9.2 Tests para comparación de medias.

9.2.1 Dos muestras independientes.

En la sección anterior vimos tests para comparar la media de una población con un valor fijo μ_0. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, interesa comparar dos poblaciones. Por ejemplo, para evaluar el efecto de un tratamiento, se suele comparar un grupo de individuos al que se aplica el tratamiento con otro grupo al que se le aplica otro tratamiento o un placebo; en otros casos se comparan individuos expuestos a un factor de riesgo con otros que no lo están; o individuos sanos contra enfermos, etc.

Los procedimientos para realizar test para comparación de medias, son similares a los que vimos antes. Lo principal es encontrar el estadístico de prueba adecuado para cada situación.

Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ e independientes entre si.

Un estimador para $\mu_1 - \mu_2$ es $\overline{X} - \overline{Y}$ y sabemos que $\overline{X} - \overline{Y}$ tiene distribución $\mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$, entonces si deseamos contrastar hipótesis sobre $\mu_1 - \mu_2$, donde $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ el estadístico de prueba será:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}} \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}$$

Entonces, reumiendo como aneriormente:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $z = (\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0)/\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z > z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z < -z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$

En muchas situaciones solo interesa saber si las medias de las dos poblaciones son diferentes, en ese caso $\Delta_0 = 0$

Ejemplo 9.7 *Se realizó un estudio para determinar la resistencia a la ruptura de dos tipos de acero. Para una muestra aleatoria formada por* 20 *especímenes de acero laminado en frío la resistencia promedio muestral fue*

$\overline{x} = 29.8$ ksi. Al estudiar una segunda muestra aleatoria de 25 especímenes de acero galvanizado de dos lados se obtuvo una resistencia promedio muestral $\overline{y} = 32.7$ ksi. Se supone que las distribuciones de la resistencia a la ruptura de los dos tipos de acero son normales con $\sigma_1 = 4.0$ y $\sigma_2 = 5.0$ ¿Indican los datos que las medias de resistencia a la ruptura son diferentes para los dos tipos de acero?

En este caso el problema se plantea como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_A : \mu_1 \neq \mu_2$$

o en forma equivalente:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad\qquad H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

para este problema el estadístico de prueba será:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{16}{20} + \frac{25}{25}}}$$

y la regla de decisión:

$$\text{rechazar } H_0 \text{ si el valor} \mid z| = \frac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{\frac{16}{20} + \frac{25}{25}}} > z_{\alpha/2}$$

si elegimos un nivel de significación $\alpha = 0.05$, el punto crítico $z_{\alpha/2} = 1.96$. Entonces, reemplazando con los valores muestrales vemos que en este caso el valor del estadístico de prueba es:

$$z = \frac{29.8 - 32.7}{\sqrt{\frac{16}{20} + \frac{25}{25}}} = \frac{-2.90}{1.34} = -2.16$$

que cae en la zona de rechazo para este nivel 0.05

Si calculamos el valor-p

$$\begin{aligned} p &= P\left(|Z > 2.16|\right) = 1 - P\left(-2.16 < Z < 2.16\right) = \\ &= 1 - \left(\Phi\left(2.16\right) - \Phi\left(-2.16\right)\right) = 2 - 2\Phi(2.16) = 2 - 2 * 0.98460 = 0.0308 \end{aligned}$$

esto significa que, con un nivel $\alpha = 0.0308$, podemos afirmar que la resistencia a la ruptura de los dos tipos de acero es diferente.

Veamos ahora un ejemplo en el que tenemos dos muestras aleatorias de distribuciones normales, pero donde no conocemos las varianzas.

Ejemplo 9.8 *Se tienen las mediciones del nivel de hierro en la sangre de dos muestras de niños: un grupo de niños sanos y el otro padece fibrosis quística. Del primer grupo se tienen 9 mediciones , que dan* $\overline{x} = 18.9\mu mol/l$ *y* $s_1 = 5.9\mu mol/l$*, para el segundo grupo se tienen 13 mediciones que dan* $\overline{y} = 11.9\mu mol/l$ *y* $s_2 = 6.3\mu mol/l$*. Las mediciones de los niveles de hierro en sangre pueden representarse por las variables aleatorias* $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ *y* $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ *que son muestras aleatorias independientes de distribuciones normales* $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ *y* $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$*, donde la varianza es la misma. Puede ser de interés saber si estas dos medias son iguales o distintas.*

