

O pracy „Bounded invariant equivalence relations”

Tomasz Rzepecki

Główną motywacją dla rozprawy doktorskiej jest pytanie o równoważność gładkości (w sensie deskryptywnej teorii mnogości) i typowej definiowalności tzw. silnych typów w teorii modeli.

Pierwotna hipoteza o równoważności gładkości i typowej definiowalności silnego typu Lascara, postawiona w pracy [KPS13] (której autorzy, na bazie ogólnych sugestii z wcześniejszej pracy [CLPZ01], nadali ścisły sens mocy borelowskiej teoriomodelowej grupy Galois i silnego typu Lascara), została udowodniona w pracy [KMS14], a następnie rozszerzona na tzw. silne typy orbitalne F_σ w pracach [KM14] i [KR16] (z których ta druga jest oparta na mojej pracy magisterskiej).

W obydwu pracach pozostały otwarte pytania o możliwość rozszerzenia równoważności na szersze klasy silnych typów.

Główne wyniki rozprawy doktorskiej pochodzą z trzech prac [KPR15], [Rze17] i [KR18], które łącznie dają w zasadzie optymalny opis sytuacji, w których wspomniana równoważność zachodzi (w szczególności obejmując wszystkie silne typy zadane na zbiorze realizacji jednego typu zupełnego i wszystkie orbitalne silne typy).

W rozprawie doktorskiej wyabstrahowałem kilka stosunkowo naturalnych własności relacji równoważności w układach dynamicznych występujących w teorii modeli, które były wykorzystywane w owych pracach. To pozwoliło na udowodnienie analogicznych twierdzeń w tym właśnie abstrakcyjnym kontekście, nie odwołując się wprost do żadnych teoriomodelowych faktów czy założeń, bazując na dynamice topologicznej (i jej związkach z dychotomią Bourgaina-Fremlina-Talagrandy), własnościach grup zwartych i deskryptywnej teorii mnogości.

Następnie, korzystając z owych abstrakcyjnych twierdzeń, wnioskujemy (głównie przez stosunkowo nietrudne sprawdzenie aksjomatów) wszystkie wyniki z prac [KPR15], [Rze17] i [KR18], część z nich nawet nieco wzmacniając. Wydaje się też, że w podobny sposób można z nich wywnioskować podobne fakty w zasadniczo wszystkich teoriomodelowych sytuacjach, gdzie można się takich wyników spodziewać, na co podaję przykłady.

Oprócz równoważności gładkości i typowej definiowalności (wyrażonej w rozprawie w postaci eleganckiej trychotomii) głównym wynikiem jest przedstawienie pewnych przestrzeni silnych typów, a w szczególności teoriomodelowej grupy Galois,

jako ilorazu zwartej grupy polskiej przez podgrupę, w ogólności jako przestrzeni topologicznej z działaniem grupy (a dla grupy Galois również jako grupy topologicznej), a przy założeniu NIP również w sensie mocy borelowskiej.

To pozwala na dokładne wyliczenie mocy borelowskiej grupy Galois, silnego typu Lascara i ogólnie dowolnego silnego typu, poprzez wyznaczenie odpowiedniej grupy polskiej wraz z podgrupą, przez którą należy ją podzielić. W pracy podaję przykład, jak w ten sposób wyznaczyć grupę Galois (wraz z mocą borelowską) w konkretnych przykładach (rozważanych wcześniej w [CLPZ01] i [KPS13]). Uzyskujemy też częściową odpowiedź na postawione w pracy [KPS13] pytanie o możliwą moc borelowską silnego typu Lascara i grupy Galois: przy założeniu NIP jest ona równa mocy borelowskiej ilorazu zwartej grupy polskiej przez podgrupę F_σ . Można też oczekiwać, że uzyskane wyniki będą pomocne w odpowiedzi na inne pytania postawione w [KPS13] (np. o monotoniczność mocy borelowskiej silnego typu Lascara), a także inne pokrewne (np. o możliwe moce borelowskie dowolnych silnych typów).

Bibliografia

- [CLPZ01] Enrique Casanovas, Daniel Lascar, Anand Pillay i Martin Ziegler. “Galois Groups of First Order Theories”. W: *J. Math. Log.* 1.2 (2001), s. 305–319. DOI: [10.1142/S0219061301000119](https://doi.org/10.1142/S0219061301000119).
- [KM14] Itay Kaplan i Benjamin Miller. “An embedding theorem of \mathbb{E}_0 with model theoretic applications”. W: *J. Math. Log.* 14.2 (2014), 1450010 (22 pages). DOI: [10.1142/S021906131450010X](https://doi.org/10.1142/S021906131450010X).
- [KMS14] Itay Kaplan, Benjamin Miller i Pierre Simon. “The Borel cardinality of Lascar strong types”. W: *J. Lond. Math. Soc.* 90.2 (2014), s. 609–630. DOI: [10.1112/jlms/jdu041](https://doi.org/10.1112/jlms/jdu041).
- [KPR15] Krzysztof Krupiński, Anand Pillay i Tomasz Rzepecki. “Topological dynamics and the complexity of strong types”. W: *Isr. J. Math.* (1 paź. 2015). Praca przyjęta. arXiv: [1510.00340](https://arxiv.org/abs/1510.00340).
- [KPS13] Krzysztof Krupiński, Anand Pillay i Sławomir Solecki. “Borel equivalence relations and Lascar strong types”. W: *J. Math. Log.* 13.2 (grud. 2013). DOI: [10.1142/S0219061313500086](https://doi.org/10.1142/S0219061313500086).
- [KR16] Krzysztof Krupiński i Tomasz Rzepecki. “Smoothness of bounded invariant equivalence relations”. W: *J. Symbolic Logic* 81.1 (2016), s. 326–356. DOI: [10.1017/jsl.2015.44](https://doi.org/10.1017/jsl.2015.44).
- [KR18] Krzysztof Krupiński i Tomasz Rzepecki. *Galois groups as quotients of Polish groups*. Praca wysłana. 2018. arXiv: [1804.09247](https://arxiv.org/abs/1804.09247).
- [Rze17] Tomasz Rzepecki. “Equivalence relations invariant under group actions”. W: *J. Symbolic Logic* (2017). Praca przyjęta. arXiv: [1602.09009v2](https://arxiv.org/abs/1602.09009v2).