

Interpolacja

Treść zadania

Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.

Biblioteki z których korzystałem w zadaniu to:

- `import matplotlib.pyplot as plt`
- `import numpy as np`
- `import pandas as pd`
- `import math`
- `from time import time`

Interpolowana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

1. Wstęp

Interpolacja wielomianowa umożliwia wyznaczanie wzorów przybliżonych stosowanych do obliczania wartości funkcji w dowolnym punkcie, przy założeniu, że znane są wartości tej funkcji w skończonej liczbie punktów.

1.1. Wzór na wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) \quad (1)$$

gdzie $P_n(x)$ - wielomian interpolacyjny, $L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$, x_0, x_1, \dots, x_n - punkty w których znamy wartości interpolowanej funkcji, n - stopień wielomianu

1.2. Wzór na wielomian interpolacyjny Newtona

A) Dla węzłów leżących w dowolnych punktach

Przyjmijmy następujące oznaczenia: - $f[x_i] = f(x_i)$ - 0-wy iloraz różnicowy

$$\bullet \quad f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Wtedy wzór na wielomian Newtona możemy zapisać następująco:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

co możemy zapisać w następujący sposób:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad (2)$$

B) Dla węzłów równo od siebie oddalonych

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

- $h = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$
- $x = x_0 + s \cdot h$

Wtedy:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (3)$$

Różnica progresywna

$$\Delta^{(0)}y_i := y_i$$

$$\Delta^{(k)}y_i = \Delta^{(k-1)}y_{i+1} - \Delta^{(k-1)}y_i, \quad k > 1$$

Dla węzłów równoodległych iloraz różnicowy jest równy:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

Podstawiając do wzoru (4) otrzymujemy:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + s \cdot h) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \quad (4)$$

1.3. Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa są często używane w interpolacji wielomianowej, ponieważ wynikowy wielomian interpolacyjny minimalizuje **efekt Runge'go**, czyli duże oscylacje wielomianu interpolacyjnego przy krańcach przedziału. Obliczane są one zgodnie z następującym wzorem:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{(2k - 1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

1.4. Obliczanie błędów

Niech $k = 1000$ oznacza liczbę równomiernie rozłożonych w przedziale punktów, dla których obliczamy błędy interpolacji.

Błąd bezwzględny

$$\max_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}} |f(x) - P_n(x)|$$

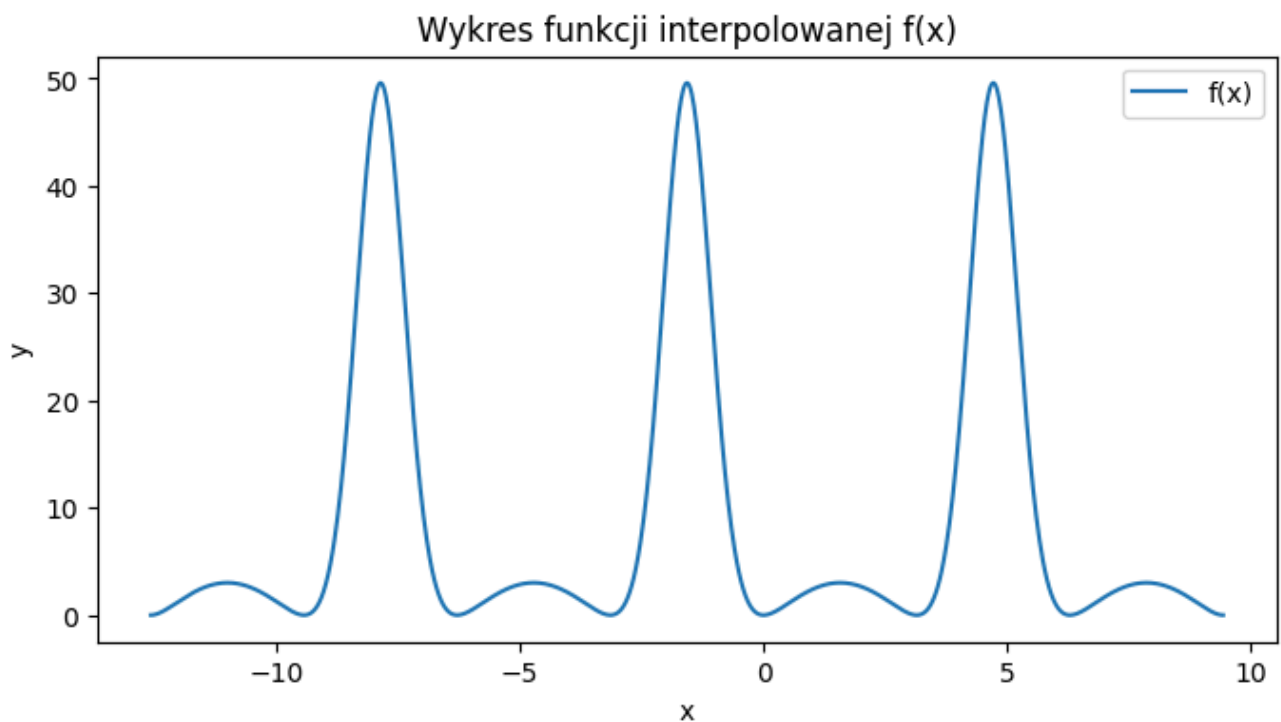
Błąd średniokwadratowy

$$\frac{1}{k} \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}} (f(x) - P_n(x))^2$$

