Tomasz Kurcoń Grupa 3 *15.04.2024*

Ćwiczenie 4a. Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Treść zadania

Dla funkcji $f(x) = e^{-k\cdot\sin(m\cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1,\ gdzie\ k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$, wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

1. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.
Biblioteki z których korzystałem w zadaniu:

- import matplotlib.pyplot as plt
- import numpy as np
- import pandas as pd
- import math

2. Aproksymowana funkcja:

$$F(x) = e^{-k\cdot\sin(m\cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

3. Wstęp

Aproksymacja jest ogólniejsza niż interpolacja i pozwala na przybliżanie lub zastępowanie funkcji za pomocą innej funkcji.

3.1. Aproksymacja średniokwadratowa

Oznaczmy przez $f(x)$ funkcję aproksymującą. Mamy dane punkty $\left(x_i, y_i = F(x_i)\right),\ i = 0,1,\dots,n$, (gdzie $F(x)$ to nasz aproksymowana funkcja), czyli n+1 węzłów oraz układ funkcji bazowych $\varphi_j(x), j = 0,1,\dots,m$. Wtedy:

$$\boldsymbol{f(x)} = \sum_{\boldsymbol{j=0}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_j}\varphi_j(x) \qquad (3.1.1)$$

Szukamy takich współczynników $\boldsymbol{a_j}$ dla których:

$$min\,\|F(x)-f(x)\| \;=\; min\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i)-\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]^2$$

Gdzie $F(x_i)-\sum_{j=0}^{m} a_{j\varphi_j}(x_i)$ – odchylenie wartości funkcji aproksymującej od funkcji aproksymowanej, $w(x_i)$ – waga węzła x_i, (im większy błąd tym mniejsza waga), ma ona zastosowanie wtedy, kiedy wiemy, że niektóre punkty zmierzyliśmy z większą dokładnością niż inne.

Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$H(a_0,a_1,\dots,a_m)=\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i)-\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]^2 \tag{3.1.2}$$

W celu obliczenia współczynników a_j będziemy obliczać pochodne cząstkowe funkcji (3.1.2) i przyrównywać je do 0, otrzymując tym samym układ m+1 równań o m+1 niewiadomych.

$$\frac{\partial H}{\partial a_k}=-2\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i)\;-\;\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\right]\varphi_k(x_i)=0,\quad k=0,1,\dots,m \tag{3.1.3}$$

Powyższy układ równań jest zwany układem normalnym.

Przyjmijmy za nasze funkcje bazowe ciąg jednomianów $\varphi_j(x)=x^j, j=0,1,\dots,m$. Wtedy nasza funkcja aproksymująca, zgodnie z (3.1.1) będzie miała postać:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m} a_j x^j \tag{3.1.4}$$

Dla tych funkcji bazowych, zgodnie z (3.1.3) możemy zapisać:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i)\;-\;\sum_{j=0}^{m} a_j x^j\right]x^j=0,\quad k=0,1,\dots,m \tag{3.1.5}$$

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania i przekształcając wzór (3.1.5) dalej otrzymujemy:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i){x_i}^{j+k}\right)a_j=\sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)x^k,\quad k=0,1,\dots,m \tag{3.1.6}$$

Otrzymane równania (3.1.6) możemy zapisać w postaci macierzowej, a następnie rozwiązać układ równań i wyliczyć wartości współczynników a_j, a tym samym funkcje aproksymującą, podstawiając obliczone współczynniki do (3.1.4).

3.4. Obliczanie błędów

Niech K = 1000 oznacza liczbę równomiernie rozłożonych w przedziale punktów $x_1, x_1, \ldots, x_K$, dla których obliczamy błędy aproksymacji.

Błąd bezwzględny:

$$\max_{x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}} |F(x) - f(x)|$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{K} \sum_{x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}} \left(F(x) - f(x)\right)^2$$

