$\boxed{\text{Partie } 1.1}$

Exercice 1.

Soit :
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla T) = f & \text{ds } \Omega \quad (1) \\ T = T^D & \text{sur } \Gamma_D \\ K\cdot\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_I. \quad (3) \end{cases}$$

Soit $v \in V_0$ (i.e. $v \in H^1(\Omega)$ et $v|_{\Gamma_D} = 0$).

en multipliant (1) par v et en intégrant, on a :
$$\int_\Omega -\operatorname{div}(K\nabla T)\, v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

D'après Green, $\displaystyle\int_\Omega -\operatorname{div}(K\nabla T)\, v \, d\Omega = + \int_\Omega K\nabla T \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_\Gamma K\cdot\frac{\partial T}{\partial n}\cdot v \cdot d\Gamma$

en séparant les bords : $\displaystyle\int_\Gamma K\frac{\partial T}{\partial n} v \, d\Gamma = \underbrace{\int_{\Gamma_I} K\cdot\frac{\partial T}{\partial n} v \, d\Gamma}_{= 0 \text{ d'après } (3)} + \underbrace{\int_{\Gamma_D} K\cdot\frac{\partial T}{\partial n} v \, d\Gamma}_{= 0 \text{ car } v|_{\Gamma_D} = 0.}$

Donc : $\displaystyle\int_\Omega f v \, d\Omega = \int_\Omega K\nabla T\cdot\nabla v \, d\Omega$

(2) : $T = T^D$ sur Γ_D.

donc $T = T^D + \alpha$ ac $\alpha \in V_0$

Ainsi

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla T) = f & \text{ds } \Omega \\ T = T^D & \text{sur } \Gamma_D \\ K\cdot\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_I. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } T \in \tilde{T}^D + V_0 \\ \displaystyle\int_\Omega K\nabla T\cdot\nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \quad \forall v \in V \end{cases}$$

08 / 12 / 23

Complément de sujet : Partie 2.1

Exercice 1 :

On a : $\begin{cases} \text{trouver } T \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega K \nabla T \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \quad , \forall v \in V_0 . \end{cases}$

On pose $\tilde{T}^D \in H^1(\Omega)$ telle que $\tilde{T}^D = T^D$ sur Γ_D. (bien définie par la surjectivité de trace).
Posons $T_0 = T - \tilde{T}^D$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \cdot\ T \in H^1(\Omega) \\ \ \ \tilde{T}^D \in H^1(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 \in H^1(\Omega). \\ \\ \cdot \text{ sur } \Gamma_D ,\ T_0 = T^D - T^D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{T_0 \in V_0}.$$

On va appliquer alors le théorème de Lax-Milgram :

- $a(T_0, v) = \int_\Omega K \cdot \nabla T_0 \cdot \nabla v \cdot d\Omega \quad , v \in V_0$
- $\ell(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega . \quad , v \in V_0 .$

- $|a(T_0, v)| \leqslant \|K\|_\infty \|\nabla T_0\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} \leqslant \|K\|_\infty \|T_0\|_{V_0} \cdot \|v\|_{V_0}$

  donc a est continue.

- $|a(v,v)| \geqslant \inf(K) \|\nabla T_0\|_{L^2} \geqslant C \cdot \|\nabla T_0\|_{V_0}$ (inégalité de Poincaré).

  donc a est coercive.

- $|\ell(v)| \leqslant \|f\|_{V_0} \cdot \|v\|_{V_0}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

  donc ℓ est continue.

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a unicité de la solution de la formulation variationnelle

Pour $T = T_0 + \tilde{T}^0$, on a le nouveau problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } T_0 \in V_0 \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega K \nabla T_0 \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega - \int_\Omega K \nabla \tilde{T}^0 \cdot \nabla v \, d\Omega \quad , \quad \forall v \in V_0 . \end{cases}$$

→ 1.3 : Mise en oeuvre : Maillage

⇒ code du maillage en matlab : ok (voir code).

Suite : Exercices :

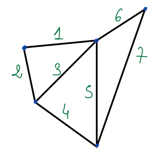
20 / 12 / 23

Exercice 2 :

Q 1) L'algorithme est en $O(T)$

En effet, la boucle for va de 1 à $T-2$, et à l'intérieur de la boucle on effectue uniquement des opérations élémentaires.

Q2) Prenons un exemple avec 3 triangles :

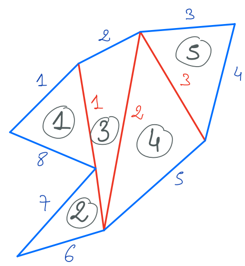


On a : $\begin{cases} T = 3 \\ A = 7 \end{cases}$

On a bien $3 \cdot T < 2 \cdot A$ $(9 < 14)$.

De manière générale, un triangle va partager au maximum 2 arêtes avec d'autres triangles. Et on aura les "bordures" du maillage qui seront uniques (non-partagées)

↳ Exemple avec $T = 5$:



— : bordure unique

— : bordure partagée.

↳ démo complète : partie 4 (compl. sujet)

Q3) On a $S < nz(\mathbb{K}) < 18(S-1)$

↑ nombre d'élém^t $\neq 0$ de la matrice de rigidité.

et on a même $nz(\mathbb{K}) \leqslant 7S$ comme majorat$^\circ$ optimale.