2. Opracowanie

Przypomijmy jeszcze raz wzór naszej interpolowanej funkcji: $f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$, gdzie $k = 4$, $m = 1$, $x \in [-4\pi, 3\pi]$

2.1. Wykres funkcji $f(x)$

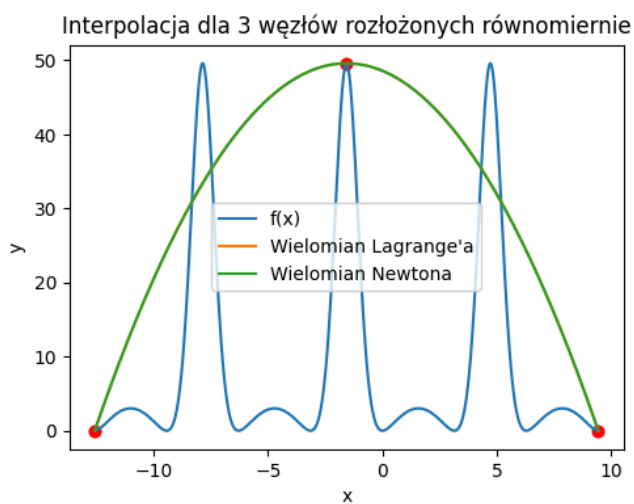


Wykres 1

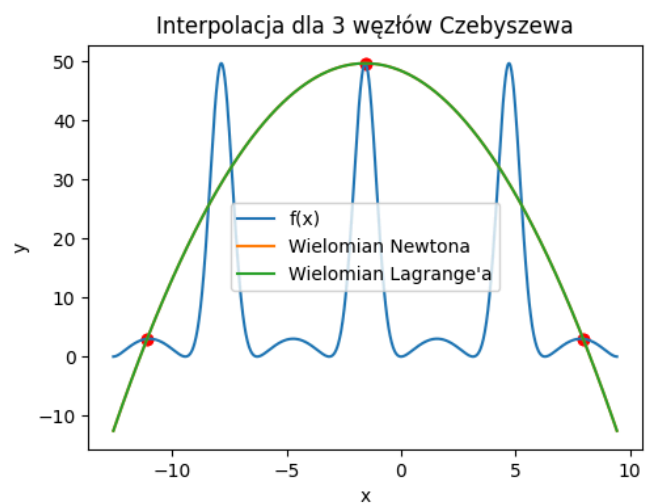
2.2. Analiza interpolacji dla różnej ilości węzłów N

Wartości funkcji $f(x)$ w węzłach są zaznaczone na wykresach czerwonymi kropkami.

- $N = 3$



Wykres 2



Wykres 3

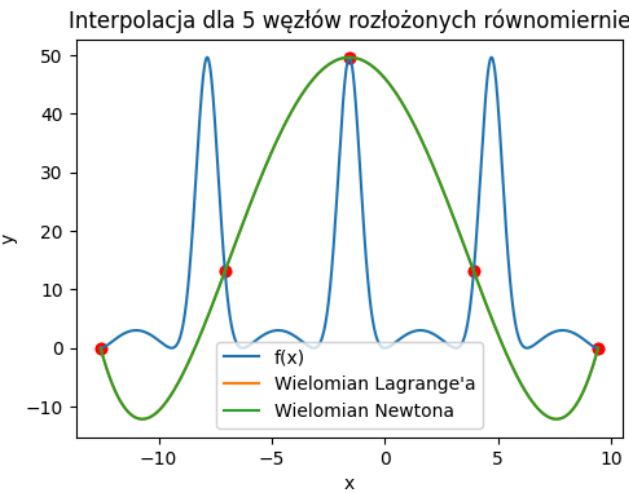
Tabela 1. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	48.630950	48.630950
Błąd średniokwadratowy	915.558961	915.558961

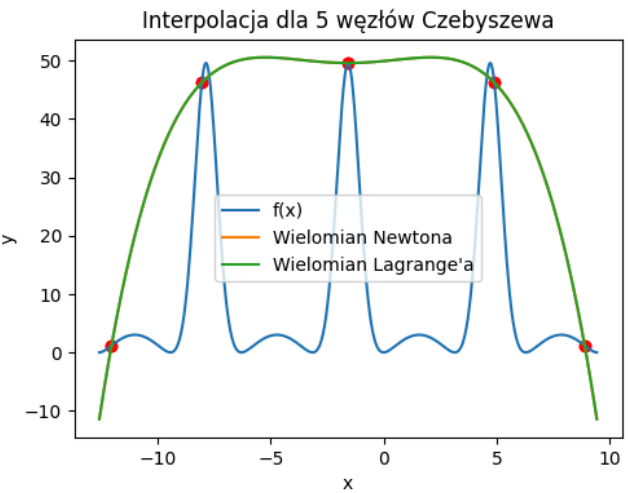
Tabela 2. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	48.398904	48.398904
Błąd średniokwadratowy	836.097999	836.097999

- $N = 5$



Wykres 4



Wykres 5

Tabela 3. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	46.450061	46.450061
Błąd średniokwadratowy	700.744731	700.744731

Tabela 4. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	50.174660	50.174660
Błąd średniokwadratowy	1281.268523	1281.268523