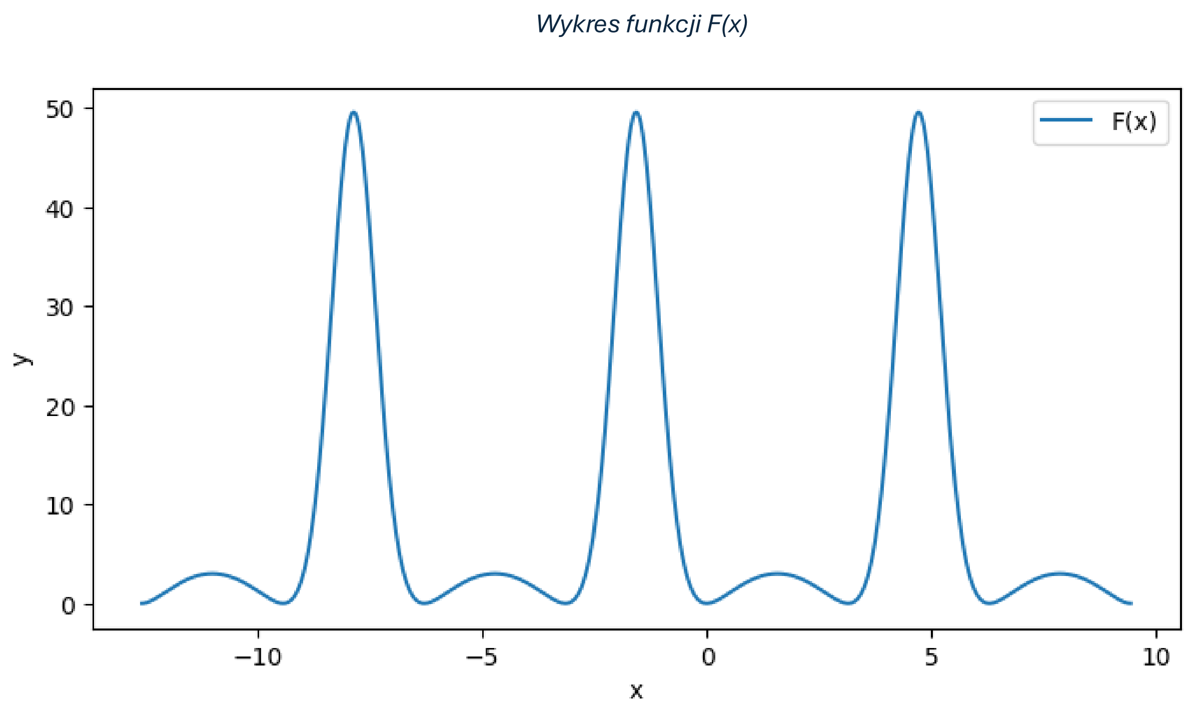
4. Opracowanie

Przypomnijmy jeszcze raz wzór interpolowanej funkcji:

$$F(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

4.1. Wykres funkcji $F(x)$



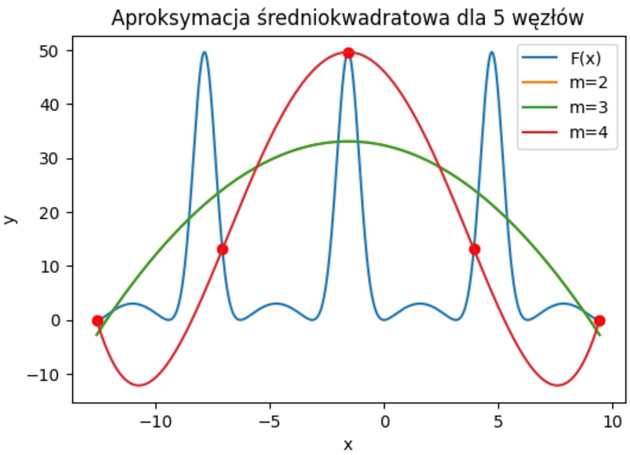
Wykres 4.1.1

Uwaga 1: Będziemy przyjmować, że waga każdego węzła jest równa 1.

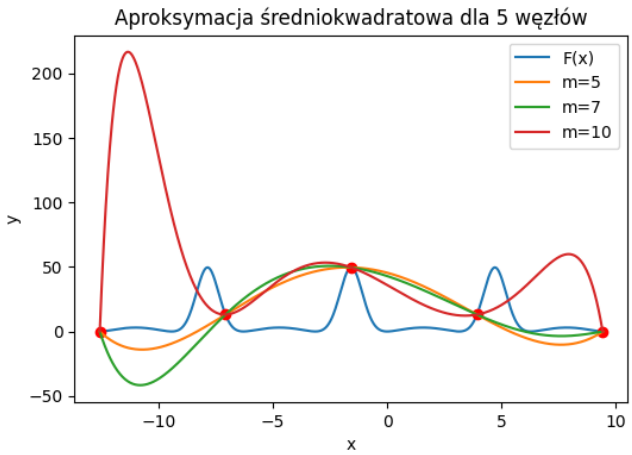
Uwaga 2: Przyjmijmy, że liczbę węzłów oznaczamy przez N, a stopień wielomianu przez m.