Donc on aura une majorité de 0 dans la matrice $\Rightarrow$ $\mathbb{K}$ creuse.

Exercice 3.

Rappel Notations :

- $g(\ell_0, k)$: n° du k^e sommet du triangle T_{ℓ_0}.
- $w_i(S_j) = \delta_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, P\}$.

On a $f = A_1 \cdot \delta_{M_1}$ où δ_{M_1} : masse de Dirac au point M_1.

donc $w_{g(\ell_0,k)}(S_j) = \delta_{g(\ell_0,k)j} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\ell_0,k) = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Le point M_1 a pour coordonnées (x_1, y_1).

↳ on suppose une erreur d'énoncé et $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$.

On cherche si M_1 est un sommet.

- si $i \notin g(\ell_0, k)$, alors $w_i(M_1) = 0$ (M_1 n'est pas un sommet ou M_1 n'$\notin$ au bon triangle)
- si $i \in g(\ell_0, k)$, alors i est le numéro du k^e sommet de T_{ℓ_0}.

  Alors $f_i = A_1 \cdot \delta_{M_1} = A_1 \cdot w_{i \cdot M_1} = A_1 \cdot w_{g(\ell_0,k)}(x_0, y_0)$.

Donc $\begin{cases} f_{g(\ell_0,k)} = A_1 \cdot w_{g(\ell_0,k)}(x_0, y_0) & \text{si } k = 1,3 \\ f_i = 0 & \text{si } i \notin g(\ell_0, k)_{1 \leq k \leq 3}. \end{cases}$

Exercice 4 :

- (5) $\mathbb{K}\vec{t} = \vec{f} - \vec{g}$

avec $\mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega K \cdot \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, d\Omega \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant N$

$$f_i = \int_\Omega f w_i \, d\Omega \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$g_i = \int_\Omega K \nabla \tilde{T}^{DN} \cdot \nabla w_i \, d\Omega \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

- (4) $T^N = \tilde{T}^{DN} + \sum_{j=1}^{N} t_j \cdot w_j$.

- (3) : $\left\{ \text{Trouver } T^N \in \tilde{T}^{DN} + V_0^N \text{ tq } \int_\Omega K \cdot \nabla T^N \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega \quad \forall v \in V_0^N . \right\}$

<u>But</u> : éliminer les lignes et colonnes tq $i \in \mathcal{D}$.

- $(\mathbb{K} \cdot \vec{t})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{K}_{ij} t_j = \underbrace{K_{ii} t_i}_{= \begin{cases} t_i \text{ si } i \in \mathcal{D} \\ \text{autre sinon} \end{cases}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_{ij} t_j}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } i \in \mathcal{D} \text{ ou } j \in \mathcal{D} \\ \text{autre sinon.} \end{cases}} = \begin{pmatrix} K_{II} & 0 \\ 0 & K_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_i \\ t_D \end{pmatrix}$

↳ si $i \in \mathcal{D}$, $(\mathbb{K}\vec{t})_i = t_i$.

- $(\vec{f} - \vec{g})_i = \begin{cases} T^0(S_i) & \text{si } i \in \mathcal{D} \\ \text{autre} & \text{sinon.} \end{cases}$

On sépare en les espaces I et $\mathcal{D}$ tq.

On réécrit $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{II} & 0_{ID} \\ 0_{DI} & I_{DD} \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} \vec{t}_I \\ \vec{t}_D \end{pmatrix}$; $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{f}_I \\ \vec{f}_D \end{pmatrix}$.

or, $\vec{g} = \underset{\text{ancien } \mathbb{K}}{\mathbb{K}}\vec{t}_D . = \begin{pmatrix} K_{II} & K_{ID} \\ K_{DI} & K_{DD} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{t}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ID}\vec{t}_D \\ K_{DD}\vec{t}_D \end{pmatrix}$.

$$\vec{f} - \vec{g} = \begin{pmatrix} \vec{f}_I - K_{ID}\vec{t}_D \\ \vec{f}_D - K_{DD}\vec{t}_D \end{pmatrix}$$

De plus, $\vec{c} = \vec{f} - \vec{g}$ et $c_i = \begin{cases} T^0(S_i) & \text{si } i \in D, \\ f_i - g_i & \text{sinon.} \end{cases}$

donc $\vec{f}_D - I_{DD}\vec{t}_D \overset{i \in D}{=} T^0(S_i) = \vec{f}_D^{\,pel}$

donc $\vec{f} - \vec{g} = \begin{pmatrix} \vec{f}_I - K_{ID}\vec{t}_D \\ \vec{f}_D^{\,pel} \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} K_{II} & 0 \\ 0 & I_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_I \\ t_D \end{pmatrix}$.

or $(\vec{t}_D)_i = T^0(S_i)$ si $i \in D$ donc $(\vec{t}_D)_i = (\vec{f}_D^{\,pel})_i$.

donc finalement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} K_{II} & 0 \\ 0 & I_{DD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_I \\ t_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_I - K_{ID}\vec{f}_D^{\,pel} \\ \vec{f}_D^{\,pel} \end{pmatrix}.}$$

On <u>valide bien la technique de pseudo-élimination.</u>