- $N = 7$

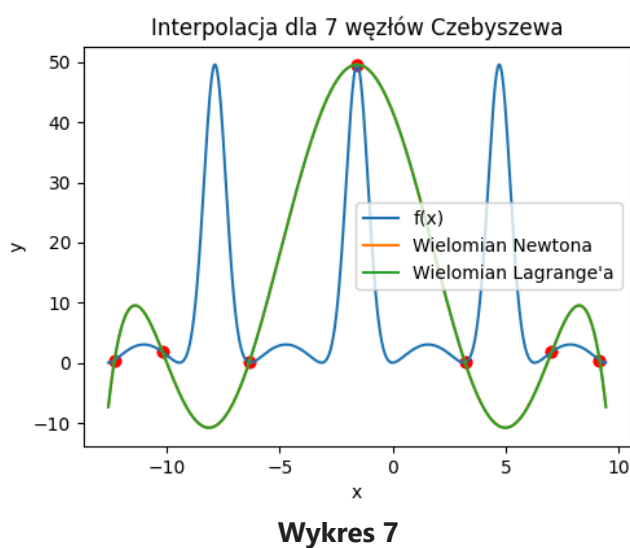
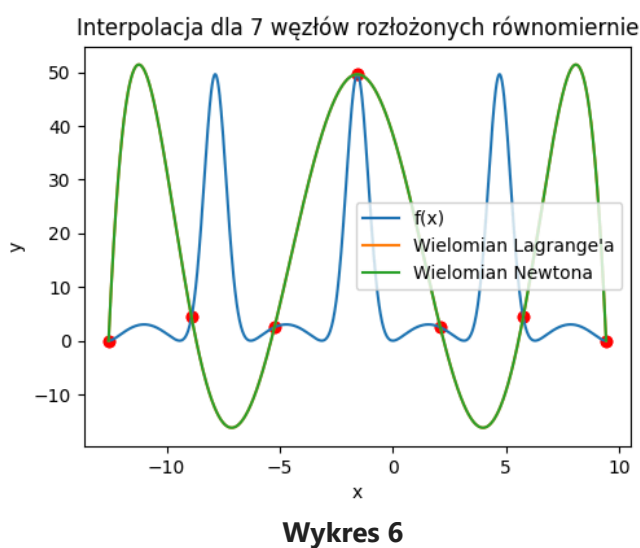


Tabela 5. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

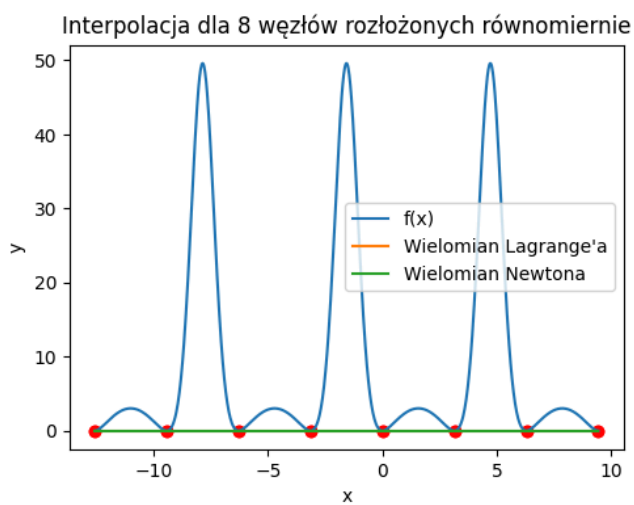
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	62.495960	62.495960
Błąd średniokwadratowy	982.758871	982.758871

Tabela 6. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

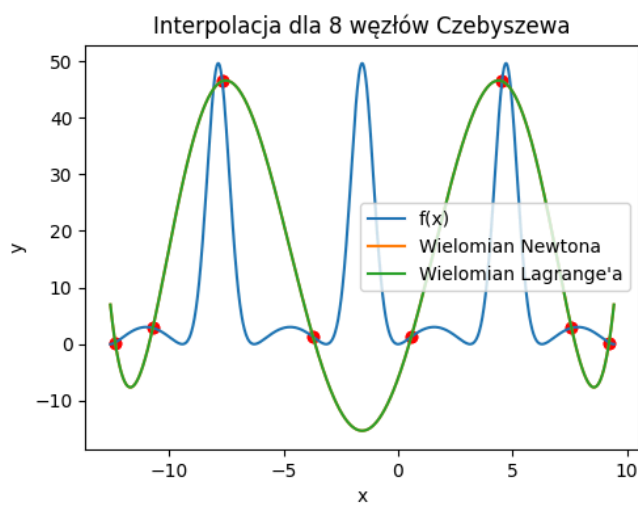
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	60.165672	60.165672
Błąd średniokwadratowy	627.001501	627.001501

Dla **3**, **5** i **7** węzłów wielomiany interpolujące zachowują się w oczekiwany przez nas sposób, to znaczy, uzyskane wartości wielomianów w węzłach są równe wartościom interpolowanej funkcji w tych węzłach, a zbiór wartości wielomianów jest podobny do zbioru wartości interpolowanej funkcji.

