

Ćwiczenie 5. Równania nieliniowe

Treść zadania

Stosując metodę Newtona oraz metodę siecznych wyznacz pierwiastki równania $f(x) = 0$ w zadanym przedziale $[a, b]$. Dla metody Newtona wybierz punkty startowe rozpoczynając od wartości końców przedziału, zmniejszając je o 0.1 w kolejnych eksperymentach numerycznych. Odpowiednio dla metody siecznej jeden z końców przedziału stanowić powinna wartość punktu startowego dla metody Newtona, a drugi – początek, a następnie koniec przedziału $[a, b]$. Porównaj liczbę iteracji dla obu tych metod (dla różnych dokładności ϵ), stosując jako kryterium stopu:

1. $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$
2. $|f(x_i)| < \epsilon$

1. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.

Biblioteki z których korzystałem w zadaniu:

- `import matplotlib.pyplot as plt`
- `import numpy as np`
- `import pandas as pd`
- `import math`
- `import seaborn as sns`

2. Wzór funkcji:

$$f(x) = x^2 - m(\sin(x))^n$$

gdzie $n = 11, m = 35, x \in [-1.7, 0.8]$

3. Wstęp

Metody iteracyjne są powszechnie stosowanymi technikami numerycznymi do rozwiązywania różnego rodzaju problemów matematycznych, takich jak znajdowanie pierwiastków równań, rozwiązywanie układów równań liniowych, optymalizacja i wiele innych. Dwie popularne metody iteracyjne to metoda Newtona-Raphsona i metoda siecznych. Podstawową ideą metod iteracyjnych jest generowanie ciągu przybliżeń, które zbiegają do prawdziwego rozwiązania problemu. Każde kolejne przybliżenie jest generowane na podstawie

poprzedniego, stosując pewną procedurę iteracyjną. Proces ten jest kontynuowany, aż zostanie osiągnięte wymagane kryterium stopu.

3.1. Przyjęte kryteria stopu

$$1. |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \quad (3.1.1)$$

$$2. |f(x_i)| < \varepsilon \quad (3.1.2)$$

x_{i+1}, x_i – przybliżenia pierwiastka wyznaczone w kolejnych iteracjach

ε – dokładność (dodania liczba rzeczywista)

3.2. Metoda Newtona-Raphsona

Ta metoda polega na iteracyjnym przybliżaniu pierwiastka równania za pomocą stycznych do wykresu funkcji. W każdym kroku, metoda Newtona-Raphsona rysuje styczną do wykresu funkcji w punkcie startowym, a punkt przecięcia tej stycznej z osią x staje się nowym punktem startowym. Proces ten jest powtarzany, aż osiągnięte zostanie wymagane kryterium stopu.

Abyśmy mogli stwierdzić, że metoda Newtona-Raphsona jest zbieżna do miejsca zerowego funkcji dla dowolnego punktu startowego x_0 , należącego do przedziału $[a, b]$, będącego przedziałem poszukiwań pierwiastka, powinny być spełnione następujące warunki:

1. $f(a) * f(b) < 0$ – jest min. 1 pierwiastek,
2. $f'(x) \neq 0, x \in [a, b]$ - pierwiastek 1-krotny,
3. $f''(x) \geq 0$ lub $f''(x) \leq 0, x \in [a, b]$,
4. $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < (b - a)$ i $\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < (b - a)$ - styczna przecina oś x w przedziale $[a, b]$

Jeżeli powyższe warunki nie są spełnione, to metoda również może znaleźć pierwiastek, jednak nie mamy wtedy pewności o zbieżności tej metody do szukanego pierwiastka.

Wzór iteracyjny, z którego będziemy korzystać do wyznaczania kolejnych punktów startowych (przybliżeń pierwiastka):

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \quad (3.2.1.)$$

3.3. Metoda siecznych

Ta metoda jest podobna do metody Newtona-Raphsona, ale zamiast rysować styczną do wykresu funkcji, rysuje sieczną przez dwa ostatnie punkty startowe. Punkt przecięcia tej siecznej z osią x staje się nowym punktem startowym. Ta metoda zakłada, że nie mamy pochodnej, tylko przybliżamy ją ilorazem różnicowym na dwóch punktach.

Wzór iteracyjny, z którego będziemy korzystać do wyznaczania kolejnych punktów startowych (przybliżeń pierwiastka):

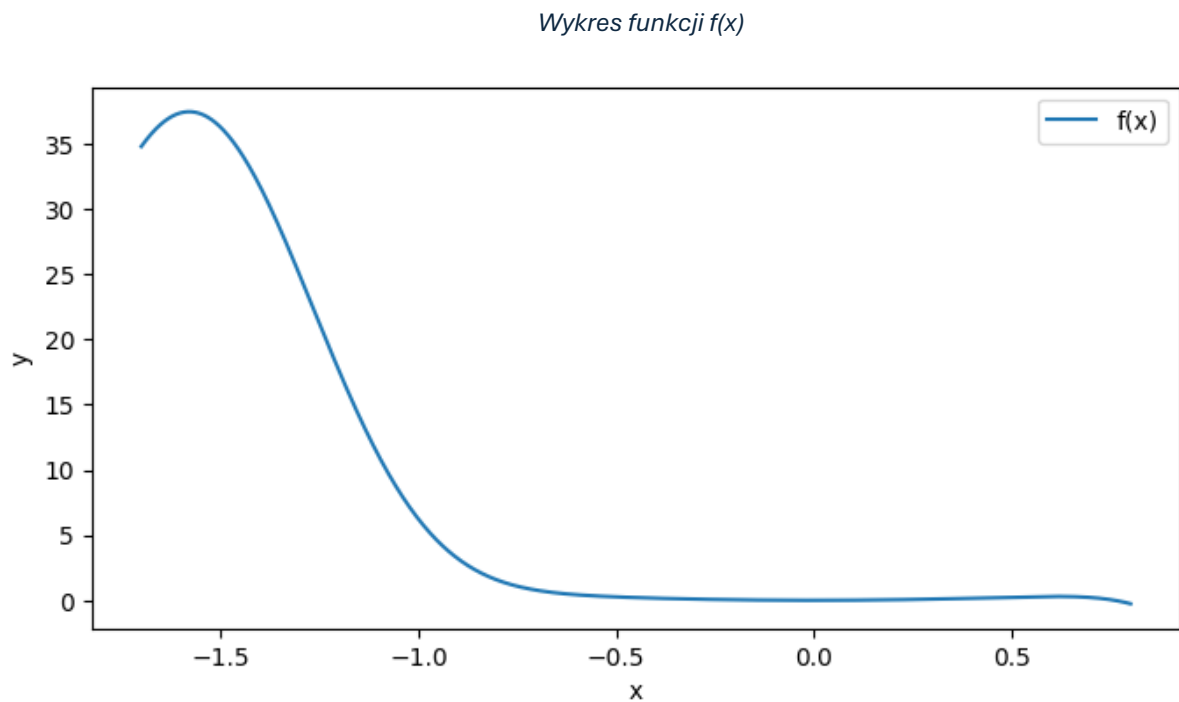
$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f_{i+1} - f_i} * f_{i+1} \quad (3.3.1.)$$

