

Ćwiczenie 2. Interpolacja

Treść zadania

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$, gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$, przeprowadź interpolację dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

1. Informacje techniczne

Zadanie zostało wykonane w języku Python3 na komputerze z systemem Windows 11, procesorem Intel i7-11800H, 2x8GB pamięci RAM o szybkości 3200MHz.

Biblioteki z których korzystałem w zadaniu:

- `import matplotlib.pyplot as plt`
- `import numpy as np`
- `import pandas as pd`
- `import math`
- `import sympy`
- `import time`

2. Interpolowana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

3. Wstęp

Interpolacja wielomianowa umożliwia wyznaczanie wzorów przybliżonych stosowanych do obliczania wartości funkcji w dowolnym punkcie, przy założeniu, że znane są wartości tej funkcji w skończonej liczbie punktów.

3.1. Wzór na wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) \quad (1)$$

gdzie $P_n(x)$ – wielomian interpolacyjny Lagrange'a, $L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$, x_0, x_1, \dots, x_n – punkty w których znamy wartości interpolowanej funkcji, n – stopień wielomianu

3.2. Wzór na wielomian interpolacyjny Newtona.

A) Dla węzłów leżących w dowolnych punktach

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $f[x_i] = f(x_i)$ – 0-wy iloraz różnicowy

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Wtedy wzór na wielomian Newtona $P_n(x)$, przy czym zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami n to stopień wielomianu, możemy zapisać następująco:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

co możemy zapisać w następujący sposób:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad (2)$$

B) Dla węzłów równo od siebie oddalonych

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

- $h = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$
- $x = x_0 + s \cdot h$

Wtedy:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (3)$$

Różnica progresywna

$$\Delta^{(0)}y_i := y_i$$

$$\Delta^{(k)}y_i = \Delta^{(k-1)}y_{i+1} - \Delta^{(k-1)}y_i, \quad k > 1$$

Dla węzłów równoodległych iloraz różnicowy jest równy:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

Podstawiając do wzoru (3) otrzymujemy:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + s \cdot h) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \quad (4)$$

3.3. Wzór na wielomian interpolacyjny Hermite'a

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- n – stopień wielomianu
- $k + 1$ – liczba różnych węzłów
- m_0, m_1, \dots, m_k – tzw. krotności węzłów dane liczbami naturalnymi, przy czym $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$

Wtedy:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot P_{(s(i)+j)}(x) \quad (4)$$

gdzie $H_n(x)$ - wielomian interpolacyjny Hermite'a stopnia n , a $P_{(s(i)+j)}(x)$ definiujemy następująco:

$$P_{s(0)}(X) = 1$$

$$P_{s(i)+j}(X) = (X - X_0)^{m_0} (X - X_1)^{m_1} \dots (X - X_i)^{m_i-1} (X - X_i)^j$$

$$\text{gdzie: } i = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

$$s(i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}, & i > 0 \end{cases}$$

Współczynniki $b_{(s(i)+j)}$ otrzymujemy tworząc tablicę ilorazów różnicowych i odczytaniu wartości na jej przekątnej, identycznie jak w interpolacji Newtona.

3.4. Obliczanie błędów

Niech $K = 1000$ oznacza liczbę równomiernie rozłożonych w przedziale punktów x_1, x_2, \dots, x_K , dla których obliczamy błędy interpolacji, a w celu ujednolicenia poprzednich oznaczeń oznaczmy wielomian interpolacyjny jako $W_n(x)$.

Błąd bezwzględny:

$$\max_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} |f(x) - W_n(x)|$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{K} \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_K\}} (f(x) - W_n(x))^2$$

3.5. Obliczanie pochodnych

Do obliczania pochodnych została wykorzystana biblioteka **sympy** w Pythonie. Oblicza ona pochodną danej funkcji działając na symbolach, a następnie ten zapis symboliczny jest przekształcany w zwykłą funkcję w Pythonie, dzięki której możemy obliczać wartości pochodnej.

3.6. Efekt Runge'go

Efekt Runge'go to zjawisko pogorszenia jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo, ze wzrostem liczby węzłów n , przybliżenie poprawia się. Jednak po dalszym wzroście n , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów, gdzie wielomian interpolacyjny osiąga wartości znacznie większe od interpolowanej funkcji.

