Tomasz Kurcoń Grupa 3 *15.04.2024*

Ćwiczenie 4a. Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Treść zadania

Dla funkcji $f(x) = e^{-k\cdot\sin(m\cdot x)} + k\cdot\sin(m\cdot x) - 1,\ gdzie\ k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$, wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

1. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.
Biblioteki z których korzystałem w zadaniu:

- import matplotlib.pyplot as plt
- import numpy as np
- import pandas as pd
- import math

2. Aproksymowana funkcja:

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{k}\cdot\sin(\mathrm{m}\cdot\mathrm{x})} + \mathrm{k}\cdot\sin(\mathrm{m}\cdot\mathrm{x}) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

3. Wstęp

Aproksymacja jest ogólniejsza niż interpolacja i pozwala na przybliżanie lub zastępowanie funkcji za pomocą innej funkcji.

3.1. Aproksymacja średniokwadratowa

Oznaczmy przez $f(x)$ funkcję aproksymującą. Mamy dane punkty $\left(x_i, y_i = F(x_i)\right),\ i = 0,1,\dots,n$, (gdzie $F(x)$ to nasz aproksymowana funkcja), czyli n+1 węzłów oraz układ funkcji bazowych $\varphi_j(x), j = 0,1,\dots,m$. Wtedy:

$$\boldsymbol{f(x)} = \sum_{\boldsymbol{j=0}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_j}\varphi_j(x) \qquad (3.1.1)$$

Szukamy takich współczynników $\boldsymbol{a_j}$ dla których:

$$min\ \|F(x) - f(x)\| = min \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]^2$$

Gdzie $F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_{j\varphi_j}(x_i)$ – odchylenie wartości funkcji aproksymującej od funkcji aproksymowanej, $w(x_i)$ – waga węzła x_i, (im większy błąd tym mniejsza waga), ma ona zastosowanie wtedy, kiedy wiemy, że niektóre punkty zmierzyliśmy z większą dokładnością niż inne.

Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]^2 \qquad (3.1.2)$$

W celu obliczenia współczynników a_j będziemy obliczać pochodne cząstkowe funkcji (3.1.2) i przyrównywać je do 0, otrzymując tym samym układ m+1 równań o m+1 niewiadomych.

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) \ - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]\varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 0,1,\dots,m \qquad (3.1.3)$$

Powyższy układ równań jest zwany układem normalnym.

Przyjmijmy za nasze funkcje bazowe ciąg jednomianów $\varphi_j(x) = x^j, j = 0,1,\dots,m$. Wtedy nasza funkcja aproksymująca, zgodnie z (3.1.1) będzie miała postać:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \qquad (3.1.4)$$

Dla tych funkcji bazowych, zgodnie z (3.1.3) możemy zapisać:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) \ - \sum_{j=0}^{m} a_j x^j\right] x^j = 0, \quad k = 0,1,\dots,m \qquad (3.1.5)$$

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania i przekształcając wzór (3.1.5) dalej otrzymujemy:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i){x_i}^{j+k}\right)a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)x^k, \quad k = 0,1,\dots,m \qquad (3.1.6)$$

Otrzymane równania (3.1.6) możemy zapisać w postaci macierzowej, a następnie rozwiązać układ równań i wyliczyć wartości współczynników a_j, a tym samym funkcje aproksymującą, podstawiając obliczone współczynniki do (3.1.4).

3.4. Obliczanie błędów

Niech K = 1000 oznacza liczbę równomiernie rozłożonych w przedziale punktów $x_1, x_1, \dots, x_K$, dla których obliczamy błędy aproksymacji.