4.2. Analiza aproksymacji ze względu na stopień wielomianu m.

- $N = 5$



Wykres 4.2.1



Wykres 4.2.2

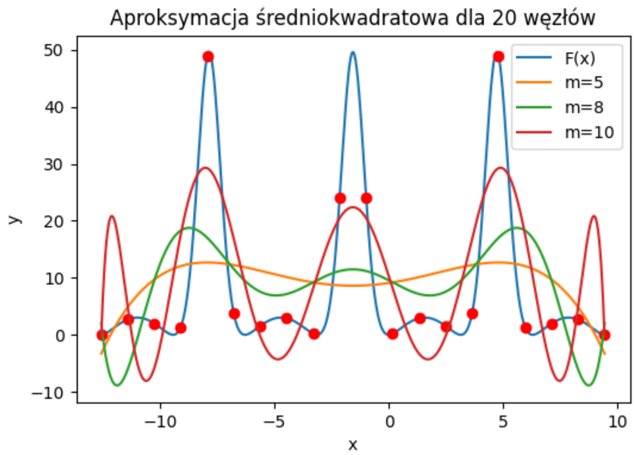
	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy
m=2	32.3592	404.4590
m=3	32.3592	404.4590
m=4	46.4501	700.7447
m=5	46.9381	701.7484
m=7	51.1773	922.5981
m=10	213.7670	4889.2649

Tabela 4.2.1 Wartości błędów aproksymacji dla 5 węzłów

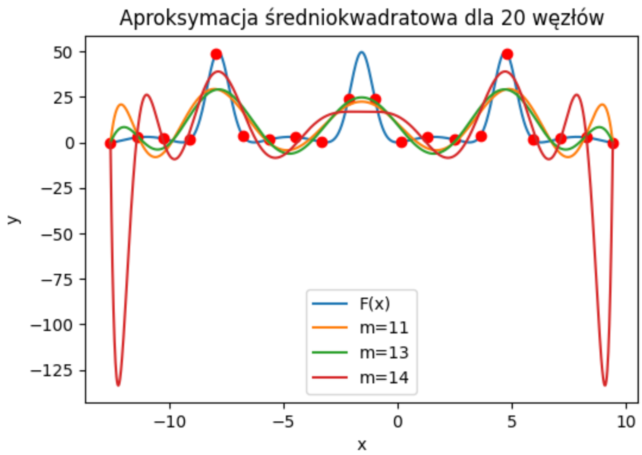
Dla 5 węzłów widzimy, że najlepsze przybliżenie otrzymujemy dla m = 3. Dla większych m oscylacje na lewym brzegu stają się coraz większe i obserwujemy coś w stylu efektu Runge'go dla interpolacji. Ma to związek z wybranymi przez nas funkcjami bazowymi. Im większe m, tym większy jest najwyższy stopień wielomianu algebraicznego wchodzącego w skład naszej funkcji aproksymacyjnej.

Widzimy, że nie ma sensu wykonywać aproksymacji dla stopnia wielomianu większego od liczby węzłów, dlatego będzie przeprowadzać aproksymację tylko dla m < N.

- $N = 20$



Wykres 4.2.3



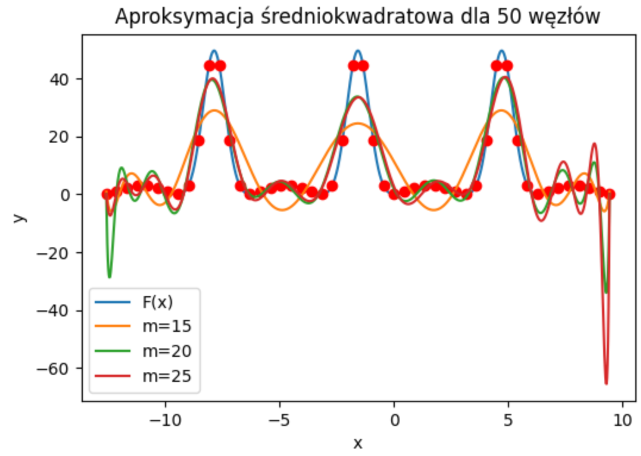
Wykres 4.2.4

	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy
m=5	40.9773	190.3698
m=8	38.1019	171.3383
m=10	27.2027	116.9346
m=11	27.2027	116.9346
m=13	24.8648	91.3518
m=14	134.1868	950.6768