3.7. Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa są często używane w interpolacji wielomianowej, ponieważ wynikowy wielomian interpolacyjny minimalizuje efekt Runge'go, czyli właśnie wspomniane wyżej, duże oscylacje wielomianu interpolacyjnego przy krańcach przedziału. Obliczane są one zgodnie z następującym wzorem:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{(2k - 1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

4. Opracowanie

Przypomnijmy jeszcze raz wzór interpolowanej funkcji:

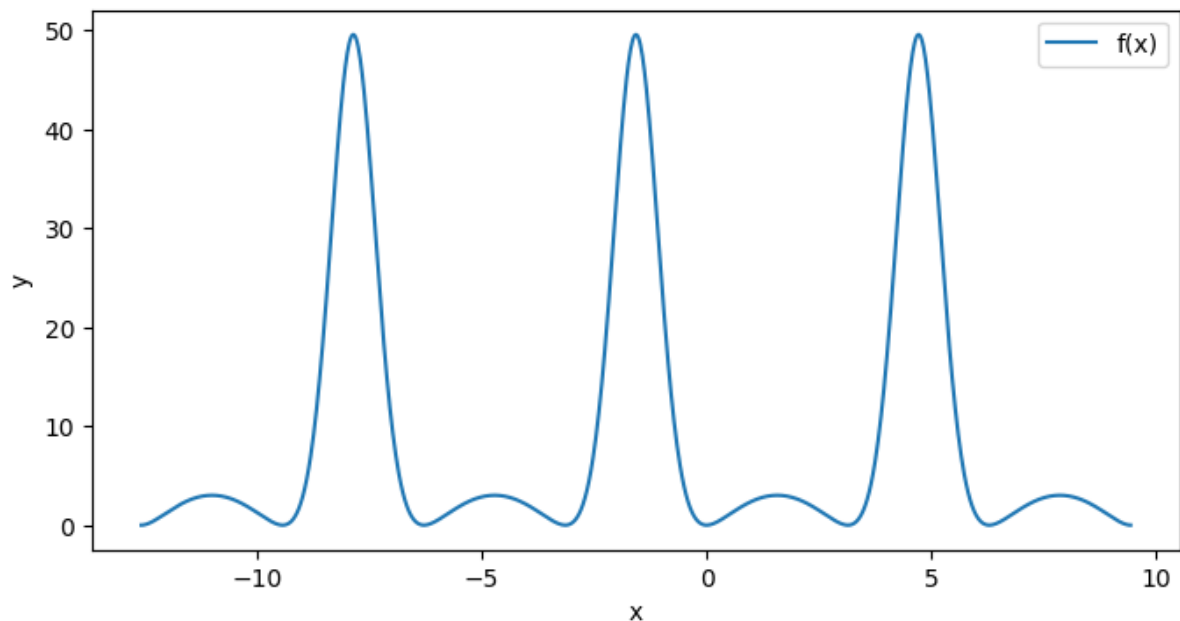
$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(m \cdot x)} + k \cdot \sin(m \cdot x) - 1$$

gdzie $k = 4, m = 1, x \in [-4\pi, 3\pi]$

Uwaga 1: Interpolację Hermite'a będziemy badali wykorzystując dla każdego węzła wartość funkcji oraz jej pierwszej pochodnej w tym węźle.

4.1. Wykres funkcji $f(x)$

Wykres funkcji $f(x)$

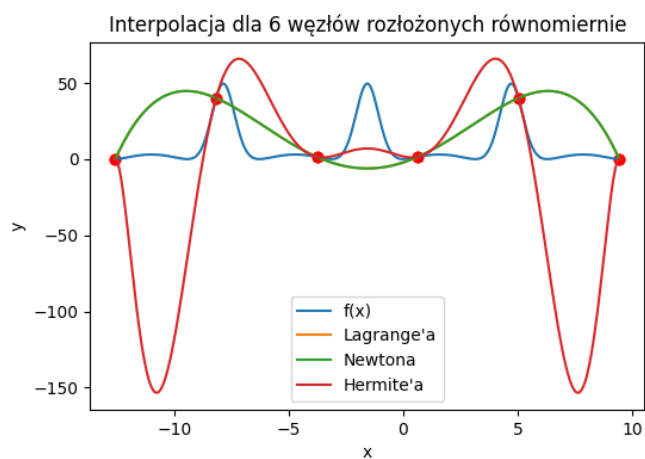


Wykres 4.1.1

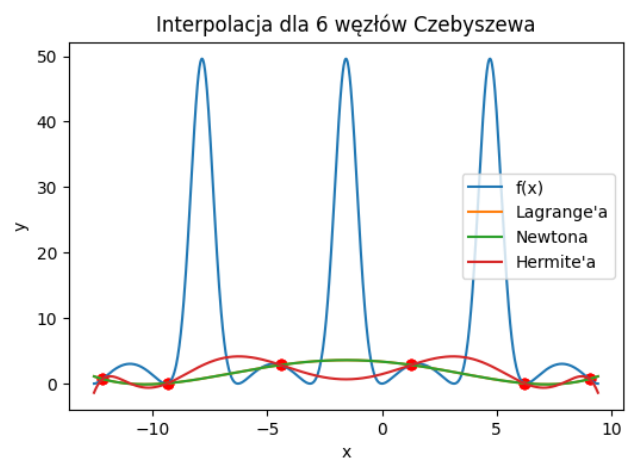
4.2. Analiza interpolacji Lagrange'a, Newtona i Hermite'a dla różnej liczby węzłów N

Uwaga 2: wartości funkcji $f(x)$ w węzłach są zaznaczone na wykresach czerwonymi kropkami.