Błąd bezwzględny:

$$\max_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} |F(x) - f(x)|$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{K} \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} \left(F(x) - f(x)\right)^2$$

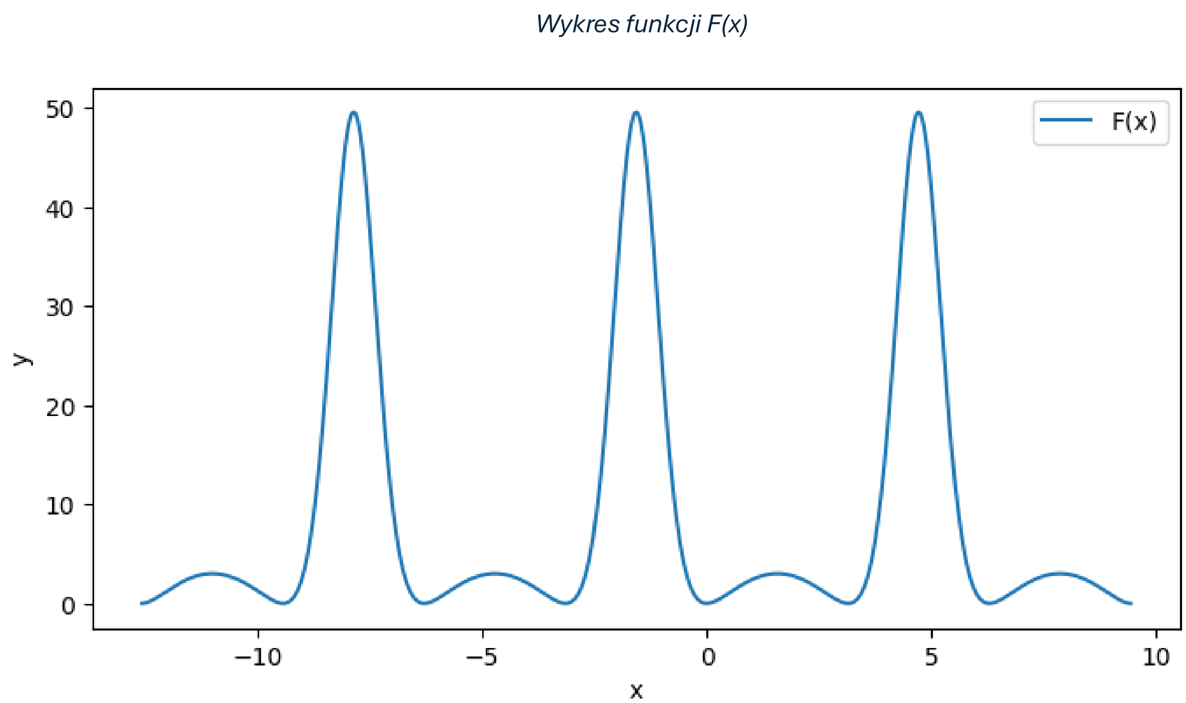
4. Opracowanie

Przypomnijmy jeszcze raz wzór interpolowanej funkcji:

$$F(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

4.1. Wykres funkcji $F(x)$



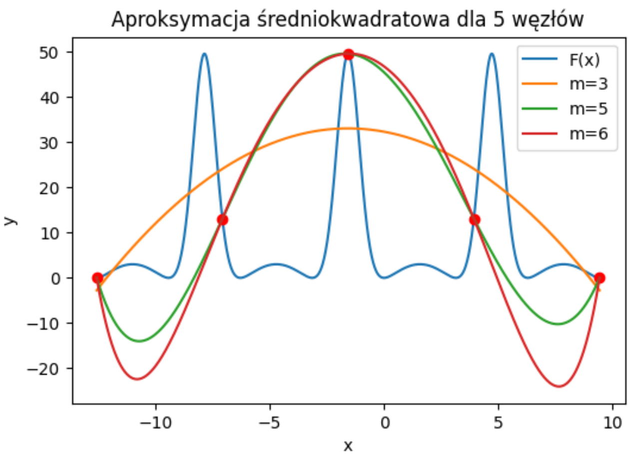
Wykres 4.1.1

Uwaga 1: Będziemy przyjmować, że waga każdego węzła jest równa 1.

