Logistica

Corso di Laurea Magistrale in Data Science and Business Informatics

Dipartimento di Informatica

Università di Pisa

Logistics Airline Problem

Studenti

Tommaso Cavalieri
Andrea Fedele
Giacomo Lo Dico
Valentina Olivotto

Anno accademico 2019/2020

1 Il problema

Una compagnia aerea deve decidere dove aprire alcuni nuovi terminal ed il numero di voli da attivare tra di essi. Le città candidate per l'apertura di tali aeroporti sono Roma, Berlino, Parigi, Vienna, Bruxelles e Amsterdam. E' possibile aprire al massimo 5 nuovi terminal ed il costo di attivazione varia a seconda della città in cui essi vengono aperti, come riportato nella Tabella 1.

Città	Costo apertura terminal
Roma	5
Berlino	4
Parigi	10
Vienna	8
Bruxelles	7
Amsterdam	9

Tabella 1: Tabella dei costi di apertura per un nuovo terminal

Sono inoltre specificate, come riportato nella Tabella 2, tutte le possibili coppie origine-destinazione di voli attivabili ed il profitto corrispondente. Tale quantità rappresenta il ricavo che la compagnia aerea incasserebbe per ogni volo fatto su una specifica tratta qualora essa venisse attivata. Naturalmente un volo può essere eseguito solo ed esclusivamente nel caso in cui sia il terminal di partenza che quello di arrivo della tratta in questione siano stati attivati.

Origine - Destinazione	Profitto
Roma - Berlino	8
Roma - Parigi	6
Roma - Vienna	5
Berlino - Roma	8
Berlino - Vienna	5
Berlino - Amsterdam	7
Parigi - Roma	6
Parigi - Vienna	3
Parigi - Bruxelles	5
Parigi - Amsterdam	2
Vienna - Roma	6
Vienna - Berlino	7
Vienna - Parigi	6
Bruxelles - Parigi	5
Bruxelles - Amsterdam	5
Amsterdam - Parigi	9
Amsterdam - Bruxelles	5

Tabella 2: Tabella profitti per singola tratta

Devono inoltre essere rispettati i seguenti vincoli:

- il numero totale di voli che possono essere effettuati è pari a 14;
- per ogni coppia origine-destinazione possono essere attivati al massimo 5 voli (eccetto per la coppia Roma-Berlino, per cui tale limite è pari a 4);
- almeno 6 voli devono arrivare a Parigi, indifferentemente da quale sia l'aeroporto di partenza.

Il problema consiste nel decidere dove aprire i nuovi terminal e quanti voli attivare per ogni coppia origine-destinazione, rispettando tutti i vincoli sopra descritti e massimizzando il *revenue*, ovvero il profitto totale ottenuto al netto dei costi di apertura degli aeroporti.

2 Il modello matematico

Il primo passo verso la soluzione del problema presentato è scrivere il modello matematico che lo descriva in maniera corretta.
Sia $G = (V, E)$ il grafo orientato ove V è l'insieme dei vertici ed E l'insieme degli archi; in particolare $V = \{Roma, Berlino, Parigi, Vienna, Bruxelles, Amsterdam\}$ è l'insieme delle città in cui è potenzialmente attivabile un nuovo terminal, mentre E l'insieme delle possibili coppie origine-destinazione come riportate nella Tabella 2. In Figura 1 è possibile vedere una rappresentazione del grafo G sopra descritto. Risulta evidente come tale grafo non sia completo.

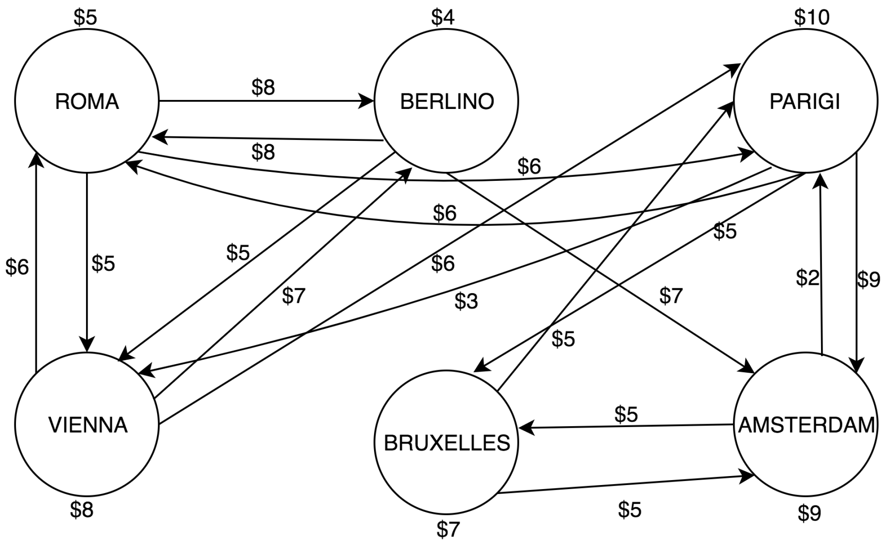

Figura 1: Grafo orientato G

Ad ogni nodo della rete $j \in V$ viene associato un costo di attivazione c_j, mentre ad ogni arco del grafo $(i, j) \in E$ viene associato un profitto p_{ij}. Definiamo inoltre le seguenti variabili decisionali:

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il terminal } j \in V \text{ viene aperto,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- y_{ij}= numero di voli attivati tra i e j, $(i, j) \in E$.

Il modello matematico per risolvere il problema di ottimizzazione risulta il seguente:

$$\max \sum_{(i,j)\in E} p_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in V} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j \in V} x_j \leq 5 \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \leq 14 \tag{3}$$

$$y_{(Roma,Berlino)} \leq 4 x_{Roma} x_{Berlino} \tag{4}$$

$$y_{ij} \leq 5 x_i x_j \qquad \forall (i, j) \neq (Roma, Berlino) \in E \tag{5}$$

$$\sum_{(j,Parigi)\in E} y_{(j,Parigi)} \geq 6 \tag{6}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in V \tag{7}$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j) \in E \tag{8}$$

Poiché i vincoli (4) e (5) non sono lineari è necessaria l'introduzione di un'ulteriore variabile binaria, che permette di sostituire il prodotto $x_i x_j$; viene dunque definita z_{ij} come segue:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i = 1 \text{ e } x_j = 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \forall (i,j) \in E.$$

Se tale variabile assume il valore 1, y_{ij} risulterà poter essere maggiore di 0 poiché significa che sia il terminal al nodo i che il terminal al nodo j saranno stati aperti, mentre risulterà $y_{ij} = 0$ nel caso contrario, ovvero qualora almeno uno dei due terminal, quello al nodo i o quello al nodo j, non venga attivato. Effettuando tale modifica andranno aggiunti ulteriori due vincoli sulla variabile appena introdotta ed il modello risulterà il seguente:

$$\begin{array}{ll}
\max \sum_{(i,j) \in E} p_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in V} c_j x_j & \\
\sum_{j \in V} x_j \leq 5 & \\
\sum_{(i,j) \in E} y_{ij} \leq 14 & \\
y_{(Roma,Berlino)} \leq 4 z_{(Roma,Berlino)} & \\
y_{ij} \leq 5 z_{ij} & \forall (i,j) \neq (Roma, Berlino) \in E \\
\sum_{(j,Parigi) \in E} y_{(j,Parigi)} \geq 6 & \\
z_{ij} \geq x_i + x_j - 1 & \forall (i,j) \in E \\
x_i + x_j \geq 2 z_{ij} & \forall (i,j) \in E \\
& \\
x_j \in \{0,1\} & \forall j \in V \\
z_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in E \\
y_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in E
\end{array}$$

Ora è possibile affermare che si tratta di un modello lineare, di cui viene qui di seguito presentata una descrizione più approfondita.
Partiamo innanzitutto dalla spiegazione della funzione obiettivo, essa è formata da due addendi:

- $\sum_{(i,j) \in E} p_{ij} y_{ij}$, che rappresenta il profitto totale, calcolato moltiplicando il profitto della singola tratta $(i,j) \in E$ per il numero di voli attivati per tale coppia origine-destinazione;
- $\sum_{j \in V} c_j x_j$, che rappresenta il costo totale di attivazione dei terminal selezionati $j \in V$.

Dovendo massimizzare il *revenue* si tratta di un problema di massimo rispetto alla funzione obiettivo specificata, la quale sottrae i costi ai profitti.
Analizziamo ora i vincoli uno ad uno:

- $\sum_{j \in V} x_j \leq 5$

  rappresenta il vincolo per cui è possibile aprire al massimo 5 nuovi terminal tra le 6 possibili città considerate;

- $\sum_{(i,j) \in E} y_{ij} \leq 14$

  vista la definizione di y_{ij} data in precedenza, questa disuguaglianza rappresenta il vincolo per cui è possibile attivare al massimo 14 voli in totale;

- $y_{ij} \leq 5 z_{ij}, \quad \forall (i,j) \neq (Roma, Berlino) \in E$

  assicura che, nel caso in cui vengano aperti sia il terminal al nodo i che il terminal al nodo j, possano essere attivati al massimo 5 voli per la tratta che ha i come origine e j come destinazione. Questo vale per ogni possibile tratta $(i, j) \in E$ con $i \neq Roma$ e $j \neq Berlino$, poiché per tale coppia origine-destinatione è previsto un vincolo differente. Se invece $z_{ij} = 0$, risulterà $y_{ij} <= 0$, ovvero non potranno essere attivati voli tra i e j. Si tratta dei cosiddetti *linking constraints*;