En este caso el problema se plantea como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_A : \mu_1 \neq \mu_2$$

o en forma equivalente

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad\qquad H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$\overline{X} - \overline{Y}$ es un estimador razonable para $\mu_1 - \mu_2$, que cuando las X_i y las Y_i tienen distribución normal, tiene distribución normal con

$$\mathrm{E}(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2 \text{ y } \mathrm{Var}(\overline{X} - \overline{Y}) = \sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2 = \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)$$

entonces si $\mu_1 = \mu_2$ el estadístico:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \text{ tiene distribución } \mathrm{N}(0, 1)$$

pero si no conocemos σ debemos reemplazarlo por un estimador, para este caso recordamos el estimador ponderado de la varianza

$$S_p^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2 + \sum(Y_i - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

que ya vimos que es insesgado y usaremos $S_p = \sqrt{S_p^2}$. Si reemplazamos σ por S_p, obtenemos el estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

que bajo la hipótesis nula tiene distribución de Student con n_1+n_2-2 grados de libertad.

La regla de decisión será:

rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ a favor de $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$, cuando $\dfrac{|\overline{x} - \overline{y}|}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} > t_{\alpha/2}$

donde el valor crítico $t_{\alpha/2}$ se busca en la tabla de la Student para $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

En el ejemplo que estamos analizando, tenemos los valores

$$n_1 = 9, n_2 = 13, \ \overline{x} = 18.9, \overline{y} = 11.9, \ s_1 = 5.9, s_2 = 6.3$$

Al reemplazar por los valores de la muestra obtenemos

$$s_p = \sqrt{\left(8 \times 5.9^2 + 12 \times 6.3^2\right)/20} = 6.14$$

y el valor del estadístico de prueba es $t = 2.63$. Si deseamos un nivel de significación $\alpha = 0.05$, el valor crítico para 20 grados de libertad es $t_{0.025} = 2.086$. Como el valor del estadístico de prueba cae en la zona de rechazo, se puede rechazar la hipótesis nula con nivel $\alpha = 0.05$, también podemos ver que el valor crítico $t_{0.01} = 2.528$ (para un test bilateral corresponde a $\alpha = 0.02$) y el $t_{0.005} = 2.845$ (corresponde a $\alpha = 0.01$), esto significa que podemos rechazar H_0 con nivel $\alpha = 0.02$, pero no con nivel $\alpha = 0.01$. Se suele decir que el resultado es significativo a nivel 0.02, o que $p < 0.02$.

Del mismo modo se pueden definir tests unilaterales.

Resumiendo este caso de comparación de medias. Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ e $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ dos muestras independientes de distribuciones $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ respectivamente (el σ es el mismo), entonces:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = \left(\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0\right)/s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t > t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t < -t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

grados de libertad $= n_1 + n_2 - 2$

En muchas aplicaciones, la suposición de que las varianzas de las dos poblaciones son iguales es poco realista.

Ejemplo 9.9 *Se tienen datos de la actividad total del complemento serológico en 10 sujetos enfermos:*

$$27.1 \quad 90.9 \quad 67.7 \quad 98.7 \quad 58.5 \quad 76.9 \quad 91.1 \quad 95.5 \quad 56.5 \quad 92.6$$

y 20 sujetos aparentemente normales:

$$\begin{array}{cccccccccc} 44.6 & 58.1 & 44.1 & 55.9 & 30.1 & 53.8 & 56.8 & 43.9 & 61.4 & 58.3 \\ 30.3 & 44.1 & 48.7 & 45.5 & 42.2 & 49.5 & 57.9 & 44.5 & 34.5 & 41.5 \end{array}.$$

Los representamos como variables $X_1, ..., X_{n_1}$ e $Y_1, ..., Y_{n_2}$ que tienen distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivamente. ¿Cuánta evidencia dan los datos para afirmar que las poblaciones de sanos y enfermos tienen distintas medias?

En este caso $\mathrm{Var}(\overline{X} - \overline{Y}) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$ y cuando $\mu_1 = \mu_2$ el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \text{ tiene distribución } \mathrm{N}(0, 1)$$

en este caso no podemos usar el S_p, estimador ponderado de la varianza, porque cada una es diferente, entonces el estadístico de prueba será:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \tag{26}$$

el problema es que no conocemos la distribución exacta de este estadístico. Cuando $\mu_1 = \mu_2$, la distribución de (26) se aproxima a una Student con ν grados de libertad, donde:

$$\nu = \frac{\left[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)\right]^2}{\left[(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)\right]} \tag{27}$$

Entonces definimos la siguiente regla de decisión:

rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ a favor de $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$, cuando $\dfrac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} > t_{\alpha/2}$

donde el valor crítico se busca en la tabla de Student con grados de libertad gl igual al entero más próximo a ν, calculado en (27)