- $N = 8$



Wykres 8



Wykres 9

Tabela 7. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

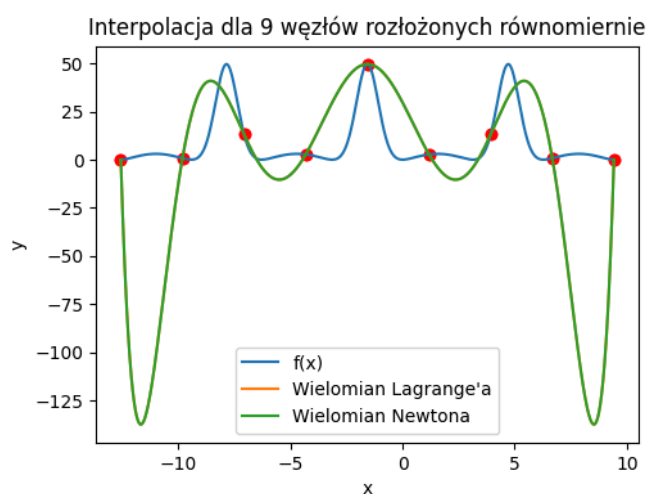
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	49.597885	49.597885
Błąd średniokwadratowy	288.186545	288.186545

Tabela 8. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

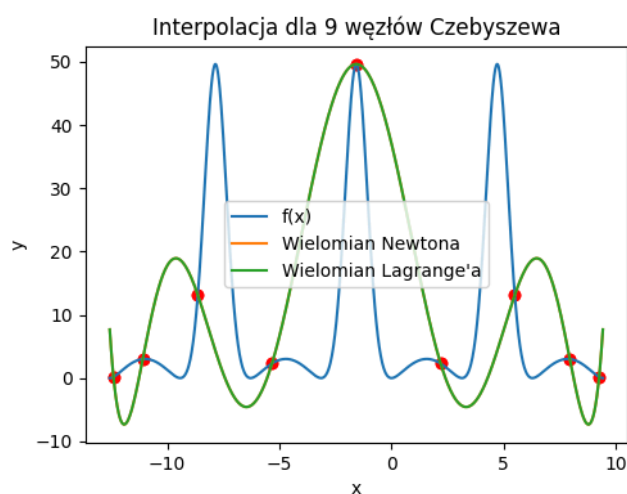
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	64.880089	64.880089
Błąd średniokwadratowy	564.967292	564.967292

Dla 8 węzłów w rozkładzie równomiernym, są one wszystkimi miejscami zerowymi interpolowanej funkcji, dlatego wielomian interpolujący to linia prosta o zbiorze wartości $\{0\}$.

- $N = 9$



Wykres 10



Wykres 11

Tabela 9. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

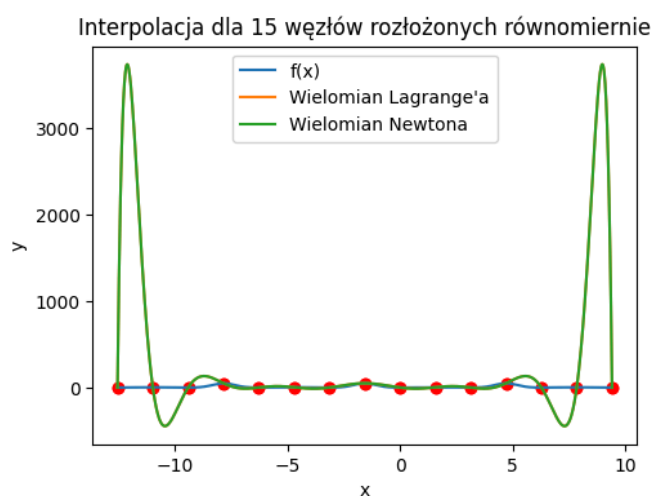
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	139.633399	139.633399
Błąd średniokwadratowy	2525.616606	2525.616606

Tabela 10. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

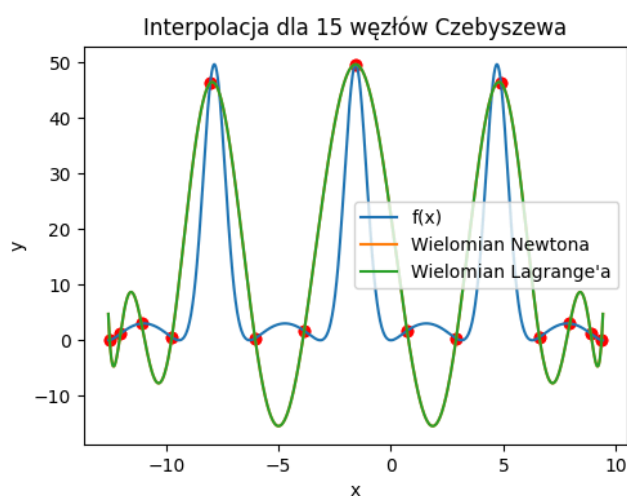
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	45.562605	45.562605
Błąd średniokwadratowy	413.418867	413.418867

Dla 9 węzłów możemy zauważyć **efekt Runge'go** dla równomiernego rozmieszczenia węzłów. Wielomian na krańcach przedziału zaczyna mieć oscylacje o amplitudzie znacznie odstającej od wartości interpolowanej funkcji. Zaczyna gwałtownie rosnąć zarówno błąd bezwzględny jak i średniokwadratowy. W przypadku węzłów Czebyszewa ten efekt nie zachodzi, ponieważ węzły zagęszczają się ku krańcom przedziału, co pozwala lepiej związać wielomian.

- $N = 15$



Wykres 12



Wykres 13

Tabela 11. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	3737.624763	3737.624763
Błąd średniokwadratowy	856357.166362	856357.166362

Tabela 12. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	31.992969	31.992969
Błąd średniokwadratowy	206.902563	206.902563

Dla 15 węzłów **efekt Runge'go** dla równomiernego rozmieszczenia węzłów znacznie się nasila. Wartości przy krańcach przedziału są na tyle duże, że na wykresie nie jesteśmy w stanie zobaczyć już kształtu funkcji interpolowanej. Błąd średniokwadratowy jest około **339 razy** większy niż błąd średniokwadratowy zaobserwowany dla 9 węzłów. Dla rozmieszczenia zgodnego z węzłami Czebyszewa ten efekt dalej nie występuje, a wielomian interpolujący z co raz lepszą dokładnością przybliża interpolowaną funkcję.