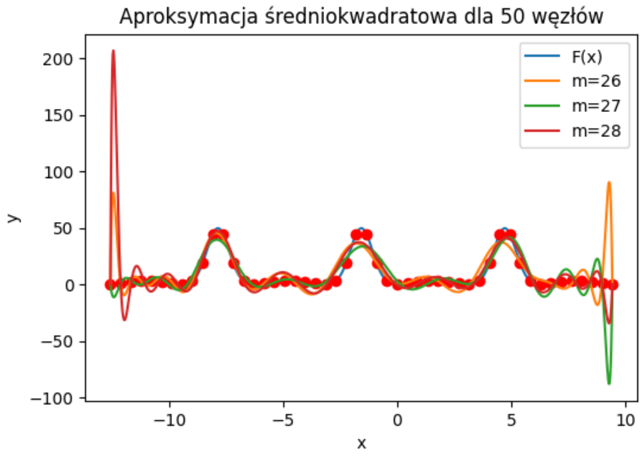
Tabela 4.2.2 Wartości błędów aproksymacji dla 20 węzłów

Dla większego m otrzymywane funkcje aproksymacyjne są w stanie bardziej dopasować się do wykresu funkcji, natomiast mniejsze m daje bardziej uśrednione wartości (wykres 4.2.3). Gdy jednak m będzie znacznie większe od połowy liczby węzłów, to gwałtownie zaczną rosnąć oscylacje na brzegach.

- $N = 50$



Wykres 4.2.5



Wykres 4.2.6

Na wykresach 4.2.5 oraz 4.2.6 obserwujemy podobne sytuacje co wcześniej. Sprawdźmy zatem wszystkie wartości m od 2 do 30 i wybierzmy 15 wartości m, dla których błąd średniokwadratowy jest najmniejszy.

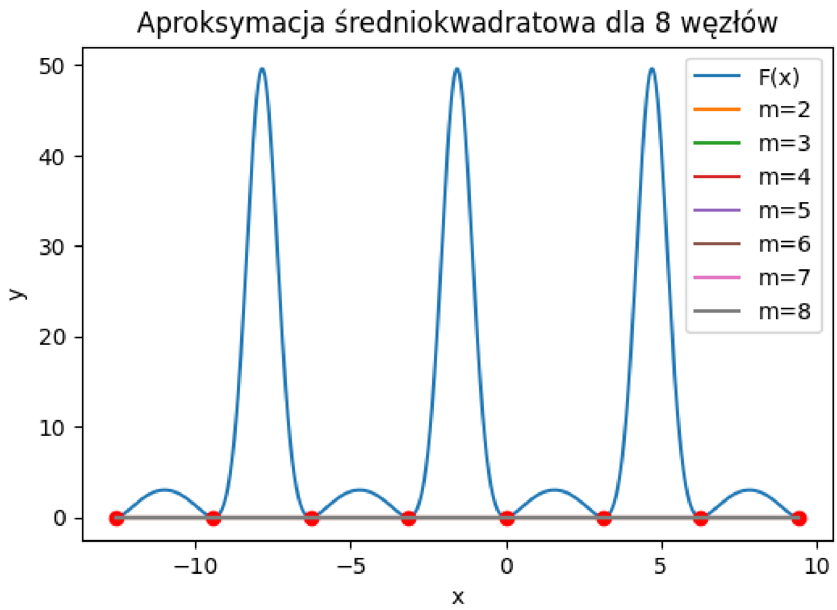
	Błąd średniokwadratowy
1. m=20	46.7551
2. m=21	51.5987
3. m=25	73.1652
4. m=18	74.5707
5. m=19	74.5919
6. m=22	77.7591
7. m=16	81.0821
8. m=17	81.0821
9. m=14	83.827
10. m=15	83.827
11. m=23	85.3122
12. m=12	86.9248
13. m=13	86.9248
14. m=10	103.6751
15. m=11	103.6751

Tabela 4.2.3 Pierwsze 15 najmniejszych błędów średniokwadratowych spośród m od 2 do 30

Widzimy zatem, że najlepsze przybliżenia otrzymujemy dla m od około 19 do 25, czyli lekko poniżej połowy liczby węzłów.