4. Opracowanie

$$f(x) = x^2 - m(\sin(x))^n$$

gdzie $n = 11, m = 35, x \in [-1.7, 0.8]$

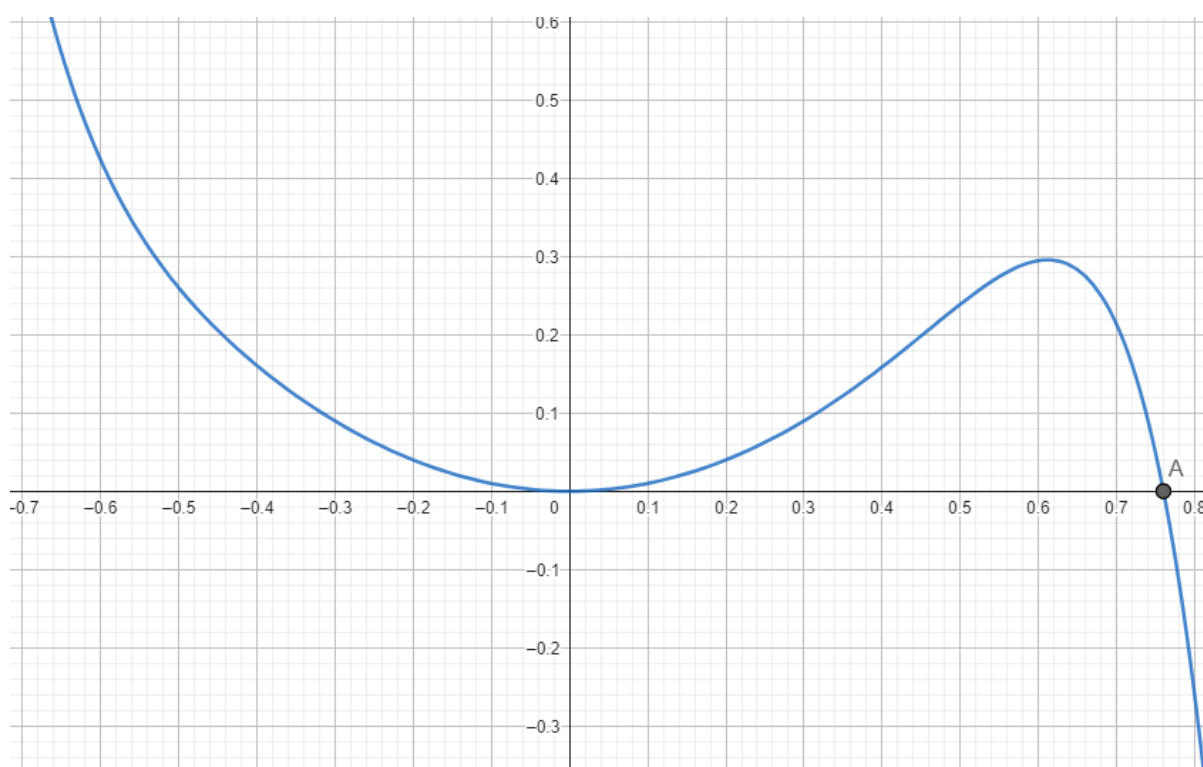
4.1. Wykres funkcji $f(x)$



Wykres 4.1.1

Narysujmy ten wykres zawężając przedział z lewej strony, aby lepiej zobaczyć co dzieje się w przedziale $[-0.7, 0.8]$

Wykres funkcji $f(x)$



Wykres 4.1.2

Widzimy zatem, że nasza funkcja w zadanym przedziale posiada dwa miejsca zerowe: $x = 0$, co możemy łatwo obliczyć podstawiając do wzoru funkcji $x=0$, oraz miejsce zerowe w punkcie oznaczonym na wykresie 4.1.2 jako A, którego wartość obliczona przez program Geogebra wynosi: 0.7594061383612.

Funkcja w zadanym przedziale posiada również 3 ekstrema lokalne - maksima lokalne: $(-1.5790017874657, 37.4802879538559)$, $(0.6112967371928, 0.2957877371206)$ oraz minimum lokalne w obliczonym już punkcie $(0,0)$.

Jeżeli korzystając z metody Newtona-Raphsona trafimy w punkt (wyberzemy jako punkt startowy), w którym pochodna jest równa 0 (ekstremum lokalne), to styczna będzie równoległa do osi OX i nigdy jej nie przetnie, a zatem metoda nie będzie działać.

4.2. Metoda Newtona-Raphsona

Zgodnie z treścią zadania, za początkowe punkty startowe będziemy wybierać wartości zaczynając od krańca przedziału, a następnie zwiększając je o 0.1. Analizę będziemy przeprowadzać dla obu kryteriów stopu oraz różnych dokładności ε .

Uwaga 4.2.1 NaN w poniższych tabelach oznacza, że nie udało nam się daną metodą obliczyć pierwiastka równania – przekroczyliśmy maksymalną liczbę iteracji ustawioną na 100, trafiliśmy w ekstremum lokalne lub w przypadku metody siecznych – wybraliśmy 2 takie same punkty startowe.

4.2.1 Analiza wyników dla warunku stopu 3.1.1.

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$

Dokładność ε

x_0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-15}
-1.7	-0.008508	-0.000532	-0.000008	-8.1136e-09	-6.3387e-11	-9.9043e-13	-9.6721e-16
-1.6	0.760021	0.759408	0.759406	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
-1.5	-0.008511	-0.000532	-0.000008	-8.1163e-09	-6.3408e-11	-9.9076e-13	-9.6753e-16
-1.4	-0.006119	-0.000765	-0.000006	-5.8359e-09	-9.1186e-11	-7.1239e-13	-6.957e-16
-1.3	-0.009362	-0.000585	-0.000009	-8.9285e-09	-6.9754e-11	-5.4495e-13	-5.3218e-16
-1.2	-0.009085	-0.000568	-0.000009	-8.6637e-09	-6.7685e-11	-5.2879e-13	-5.164e-16
-1.1	-0.007419	-0.000927	-0.000007	-7.0749e-09	-5.5273e-11	-8.6363e-13	-8.4339e-16
-1	-0.005441	-0.000680	-0.000005	-5.1887e-09	-8.1073e-11	-6.3338e-13	-6.1854e-16
-0.9	-0.007185	-0.000898	-0.000007	-6.8524e-09	-5.3534e-11	-8.3647e-13	-8.1687e-16
-0.8	-0.008890	-0.000556	-0.000009	-8.4782e-09	-6.6236e-11	-5.1747e-13	-5.0534e-16
-0.7	-0.005351	-0.000669	-0.000005	-5.1036e-09	-7.9743e-11	-6.2299e-13	-6.0839e-16
-0.6	-0.006639	-0.000830	-0.000006	-6.3317e-09	-9.8932e-11	-7.7291e-13	-7.5479e-16
-0.5	-0.008943	-0.000559	-0.000009	-8.5283e-09	-6.6627e-11	-5.2053e-13	-5.0833e-16
-0.4	-0.006424	-0.000803	-0.000006	-6.1263e-09	-9.5724e-11	-7.4784e-13	-7.3032e-16
-0.3	-0.009399	-0.000587	-0.000009	-8.9633e-09	-7.0026e-11	-5.4708e-13	-5.3425e-16
-0.2	-0.006250	-0.000781	-0.000006	-5.9609e-09	-9.3139e-11	-7.2765e-13	-7.106e-16
-0.1	-0.006250	-0.000781	-0.000006	-5.9605e-09	-9.3132e-11	-7.276e-13	-7.1054e-16
0	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
0.1	0.006250	0.000781	0.000006	5.9605e-09	9.3132e-11	7.276e-13	7.1054e-16
0.2	0.006250	0.000781	0.000006	5.96e-09	9.3125e-11	7.2754e-13	7.1049e-16
0.3	0.009351	0.000584	0.000009	8.918e-09	6.9672e-11	5.4431e-13	5.3155e-16
0.4	0.006064	0.000758	0.000006	5.7827e-09	9.0354e-11	7.0589e-13	6.8935e-16
0.5	0.006080	0.000760	0.000006	5.798e-09	9.0594e-11	7.0777e-13	6.9118e-16
0.6	-0.009019	-0.000564	-0.000009	-8.6015e-09	-6.7199e-11	-5.2499e-13	-5.1269e-16
0.7	0.759627	0.759406	0.759406	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
0.8	0.759741	0.759407	0.759406	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941

Tabela 4.2.1.1 Wartości miejsc zerowych funkcji $f(x)$ dla różnych punktów startowych obliczone metodą Newtona-Raphsona

Tabela z liczbami iteracji

Dokładność ε

x_0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-15}
-1.7	10	14	20	30	37	43	53
-1.6	12	13	14	15	15	16	16
-1.5	6	10	16	26	33	39	49
-1.4	10	13	20	30	36	43	53
-1.3	10	14	20	30	37	44	54
-1.2	10	14	20	30	37	44	54
-1.1	10	13	20	30	37	43	53
-1	10	13	20	30	36	43	53
-0.9	9	12	19	29	36	42	52
-0.8	8	12	18	28	35	42	52
-0.7	8	11	18	28	34	41	51
-0.6	7	10	17	27	33	40	50
-0.5	6	10	16	26	33	40	50
-0.4	6	9	16	26	32	39	49
-0.3	5	9	15	25	32	39	49
-0.2	5	8	15	25	31	38	48
-0.1	4	7	14	24	30	37	47
0	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
0.1	4	7	14	24	30	37	47
0.2	5	8	15	25	31	38	48
0.3	5	9	15	25	32	39	49
0.4	6	9	16	26	32	39	49
0.5	6	9	16	26	32	39	49
0.6	11	15	21	31	38	45	55
0.7	3	4	5	6	6	6	7
0.8	2	3	4	5	5	6	6

Tabela 4.2.1.2 Liczba iteracji dla różnych punktów startowych korzystając z metody Newtona-Raphsona

W obu tabelach 4.2.1 oraz 4.2.2 może zobaczyć NaN. Dla wartości 0 trafiamy idealnie w ekstremum lokalne – pochodna jest równa 0. Zgodnie z tym co opisaliśmy wyżej, styczna jest wtedy równoległa do osi OX i jej nie przecina.

