedstawione tylko te cyfry, które są dokładnie zapamiętywane.

Typy zmiennych przecinkowych w C++:

1. Float

- Zajmuje 32 bity,
- Mantysa – 23 bity,
- Wykładnik – 8 bitów,
- Znak – 1 bit
- Pojedyncza precyzja – dokładność 6 cyfr znaczących

2. Double

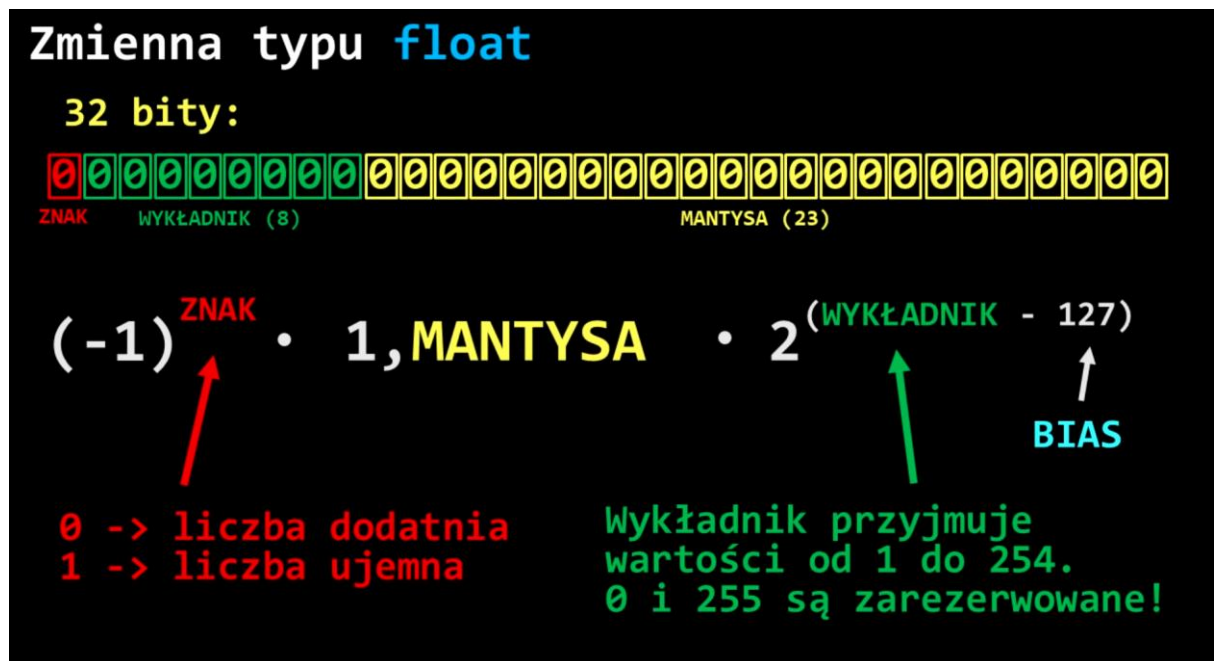
- Zajmuje 64 bity,
- Mantysa – 52 bity,
- Wykładnik – 11 bitów,
- Znak – 1 bit
- Podwójna precyzja – dokładność 15 cyfr znaczących

3. Long double

- Zajmuje 96 bitów,
- dokładność 18 cyfr znaczących

Jak komputer zapisuje liczby zmiennoprzecinkowe

IEEE 754 – standard reprezentacji binarnej



<https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html>

Problemem jest to, że większości liczb zmiennoprzecinkowych w postaci dziesiętnej nie jesteśmy w stanie zapisać na skończonej liczbie bitów w systemie dwójkowym, np. liczba 1.1 w reprezentacji dwójkowej to 001111111000(1100). W takich przypadkach liczby są zaokrąglane do najbliższych reprezentacji dwójkowych. Stąd powstają rozbieżności w wynikach dla różnych typów zmiennoprzecinkowym i błędy obliczeń.

O dokładności cyfr znaczących mówi nam precyzja. Im typ zmiennoprzecinkowy ma **dłuższą mantysę**, z tym większą dokładnością jesteśmy w stanie zapisać liczbę i uzyskiwane wyniki są **dokładniejsze**.

Doskonale widać to na przykładzie **wykresów 1,2,3**. Wyniki dla floata najbardziej odbiegają od rzeczywistych wartości (są aż 10-11 rzędów większe niż dla double i long double). Double również gorzej sobie radzi niż long double co widzimy na **wykresie 2**. Wyniki double i long double mają bardziej zbliżoną dokładność, jednak long double zachowuje się dużo stabilniej i wykres kształtem przypomina rzeczywisty wykres funkcji.