4.3. Analiza aproksymacji ze względu na liczbę węzłów N

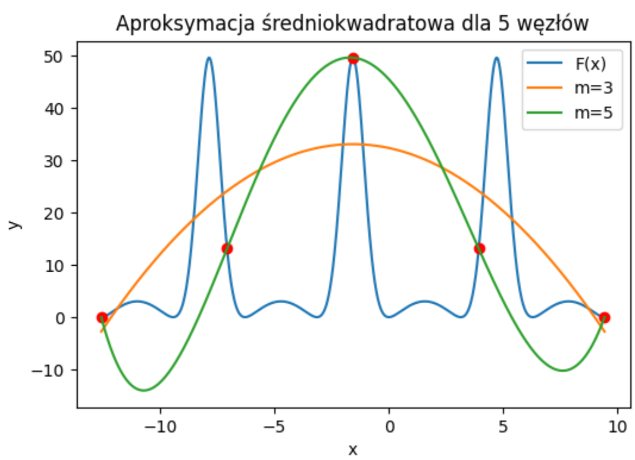
- $N = 8$



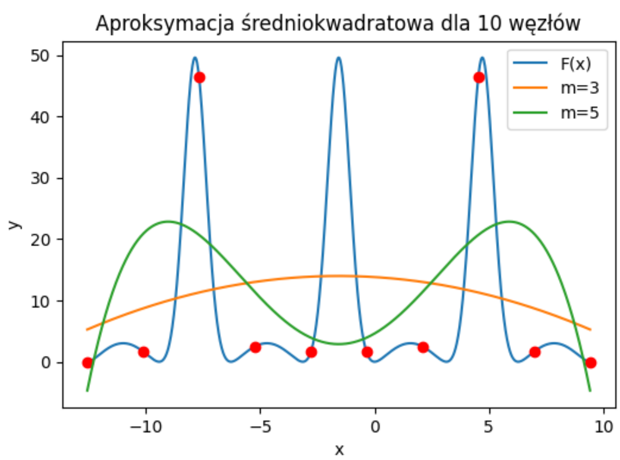
Wykres 4.3.1

W przypadku 8 węzłów, niezależnie od m, dostajemy funkcję stale równą 0, ponieważ wszystkie węzły są miejscami zerowymi aproksymowanej funkcji.

- $N = 5, 10, \quad m = 3, 5$



Wykres 4.3.2



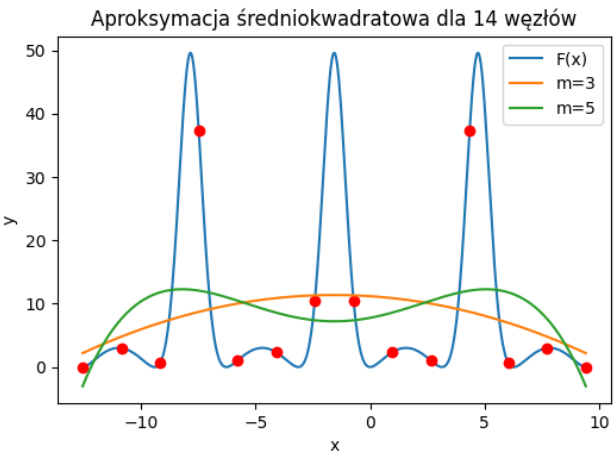
Wykres 4.3.3

	Błąd bezwzględny		**Błąd średniokwadratowy**	
	N=5	N=10	N=5	N=10
m=3	32.3592	38.4652	404.4590	201.9546
m=4	46.4501	46.7139	700.7447	244.0448

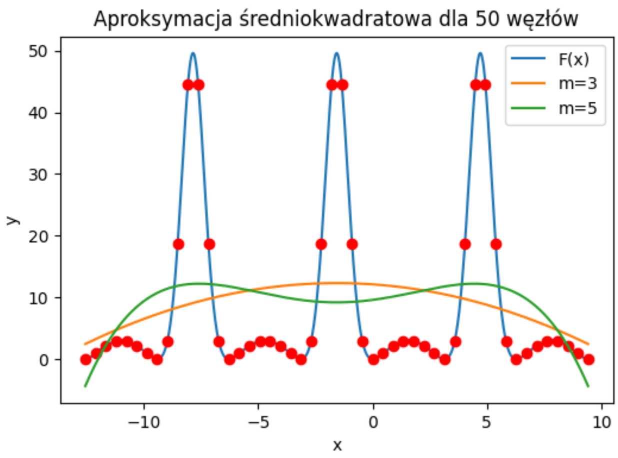
Tabela 4.3.1 Wartości błędów aproksymacji dla 5 i 10 węzłów