Aby lepiej zwizualizować otrzymywane wyniki, będziemy przedstawiać je za pomocą heatmapy (mapy ciepła).

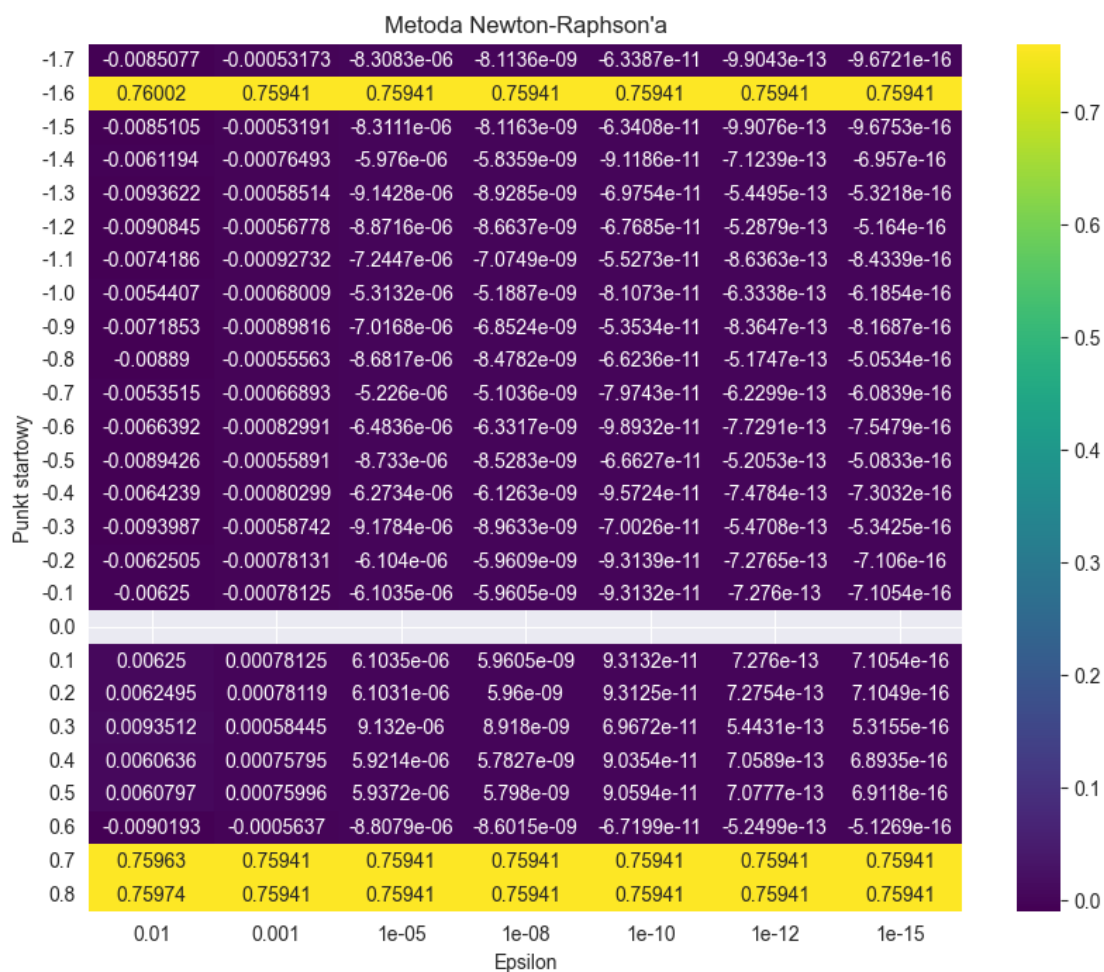


Tabela 4.2.1.3 Wartości miejsc zerowych metoda Newtona-Raphson'a dla warunku stopu (3.1.1)

W tabeli 4.2.1.3 widzimy, że w zależności od punktu startowego uzyskujemy dwa różne wyniki. Są to dwa wspomniane wcześniej miejsca zerowe funkcji: 0 oraz 0.7594061383612. Widzimy zatem, że nawet dla niewielkich epsilon'ów dostajemy całkiem dokładne wyniki. NaN w tabeli jest oznaczony szarym kolorem.

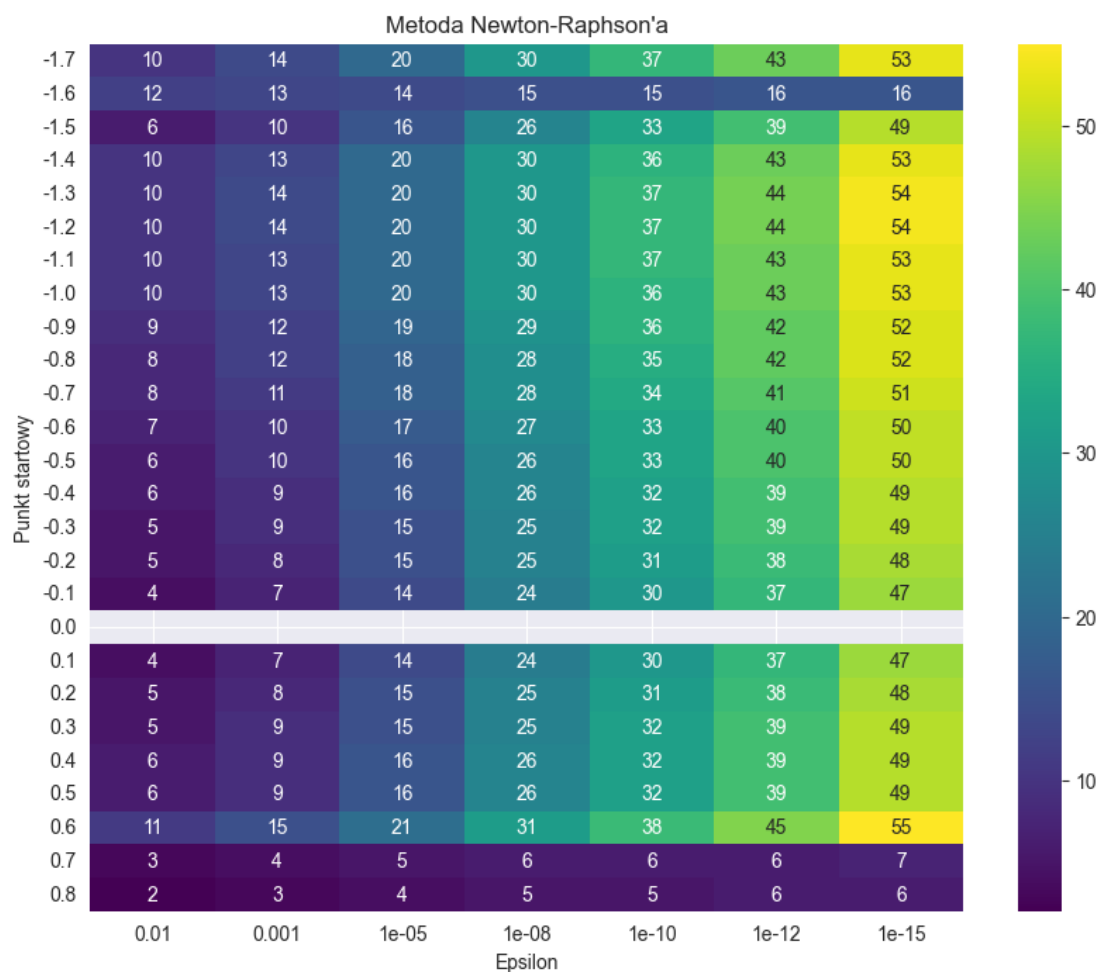


Tabela 4.2.1.4. Liczba iteracji dla metody Newtona-Raphson'a dla warunku stopu (3.1.1)

