MO102: Cuisson d'une pièce thermo-formée

Jean-François FRITSCH (jean-francois.fritsch@ensta.fr)

10 janvier 2023

1 Introduction

Thermoformage (Wikipédia) = technique qui consiste à prendre un matériau sous forme de plaque (résine, verre, plastique, etc.), à le chauffer pour le ramollir, et à profiter de cette ductilité pour le mettre en forme avec un moule. Le matériau redurcit lorsqu'il refroidit, gardant cette forme.

Liens :

- https://www.polyvia-formation.fr/la-plasturgie-cest-quoi/le-thermoformage-cest-quoi
- https://www.saric.com/actualites/investissement-saric-group-lusine-de-pleucadeuc-augmente-sa-capacite-de-production-avec

2 Problème direct

On cherche à résoudre le problème suivant :
Trouver $T \in H^2(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{cases} -div(\kappa \nabla T) = f & \text{dans } \Omega \\ T = T^D & \text{sur } \Gamma_D \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_I. \end{cases} \tag{1}$$

2.1 Formulation variationnelle

Rappel : formule de Green
Soit Ω un ouvert borné de frontière suffisament régulière. On a pour $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $\kappa \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega div(\kappa \nabla u) v d\Omega = -\int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma. \tag{2}$$

Pour simplifier ce qui suit, on considère que les termes sources ont la régularité suivante : $f \in L^2(\Omega)$ et que $T^D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$. On peut donc mutltiplier (1) par des fonctions test $v \in V_0 := \{w \in H^1(\Omega),\ w = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ puis utiliser (2).

On obtient le problème :
Trouver $T \in H^1(\Omega)$ *tel que*

$$\int_\Omega \kappa \nabla T \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega,\ \forall v \in V_0, \tag{3}$$

et $T = T^D$ sur Γ_D. Nous ne pouvons pas directement appliquer le thèorème de Lax-Milgram pour obtenir le caractère bien posé du problème car $T \notin V_0$. On va donc se donner une fonction $\widetilde{T}^D \in H^1(\Omega)$ telle que $\widetilde{T}^D = T^D$ sur Γ_D appelée relèvement de T_D. Une telle existe par surjectivité de l'application trace (on a supposé que $T^D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$). On pose alors $T_0 := T - \widetilde{T}^D \in V_0$ qui vérifie la formulation variationnelle :
Trouver $T_0 \in V_0$ *tel que*

$$\int_\Omega \kappa \nabla T_0 \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega - \int_\Omega \kappa \nabla \widetilde{T}^D \cdot \nabla v d\Omega,\ \forall v \in V_0. \tag{4}$$

Exercice : montrer qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram (on peut appliquer l'inégalité de Poincaré lorsque la solution echerchée s'annule seulement sur une partie de la frontière)

Exercice : Monrer l'équivalence entre les problèmes (1) et (4).

3 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

On choisit de discrétiser le problème à l'aide d'éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$. L'assemblage de la matrice de rigidité nécessite, pour chaque triangle T_l, de calculer sa matrice de rigidité locale définie pour $1 \leq k, m \leq 3$ par

$$\mathbb{K}^l_{k,m} = \int_{T_l} \kappa \nabla w_i \cdot \nabla w_j d\Omega,\ \text{avec } i = g(l,k) \text{ et } j = g(l,m).$$

Supposons que les sommets de T_l soient $S_1(x_1, y_1),\ S_2(x_2, y_2),\ \text{et } S_3(x_3, y_3)$, on peut vérifier que la fonction de base $w_{g(l,k)}$ correspond à la fonction :

$$\begin{cases} \lambda_1(x,y) = \frac{1}{\Delta}(y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) & \text{si } k = 1 \\ \lambda_2(x,y) = \frac{1}{\Delta}(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) & \text{si } k = 2 \\ \lambda_3(x,y) = \frac{1}{\Delta}(y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2)) & \text{si } k = 3, \end{cases} \tag{5}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j,\ y_{ij} = y_i - y_j$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ et $\Delta = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$. On remarque de plus que $|\Delta| = 2 * aire(T_l)$. Les gradients de ces fonctions se calculent aisément :

$$\nabla \lambda_1 = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} y_{23} \\ -x_{23} \end{pmatrix},\ \nabla \lambda_2 = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} y_{31} \\ -x_{31} \end{pmatrix},\ \nabla \lambda_3 = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} y_{12} \\ -x_{12} \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de déterminer simplement la matrice de rigidité locale.