- $y_{(Roma,Berlino)} \leq 4z_{(Roma,Berlino)}$

  vincolo analogo al precedente per la tratta $(Roma, Berlino)$, per cui il numero massimo di voli attivabile è pari a 4 e non 5 come per le altre coppie origine-destinazione;

- $\sum_{(j,Parigi) \in E} y_{(j,Parigi)} \geq 6$

  rappresenta il vincolo per cui almeno 6 voli devono avere come destinazione Parigi, indipendentemente da dove essi provengano;

- $z_{ij} \geq x_i + x_j - 1 \quad \forall (i, j) \in E$
  $x_i + x_j \geq 2z_{ij} \quad \forall (i, j) \in E$

  questi due vincoli fanno in modo che z_{ij} corrisponda alla variabile definita in precedenza, infatti essi fanno sì che z_{ij} assuma valore 1 solamente nel caso in cui x_i e x_j abbiano entrambi valore 1, e 0 altrimenti.

- $x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in V$
  $z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E$
  $y_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E$

  per come sono state definite, sia x_j che z_{ij} sono variabili binarie, mentre y_{ij} dev'essere non negativa.

3 Implementazione con AMPL

Una volta definito il modello matematico, per ottenere una soluzione al problema è necessario implementarlo. Per tale scopo è stato utilizzato il linguaggio di programmazione AMPL assieme al solver CPLEX. AMPL richiede di creare due file: un file **model** (.mod) nel quale vengono riportati i parametri, le variabili del problema e il modello che lo descrive, e un file **data** (.dat) dove vengono specificati i dati che caratterizzano tale problema. Abbiamo quindi creato i file **Project.mod** e **ProjectData.dat**, che sono consultabili a parte.
Vengono riportati in questo testo solamente i risultati ottenuti, che sono i seguenti:

```
CPLEX 12.9.0.0: optimal integer solution; objective 87
9 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
Activation [*] :=
Amsterdam 1
  Berlino 1
Bruxelles 0
   Parigi 1
     Roma 1
   Vienna 0
;
```

```
Linear :=
Amsterdam Bruxelles 0
Amsterdam Parigi    1
Berlino   Amsterdam 1
Berlino   Roma      1
Berlino   Vienna    0
Bruxelles Amsterdam 0
Bruxelles Parigi    0
Parigi    Amsterdam 1
Parigi    Bruxelles 0
Parigi    Roma      1
Parigi    Vienna    0
Roma      Berlino   1
Roma      Parigi    1
Roma      Vienna    0
Vienna    Berlino   0
Vienna    Parigi    0
Vienna    Roma      0
;

Flight :=
Amsterdam Bruxelles 0
Amsterdam Parigi    5
Berlino   Amsterdam 0
Berlino   Roma      5
Berlino   Vienna    0
Bruxelles Amsterdam 0
Bruxelles Parigi    0
Parigi    Amsterdam 0
Parigi    Bruxelles 0
Parigi    Roma      0
Parigi    Vienna    0
Roma      Berlino   3
Roma      Parigi    1
Roma      Vienna    0
Vienna    Berlino   0
Vienna    Parigi    0
Vienna    Roma      0
;
```

L'ottimizzazione del *revenue*, ovvero il suo massimo, viene dunque ottenuta aprendo i terminal presso Amsterdam, Berlino, Parigi e Roma (si noti che la richiesta iniziale era di aprirne al massimo 5, ma non vi era nessun vincolo riguardante il numero minimo, quindi risulta valida una soluzione che preveda l'apertura di solamente 4 aeroporti). Conseguentemente si può osservare come le coppie origine-destinazione con $z_{ij} = 1$ (nella soluzione presentata rappresentate da $Linear = 1$) sono quelle che hanno come origine e destinazione una delle città appena citate. Le altre coppie risulteranno avere $z_{ij} = 0$ e di conseguenza $y_{ij} = 0$. Per quanto riguarda i voli attivati sono 5 quelli da Amsterdam a Parigi, 5 quelli da Berlino a Roma, 3 da Roma a Berlino e 1 da Roma a Parigi. Si noti che il numero totale di voli attivati è pari a 14, 6 dei quali arrivano a Parigi; meno di 4 vengono effettuati da Roma a Berlino e non più di 5 sulle altre tratte. Sono dunque soddisfatti tutti i vincoli del problema. Il valore del *revenue* relativo a questa soluzione è 87 e corrisponde al totale dei profitti $(5 * 9 + 5 * 8 + 3 * 8 + 1 * 6 = 115)$ al netto dei costi di apertura dei terminal $(5 + 4 + 9 + 10 = 28)$. La figura 2 rappresenta la soluzione ottimale.