Jeżeli chodzi o liczbę iteracji, to jak możemy zobaczyć w tabeli 4.2.1.4. wzrasta ona wraz z wzrostem dokładności. Jednak dla punktów startowych -1.6, 0.7, 0.8 możemy zobaczyć, że pozostaje ona taka sama lub nieznacznie się zmienia dla wszystkich epsilon'ów i dodatkowo jest znacznie mniejsza niż dla innych punktów startowych, a dla 0.6 liczba iteracji jest wyraźnie większa od pozostałych wyników. W przypadku punktów -1.6, 0.7, 0.8 – znajdujemy wtedy miejsce zerowe 0.75941, które jest lepiej uwarunkowane od 0 będącego pierwiastkiem parzystym. W 0.75941 funkcja przecinka pod dużym kątem oś OX, a miejsce zerowe jest dobrze widoczne, dlatego metoda iteracyjna jest w stanie szybciej znaleźć jego bardzo dokładną wartość, co widać w tabeli powyżej. Dla punktu 0.6 liczba iteracji jest większa, ponieważ oprócz szukania źle uwarunkowanego miejsca zerowego, leży on w dodatku blisko maksima lokalnego. Dodatkowo możemy zauważyć, że im dalej punkt leży od szukanego miejsca zerowego, tym więcej iteracji metoda potrzebuje, aby znaleźć pierwiastek z określoną dokładnością.

Przyjrzyjmy się teraz wynikom uzyskanym dla kryterium stopu 3.1.2.

4.2.2 Analiza wyników dla warunku stopu 3.1.2.

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$

Metoda Newton-Raphson'a							
Punkt startowy	0.01	0.001	1e-05	1e-08	1e-10	1e-12	1e-15
-1.7	-0.068062	-0.017015	-0.0021269	-6.6466e-05	-8.3083e-06	-5.1927e-07	-1.6227e-08
-1.6	0.76002	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
-1.5	-0.068084	-0.017021	-0.0021276	-6.6488e-05	-8.3111e-06	-5.1944e-07	-1.6233e-08
-1.4	-0.097911	-0.024478	-0.0030597	-9.5616e-05	-5.976e-06	-7.47e-07	-2.3344e-08
-1.3	-0.074898	-0.018724	-0.0023406	-7.3142e-05	-9.1428e-06	-5.7143e-07	-1.7857e-08
-1.2	-0.072676	-0.018169	-0.0022711	-7.0973e-05	-8.8716e-06	-5.5448e-07	-1.7327e-08
-1.1	-0.059348	-0.029674	-0.0018546	-5.7958e-05	-7.2447e-06	-9.0559e-07	-2.83e-08
-1.0	-0.087052	-0.021763	-0.0027204	-8.5011e-05	-5.3132e-06	-6.6415e-07	-2.0755e-08
-0.9	-0.057482	-0.028741	-0.0017963	-5.6135e-05	-7.0168e-06	-8.7711e-07	-2.741e-08
-0.8	-0.07112	-0.01778	-0.0022225	-6.9453e-05	-8.6817e-06	-5.426e-07	-1.6956e-08
-0.7	-0.085623	-0.021406	-0.0026757	-8.3617e-05	-5.226e-06	-6.5326e-07	-2.0414e-08
-0.6	-0.053114	-0.026557	-0.0016598	-5.1869e-05	-6.4836e-06	-8.1045e-07	-2.5327e-08
-0.5	-0.071541	-0.017885	-0.0022356	-6.9864e-05	-8.733e-06	-5.4581e-07	-1.7057e-08
-0.4	-0.051391	-0.025696	-0.001606	-5.0187e-05	-6.2734e-06	-7.8417e-07	-2.4505e-08
-0.3	-0.07519	-0.018797	-0.0023497	-7.3427e-05	-9.1784e-06	-5.7365e-07	-1.7927e-08
-0.2	-0.050004	-0.025002	-0.0031252	-9.7663e-05	-6.104e-06	-7.63e-07	-2.3844e-08
-0.1	-0.05	-0.025	-0.003125	-9.7656e-05	-6.1035e-06	-7.6294e-07	-2.3842e-08
0.0							
0.1	0.05	0.025	0.003125	9.7656e-05	6.1035e-06	7.6294e-07	2.3842e-08
0.2	0.099993	0.024998	0.0031248	9.7649e-05	6.1031e-06	7.6288e-07	2.384e-08
0.3	0.074809	0.018702	0.0023378	7.3056e-05	9.132e-06	5.7075e-07	1.7836e-08
0.4	0.097017	0.024254	0.0030318	9.4743e-05	5.9214e-06	7.4018e-07	2.3131e-08
0.5	0.097275	0.024319	0.0030398	9.4995e-05	5.9372e-06	7.4215e-07	2.3192e-08
0.6	-0.072154	-0.018039	-0.0022548	-7.0463e-05	-8.8079e-06	-5.5049e-07	-1.7203e-08
0.7	0.75963	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
0.8	0.75974	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941

Tabela 4.2.2.1 Wartości miejsc zerowych metoda Newtona-Raphson'a dla kryterium stopu (3.1.2)

Tabela z liczbami iteracji

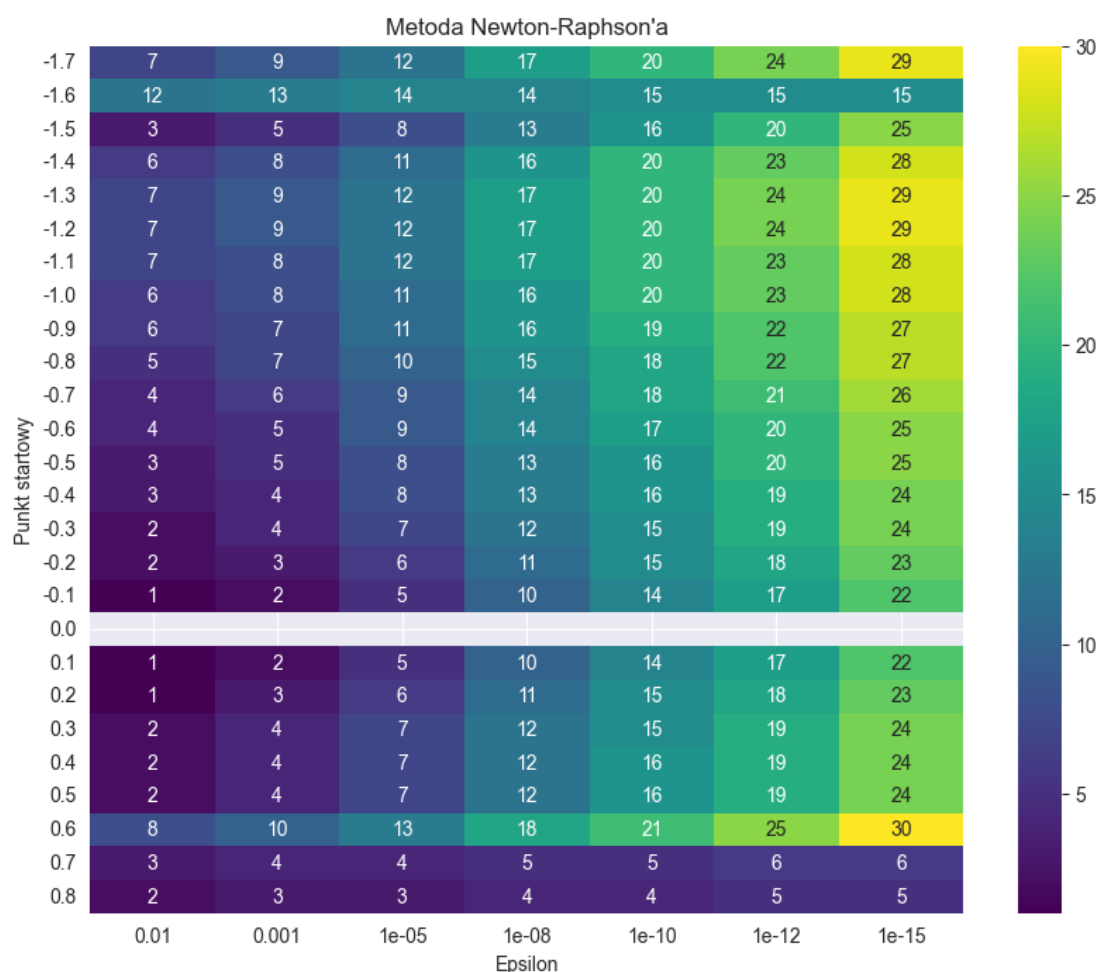


Tabela 4.2.2.2. Liczba iteracji dla metody Newtona-Raphson'a dla kryterium stopu (3.1.2)

W przypadku warunku stopu (3.1.2), możemy zaobserwować podobne własności co w przypadku warunku (3.1.1). Jednak dla tego warunku liczba iteracji w przypadku znalezionego pierwiastka 0 jest znacząco mniejsza, ale uzyskiwane wyniki są również znacznie mniej dokładne, co widać w rzędzie wielkości znalezionych pierwiastków. Jest to spowodowane tym, że funkcja w pobliżu 0 jest prawie płaska i zeruje się pochodna. Z tego powodu $|f'(x)|$ przyjmuje wartości bliskie 0 nawet dla x znacznie oddalonych od rzeczywistego pierwiastka.

