4.3 Odkształcenie sprężyste

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10 \quad = \quad u'(0) + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow \Omega = [0,2]$

Skoro, $u(2)=0$, to równanie posiada prawostronny zerowy warunek Dirichleta, więc:

$$V = \{v(x) : v(2) = 0\}$$

Niech $v \in V$. Mnożę obustronnie równanie przez $v(x)$ i następnie całkuję na Ω (przedziale $[0,2]$).

$$\int_0^2 -\frac{d}{dx}\left(E(x)\cdot u'(x)\right)\cdot v(x)\,dx = \int_0^2 0\cdot v(x)\,dx = 0$$

$$-\int_0^2 \left(E(x)\cdot u'(x)\right)'\cdot v(x)\,dx = \left|\begin{matrix} v = v(x) & u' = \left(E(x)\cdot u'(x)\right)' \\ v' = v'(x) & u = E(x)\cdot u'(x) \end{matrix}\right|$$

$$-\left(\left[v(x)\cdot E(x)\cdot u'(x)\right]_0^2 - \int_0^2 v'(x)\cdot E(x)\cdot u'(x)\,dx\right) = 0$$

$$-\left[E(x)\cdot u'(x)\cdot v(x)\right]_0^2 + \int_0^2 E(x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,dx = 0$$

$$-E(2)\,u'(2)\cdot v(2) + E(0)\,u'(0)\cdot v(0) + \int_0^2 E(x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,dx = 0$$

Korzystając z faktu, że $v(2)=0$ i warunków brzegowych

$$u'(0)+u(0)=10 \Rightarrow u'=10-u(0)$$

$$\underbrace{-E(2)\,u'(2)\cdot \underbrace{v(2)}_{=0}}_{=0} + E(0)\,u'(0)\cdot v(0) + \int_0^2 E(x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,dx = 0$$

$$E(0)\cdot(10-u(0))\cdot v(0) + \int_0^2 E(x)\,u'(x)\cdot v'(x)\,dx = 0$$

$$10\,E(0)\cdot v(0) - E(0)u(0)\,v(0) + \int_0^2 E(x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^2 E(x)\,u'(x)\cdot v'(x)\,dx - E(0)u(0)\,v(0) = -10\,E(0)\,v(0)$$

Wartość $E(0)=3$ mamy podaną, więc:

$$\int_0^2 E(x)\,u'(x)\cdot v'(x)\,dx - 3\cdot u(0)\cdot v(0) = -30\cdot v(0)$$

Wprowadzam oznaczenia

$$B(u,v) = \int_0^2 E(x)\cdot u'(x)\cdot v'(x)\,dx - 3\,u(0)\cdot v(0)$$

$$L(v) = -30\,v(0)$$

Skoro po prawej mamy zerowy warunek Dirichleta, a po lewej nie, za przestrzeń, w której będziemy rozwiązywać problem przyjmiemy $V_h = \langle e_0, e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$.

Równanie, które sprowadza się do odnalezienia:

$u = u_0 \cdot e_0 + u_1 e_1 + \dots + u_{n-1} e_{n-1} \in V_h$

spełniającego zadane równanie dla każdego $v \in V_h$ ma postać:

$$
\begin{cases}
u_0 B(e_0, e_0) + u_1 B(e_1, e_0) + \dots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_0) = L(e_0) \\
u_0 B(e_0, e_1) + u_1 B(e_1, e_1) + \dots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_1) = L(e_1) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
u_0 B(e_0, e_{n-1}) + u_1 B(e_1, e_{n-1}) + \dots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_{n-1}) = L(e_{n-1})
\end{cases}
$$

Macierzowo:

$$
\begin{bmatrix}
B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \dots & B(e_{n-1}, e_0) \\
B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \dots & B(e_{n-1}, e_1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1})
\end{bmatrix}
$$