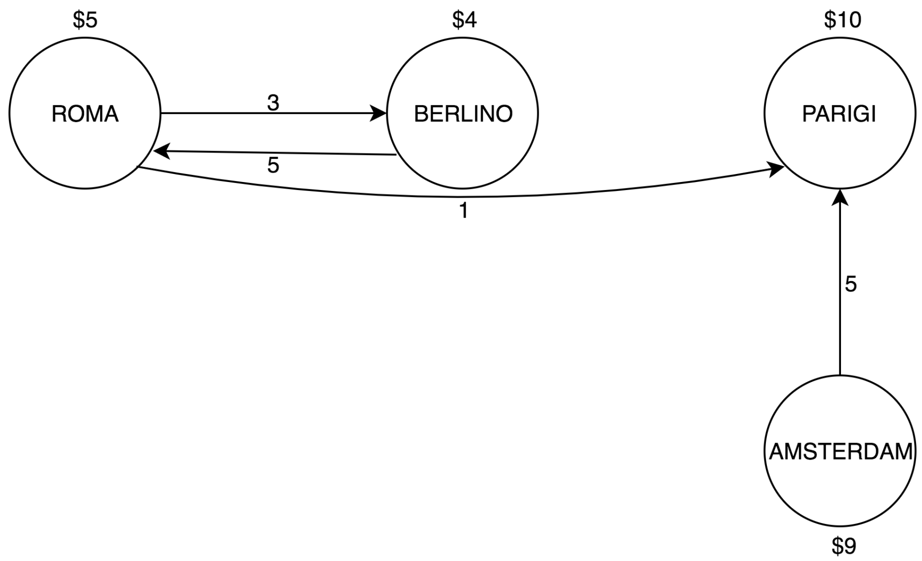

Figura 2: Grafo soluzione ottimale

4 Variante

Viene successivamente richiesto di considerare una variante del problema appena descritto, nella quale oltre ai costi di attivazione dei terminal deve essere aggiunta una tassa di 1 pagata dalla compagnia per ogni volo che arriva o parte da Berlino. Deve essere quindi modificata la funzione obiettivo del problema precedente, ottenendo il seguente modello:

$$\max \sum_{(i,j)\in E} p_{ij}y_{ij} - \sum_{j\in V} c_j x_j - \sum_{(j,Berlino)\in E} y_{(j,Berlino)} - \sum_{(Berlino,j)\in E} y_{(Berlino,j)}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in V} x_j \leq 5 && \\
&\sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \leq 14 && \\
&y_{(Roma,Berlino)} \leq 4z_{(Roma,Berlino)} && \\
&y_{ij} \leq 5z_{ij} && \forall (i,j) \neq (Roma, Berlino) \in E \\
&\sum_{(j,Parigi)\in E} y_{(j,Parigi)} \geq 6 && \\
&z_{ij} \geq x_i + x_j - 1 && \forall (i,j) \in E \\
&x_i + x_j \geq 2z_{ij} && \forall (i,j) \in E \\
&&& \\
&x_j \in \{0,1\} && \forall j \in V \\
&z_{ij} \in \{0,1\} && \forall (i,j) \in E \\
&y_{ij} \geq 0 && \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

La differenza rispetto al modello precedente è che al revenue vengono sottratti i seguenti addendi:

- $\sum_{(Berlino,j)\in E} y_{(Berlino,j)}$: numero totale di voli che partono da Berlino;
- $\sum_{(j,Berlino)\in E} y_{(j,Berlino)}$: numero totale di voli che arrivano a Berlino.

Il costo aggiuntivo corrisponde esattamente a questo numero visto che la tassa da pagare equivale a 1. Non vi sono cambiamenti per quanto riguarda i vincoli.

5 Implementazione della variante con AMPL

Per implementare tale variante del problema abbiamo creato un ulteriore file **ProjectVariante.mod** con la modifica fatta nella funzione obiettivo del modello. Dai risultati ottenuti si può notare come nonostante l'aggiunta della tassa la soluzione ottima preveda di aprire in ogni caso un aeroporto a Berlino. Inoltre, anche le tratte attivate ed il numero di voli rimane lo stesso. Si può dunque concludere che tale tassa non è sufficientemente alta da far preferire altre soluzioni a quella presentata in precedenza. Naturalmente il valore della funzione obiettivo risulta inferiore, poiché al valore precedente di 87 vanno sottratti i costi delle nuove tasse introdotte sui voli che arrivano o partono da Berlino, che è pari a 8 $(5 + 3)$; il valore finale risulterà dunque $87 - 8 = 79$.