4.3. Metoda siecznych

Zgodnie z treścią zadania, za jeden z początkowych punktów startowych będziemy wybierać wartości tak jak w przypadku metody Newtona-Raphsona, a drugim punktem startowym będzie lewy lub prawy koniec przedziału naszej funkcji.

4.3.1 Analiza wyników dla warunku stopu 3.1.1.

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$ dla jednego z punktów startowych będącego lewym krańcem przedziału

		Metoda siecznych						
Punkty startowe	(-1.7, -1.7)							
	(-1.7, -1.6)	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854
	(-1.7, -1.5)	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854
	(-1.7, -1.4)	0.24013	0.0010255	1.3491e-05	1.6004e-08	1.3012e-10	1.058e-12	1.255e-15
	(-1.7, -1.3)	-0.28373	-0.0012249	-1.6115e-05	-1.1814e-08	-1.5542e-10	-1.2637e-12	-1.499e-15
	(-1.7, -1.2)	-0.013641	-0.0012301	-1.0001e-05	-1.1864e-08	-1.5608e-10	-1.269e-12	-1.5053e-15
	(-1.7, -1.1)	-0.01466	-0.0013219	-1.0748e-05	-1.275e-08	-1.0366e-10	-1.3637e-12	-1.6177e-15
	(-1.7, -1.0)	-0.015198	-0.0013704	-1.1142e-05	-1.3217e-08	-1.0746e-10	-1.4137e-12	-1.0365e-15
	(-1.7, -0.9)	-0.012282	-0.0011075	-1.457e-05	-1.0682e-08	-1.4052e-10	-1.1425e-12	-1.3553e-15
	(-1.7, -0.8)	-0.013788	-0.0012433	-1.0109e-05	-1.1991e-08	-1.5775e-10	-1.2826e-12	-1.5215e-15
	(-1.7, -0.7)	-0.014294	-0.0012889	-1.048e-05	-1.2431e-08	-1.0108e-10	-1.3297e-12	-1.5774e-15
	(-1.7, -0.6)	-0.014892	-0.0013428	-1.0917e-05	-1.2951e-08	-1.053e-10	-1.3853e-12	-1.0156e-15
	(-1.7, -0.5)	-0.49094	-0.0014726	-1.1973e-05	-1.4203e-08	-1.1548e-10	-1.5192e-12	-1.1138e-15
	(-1.7, -0.4)	-0.39396	-0.001075	-1.4143e-05	-1.0369e-08	-1.3641e-10	-1.1091e-12	-1.3156e-15
	(-1.7, -0.3)	-0.29637	-0.0012805	-1.0412e-05	-1.2351e-08	-1.0042e-10	-1.3211e-12	-1.5671e-15
	(-1.7, -0.2)	-0.19827	-0.0013815	-1.1233e-05	-1.3325e-08	-1.0834e-10	-1.4253e-12	-1.0449e-15
	(-1.7, -0.1)	-0.09954	-0.09954	-1.474e-05	-1.0806e-08	-1.4216e-10	-1.1559e-12	-1.3712e-15
	(-1.7, 0.0)	0	0	0	0	0	0	0
	(-1.7, 0.1)	0.10052	0.10052	1.4829e-05	1.0872e-08	1.4303e-10	1.1629e-12	1.3795e-15
	(-1.7, 0.2)	0.20219	0.0013981	1.1368e-05	1.3485e-08	1.0964e-10	1.4424e-12	1.0575e-15
	(-1.7, 0.3)	0.30518	0.0012981	1.0554e-05	1.252e-08	1.0179e-10	1.3392e-12	1.5886e-15
	(-1.7, 0.4)	0.40963	0.0010453	1.3752e-05	1.0082e-08	1.3264e-10	1.0784e-12	1.2793e-15
	(-1.7, 0.5)	0.011609	0.0010471	1.3776e-05	1.0099e-08	1.3286e-10	1.0803e-12	1.2815e-15
	(-1.7, 0.6)	0.75927	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.7, 0.7)	0.75841	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.7, 0.8)	0.75992	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
		0.01	0.001	1e-05	1e-08	1e-10	1e-12	1e-15
		Epsilon						

Tabela 4.3.1.1 Wartości miejsc zerowych metoda siecznych dla kryterium stopu (3.1.1)

Tabela z liczbami iteracji dla jednego z punktów startowych będącego lewym końcem przedziału

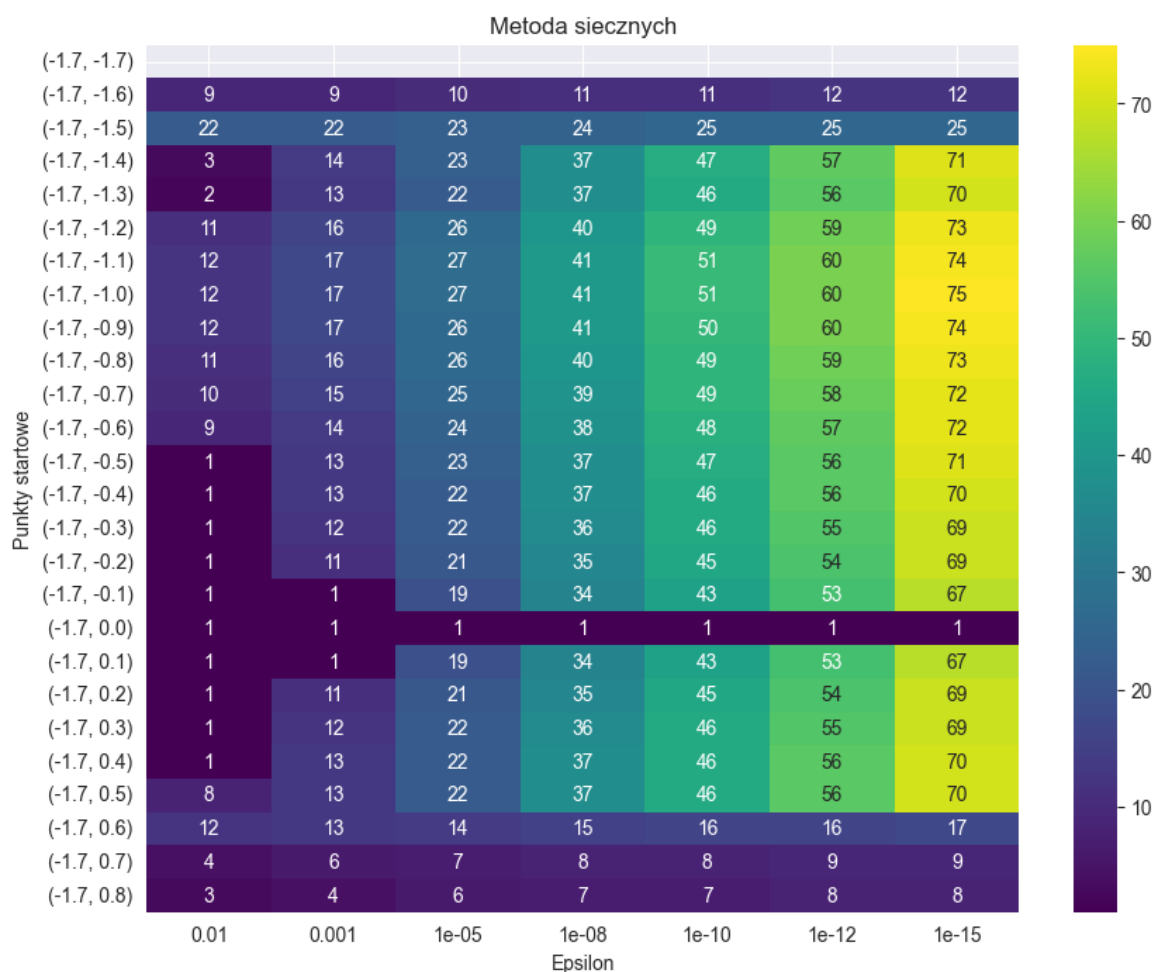


Tabela 4.3.1.2 Liczba iteracji dla metody siecznych dla kryterium stopu (3.1.1)