- $N = 6$, otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 11. stopnia



Wykres 4.2.1



Wykres 4.2.2

	Rozłożenie równomierne		Węzły Czebyszewa	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Lagrange'a	640.2013	55.7193	262.0622	48.8367
Interpolacja Newtona	640.2013	55.7193	262.0622	48.8367
Interpolacja Hermite'a	4260.7111	156.3418	257.5376	48.9267

Tabela 4.2.1 Wartości błędów interpolacji dla 6 węzłów

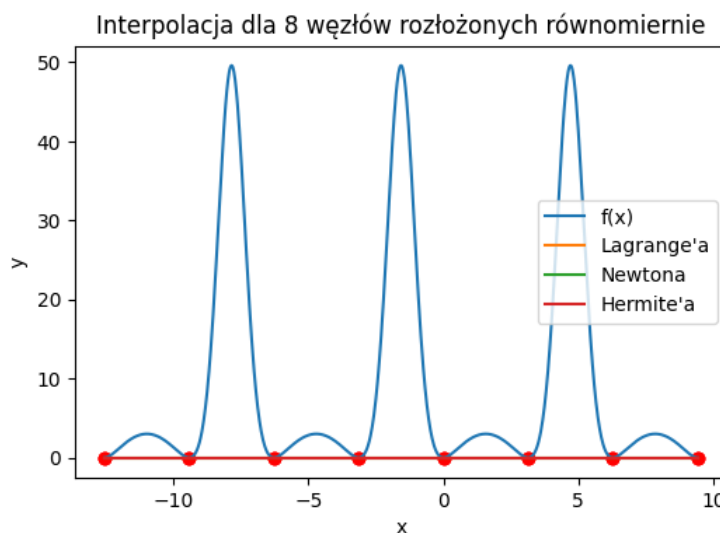
W przypadku wielomianu Hermite'a już dla 6 węzłów możemy zauważyć **efekt Runge'go** na wykresie 4.2.1 dla równomiernego rozmieszczenia węzłów. Wielomian na krańcach przedziału zaczyna mieć oscylacje o amplitudzie znacznie odstającej od wartości interpolowanej funkcji. W przypadku węzłów Czebyszewa ten efekt nie zachodzi.

Dla wielomianów Lagrange'a i Newtona ten efekt nie jest jeszcze widoczny i dokładniej przybliżają one interpolowaną funkcję, co widać w tabeli 4.2.1.

Na wykresie 4.2.1 dobrze widać, że wielomian Hermite'a w przeciwieństwie do pozostałych, nie „przecina” funkcji $f(x)$ w węzłach, tylko gładko się z nią styka, ponieważ mają one równą pierwszą pochodną w tych węzłach.

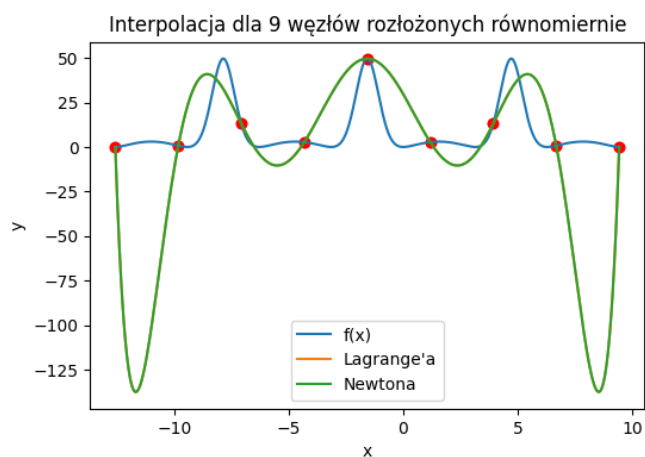
- $N = 8$, otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 15. stopnia

Dla 8 równoodległych węzłów w każdym przypadku dostajemy wielomian interpolacyjny stale równy 0 (wykres 4.2.3), ponieważ wszystkie węzły są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$. Pochodna $f(x)$ w tych punktach jest równa 0, podobnie jak pochodna wielomianów interpolacyjnych, które są funkcjami stałymi. W przypadku interpolacji Hermite'a potwierdza to poprawność wykonanego zadania.