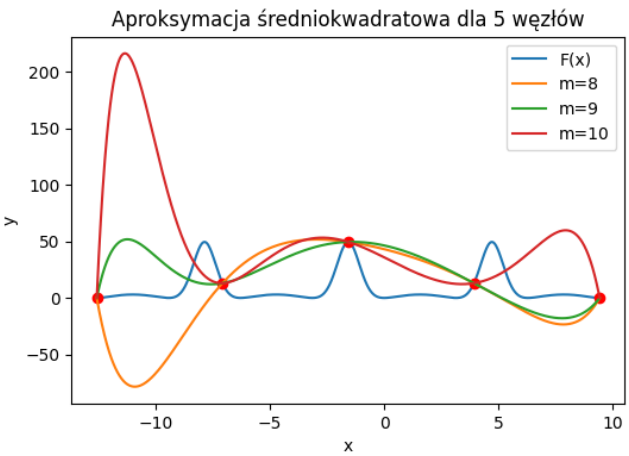
Uwaga 2: Przyjmijmy, że liczbę węzłów oznaczamy przez N, a liczbę funkcji bazowych przez m.

4.2. Analiza aproksymacji ze względu na liczbę funkcji bazowych m.

- $N = 5$



Wykres 4.2.1



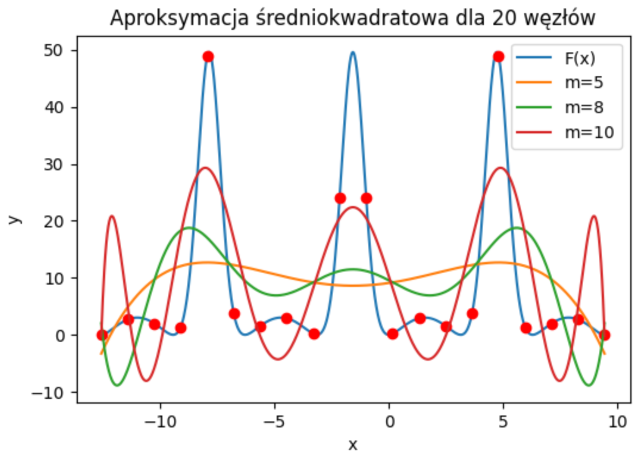
Wykres 4.2.2

	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy
m=3	32.3592	404.4590
m=5	46.9381	701.7484
m=6	47.1010	842.5308
m=8	81.5506	1581.6281
m=9	49.0341	876.0732
m=10	213.7670	4889.2649

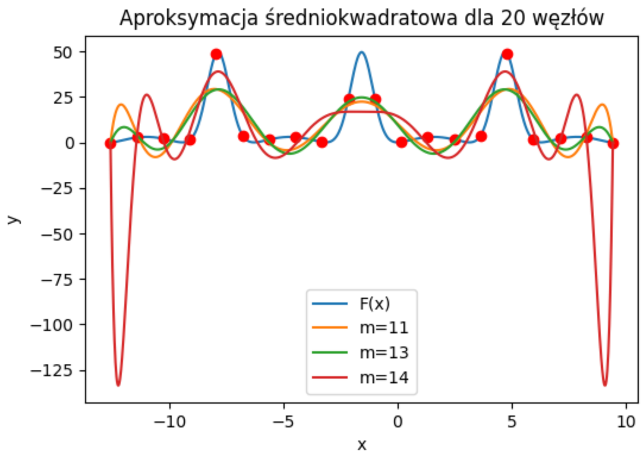
Tabela 4.2.1 Wartości błędów aproksymacji dla 5 węzłów

Dla 5 węzłów widzimy, że najlepsze przybliżenie otrzymujemy dla m = 3. Dla większych m oscylacje na lewym brzegu stają się co raz większe i obserwujemy coś w stylu efektu Runge'go dla interpolacji. Ma to związek z wybranymi przez nas funkcjami bazowymi. Im większe m, tym większy jest najwyższy stopień wielomianu algebraicznego wchodzącego w skład naszej funkcji aproksymacyjnej.