- $N = 39$

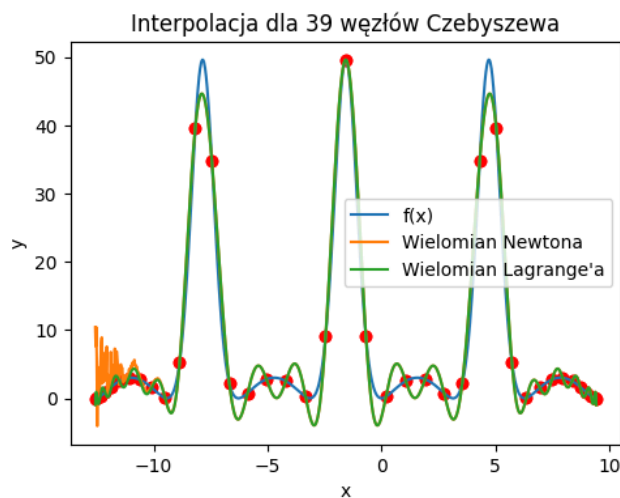
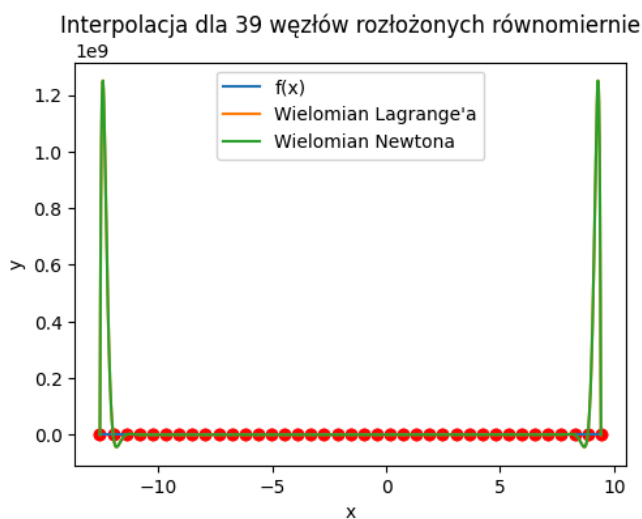


Tabela 13. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

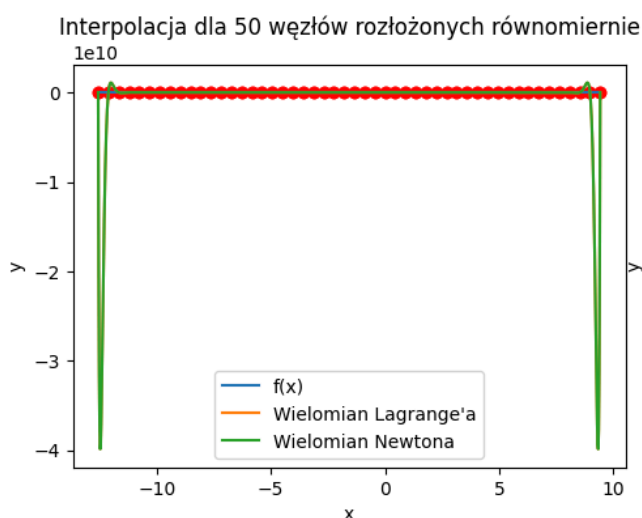
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	1.250218e+09	1.250218e+09
Błąd średniokwadratowy	2.950774e+16	2.950774e+16

Tabela 14. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

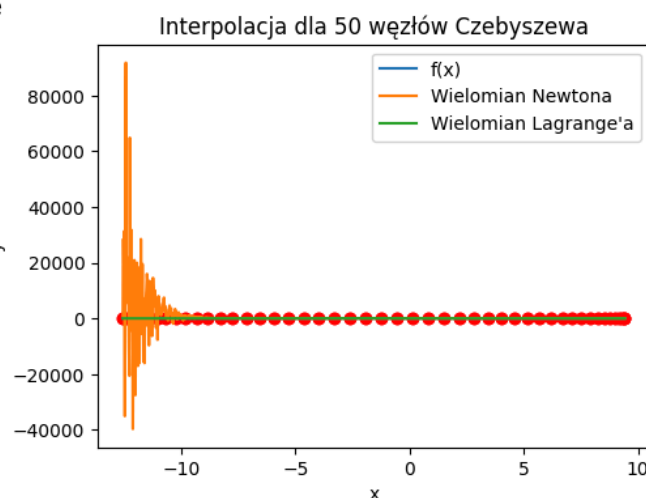
	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	5.114861	10.405937
Błąd średniokwadratowy	5.115651	6.006758

Dla **39** węzłów, dla interpolacji z węzłami Czebyszewa po raz pierwszy możemy zauważyć na wykresie różne wartości wielomianów Lagrange'a i Newtona. Dla tego drugiego zaczynamy obserwować oscylacje o zwiększonej amplitudzie na lewym krańcu przedziału, przez co przybliżenie funkcji interpolowanej staje się co raz mniej dokładne.