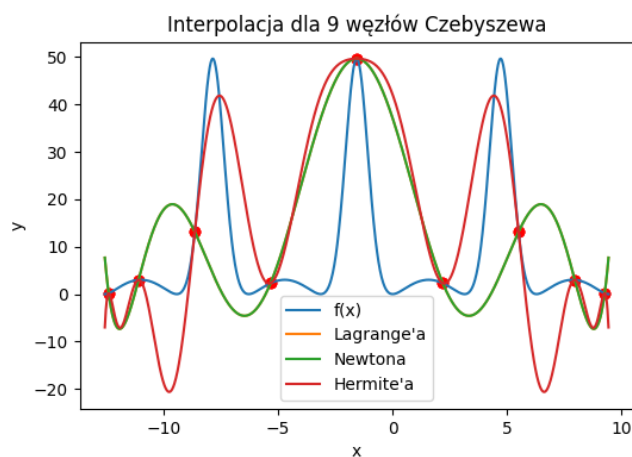


Wykres 4.2.1

- $N = 9$, otrzymujemy wielomian interpolacyjny Hermite'a 15. stopnia



Wykres 4.2.4



Wykres 4.2.5

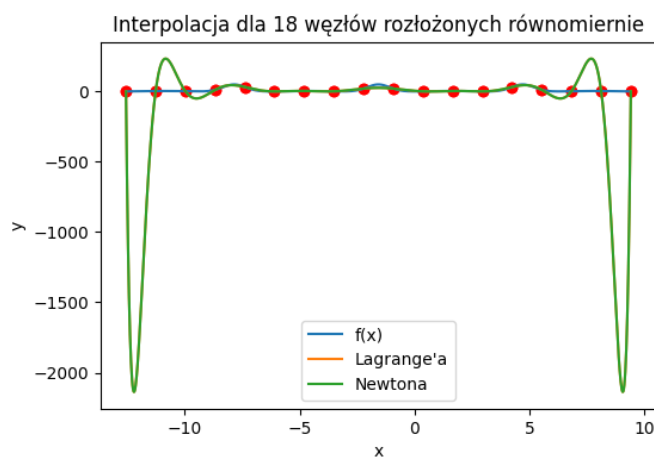
	Rozłożenie równomierne		Węzły Czebyszewa	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Lagrange'a	2525.6166	139.6334	413.4189	45.5626
Interpolacja Newtona	2525.6166	139.6334	413.4189	45.5626
Interpolacja Hermite'a	63167.9070	851.9588	357.1848	44.2930

Tabela 4.2.2 Wartości błędów interpolacji dla 9 węzłów

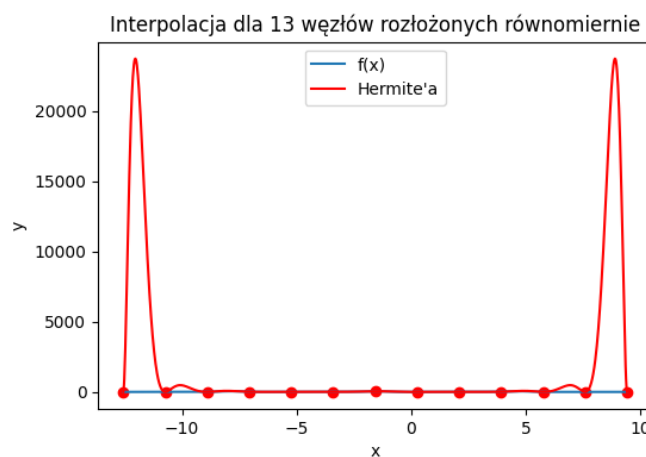
Dla 9 węzłów możemy zobaczyć po raz pierwszy efekt Runge'go na wykresie 4.2.4, dla równomiernego rozłożenia węzłów w przypadku interpolacji Lagrange'a i Newtona. Interpolacja Hermite'a nie została pokazana na wykresie 4.2.4, gdyż efekt Runge'go w jej przypadku jest już na tyle duży, że przysłoniłby wyniki pozostałych interpolacji.

Również w tym przypadku węzły Czebyszewa skutecznie zapobiegają efektowi Runge'go, co widzimy na wykresie 4.2.5.

- W celu przekonania się jak szybko rośnie efekt Runge'go przeanalizujemy interpolacje Lagrange'a oraz Newtona dla 18 węzłów, a Hermite'a dla 13 węzłów.



Wykres 4.2.6



Wykres 4.2.7

Rozłożenie równomierne

	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Lagrange'a	226932.2819	2137.8333
Interpolacja Newtona	226932.2819	2137.8333
Interpolacja Hermite'a	29618056.1705	23729.3756