- $N = 20$



Wykres 4.2.3



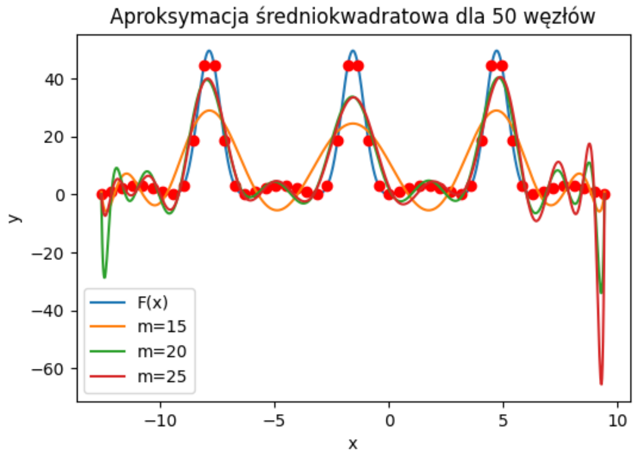
Wykres 4.2.4

	Błąd bezwzględny	**Błąd średniokwadratowy**
m=5	40.9773	190.3698
m=8	38.1019	171.3383
m=10	27.2027	116.9346
m=11	27.2027	116.9346
m=13	24.8648	91.3518
m=14	134.1868	950.6768

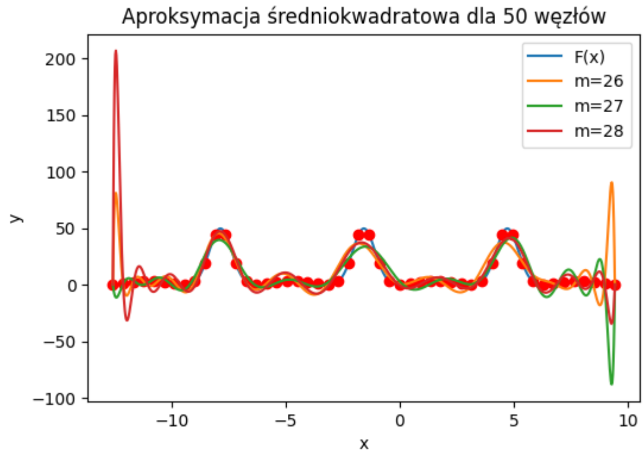
Tabela 4.2.2 Wartości błędów aproksymacji dla 20 węzłów

Dla większego m otrzymywane funkcje aproksymacyjne są w stanie bardziej dopasować się do wykresu funkcji, natomiast mniejsze m daje bardziej uśrednione wartości (wykres 4.2.3). Gdy jednak m będzie znacznie większe od połowy liczby węzłów, to gwałtownie zaczną rosnąć oscylacje na brzegach.

- $N = 50$



Wykres 4.2.5



Wykres 4.2.6

Na wykresach 4.2.5 oraz 4.2.6 obserwujemy podobne sytuacje co wcześniej. Sprawdźmy zatem wszystkie wartości m od 2 do 100 i wybierzmy 20 wartości m, dla których błąd średniokwadratowy jest najmniejszy.