- $N = 50$



Wykres 16



Wykres 17

Tabela 15. Wartości błędów interpolacji dla węzłów rozłożonych równomiernie

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	3.987911e+10	3.987911e+10
Błąd średniokwadratowy	2.254578e+19	2.254552e+19

Tabela 16. Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

	Interpolacja Lagrange'a	Interpolacja Newtona
Błąd bezwzględny	3.211612	9.181355e+04
Błąd średniokwadratowy	0.594995	3.148387e+07

Dla **50** węzłów dokładność przybliżenia wielomianem Newtona na lewym krańcu, dla węzłów Czebyszewa, drastycznie maleje. Błąd bezwzględny i średniokwadratowy jest ogromny. Co ciekawe, wielomian Lagrange'a przybliży funkcję interpolowaną z co raz większą dokładnością.

2.3. Wyznaczanie wielomianu najlepiej przybliżającego zadaną funkcję

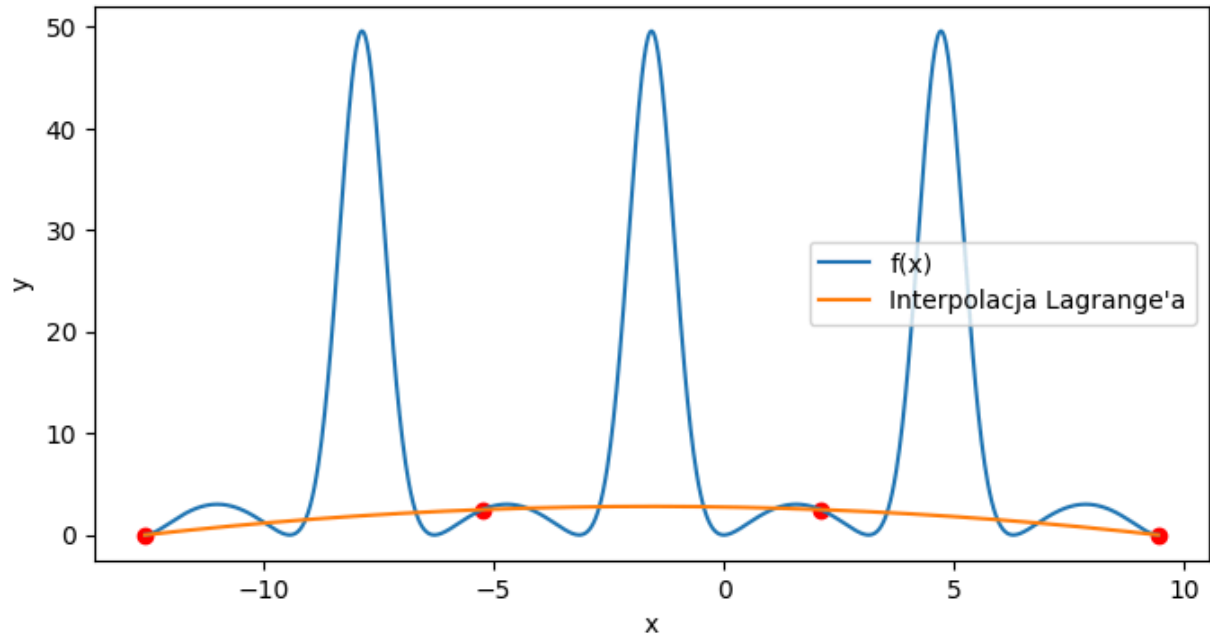
W celu wyznaczenia wielomianu, który najlepiej przybliży zadaną funkcję, będę sprawdzał wielomiany interpolujące Newtona i Lagrange'a dla kolejnej liczby węzłów zaczynając od 2 i liczył dla nich błędy średniokwadratowe. Wielomian z najniższym błędem średniokwadratowym będzie tym najlepiej przybliżającym zadaną funkcję. Będę również liczył czas trwania algorytmu szukającego najlepszego wielomianu.