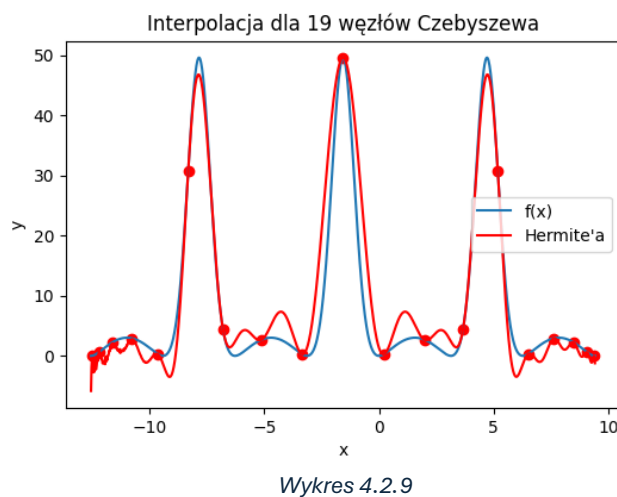
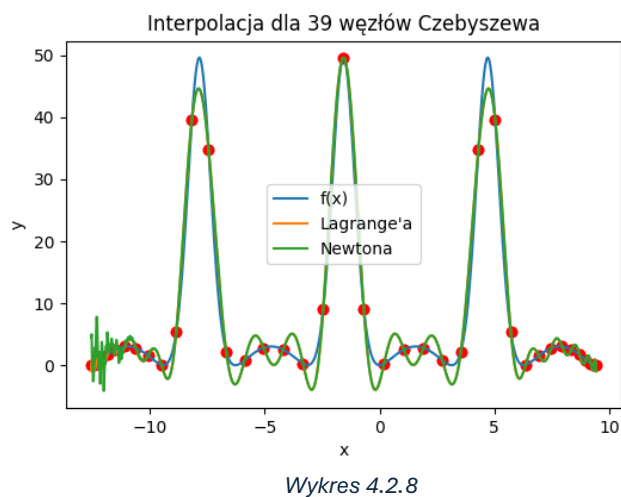
Tabela 4.2.3 Wartości błędów interpolacji

Korzystając z tabeli 4.2.3 możemy zobaczyć, że w przypadku interpolacji Lagrange'a i Newtona błąd bezwzględny jest już ponad **15 razy** większy, a błąd średniokwadratowy prawie **90 razy**, niż błędy obliczone w momencie zaobserwowania po raz pierwszy efektu Runge'go dla 9 węzłów. Natomiast dla interpolacji Hermite'a te wartości to odpowiednio: prawie **152 razy** większy dla błędu bezwzględnego oraz ponad **6951 razy** większy dla błędu średniokwadratowego, niż wtedy gdy po raz pierwszy efekt Runge'go dla 6 węzłów.

Widzimy zatem, że w obu przypadkach efekt Runge'go bardzo szybko rośnie, jednak dla interpolacji Hermite'a to zjawisko zachodzi gwałtowniej. Jest to spowodowane tym, że wielomian interpolacyjny, który otrzymujemy dla N węzłów jest stopnia $2N - 1$.

W związku z wynikami które otrzymaliśmy, nie będziemy prowadzić dalszej analizy dla równoległego rozmieszczenia węzłów.

- $N = 19$ dla interpolacji Hermite'a, otrzymujemy wielomian interpolacyjny 37. Stopnia oraz $N = 39$ dla interpolacji Lagrange'a i Newtona.



Węzły Czebyszewa

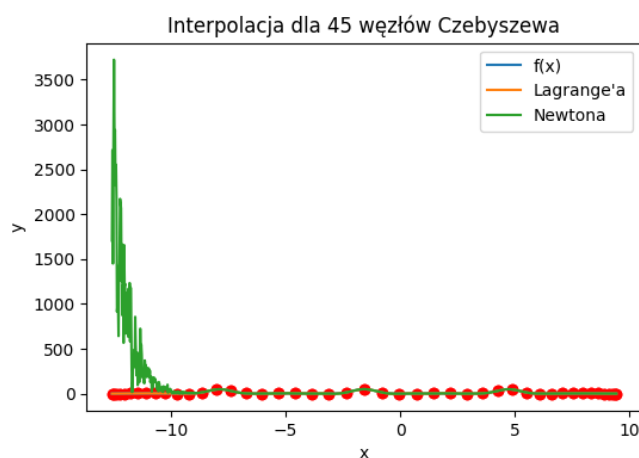
	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy
Interpolacja Lagrange'a	5.1149	5.1157
Interpolacja Newtona	7.4491	5.4087
Interpolacja Hermite'a	14.3057	16.3684

Tabela 4.2.4 Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa.

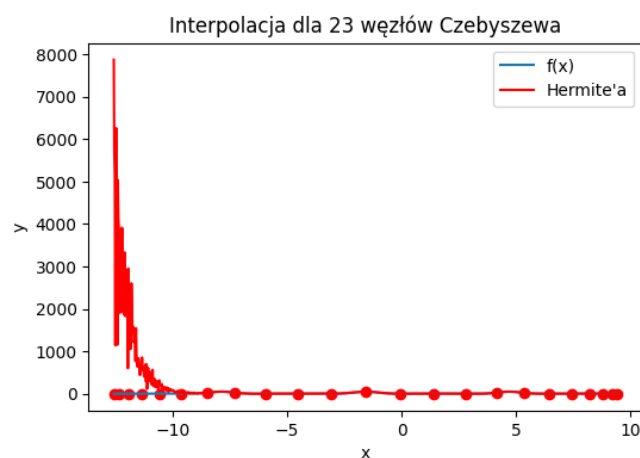
Dla 19 węzłów w interpolacji Hermite'a, a 39 węzłów w przypadku interpolacji Newtona możemy po raz pierwszy zaobserwować spadek dokładności przybliżenia na lewym krańcu przedziału (wykresy 4.2.8 i 4.2.9). Wielomiany zaczynają zachowywać się mniej stabilnie, a wartość błędów rośnie. Wynika to z skumulowania się błędu zaokrąglenia podczas obliczania wartości wielomianu w tych punktach. Widzimy, że ma to miejsce dla podobnych stopni wielomianów – 37 dla Hermite'a i 39 dla Newtona. Dzieje się tak dlatego, że są one obliczane w podobny sposób.