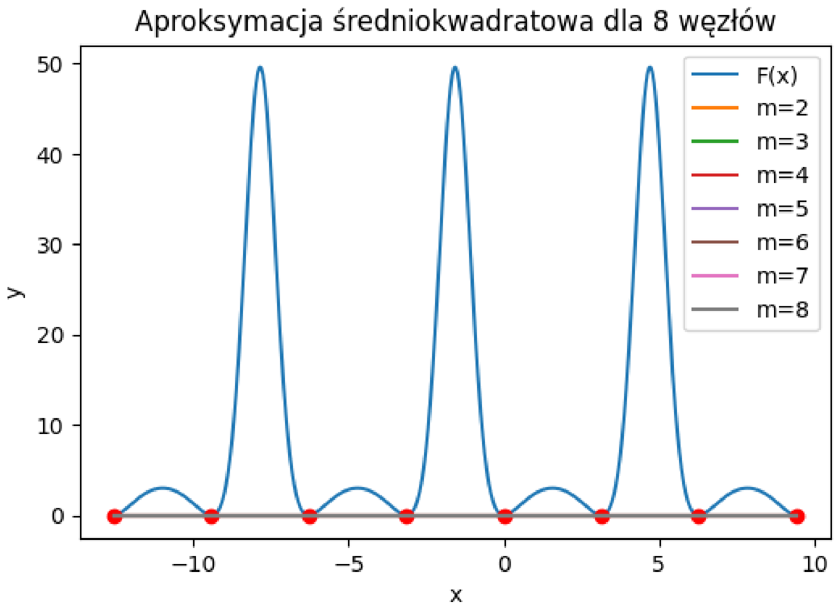
	Błąd średniokwadratowy
1. m=20	46.7551
2. m=21	51.5987
3. m=25	73.1652
4. m=18	74.5707
5. m=19	74.5919
6. m=22	77.7591
7. m=16	81.0821
8. m=17	81.0821
9. m=14	83.827
10. m=15	83.827
11. m=23	85.3122
12. m=12	86.9248
13. m=13	86.9248
14. m=10	103.6751
15. m=11	103.6751
16. m=27	112.4501
17. m=24	124.639
18. m=8	167.091
19. m=9	167.091
20. m=26	174.1828

Tabela 4.2.3 Pierwsze 20 najmniejszych błędów średniokwadratowych spośród m od 2 do 100

Widzimy zatem, że najlepsze przybliżenia otrzymujemy dla m od około 19 do 25, czyli lekko poniżej połowy liczby węzłów.

4.3. Analiza aproksymacji ze względu na liczbę węzłów N

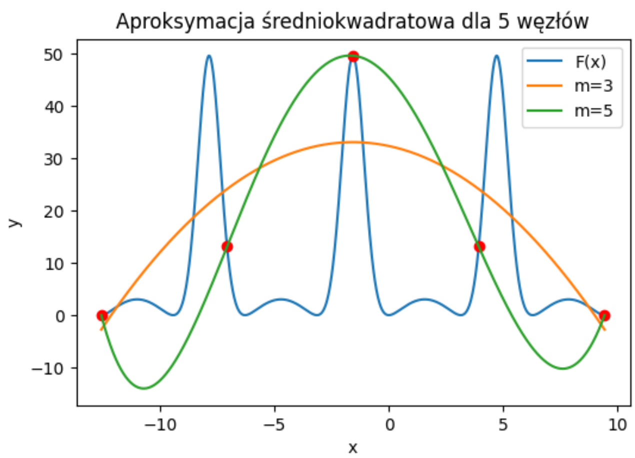
- $N = 8$



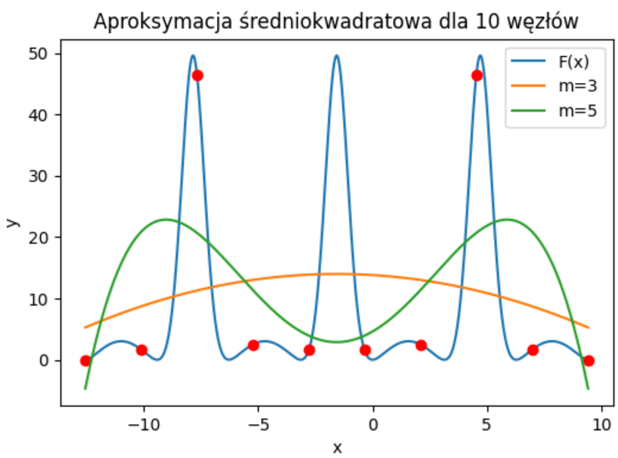
Wykres 4.3.1

W przypadku 8 węzłów, niezależnie od m, dostajemy funkcję stale równą 0, ponieważ wszystkie węzły są miejscami zerowymi aproksymowanej funkcji.