Widzimy, że dla większej liczby węzłów, przy tym samym m, otrzymane funkcje aproksymujące stają się mniej podatne na wartości odstające, dostajemy bardziej „płaską” funkcję. W tabeli 4.3.1 widzimy, że dla większej liczby węzłów, wartości błędów średniokwadratowych maleją, zarówno dla m=3, jak i m=5.

- $\boldsymbol{N = 14, 50,\quad m = 3, 5}$



Wykres 4.3.4



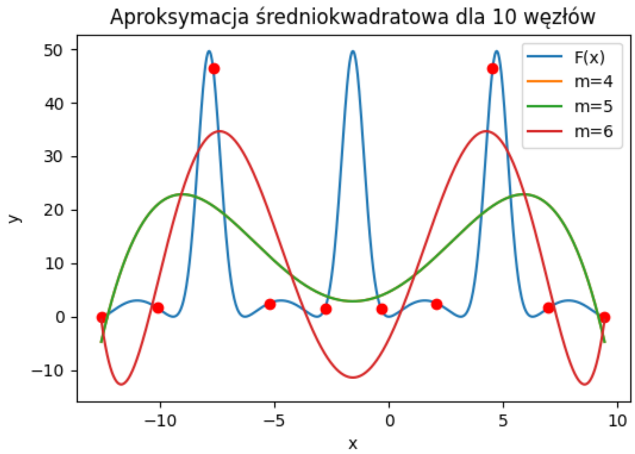
Wykres 4.3.5

	Błąd bezwzględny		**Błąd średniokwadratowy**	
	N=14	N=50	N=14	N=50
m=3	41.2264	40.5043	198.4789	197.9001
m=5	42.3687	40.3928	191.5102	189.6908

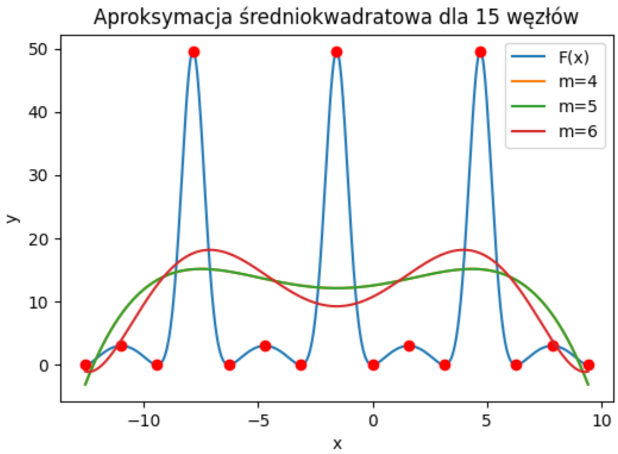
Tabela 4.3.2 Wartości błędów aproksymacji dla 14 i 50 węzłów

Dla liczby węzłów większej bądź równej 14 otrzymujemy bardzo podobne wyniki. Dla tych stopni wielomianów nie jesteśmy już w stanie uzyskać lepszej aproksymacji.

- $N = 10, 15, \quad m = 4, 5, 6$



Wykres 4.3.6



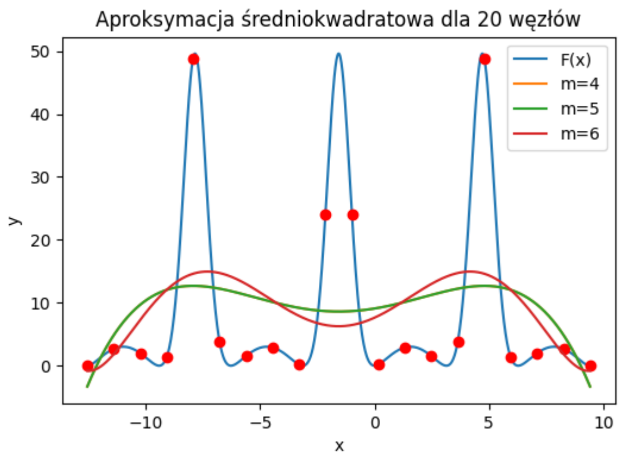
Wykres 4.3.7

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=10	N=15	N=10	N=15
m=4	46.7139	37.4535	244.0448	197.4434
m=5	46.7139	37.4535	244.0448	197.4434
m=6	60.9568	40.3216	371.5003	197.1768