Należy również zwrócić uwagę, że wszystkie funkcje z treści zadania są sobie **algebraicznie równoważne**, a mimo to dostajemy **różne** wyniki. **Dlaczego tak się dzieje?**

Utrata cyfr znaczących

Utrata cyfr znaczących to zjawisko pojawiające się w obliczeniach komputerowych, będące konsekwencją zapisu liczb rzeczywistych w komputerze. Występuje ono np.

podczas **odejmowania** liczb, których różnica jest **znacznie mniejsza** niż każda z tych liczb. W efekcie liczba **cyfr znaczących wyniku maleje** do nieakceptowalnie niskiego poziomu.

W wyniku odejmowania bliskich liczb powstaje liczba zawierająca na pierwszych pozycjach zera, a na pozostałych co najmniej jedną jedynkę. Następnie liczba będąca wynikiem odejmowania jest **normalizowana**. W tym celu obcina się początkowe zera, a ostatnie niezerowe cyfry zostają przesunięte na pierwsze pozycje. Wtedy **nie wiadomo** czym zapełnić pozostałe miejsca w mantysie. Przyjęcie, że te utracone pozycje zostaną zapełnione np. zerami, jest tak samo dobre jak założenie, że zostaną one zapełnione losowymi liczbami – w obu wypadkach będą to **bezwartościowe dane**, niemające wiele wspólnego z rzeczywistym, lub choćby do niego zbliżonym wynikiem.

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

$$f(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$$

Powyższe dwie funkcje są właśnie przykładem zadania **źle uwarunkowanego**, tj. takiego w przypadku którego może dojść do utraty cyfr znaczących.

Wyrażenie 1.

$$x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 28x^4 - 8x^3$$

Wyrażenie 2.

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((x - 8) + 28 \right) x - 56 \right) x + 70 \right) x - 56 \right) x + 28 \right) x - 8 \right) x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 28x^4 - 8x^3 = -1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((x - 8) + 28 \right) x - 56 \right) x + 70 \right) x - 56 \right) x + 28 \right) x - 8 \right) x \right) = -1$$

Dla wybranych 101 argumentów z przedziału $[0.99, 1.01]$, wartości **wyrażeń 1 i 2** są **bardzo bliskie** -1. Zatem gdy dodajemy wartości tych wyrażeń do 1 zachodzi zjawisko utraty cyfr znaczących i float oraz double gubią wtedy wszystkie lub prawie wszystkie cyfry znaczące, co jest widoczne na **wykresach 1,2**.

W przypadku funkcji

$$f(x) = (x - 1)^8$$

$$f(x) = e^{(8 \ln(\text{abs}(x-1)))}, x \neq 1$$

to zjawisko nie zachodzi gdyż dla argumentów z przedziału $[0.99, 1.01]$ wartość wyrażenia $x - 1$ jest rzędu 10^{-4} , więc nawet float jest w stanie zachować parę cyfr znaczących.

Jednym z sposobów na rozwiązanie tego problemu jest przekształcenie wzoru funkcji tak aby nie zawierała odejmowania bardzo bliskich sobie liczb.

Liczba operacji

Warto również zwrócić uwagę na liczbę operacji wykonywanych przy obliczaniu funkcji.

1. fn1:

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

$$7 + 1 + 7 + 1 + 6 + 1 + 5 + 1 + 4 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 43$$

2. fn2:

$$f(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$$

3. fn3:

$$f(x) = (x - 1)^8$$

$$1 + 7 = 8$$

4. fn4:

$$f(x) = e^{(8 \ln(\text{abs}(x-1)))}$$

Operacje w wykładniku (nie licząc abs):

$$1 + 1 + 1 = 3$$

Widzimy, że większa ilość operacji może prowadzić do błędów zaokrąglenia i utraty precyzji. Funkcje zapisane w ten sposób są mniej stabilne numerycznie, co prowadzi do mniejszej spójności wyników. Błędy zaokrąglenia się kumulują i małe zmiany wejścia powodują duże zmiany wyjścia.

5. Wnioski

Rozważane zadanie pokazuje, że należy być świadomym tego jak komputer przechowuje liczby zmiennoprzecinkowe. Jeżeli użyjemy typu z niską precyzją, to możemy dostać bardzo niestabilne wyniki z dużymi błędami, wynikającymi z skumulowanych błędów zaokrągleń. Bardzo ważny jest również sposób sformułowania problemu, który rozwiązujemy. Widać to doskonale na przykładzie tych 4 funkcji, które mimo, że są równoważne algebraicznie, dają różne wyniki.

6. Źródła

- <https://www.youtube.com/watch?v=im2ZJRWxX4>
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Utrata_cyfr_znacz%C4%85cych