2.3.1. Najlepszy wielomian dla interpolacji Lagrange'a z równomiernym rozkładem punktów

Czas trwania algorytmu: 0 godzin 0 minut 0 sekund

4

Najlepszy wielomian dla interpolacji Lagrange'a z równomiernym rozkładem węzłów



Wykres 18

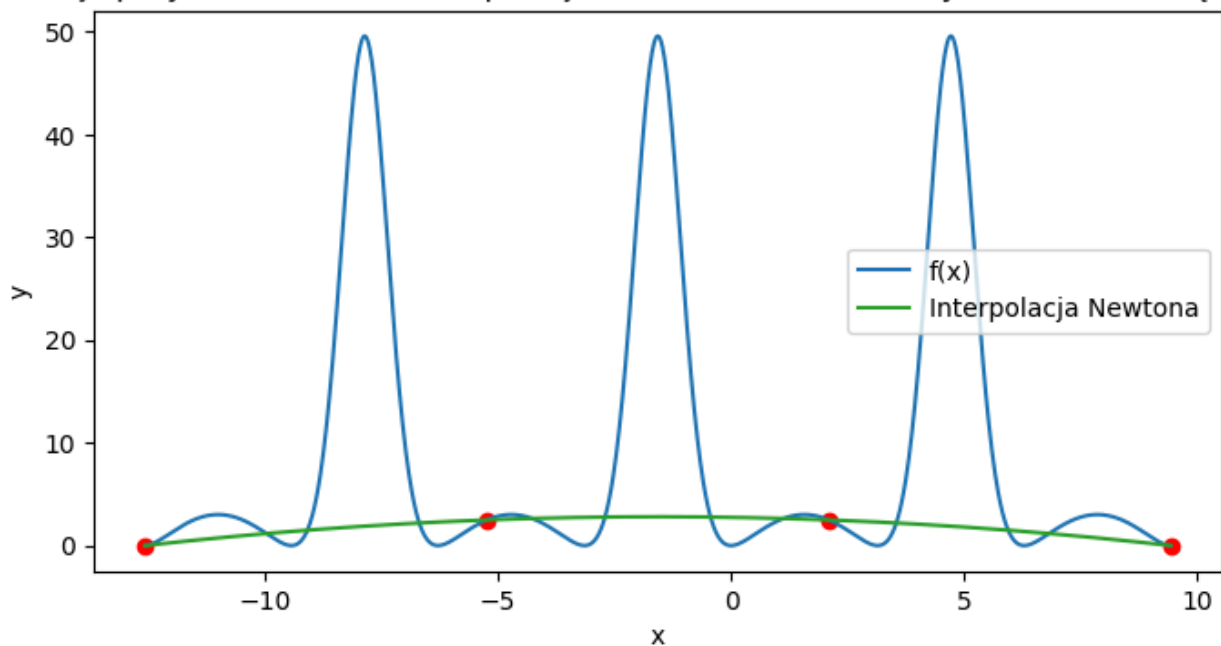
Interpolacja Lagrange'a	
Błąd bezwzględny	47.707694
Błąd średniokwadratowy	253.709635

2.3.2. Najlepszy wielomian dla interpolacji Newtona z równomiernym rozkładem punktów

Czas trwania algorytmu: 0 godzin 0 minut 0 sekund

4

Najlepszy wielomian dla interpolacji Newtona z równomiernym rozkładem węzłów



Wykres 19

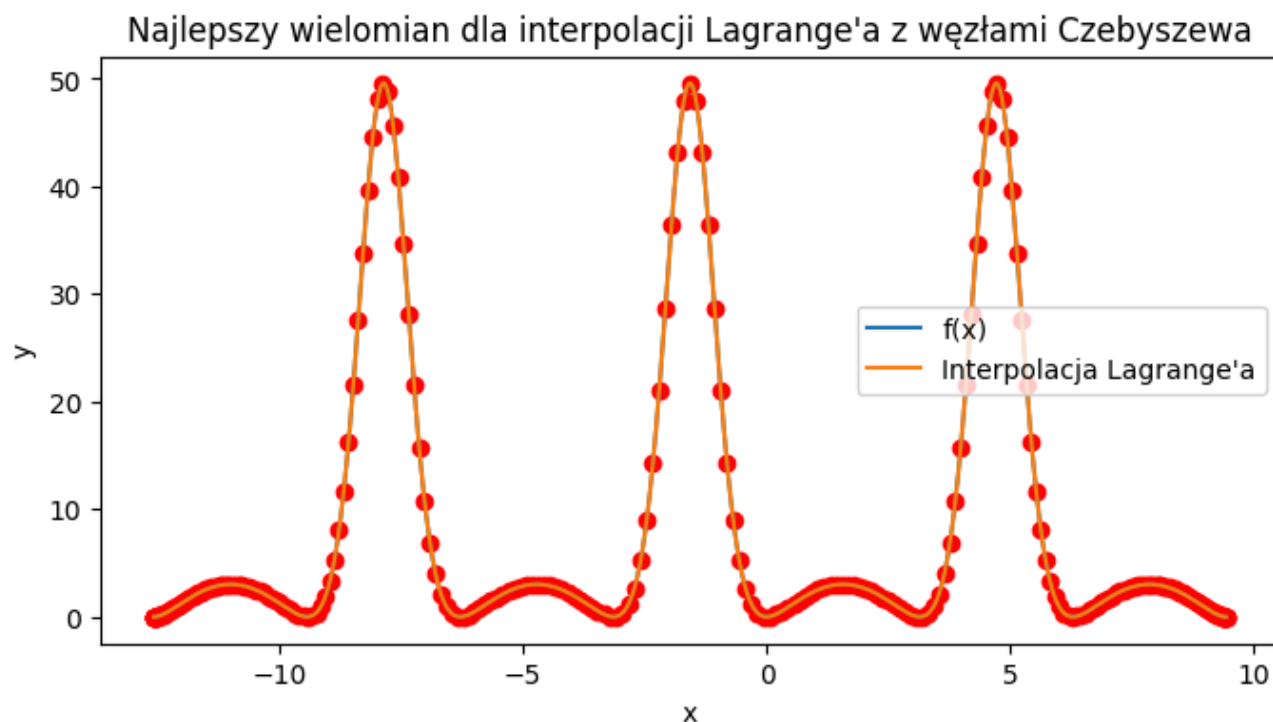
Interpolacja Newtona	
Błąd bezwzględny	47.707694
Błąd średniokwadratowy	253.709635

Dla rozkładu równomiernego sprawdzałem liczbę węzłów tylko do 20, ponieważ jak mogliśmy już zaobserwować od liczby węzłów równej 9 pojawia się efekt Runge'go. Nie ma więc sensu sprawdzać dla większej ilości węzłów, gdyż wtedy ten efekt jest co raz większy.