W przypadku interpolacji Lagrange'a to zjawisko nie zachodzi.

- $N = 23$ dla interpolacji Hermite'a, otrzymujemy wielomian interpolacyjny 45. Stopnia oraz $N = 45$ dla interpolacji Lagrange'a i Newtona.



Wykres 4.2.10



Wykres 4.2.11

Węzły Czebyszewa

	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy
Interpolacja Lagrange'a	2.5024	0.7316
Interpolacja Newtona	3721.9058	115569.8000
Interpolacja Hermite'a	7874.9967	459972.7951

Tabela 4.2.5 Wartości błędów interpolacji dla węzłów Czebyszewa

Dokładność przybliżenia funkcji wielomianami Newtona i Hermite'a drastycznie maleje. Błędy obliczeniowe, wynikające z zaokrąglania liczb zmiennoprzecinkowych przez komputer, gwałtownie rosną. Wykresy 4.2.10 oraz 4.2.11 prezentują się bardzo podobnie względem kształtu, co wynika z tego, że zaimplementowana interpolacja Hermite'a jest oparta na wzorze Newtona.

Interpolacja Lagrange'a natomiast przybliża interpolowaną funkcję z co raz większą dokładnością, co widać w tabeli 4.2.5.

Analizując wyniki dla większej liczby węzłów będziemy otrzymywać następujące rezultaty:

- Wielomian Lagrange'a z węzłami Czebyszewa będzie przybliżał z co raz większą dokładnością interpolowaną funkcję, aż do momentu, gdy błędy będą na tyle małe, że komputer nie będzie w stanie ich zapisać,
- W przypadku równomiernego rozkładu węzłów w przypadku wszystkich wielomianów, błędy będą co raz większe z powodu efektu Runge'go,

- W przypadku wielomianów Newtona i Hermite'a dla węzłów Czebyszewa, dokładność przybliżenia będzie co raz mniejsza z powodu błędów obliczeniowych.

4.3. Wyznaczanie wielomianu najlepiej przybliżającego zadaną funkcję.

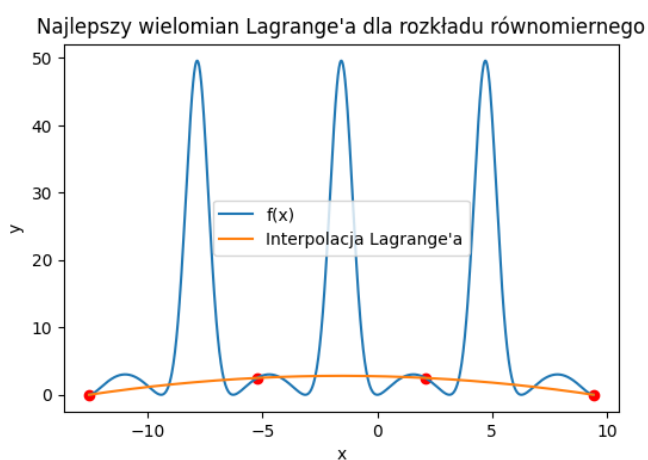
W celu wyznaczenia wielomianu, który najlepiej przybliży zadaną funkcję, będę sprawdzał wielomiany interpolujące dla kolejnej liczby węzłów zaczynając od 2 i liczył dla nich błędy średniokwadratowe. Wielomian z **najniższym błędem średniokwadratowym** będzie tym, który **najlepiej** przybliży zadaną funkcję.