- $N = 5, 10, \quad m = 3, 5$



Wykres 4.3.2



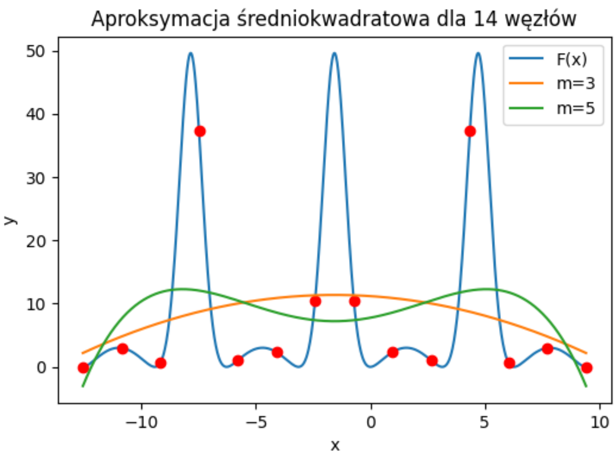
Wykres 4.3.3

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=5	N=10	N=5	N=10
m=3	32.3592	38.4652	404.4590	201.9546
m=5	46.9381	46.7139	701.7484	244.0448

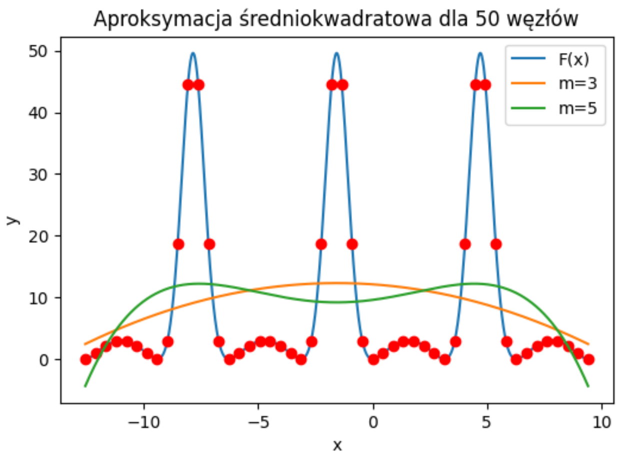
Tabela 4.3.1 Wartości błędów aproksymacji dla 5 i 10 węzłów

Widzimy, że dla większej liczby węzłów, przy tym samym m, otrzymane funkcje aproksymujące stają się mniej podatne na wartości odstające, dostajemy bardziej „płaską" funkcję. W tabeli 4.3.1 widzimy, że dla większej liczby węzłów, wartości błędów średniokwadratowych maleją, zarówno dla m=3, jak i m=5.

- $N = 14, 50, \quad m = 3, 5$



Wykres 4.3.4



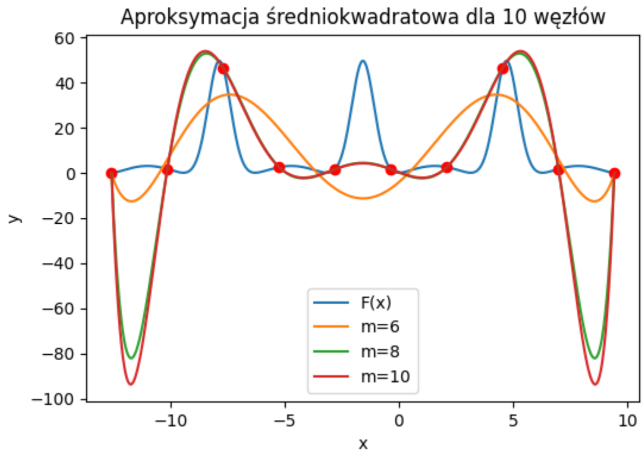
Wykres 4.3.5

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=14	N=50	N=14	N=50
m=3	41.2264	40.5043	198.4789	197.9001
m=5	42.3687	40.3928	191.5102	189.6908