2.3.3. Najlepszy wielomian dla interpolacji Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Czas trwania algorytmu: 0 godzin 25 minut 18 sekund

273



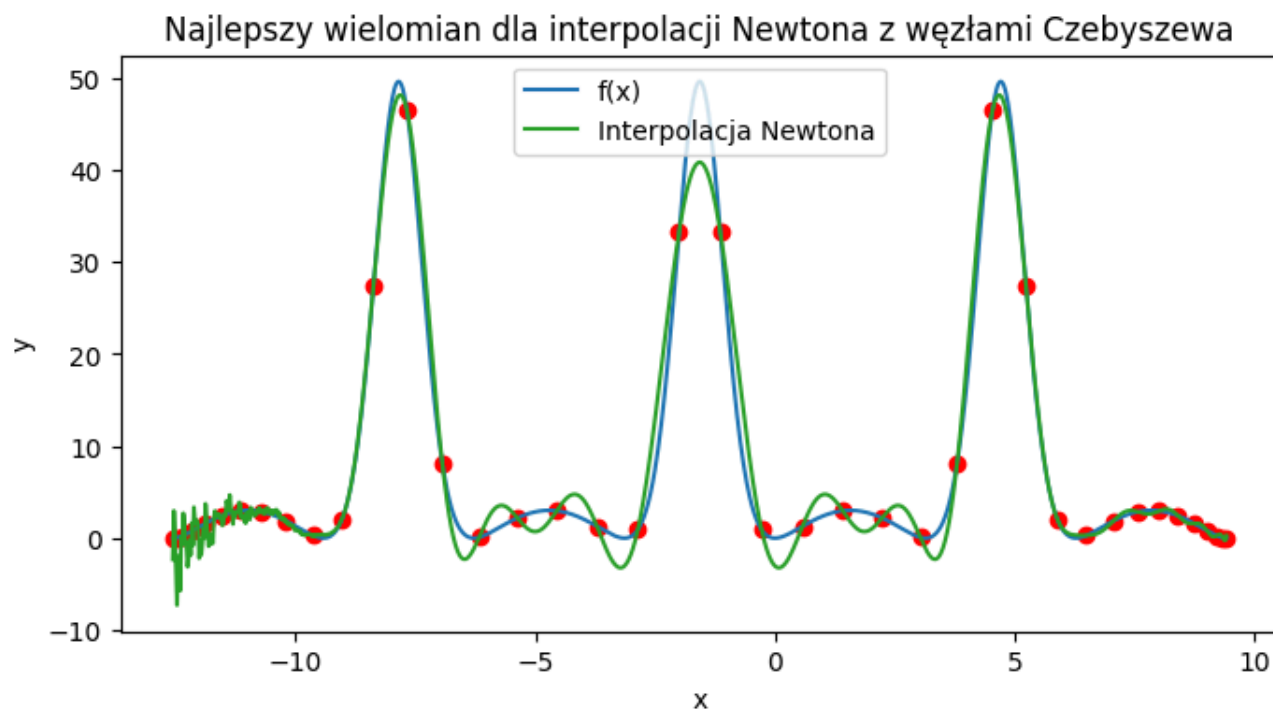
Interpolacja Lagrange'a	
Błąd bezwzględny	1.350031e-13
Błąd średniokwadratowy	4.025563e-28

Im większy stopień wielomianu Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa, tym dokładniej przybliża on interpolowaną funkcję. Najmniejszy błąd został obliczony dla 273 węzłów, później dokładność przybliżenia spada. Jest to spowodowane niedokładnością obliczeń na liczbach zmiennoprzecinkowych. Algorytm wykonywał się aż ponad 25minut.

2.3.4. Najlepszy wielomian dla interpolacji Newtona z węzłami Czebyszewa

Czas trwania algorytmu: 0 godzin 0 minut 9 sekund

40



Interpolacja Newtona	
Błąd bezwzględny	8.771602
Błąd średniokwadratowy	4.900118

Okazuje się, że wielomian Newtona o 40 węzłach Czebyszewa najlepiej przybliża interpolowaną funkcję. Zgodnie z tym co już zauważyliśmy, od około 39 węzłów dla wielomianu Newtona, zaczynamy obserwować oscylacje o znacznie zwiększających się amplitudach na lewym krańcu przedziału. Dla większej ilości węzłów te amplitudy gwałtownie rosną i wielomian z mniejszą dokładnością przybliża funkcję interpolowaną.

3. Wnioski

- Dla równomiernego rozkładu węzłów interpolacji bardzo szybko pojawia się efekt Runge'go, znacznie pogarszający jakość interpolacji wielomianowej. W naszym wypadku zaobserwowaliśmy go już od 9 węzłów.
- Wykorzystanie węzłów Czebyszewa skutecznie minimalizuje efekt Runge'go. Dzięki temu, że miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, pozwala to lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom.
- Wielomianem interpolacyjnym, który najlepiej przybliży interpolowaną funkcję, jest wielomian Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla 273 węzłów.
- Ze względu na duży koszt obliczeń wielomian interpolacyjny Lagrange'a nie znajduje zastosowania w praktyce. Mogliśmy to zaobserwować podczas szukania najlepszego wielomianu, które zajęło aż 25 minut. Dla porównania, dla wielomianu Newtona zajęło to 9 sekund.
- Dla liczby węzłów większej niż około 40, wielomian interpolacyjny Newtona, dla węzłów Czebyszewa, zaczyna tracić dokładność na lewym krańcu przedziału. Jest to prawdopodobnie spowodowane niedokładnością zapisu liczb zmiennoprzecinkowych w pamięci komputera i sposobem obliczania wartości wielomianu.