W tabeli 4.3.1.1 możemy zobaczyć, że dla punktów startowych -1.6 oraz -1.5 znajdujemy również miejsce zerowe funkcji, znajdujące się jednak poza szukanym przedziałem. Powinniśmy dodać sprawdzenie, że jeżeli punkt startowy wychodzi poza nasz przedział, to przerywamy szukanie pierwiastka, jednak w tym przypadku zamiast wyświetlać szare komórki w tabeli, będziemy pokazywać co zwróciła nam nasza metoda.

W przypadku metody siecznych tak samo jak dla metody Newtona-Raphsona możemy zauważyć, że metoda potrzebuje znacznie więcej iteracji aby znaleźć 0 jako pierwiastek, niż 0.75491. W przypadku tego pierwszego wraz z dokładnością zwiększa się znacząco liczba iteracji, a dla drugiego – liczba iteracji tylko nieznacznie się zmienia i jest mała w porównaniu do pierwiastka 0.

W przypadku jednego z punktów startowych równego 0 od razu w pierwszej iteracji dostajemy dokładny pierwiastek.

Porównując tabelę 4.3.1.2 do tabeli 4.2.1.4 możemy zobaczyć, że metoda siecznych potrzebuje więcej iteracji, by osiągnąć wyniki o tych samych dokładnościach.

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$ dla jednego z punktów startowych będącego prawym końcem przedziału

		Metoda siecznych							
Punkty startowe	(-1.7, 0.8)	0.75992	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0.0
	(-1.6, 0.8)	0.76001	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.5, 0.8)	0.76002	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.4, 0.8)	0.75995	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.3, 0.8)	0.75979	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.2, 0.8)	0.76162	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.1, 0.8)	0.75855	0.75943	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-1.0, 0.8)	0.76118	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-0.9, 0.8)	0.759	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
	(-0.8, 0.8)	0.6984	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	
(-0.7, 0.8)	0.011582	0.0010447	1.3744e-05	1.0076e-08	1.3256e-10	1.0778e-12	1.2785e-15		
(-0.6, 0.8)	0.015147	0.0013647	1.1096e-05	1.3162e-08	1.0702e-10	1.4079e-12	1.0322e-15		
(-0.5, 0.8)	0.013019	0.0011762	1.5473e-05	1.1344e-08	1.4924e-10	1.2134e-12	1.4394e-15		
(-0.4, 0.8)	0.060257	0.0010377	1.365e-05	1.0007e-08	1.3165e-10	1.0704e-12	1.2698e-15		
(-0.3, 0.8)	-0.020357	-0.00099487	-1.3083e-05	-1.552e-08	-1.2619e-10	-1.026e-12	-1.217e-15		
(-0.2, 0.8)	-0.01183	-0.0010707	-1.4085e-05	-1.0326e-08	-1.3585e-10	-1.1045e-12	-1.3102e-15		
(-0.1, 0.8)	-0.011567	-0.001047	-1.3774e-05	-1.0098e-08	-1.3285e-10	-1.0801e-12	-1.2813e-15		
(0.0, 0.8)	0	0	0	0	0	0	0		
(0.1, 0.8)	0.01124	0.0010154	1.3358e-05	1.5846e-08	1.2884e-10	1.0475e-12	1.2426e-15		
(0.2, 0.8)	0.016101	0.0014506	1.1795e-05	1.3991e-08	1.1376e-10	1.4966e-12	1.0972e-15		
(0.3, 0.8)	0.011056	0.0016136	1.312e-05	1.5563e-08	1.2654e-10	1.0288e-12	1.2204e-15		
(0.4, 0.8)	0.010954	0.0015986	1.2998e-05	1.5418e-08	1.2536e-10	1.0193e-12	1.2091e-15		
(0.5, 0.8)	0.75683	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941		
(0.6, 0.8)	0.75893	0.75939	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941		
(0.7, 0.8)	0.75973	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941		
(0.8, 0.8)									
		0.01	0.001	1e-05	1e-08	1e-10	1e-12	1e-15	
		Epsilon							

Tabela 4.3.1.3 Wartości miejsc zerowych metoda siecznych dla kryterium stopu (3.1.1)

Tabela z liczbami iteracji dla jednego z punktów startowych będącego prawym końcem przedziału

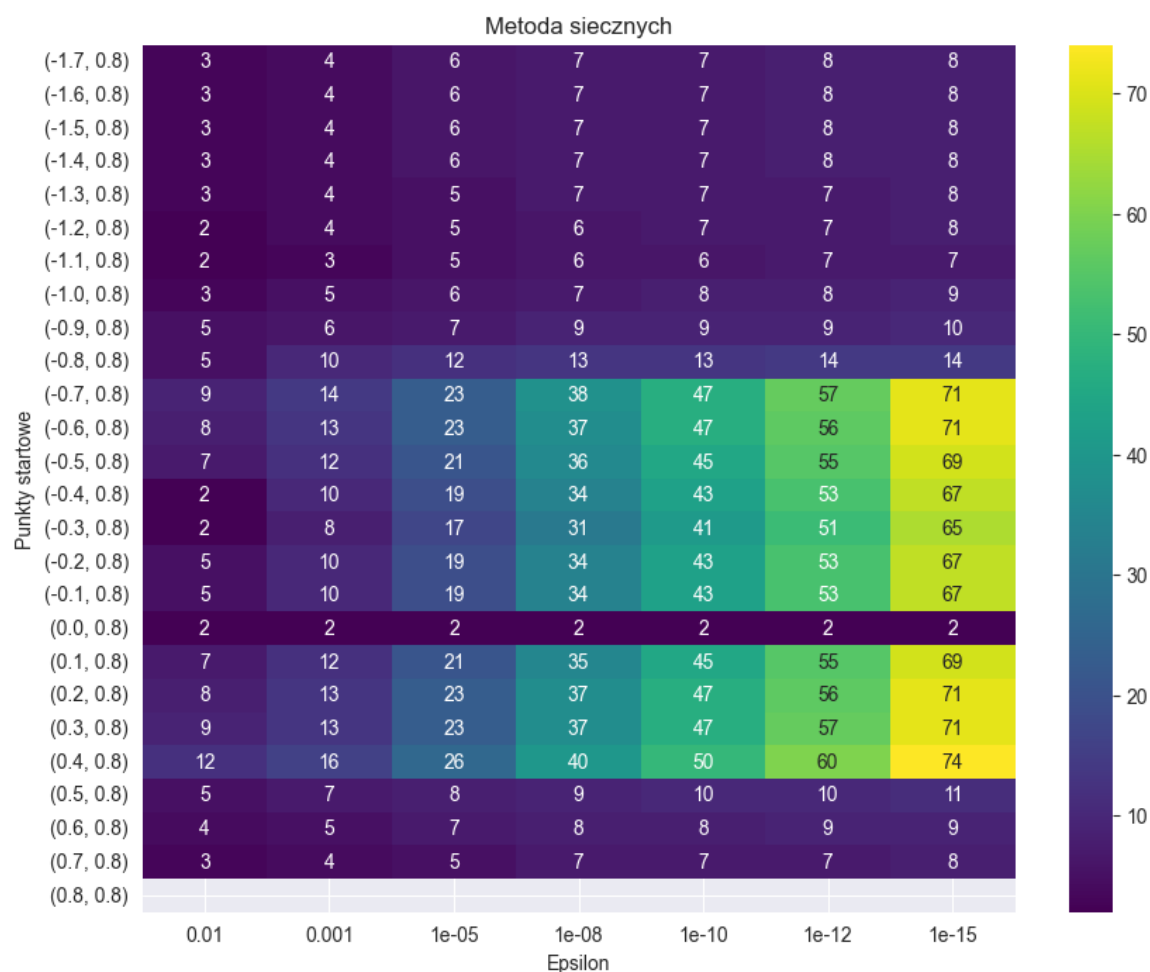


Tabela 4.3.1.4 Liczba iteracji dla metody siecznych dla kryterium stopu (3.1.1)

W przypadku gdy jednym z punktów startowych jest prawy koniec przedziału, dużo częściej znajdujemy 0.75941 jako pierwiastek. Dla lewego punktu startowego z przedziału $[-0.7, 0.4]$ znajdujemy 0, a dla pozostałych 0.75491.