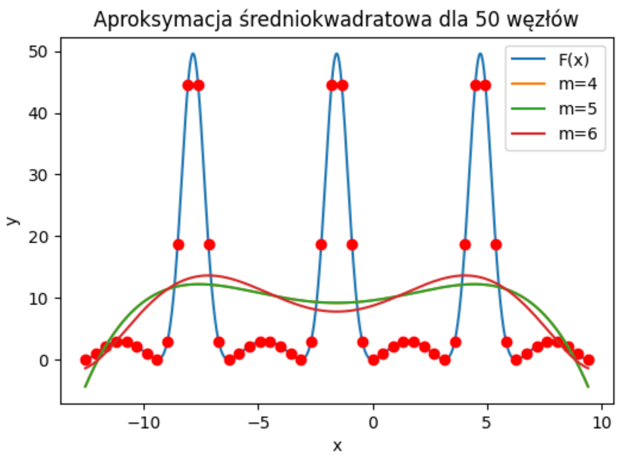
Tabela 4.3.3 Wartości błędów aproksymacji dla 10 i 15 węzłów

Większa liczba węzłów w każdym przypadku dla wybranych m poprawia dokładność aproksymacji. Zmniejszają się oscylacje otrzymywanych funkcji, stają się one bardziej płaskie.

- $N = 20, 50, \quad m = 4, 5, 6$



Wykres 4.3.8



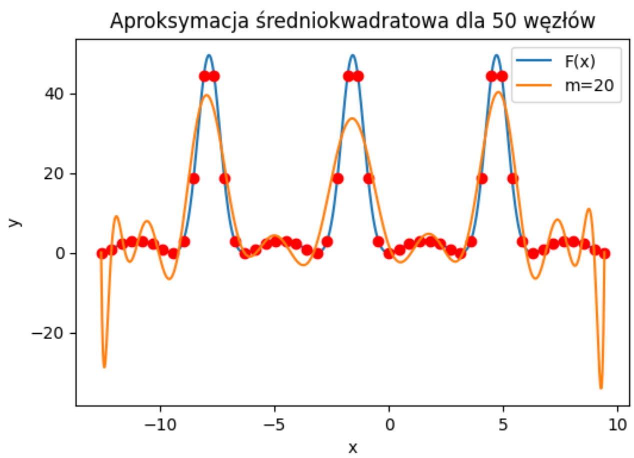
Wykres 4.3.9

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=20	N=50	N=20	N=50
m=6	43.3133	41.8089	189.3974	188.5264
m=8	38.1019	36.8325	171.3383	167.0910
m=10	27.2027	27.7681	116.9346	103.6751

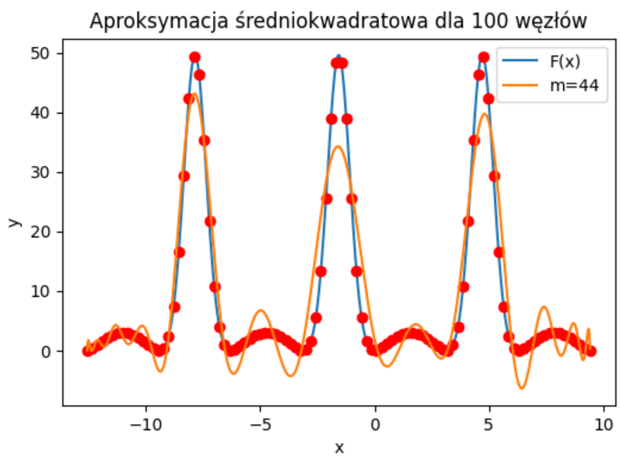
Tabela 4.3.4 Wartości błędów aproksymacji dla 20 i 50 węzłów

Podobnie jak na wykresach 4.3.4 oraz 4.3.5 i tabeli 4.3.2 możemy zauważyć, że dokładność interpolacji wraz z wzrostem liczby węzłów rośnie tylko do pewnego momentu, później otrzymywane wyniki są takie same lub tylko nieznacznie się różnią. Im większa liczba m, tym dla większej ilości węzłów jest w stanie poprawiać swoją dokładność. Zatem zwiększając liczbę węzłów, a następnie dobierając odpowiednio do niej wartość m, będziemy w stanie aproksymować funkcję z coraz większą dokładnością.