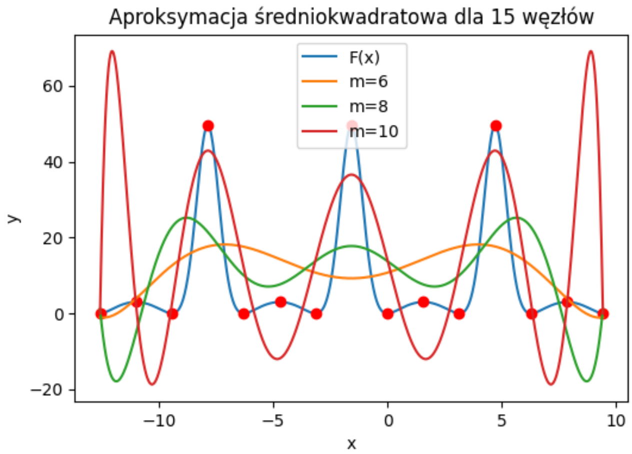
Tabela 4.3.2 Wartości błędów aproksymacji dla 14 i 50 węzłów

Dla liczby węzłów większej bądź równej 14 otrzymujemy bardzo podobne wyniki. Dla tych liczb funkcji bazowych nie jesteśmy już w stanie uzyskać lepszej aproksymacji.

- $N = 10, 15, \quad m = 6, 8, 10$



Wykres 4.3.6



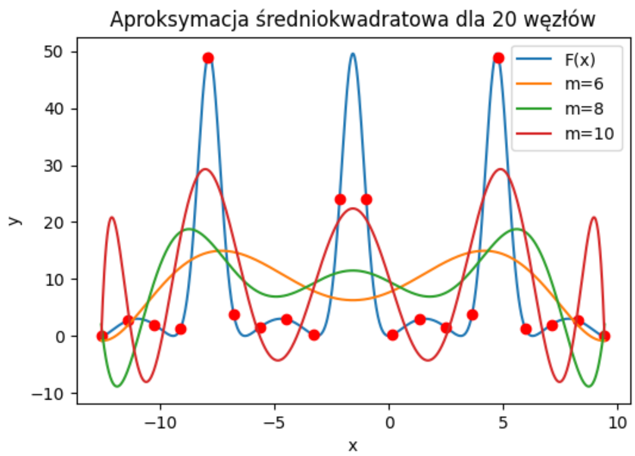
Wykres 4.3.7

	Błąd bezwzględny		**Błąd średniokwadratowy**	
	N=10	N=15	N=10	N=15
m=6	60.9568	40.3216	371.5003	197.1768
m=8	84.2822	31.8148	1096.8456	197.9781
m=10	95.8082	67.9799	1326.3513	457.4556

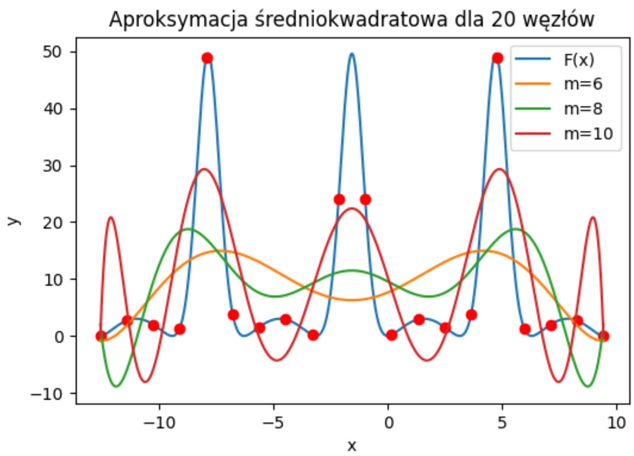
Tabela 4.3.3 Wartości błędów aproksymacji dla 10 i 15 węzłów

Większa liczba węzłów w każdym przypadku dla wybranych m poprawia dokładność aproksymacji. Zmniejszają się oscylacje otrzymywanych funkcji.