4.3.2 Analiza wyników dla warunku stopu 3.1.2.

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$ dla jednego z punktów startowych będącego lewym krańcem przedziału

		Metoda siecznych						
Punkty startowe	(-1.7, -1.7)							
	(-1.7, -1.6)	-4.3853	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	
	(-1.7, -1.5)	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	-4.3854	
	(-1.7, -1.4)	0.079695	0.02987	0.0026847	9.2469e-05	8.3379e-06	7.5183e-07	2.5894e-08
	(-1.7, -1.3)	-0.095073	-0.021955	-0.001982	-6.8263e-05	-9.9594e-06	-8.9804e-07	-3.093e-08
	(-1.7, -1.2)	-0.09343	-0.022074	-0.0019903	-6.8549e-05	-6.1811e-06	-9.0181e-07	-3.106e-08
	(-1.7, -1.1)	-0.062086	-0.02372	-0.0021389	-7.3667e-05	-6.6425e-06	-9.6913e-07	-2.0629e-08
	(-1.7, -1.0)	-0.064362	-0.02459	-0.0022173	-7.6369e-05	-6.8862e-06	-6.2092e-07	-2.1386e-08
	(-1.7, -0.9)	-0.084162	-0.019874	-0.0028995	-9.9863e-05	-9.0046e-06	-8.1195e-07	-2.7965e-08
	(-1.7, -0.8)	-0.094544	-0.022309	-0.0020116	-6.9285e-05	-6.2474e-06	-9.1148e-07	-3.1393e-08
	(-1.7, -0.7)	-0.097921	-0.023129	-0.0020855	-7.1829e-05	-6.4768e-06	-9.4495e-07	-2.0114e-08
	(-1.7, -0.6)	-0.063006	-0.024091	-0.0021726	-7.483e-05	-6.7474e-06	-9.8443e-07	-2.0955e-08
	(-1.7, -0.5)	-0.069342	-0.026434	-0.0023827	-8.2065e-05	-7.3998e-06	-6.6724e-07	-2.2981e-08
	(-1.7, -0.4)	-0.081121	-0.03118	-0.0028145	-9.6937e-05	-8.7408e-06	-7.8816e-07	-2.7146e-08
	(-1.7, -0.3)	-0.099383	-0.022952	-0.002072	-7.1362e-05	-6.4347e-06	-9.3881e-07	-1.9984e-08
	(-1.7, -0.2)	-0.099574	-0.024866	-0.0022353	-7.699e-05	-6.9422e-06	-6.2598e-07	-2.156e-08
	(-1.7, -0.1)	-0.09954	-0.019945	-0.0029328	-6.2439e-05	-9.1098e-06	-8.2143e-07	-2.8291e-08
	(-1.7, 0.0)	0	0	0	0	0	0	0
	(-1.7, 0.1)	0.050129	0.020062	0.0029506	6.2817e-05	9.1649e-06	8.264e-07	2.8463e-08
	(-1.7, 0.2)	0.067146	0.025168	0.0022622	7.7915e-05	7.0256e-06	6.3349e-07	2.1819e-08
	(-1.7, 0.3)	0.060468	0.023264	0.0021004	7.2339e-05	6.5228e-06	9.5167e-07	2.0257e-08
	(-1.7, 0.4)	0.078734	0.03031	0.0027367	9.4257e-05	8.4991e-06	7.6637e-07	2.6395e-08
	(-1.7, 0.5)	0.078356	0.030333	0.0027415	9.442e-05	8.5138e-06	7.6769e-07	2.6441e-08
	(-1.7, 0.6)	0.75927	0.75927	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.7, 0.7)	0.75841	0.75945	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.7, 0.8)	0.75992	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
		0.01	0.001	1e-05	1e-08	1e-10	1e-12	1e-15
		Epsilon						

Tabela 4.3.2.1 Wartości miejsc zerowych metoda siecznych dla kryterium stopu (3.1.2)

Tabela z liczbami iteracji dla jednego z punktów startowych będącego lewym końcem przedziału

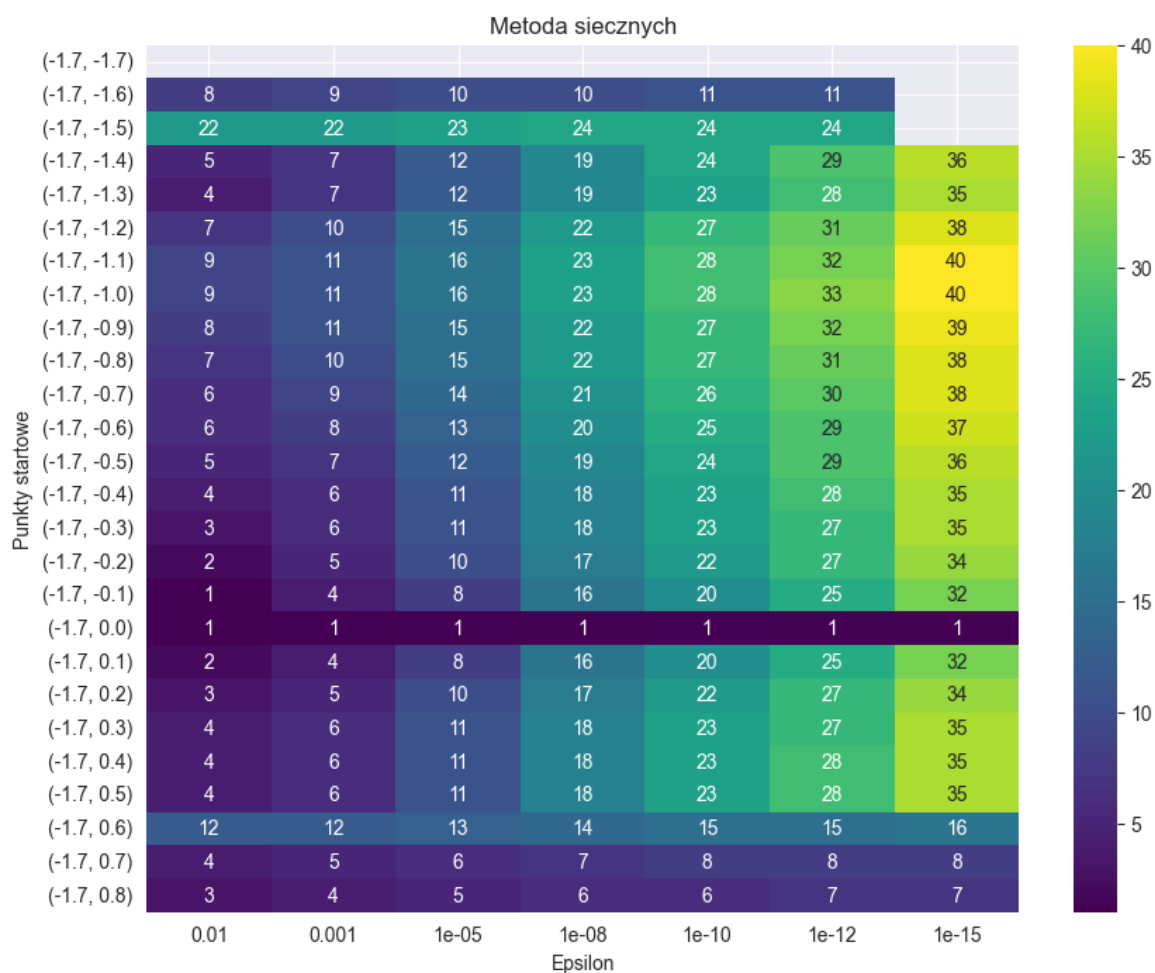


Tabela 4.3.2.2 Liczba iteracji dla metody siecznych dla kryterium stopu (3.1.2)