En nuestro caso

$$n_1 = 10, n_2 = 20,\ \overline{x} = 75.57,\ \overline{y} = 47.30,\ \ \overline{x} - \overline{y} = 28.27$$

y

$$s_1 = 23.01,\ s_2 = 9.24,\ \ \nu = 11.64$$

tomamos $gl = 12$, para $\alpha = 0.05$ tenemos $t_{0.025} = 2.179$. El valor del estadístico es $t = 3.74$ que cae en la zona de rechazo. En este caso podemos ver que el valor crítico $t_{0.005} = 3.055$ (que corresponde a un nivel 0.01 para un test bilateral), esto nos indica que también se puede rechazar la hipótesis nula, con nivel $\alpha = 0.01$. También podemos decir que el valor$-p < 0.01$

Consideremos ahora otro ejemplo, donde definimos un test unilateral.

Ejemplo 9.10 *Se propone un tratamiento para la artritis reumatoide, que es aplicado a una muestra de 6 pacientes, a los que se mide la concentración de tiol en la sangre. Estos valores se comparan con los de 5 pacientes de control tratados con placebo.*

tratamiento	*1.95*	*2.10*	*2.05*	*1.92*	*2.56*	*2.30*
control	*2.81*	*3.62*	*3.27*	*2.35*	*3.67*	

¿Hay suficiente evidencia para afirmar que el tratamiento reduce los valores de tiol?. Llamamos μ_1 a la media de los pacientes que reciben placebo (controles) y μ_2 a la media de los pacientes que reciben el tratamiento.

Este caso se puede plantear como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_A : \mu_1 > \mu_2$$

Se utiliza el mismo estadístico de prueba y la regla de decisión es:

rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ a favor de $H_A : \mu_1 > \mu_2$, cuando $\dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} > t_\alpha$

Llamando x_i e y_i a los valores de control y tratamiento respectivamente, resulta:

$$n_1 = 5, n_2 = 6,\ \overline{x} = 3.14,\ \overline{y} = 2.15,$$

y

$$s_1 = 0.561, \ s_2 = 0.243$$

calculamos $\nu = 6.55$, de modo que debemos trabajar con 7 grados de libertad. El valor del estadístico de prueba es $t = 3.69$, si observamos en la tabla de Student para 7 grados de libertad, vemos que se puede rechazar la hipótesis nula hasta con nivel $\alpha = 0.005$, ya que $t_{0.005} = 3.499$.

Resumiendo este caso de comparación de medias. Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ e $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ dos muestras independientes de distribuciones $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivamente, entonces:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = (\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0) / \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t > t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t < -t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

grados de libertad = ν calculados en (27)

9.2.2 Muestras apareadas

La característica fundamental de las muestras apareadas, es que a cada observación en el primer grupo, le corresponde una en el segundo grupo. Generalmente se trata de dos mediciones realizadas a un mismo individuo en dos ocasiones; un ejemplo común es el experimento “antes y después”, donde a cada individuo se le realiza un examen antes de aplicar un tratamiento y se vuelve a realizar ese examen después del tratamiento. En otras ocasiones el investigador relaciona cada individuo de un grupo con otro individuo, que tenga muchas características en común; en algunos casos pueden ser hermanos gemelos, o simplemente individuos de la misma edad, sexo, con condiciones ambientales semejantes, etc.

Se utiliza el apareamiento para controlar fuentes de variación ajenas al experimento, que podrían influir en los resultados del mismo.

En este caso los datos no se presentan como dos muestras independientes, sino como una muestra de pares de variables aleatorias:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n),$$

que se supone que tienen distribución normal conjunta, con $\mathrm{E}X_i = \mu_1$ y $\mathrm{EY}_i = \mu_2$. Se calculan las diferencias:

$$D_1 = X_1 - Y_1, \;\; D_2 = X_2 - Y_2, \; ...... \; , D_n = X_n - Y_n$$

y se trabaja con estas diferencias como una muestra aleatoria de una distribución normal $\mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, donde $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Ejemplo 9.11 *Se dan los niveles de colesterol en suero para 12 sujetos, antes y después de un programa combinado de dieta y ejercicio. Se desea medir la efectividad del tratamiento para reducir el colesterol, expresada por la diferencia de valores medios entre "antes" y "después".*

Sujeto	antes	después	dif.
1	231	210	21
2	235	216	19
3	255	239	16
4	248	238	10
5	306	289	17
6	237	232	5
7	223	227	-4
8	237	223	14
9	239	240	-1
10	267	237	30
11	274	256	18
12	231	206	25

En este caso, en la última columna están calculas las diferencias "antes -después", considerando estas diferencias como una muestra aleatoria de una distribución normal, se puede realizar el test de Student para una muestra.