Sprawdzone zostały następujące stopnie wielomianów:

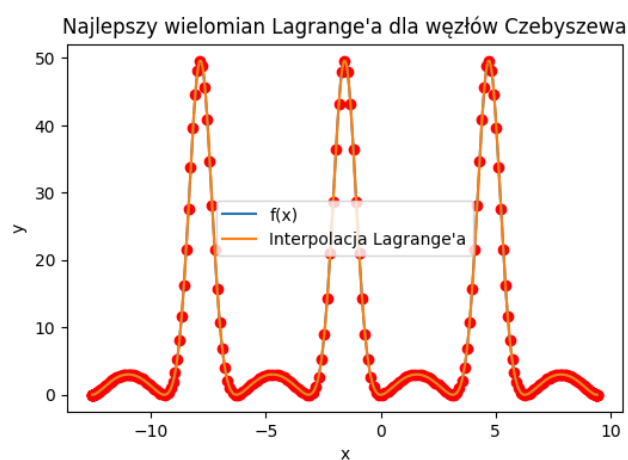
- Interpolacja Lagrange'a:
 - Rozkład równomierny: od 2 do 15 stopnia, ponieważ efekt Runge'go jest widoczny już od 9 węzłów, a później gwałtownie rośnie, więc dla większej liczby nie znajdziemy bardziej dokładnego wielomianu,
 - Węzły Czebyszewa: od 2 do 350 stopnia wielomianu
- Interpolacja Newtona:
 - Rozkład równomierny: tak samo jak dla interpolacji Lagrange'a
 - Węzły Czebyszewa: od 2 do 45 stopnia, ponieważ od 39 stopnia zaczynają pojawiać się błędy numeryczne, które później gwałtownie rosną
- Interpolacja Hermite'a:
 - Rozkład równomierny: tak samo jak dla interpolacji Lagrange'a i Newtona,
 - Węzły Czebyszewa: tak samo jak dla interpolacji Newtona.

4.3.1 Najlepszy wielomian dla interpolacji Lagrange'a.

- Rozłożenie równomierne: algorytm znalazł wielomian 4 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 0 sekund.
- Węzły Czebyszewa: algorytm znalazł wielomian 273 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 25 minut 18 sekund.



Wykres 4.3.1.1



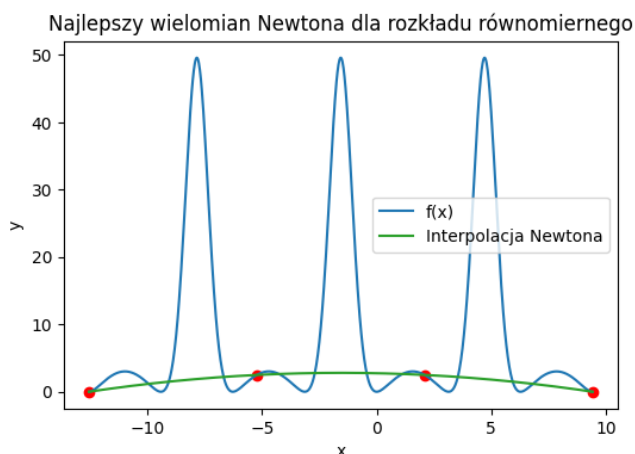
Wykres 4.3.1.2

	Rozłożenie równomierne		Węzły Czebyszewa	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Lagrange'a	253.7096	47.7077	4.0256e-28	1.35e-13

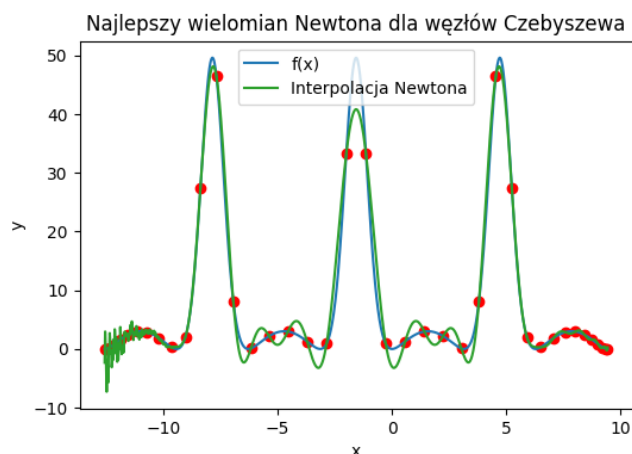
Tabela 4.3.2.1 Wartości błędów interpolacji dla 6 węzłów

4.3.2 Najlepszy wielomian dla interpolacji Newtona.

- Rozłożenie równomierne: algorytm znalazł wielomian 4 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 0 sekund.
- Węzły Czebyszewa: algorytm znalazł wielomian 40 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 0 sekund.



Wykres 4.3.2.1



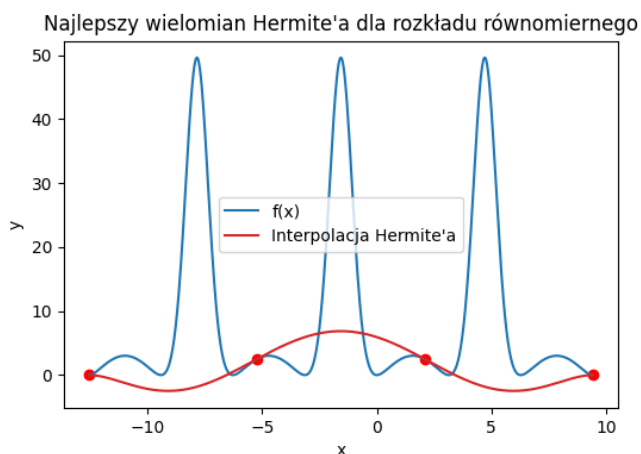
Wykres 4.3.3.2

	Rozłożenie równomierne		Węzły Czebyszewa	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Newtona	253.7096	47.7077	4.9001	8.7716