- $\boldsymbol{N = 50, 100}$



Wykres 4.3.10



Wykres 4.3.11

	Błąd bezwzględny		Błąd średniokwadratowy	
	N=50	N=100	N=50	N=100
m=20	34.2337	X	46.7551	X
m=44	X	15.3481	X	21.6663

Tabela 4.3.5 Wartości błędów aproksymacji dla 50 i 100 węzłów

Przy odpowiednio dobranym m, wartości błędów dla 100 węzłów są ponad 2 razy mniejsze od wartości błędów dla 50 węzłów.

5. Tabele z błędami

5.1. Tabela z błędami średniokwadratowymi

	Liczba węzłów							
m	5	10	15	20	25	30	35	40
3	404.4590	201.9546	204.982	197.8909	197.9326	197.9178	197.9118	197.9065
4	700.7447	244.0448	197.4434	190.3698	190.0269	189.9078	189.8267	189.7668
5		244.0448	197.4434	190.3698	190.0269	189.9078	189.8267	189.7668
6		371.5003	197.1768	189.3974	188.5584	188.5503	188.5424	188.5361
10			457.4556	116.9346	107.0751	105.3827	104.7735	104.3446
11			457.4556	116.9346	107.0751	105.3827	104.7735	104.3446
12			2242.9174	91.3518	87.023	86.9599	86.9433	86.9321
13			2242.9174	91.3518	87.0230	86.9599	86.9433	86.9321
15				950.6755	112.4408	88.5376	85.0682	84.2391
20					65978.0562	3186466.8656	39.0312	153.2187
25						32321281.2362	3428.4843	417.7176

Tabela 5.1.1 Wartości błędów średniokwadratowych dla aproksymacji średniokwadratowej

5.2. Tabela z błędami bezwzględnymi

	Liczba węzłów							
m	5	10	15	20	25	30	35	40
3	32.3592	38.4652	38.1166	40.4463	40.4757	40.5312	40.5201	40.5139
4	46.4501	46.7139	37.4535	40.9773	40.1801	40.301	40.3166	40.3478
5		46.7139	37.4535	40.9773	40.1801	40.301	40.3166	40.3478
6		60.9568	40.3216	43.3133	41.7746	41.8637	41.8275	41.822
10			67.9799	27.2027	26.8146	27.5917	27.7002	27.7576
11			67.9799	27.2027	26.8146	27.5917	27.7002	27.7576
12			175.3098	24.8648	22.5082	22.9788	22.9434	22.9684
13			175.3113	24.8648	22.5082	22.9788	22.9434	22.9684
15				134.1866	28.4136	25.9265	25.4697	25.2947
20					1584.7157	13826.7768	20.76	84.0399
25						38352.7026	455.341	170.2418

Tabela 5.2.1 Wartości błędów bezwzględnych dla aproksymacji średniokwadratowej

W tabelach 5.1.1 oraz 5.2.1 możemy zaobserwować, że dla stopni wielomianów większych od **12** otrzymywane błędy są bardzo do siebie zbliżone lub ewentualnie gorsze.

6. Podsumowanie i wnioski

- Wykorzystując aproksymację średniokwadratową należy w odpowiedni sposób dobierać liczbę węzłów oraz stopień wielomianu aproksymującego. Przy zbyt małym stosunku N do m pojawiają się duże oscylacje w funkcji aproksymującej, co znacząco obniża jej dokładność.
- Jeżeli chcemy dostać funkcję aproksymującą mniej podatną na odchylenia, bardziej płaską i uśredniającą wartości, należy używać mniejszych wartości m.
- Większe wartości m powodują, że otrzymywana funkcja lepiej potrafi dostosować się do kształtu aproksymowanej funkcji.
- Dokładność aproksymacji wzrasta wraz z zwiększaniem się liczby węzłów tylko do pewnego momentu, zależnego od wartości m. Później otrzymywane funkcje są do siebie bardzo zbliżone.
- Dla stopni wielomianów większych od 12 nie obserwujemy już poprawy aproksymacji.