

**Первое задание курса**  
**“Суперкомпьютерное моделирование и**  
**технологии”**

## Постановка задачи

В области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция  $f(x, y)$  считается известной. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле (см. [1]):

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и краевому условию (2) на ее границе.

# Методы решения

## 1. Метод фиктивных областей.

Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$ . Обозначим через  $\bar{D}$ ,  $\bar{\Pi}$  замыкание области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$  соответственно, через  $\Gamma$  – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \setminus \bar{D}$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое  $\varepsilon > 0$ .

В прямоугольнике  $\Pi$  рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= F(x, y), \\ v(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases} \quad (4)$$

и правой частью

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в  $\bar{\Pi}$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи (3) всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x, y) = -k(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ . Последнее означает, что в каждой точке  $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$  должно выполняться равенство

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), \\ (x, y) \in D}} (W(x, y), n(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), \\ (x, y) \in \hat{D}}} (W(x, y), n(x_0, y_0)), \quad (6)$$

где  $n(x, y)$  – вектор единичной нормали к границе  $\gamma$  в точке  $(x, y)$ , определенный всюду или почти всюду на кривой.

Выполняя расчеты, считать константу  $\varepsilon$  метода фиктивных областей равной  $h^2$ , где  $h = \max(h_1, h_2)$  – наибольший шаг сетки  $\bar{\omega}_h$ .

## 2. Разностная схема решения задачи.

Краевые задачу (3),(6) предлагается решать численно методом конечных разностей [3]. В замыкании прямоугольника  $\bar{\Pi}$  определяется равномерная прямоугольная сетка  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь  $h_1 = (B_1 - A_1)/M$ ,  $h_2 = (B_2 - A_2)/N$ . Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\omega_h$ . Обозначим через  $w_{ij}$  значение сеточной функции  $w \in H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \omega_h$ . Будем считать, что в пространстве  $H$  задано скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{(u, u)}. \quad (8)$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (9)$$

где  $A : H \rightarrow H$  – оператор, действующий в пространстве сеточных функций,  $B \in H$  – известная правая часть. Задача (9) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приблизительно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1j} \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left( b_{ij+1} \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij},$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2}) dt \quad (11)$$

при всех  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, \quad y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2.$$

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\} \quad (12)$$

при всех  $i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ .

Краевые условия Дирихле задачи (3),(6) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (14)$$

**Замечание.** Интегралы (11) от кусочно-постоянной функции  $k(x, y)$  следует вычислять аналитически. Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки  $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  и  $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ , целиком расположен в области  $D$ , то  $a_{ij} = 1$ . Если же указанный отрезок находится в фиктивной области  $\hat{D}$ , то  $a_{ij} = 1/\varepsilon$ . В противном случае

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon,$$

где  $l_{ij}$  – длина той части отрезка  $[P_{ij}, P_{ij+1}]$ , которая принадлежит области  $D$ . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты  $b_{ij}$ .

Очевидно, правая часть схемы  $F_{ij}$  равна нулю при всех  $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$ . Если  $\Pi_{ij} \subset D$ , то правую часть предлагается приближенно заменить значением  $f(x_i, y_j)$ . В противном случае, когда прямоугольник  $\Pi_{ij}$  содержит точки оригинальной области  $D$  и фиктивной области  $\hat{D}$ , величина  $F_{ij}$  может быть вычислена приближенно как произведение

$$(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*),$$

где  $(x_i^*, y_j^*)$  – любая точка пересечения  $\Pi_{ij} \cap D$ ,  $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$  – площадь пересечения областей, при вычислении которой криволинейную часть границы можно заменить отрезком прямой.

### 3. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы (10), (14) может быть получено итерационным методом скорейшего спуска [4]. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $w^{(k)} \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Начальное приближение  $w^{(0)}$  можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация  $w^{(k+1)}$  вычисляется по итерации  $w^{(k)}$  согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \quad (15)$$

где невязка  $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$ , итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}.$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \delta,$$

где  $\delta$  – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

$$\|w\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |w(x)|. \quad (16)$$

Константу  $\delta$  для данной задачи предлагается выбрать так, чтобы итерационный процесс укладывался в отведенное для него время.

## Описание задания.

В рамках задания были выполнены следующие действия:

1. Аппроксимировать двумерную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области, преобразовав ее к решению приближенного решения в  $Aw=B$ . Выполнена последовательная программа с использованием метода наискорейшего спуска на плотной сетке  $(M,N) = (10,10), (20,20), (40,40)$  с подсчетом количества итераций и времени работы соответственно.
2. реализована параллельная программа на C++ и ускорен синхронный код с помощью OpenMP
3. проверено качество работы алгоритма для сеток разных размеров с разным количеством потоков на ПВС IBM Polus
4. визуализированы результаты

## Результаты расчетов

Количество ОрепМР-нитей	Число точек сетки (M x N)	Число итераций	Время решения	Ускорение
sync	80*90	70143	1106.390s	/
2	80*90	58435	518.770s	2.132
4	80*90	51065	688.472s	1.608
8	80*90	54897	224.739s	4.923
16	80*90	43978	137.809s	8.028
sync	160*180	91312	7053.864s	/
4	160*180	89478	2031.538s	3.472
8	160*180	89612	1053.638s	6.695
16	160*180	101438	1027.893s	6.862
32	160*180	79536	641.923s	10.988

## Результаты изображений