4 Caractère creux des matrices éléments finis

On note A le nombre d'arrêtes, S le nombre de sommets et T le nombre de triangles du maillage. On a la relation d'Euler très générale :

$$S - A + T = 1. \tag{6}$$

Notons A_b le nombre d'arrêtes sur le bord du domaine, et A_i le nombre d'arrêtes intérieures au domaine. En contant de deux façons différentes le nombre d'arrêtes on obtient :

$$\begin{aligned} A &= A_b + A_i \\ &= 3T - A_i \quad \text{(comptage par les triangles)}, \end{aligned} \tag{7}$$

d'où

$$3T = 2A_i + A_b < 2(A_i + A_b) = 2A \tag{8}$$

Notons $nz(\mathbb{K})$ le nombre d'éléments non nuls de la matrice de rigidité (le même raisonnement peut être conduit pour la matrice de masse). On voit aisément que les éléments diagonaux de la matrice de rigidité sont non nuls, on a donc :

$$S \leq nz(\mathbb{K})$$

En regardant l'algorithme d'assemblage de la matrice on s'aperçoit qu'au plus $9T$ éléments sont non nuls, d'où $nz(\mathbb{K}) \leq 9T$. D'après l'inégalité obtenue précédemment et l'équation d'Euler on obtient :

$$3T \leq 2A = 2(S + T - 1)$$

d'où

$$T \leq 2S - 2$$

et donc

$$nz(\mathbb{K}) \leq 18S - 18.$$

Cela nous donne l'encadrement suivant :

$$S \leq nz(\mathbb{K}) \leq 18(S - 1). \tag{9}$$

Le nombre d'éléments non nuls croit donc avec S.

Remarque : la majoration obtenue n'est pas optimale, on peut en réalité montrer que $nz(\mathbb{K}) \leq 7S$.

5 Prise en compte de la condition de Dirichlet

La condition de Dirichlet imposée sur Γ_D peut être prise en compte de plusieurs façons. Nous présentons ici deux techniques couramment utilisées dans les codes d'éléments finis. Avant cela, introduisons l'ensemble $\mathcal{D}$ des indices des sommets appartenant au bord Γ_D et l'ensemble $\mathcal{I}$ des indices complémentaire.

En renumérotant les inconnues et les équations on peut réécrire par blocs la matrice de rigidité

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix},$$

le second membre $\vec{f} = (\vec{f}_{\mathcal{I}} \quad \vec{f}_{\mathcal{D}})^t$ ainsi que l'inconnue $\vec{t} = (\vec{t}_{\mathcal{I}} \quad \vec{t}_{\mathcal{D}})^t$.

5.1 Pseudo-élimination directe

Nous introduisons un nouveau système

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ O_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & I_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}_{\mathcal{I}} \\ \vec{t}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} \\ \vec{f}^{pel}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

où $(f^{pel}_{\mathcal{D}})_i = T^D(S_i)$, pour lequel la condition de Dirichlet est satisfaite de façon exacte (on a supposé que le support du terme source n'intersecte pas Γ_D). Il se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & O_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ O_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & I_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}_{\mathcal{I}} \\ \vec{t}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} - \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \vec{f}^{pel}_{\mathcal{D}} \\ \vec{f}^{pel}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Cette méthode est intéressante car ce système est facile à obtenir à partir du système initial ; la dimension du système n'est en particulier pas changée. On préférera résoudre (11) plutôt que (10) car la matrice du système est symétrique, ce qui est important pour un certain nombre de méthodes d'inversions.

5.2 Pseudo-élimination via un relèvement

La procédure ci-dessus présentée est correcte, mais il n'est pas évident de voir son lien avec la méthode utilisée pour montrer le caractère bien posé du problème exact (1). Comme pour le problème exact, nous introduisons un relèvement discret $\tilde{T}^{DN}$ pouvant être choisi de plusieurs manières. Par soucis de simplicité on choisit $\tilde{T}^{DN} = \sum_{i\in\mathcal{D}} T^D(S_i) w_i$. On écrit alors un nouveau problème dans l'inconnue $T^{N,0} := T^N - \tilde{T}^{DN}$ qui satisfait une condition de Dirichlet homogène sur Γ_D qu'on va imposer par pseudo-élimination. Le système s'écrit alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}^{\,0}_{\mathcal{I}} \\ \vec{t}^{\,0}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} \\ \vec{f}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{I}} \\ \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{D}}. \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} - \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{D}} \\ -\mathbb{K}_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

puisque $\vec{f}_{\mathcal{D}} = 0$ et $\vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{I}} = 0$. Procéder à une pseudo-élmininination donne alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ O_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & I_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}^{\,0}_{\mathcal{I}} \\ \vec{t}^{\,0}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} - \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{D}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

ce qui s'écrit de façon équivalente

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & O_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \\ O_{\mathcal{D}\mathcal{I}} & I_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}^{0}_{\mathcal{I}} \\ \vec{t}^{0}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{\mathcal{I}} - \mathbb{K}_{\mathcal{I}\mathcal{D}} \vec{\tilde{t}}^{DN}_{\mathcal{D}} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{14}$$

Il est important de préciser que contrairement à ce qui a été présenté dans la section précédente, une étape de post-traitement doit être effectuée pour obtenir la solution du problème initial une fois le système inversé. Il faut en effet rajouter le relèvement à la solution calculée.