Tabela z wartościami miejsc zerowych funkcji $f(x)$ dla jednego z punktów startowych będącego prawym końcem przedziału

		Metoda siecznych						
Punkty startowe	(-1.7, 0.8)	0.75992	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.6, 0.8)	0.76001	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.5, 0.8)	0.76002	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.4, 0.8)	0.75995	0.75942	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.3, 0.8)	0.75979	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.2, 0.8)	0.75954	0.75954	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.1, 0.8)	0.75855	0.75943	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-1.0, 0.8)	0.76118	0.75932	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-0.9, 0.8)	0.759	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-0.8, 0.8)	0.75983	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(-0.7, 0.8)	0.078178	0.030263	0.0027351	9.4201e-05	8.4941e-06	7.6591e-07	2.638e-08
	(-0.6, 0.8)	0.063184	0.024436	0.0022082	7.6052e-05	6.8576e-06	6.1835e-07	2.1297e-08
	(-0.5, 0.8)	0.081865	0.021215	0.0030796	6.5546e-05	9.5631e-06	8.623e-07	2.9699e-08
	(-0.4, 0.8)	0.052572	0.028076	0.002718	9.3558e-05	8.4361e-06	7.6069e-07	2.6199e-08
	(-0.3, 0.8)	-0.021826	-0.021826	-0.0026105	-8.9673e-05	-8.0858e-06	-7.291e-07	-2.5112e-08
	(-0.2, 0.8)	-0.069299	-0.030314	-0.0028035	-9.6539e-05	-8.7049e-06	-7.8492e-07	-2.7034e-08
	(-0.1, 0.8)	-0.067397	-0.029617	-0.0027416	-9.4407e-05	-8.5127e-06	-7.6759e-07	-2.6437e-08
	(0.0, 0.8)	0	0	0	0	0	0	0
	(0.1, 0.8)	0.070858	0.029103	0.0026587	9.1559e-05	8.2559e-06	7.4443e-07	2.564e-08
	(0.2, 0.8)	0.067164	0.025975	0.0023473	8.0842e-05	7.2895e-06	6.573e-07	2.2639e-08
	(0.3, 0.8)	0.074518	0.028882	0.0026109	8.9924e-05	8.1084e-06	7.3114e-07	2.5182e-08
	(0.4, 0.8)	0.074038	0.028626	0.0025867	8.9088e-05	8.033e-06	7.2434e-07	2.4948e-08
	(0.5, 0.8)	0.75957	0.75957	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(0.6, 0.8)	0.75893	0.75939	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(0.7, 0.8)	0.75973	0.7594	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941	0.75941
	(0.8, 0.8)							
		0.01	0.001	1e-05	1e-08	1e-10	1e-12	1e-15
		Epsilon						

Tabela 4.3.2.3 Wartości miejsc zerowych metoda siecznych dla kryterium stopu (3.1.2)

Tabela z liczbami iteracji dla jednego z punktów startowych będącego prawym końcem przedziału

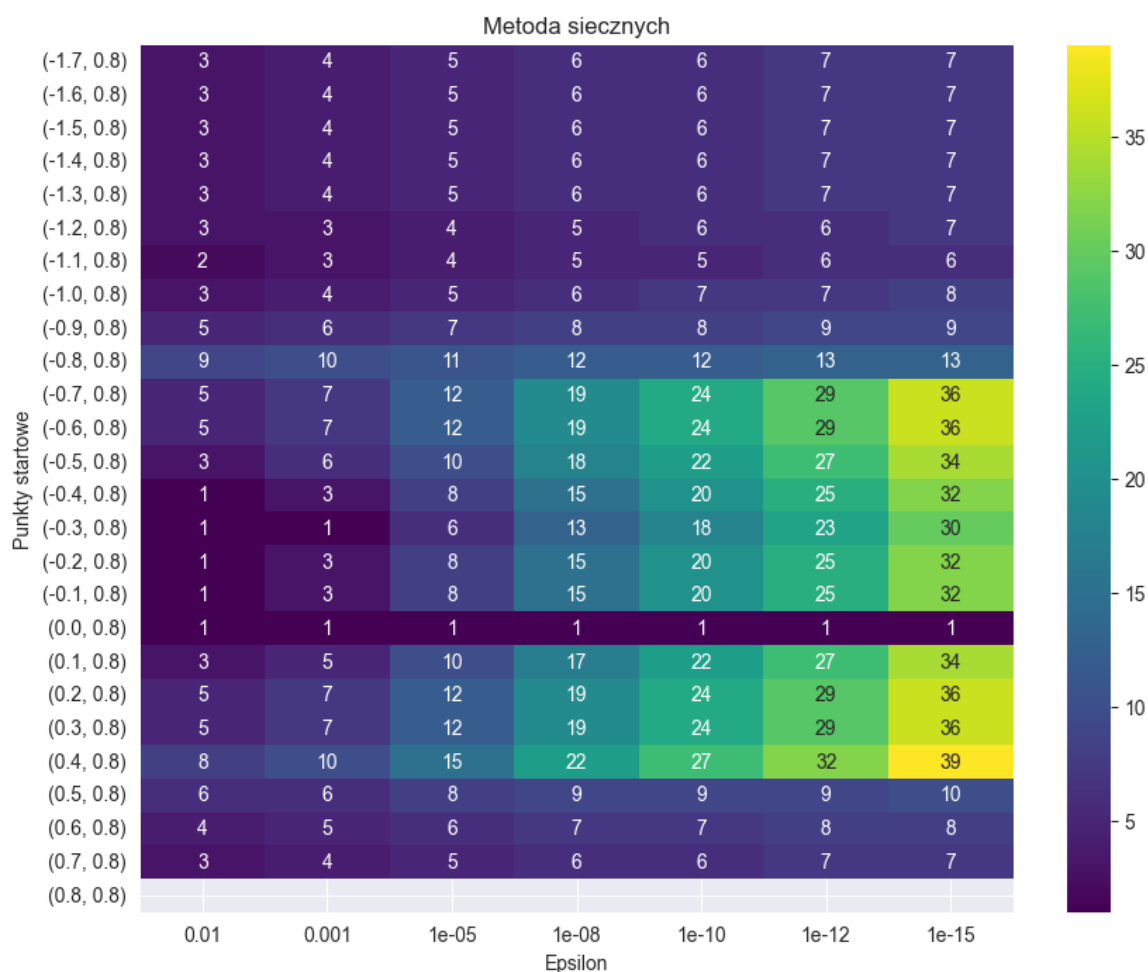


Tabela 4.3.2.4 Liczba iteracji dla metody siecznych dla kryterium stopu (3.1.2)

W przypadku drugiego warunku stopu tak samo jak w przypadku metody Newtona-Raphson'a mamy mniejsze liczby iteracji dla pierwiastka 0 kosztem mniej dokładnych wyników.

6. Podsumowanie i wnioski

- W przypadku obu zastosowanych metod iteracji ich skuteczność i złożoność obliczeń w dużej mierze zależy od tego jak wygląda nasza funkcja. Jeżeli zadanie jest dobrze uwarunkowane, tj. miejsce zerowe funkcji jest dobrze widoczne na wykresie, wtedy mniejszą liczbą iteracji jesteśmy w stanie znaleźć bardziej dokładne pierwiastki.
- Metoda Newtona-Raphsona pozwala na otrzymywanie dokładniejszych wyników przy mniejszej ilości iteracji.
- Im dalej punkt startowy leży od szukanego miejsca zerowego, tym więcej iteracji metoda potrzebuje, aby znaleźć pierwiastek z określoną dokładnością.
- Jeżeli w przypadku metody Newtona-Raphsona trafimy w ekstremum lokalne, to metoda nie zadziała.

- Kryterium stopu (3.1.2) daje mniej dokładne wyniki i mniejszą liczbę iteracji dla szukanego pierwiastka 0, ponieważ funkcja w tym miejscu jest „płaska”, jej pochodna się tam zeruje. Z tego powodu $|f'(x)|$ przyjmuje wartości bliskie 0 nawet dla x znacznie oddalonych od rzeczywistego pierwiastka.
- Metody iteracyjne znajdują tylko jeden pierwiastek w zależności od wybranych punktów startowych.