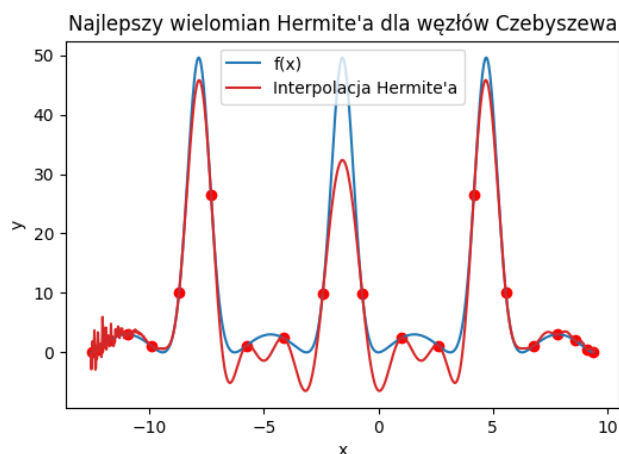
Tabela 4.3.2.1 Wartości błędów interpolacji dla 6 węzłów

4.3.3 Najlepszy wielomian dla interpolacji Hermite'a.

- Rozłożenie równomierne: algorytm znalazł wielomian 4 stopnia. Czas trwania algorytmu wyniósł 0 sekund.
- Węzły Czebyszewa: algorytm znalazł wielomian 39 stopnia (dla 20 węzłów). Czas trwania algorytmu wyniósł 0 sekund.



Wykres 4.3.3.1



Wykres 4.3.3.2

	Rozłożenie równomierne		Węzły Czebyszewa	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny	Błąd średniokwadratowy	Błąd bezwzględny
Interpolacja Hermite'a	279.9968	51.4241	14.3239	17.2323

Tabela 4.3.3.1 Wartości błędów interpolacji dla 6 węzłów

5. Podsumowanie i wnioski

- Dla równomiernego rozkładu węzłów interpolacji bardzo szybko pojawia się **efekt Runge'go**, znacznie pogarszający jakość interpolacji wielomianowej. W naszym wypadku zaobserwowaliśmy go już od **9** węzłów w przypadku interpolacji Lagrange'a i Newtona oraz od **6** dla interpolacji Hermite'a. Warto zauważyć że efekt ten wraz z wzrostem liczby węzłów, gwałtowniej postępuje dla Hermite'a, ponieważ stopień wielomianu, który otrzymujemy dla N węzłów jest równy $2N - 1$.
- Wykorzystanie węzłów Czebyszewa skutecznie minimalizuje efekt Runge'go. Dzięki temu, że miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, pozwala to lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom.
- Wielomianem interpolacyjnym, który najlepiej przybliży interpolowaną funkcję, jest wielomian Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla 273 węzłów. Błąd średniokwadratowy wynosi dla niego tylko $4.0256e-28$, a błąd bezwzględny $1.35e-13$. Są to zatem bardzo małe błędy, wielomian bardzo dokładnie przybliża funkcję.
- Dla liczby węzłów Czebyszewa większej niż 18 w przypadku wielomianu interpolacyjnego Hermite'a, a 39 dla Newtona, wielomiany zaczynają tracić dokładność na lewym krańcu przedziału. Jest to spowodowane niedokładnością zapisu liczb zmiennoprzecinkowych w pamięci komputera i sposobem obliczania wartości wielomianu. Błędy zaokrąglenia są co raz bardziej skumulowane, a wyniki mniej dokładne.

- Widzimy, że wielomiany interpolacyjne Newtona i Hermite'a zachowują się w podobny sposób. Jest to skutek tego, że sposób obliczania wielomianu Hermite'a został oparty na wzorze Newtona.
- Ze względu na duży koszt obliczeń wielomian interpolacyjny Lagrange'a nie znajduje zastosowania w praktyce. Mogliśmy to zaobserwować podczas szukania najlepszego wielomianu, które zajęło aż 25 minut 18 sekund. Dla porównania, dla wielomianu Newtona sprawdzając również wszystkie wielomiany od 2 do 350 stopnia, zajęło to jedynie 9 sekund.
- Wartość wielomianu Hermite'a oraz jego pierwszej pochodnej w węzłach jest równa odpowiednio wartości interpolowanej funkcji i jej pierwszej pochodnej, dzięki czemu nie „przecina” on funkcji w węzłach jak w przypadku Lagrange'a oraz Newtona, lecz jest do niej styczny.