5.3 Remarques

Ces méthodes donnent in-fine le même résultat, elles ne sont que deux façons de voir la même procédure sous deux aspects différents. La méthode proposée dans l'énoncé du projet correspond à ce qui est présenté en 5.1 (bien qu'il n'est pas question de relèvement dans 5.1, le système est rigoureusement le même).

6 Problème inverse

On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(\vec{\alpha}) = c - (\vec{\alpha}, \vec{b})_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}, \vec{\alpha})_{\mathbb{R}^n}$$

Invesibilité de $\mathbb{A}$

La matrice $\mathbb{A}$ est symétrique. De plus on a pour $\vec{\alpha} = (\alpha_r)_{1 \leq r \leq n} \in \mathbb{R}^n$ non nul :

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}\vec{\alpha}, \vec{\alpha})_{\mathbb{R}^n} &= \textstyle\sum_{1 \leq r,r' \leq n} \alpha_r \alpha_{r'} (\theta_r, \theta_{r'})_{L^2(\Omega_p)} + \beta \sum_{1 \leq r,r' \leq n} \alpha_r \alpha_{r'} \delta_{r,r'} \\ &= \big(\textstyle\sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_r \theta_r, \sum_{1 \leq r' \leq n} \alpha_{r'} \theta_{r'} \big)_{L^2(\Omega_p)} + \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_r^2 \\ &= \big\| \textstyle\sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_r \theta_r \big\|^2_{L^2(\Omega_p)} + \|\vec{\alpha}\|^2_{L^2(\Omega_p)} > 0. \end{aligned}$$

La matrice est symétrique définie positive donc inversible.

Existence et unicité d'un minimum global

Notons $\vec{\alpha}_m$ l'unique solution du système linéaire $\mathbb{A}\vec{\alpha}_m = \vec{b}$. Soit $\vec{\alpha}' \in \mathbb{R}^n$, nous avons en utilisant la symétrie de $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} J(\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}') &= J(\vec{\alpha}_m) - (\vec{b}, \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n} + \tfrac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n} + \tfrac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}', \vec{\alpha}_m)_{\mathbb{R}^n} + \tfrac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n} \\ &= J(\vec{\alpha}_m) + (\mathbb{A}\vec{\alpha}_m - \vec{b}, \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n} + \tfrac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n} \\ &= J(\vec{\alpha}_m) + \tfrac{1}{2}(\mathbb{A}\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{A}$ est définie positive nous avons $J(\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}') > J(\vec{\alpha}_m)$, et donc $J(\vec{\alpha}) > J(\vec{\alpha}_m)$ pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Nous venons de montrer que α_m solution de $\mathbb{A}\vec{\alpha}_m = \vec{b}$ réalise un minimum de J. Réciproquement, tout minimum $\vec{\alpha}$ de J satisfait la condition d'optimalité $\nabla J(\alpha) = 0$. Or on peut calculer que $\nabla J(\alpha) = \mathbb{A}\vec{\alpha} - \vec{b}$, qui ne s'annule qu'en $\vec{\alpha}_m$ puisque $\mathbb{A}$ est inversible. Ainsi J a un unique minimum atteint en $\vec{\alpha}_m$.

7 Téléchargements

https://perso.ensta-paris.fr/ pcarpent/MO102/Cours/Projets/Pr-calcul/
On peut les télécharger un terminal (évite de copier-coller à la main les maillages) :
wget -r -np -nd https ://perso.ensta-paris.fr/∼ pcarpent/MO102/Cours/Projets/Pr-calcul/

8 Planning

Voici quelques jalons à essayer de respecter pour finir le projet sereinement.

— séance 1 : TD1 + début du TD2
— séance 2 : TD2 + début du problème direct (lecture du maillage et construction de la matrice de rigidité)
— séance 3 : TD3 + (construction du second membre, élimination et résolution du système pour une et plusieurs résistances, validation)
— séance 4 : TD4 + début du problème inverse (construction de la matrice A)
— séance 5 : TD5 + (fin de la construction de A, calcul du second membre et résolution du problème inverse)
— séance 6 : optimisation globale du four (cette séance permet de ratrapper un peu un potentiel retard)
— séance 7 : soutenance

9 Critères d'évaluation

Le cours sera évalué sur la base d'une présentation (20% de la note) et d'une évaluation de votre travail tout le long du cours (80% de la note). La seconde partie de l'évaluation prendra en compte les points suivants (donnés à titre indicatif) :

code :
— lisibilité du code : commentaires, noms de variables qui parlent, aération du code...
— structuration du code : découpage du code en sous fonctions "élémentaires", présence d'un fichier main.cpp
— exploitation des fonctionnalités de matlab pour optimiser le code (matrices sparse, vectorisation,...)
— tests unitaires (= tests des briques élémentaires codées)

Investissement
— participation
— régularité du travail et atteinte des objectifs intermédiaires à chaque séance

Un travail régulier et sérieux devrait donner lieu à de bonnes voire très bonnes notes. Je tiendrai aussi compte de la particulière difficulté théorique de ce projet dans l'évaluation, il n'y a donc pas de soucis à se faire à ce sujet là.