- $N = 20, 50, \quad m = 6, 8, 10$



Wykres 4.3.8



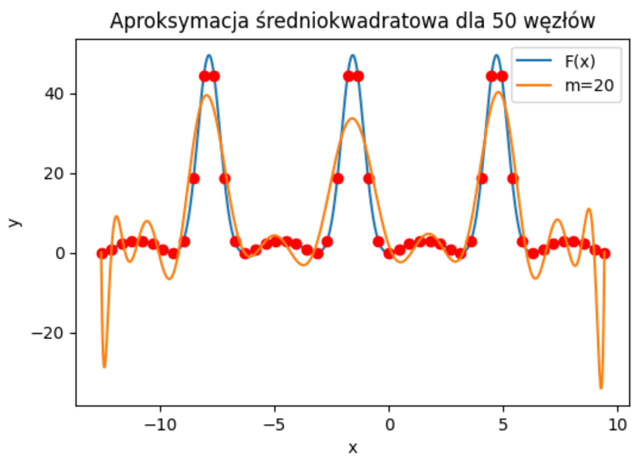
Wykres 4.3.9

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=20	N=50	N=20	N=50
m=6	43.3133	41.8089	189.3974	188.5264
m=8	38.1019	36.8325	171.3383	167.0910
m=10	27.2027	27.7681	116.9346	103.6751

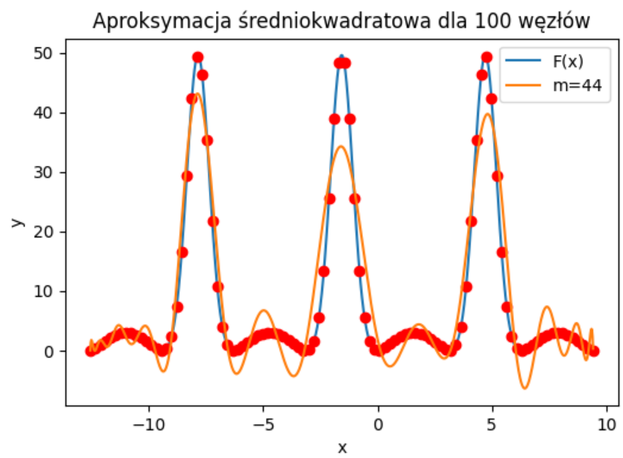
Tabela 4.3.4 Wartości błędów aproksymacji dla 20 i 50 węzłów

Podobnie jak na wykresach 4.3.4 oraz 4.3.5 i tabeli 4.3.2 możemy zauważyć, że dokładność interpolacji wraz z wzrostem liczby węzłów rośnie tylko do pewnego momentu, później otrzymywane wyniki są takie same lub tylko nieznacznie się różnią. Im większa liczba m, tym dla większej ilości węzłów jest w stanie poprawiać swoją dokładność. Zatem zwiększając liczbę węzłów, a następnie dobierając odpowiednio do niej wartość m, będziemy w stanie aproksymować funkcję z co raz większą dokładnością.

- $\boldsymbol{N = 50, 100}$



Wykres 4.3.10



Wykres 4.3.11

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=50	N=100	N=50	N=100
m=20	34.2337	X	46.7551	X
m=44	X	15.3481	X	21.6663

Tabela 4.3.5 Wartości błędów aproksymacji dla 50 i 100 węzłów

Przy odpowiednio dobranym m, wartości błędów dla 100 węzłów są ponad 2 razy mniejsze od wartości błędów dla 50 węzłów.

5. Podsumowanie i wnioski

- Wykorzystując aproksymację średniokwadratową należy w odpowiedni sposób dobierać liczbę węzłów oraz funkcji bazowych. Przy zbyt małym stosunku N do m pojawiają się duże oscylacje w funkcji aproksymującej, co znacząco obniża jej dokładność.
- Jeżeli chcemy dostać funkcję aproksymującą mniej podatną na odchylenia, bardziej płaską i uśredniającą wartości, należy używać mniejszych wartości m.
- Większe wartości m powodują, że otrzymywana funkcja lepiej potrafi dostosować się do kształtu aproksymowanej funkcji.
- Dokładność aproksymacji wzrasta wraz z zwiększaniem się liczby węzłów tylko do pewnego momentu, zależnego od wartości m. Później otrzymywane funkcje są do siebie bardzo zbliżone.