El problema queda planteado como:

$$H_0 : \mu_D = 0 \qquad\qquad H_A : \mu_D > 0$$

el estadístico de prueba será:

$$T = \frac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}}$$

donde

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} \qquad S_d = \sqrt{\frac{\sum(D_i - \overline{D})^2}{n-1}}$$

y la regla de decisión será:

$$\text{rechazar } H_0 : \mu_D = 0 \text{ a favor de } H_A : \mu_D > 0, \text{ cuando } \frac{\sqrt{n}\ \overline{d}}{s_d} > t_\alpha$$

donde el valor crítico se busca en la tabla de Student con n-1 grados de libertad. En nuestro ejemplo $\overline{d} = 14.17$, $s_d = 10.12$, y el valor del estadístico de prueba es $t = 4.85$, si observamos la tabla de Student en la fila correspondiente a $12 - 1 = 11$ grados de libertad, vemos que el valor del estadístico de prueba es mayor que todos los valores críticos que tenemos tabulados, el valor$-p < 0.0005$.

Veamos ahora un caso bilateral:

Ejemplo 9.12 *Se quiere comparar dos métodos de laboratorio. La concentración de plomo ($\mu g/l$) de cada una de cinco muestras es determinado por dos métodos diferentes, con los resultados que se muestran en la tabla*

muestra	1	2	3	4	5
oxidación húmeda	71	61	50	60	52
extracción directa	76	68	48	57	61

.

Si μ_D es la diferencia de medias entre los dos métodos, el problema se plantea como:

$$H_0 : \mu_D = 0 \qquad\qquad H_A : \mu_D \neq 0$$

La regla de decisión es:

$$\text{rechazar } H_0 : \mu_D = 0 \text{ a favor de } H_A : \mu_D \neq 0, \text{ cuando } \frac{\sqrt{n}\,\left|\overline{d}\right|}{s_d} > t_{\alpha/2}$$

si elegimos un nivel $\alpha = 0.05$, el valor crítico para $5-1 = 4$ grados de libertad es $t_{0.025} = 2.776$, de modo que la zona de rechazo es la región a la derecha de 2.776 y la región al la izquierda de -2.776.

Llamando d_i $(i = 1, ., 5)$ a las diferencias entre el primer método y el segundo, tenemos los valores

$$-5 \ -7\ 2\ 3\ -9,$$

de los que resulta

$$\overline{d} = -3.20, \ s_d = 5.40,$$

y en consecuencia, el valor del estadístico es $t = -1.32$, este valor no cae en la zona de rechazo. Si observamos la tabla de la Student, vemos que aún eligiendo un nivel menos exigente $\alpha = 0.10$, el valor crítico sería $t_{0.05} = 2.132$, y tampoco podríamos rechazar a ese nivel. La conclusión entonces es que no podemos afirmar que los dos métodos difieran.

Resumiendo este caso, cuando tenemos muestras apareadas, que es una muestra bidimensional, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$, con distribución normal conjunta, definiendo $D_i = X_i - Y_i$, estas D_i constituyen una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, entonces:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = \sqrt{n}\ (\overline{d} - \Delta_0)/s_d$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_D > \Delta_0$	$t > t_\alpha$
$H_A : \mu_D < \Delta_0$	$t < -t_\alpha$
$H_A : \mu_D \neq \Delta_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

grados de libertad $= n - 1$

9.2.3 Muestras grandes

Cuando tenemos dos muestras independientes, pero desconocemos la distribución de los datos, si las muestras son "grandes" se puede usar la aproximación del teorema del límite central como en el caso de una muestra.

En ese caso el estadístico de prueba es

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

que, cuando las medias de las dos poblaciones son iguales y n_1 y n_2 son "grandes", tiene una distribución aproximadamente $\mathrm{N}(0, 1)$

Resumiendo para el caso de muestras "grandes" con distribución desconocida. Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ e $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ dos muestras independientes con n_1 y n_2 grandes.

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$
Valor de estadístico de prueba: $z = (\ \overline{x} - \overline{y} - \Delta_0)/\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α aproximado
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z > z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z < -z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$

Si tenemos muestras apareadas grandes y no conocemos la distribución, también se calculan las diferencias y se trabaja como en el caso de una muestra grande aplicando el teorema del limite central.

Resumiendo, cuando tenemos muestras apareadas, que es una muestra bidimensional $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ con distribución desconocida, se definen $D_i = X_i - Y_i$, estas D_i constituyen una muestra aleatoria y si n es grande:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$
Valor de estadístico de prueba: $t = \sqrt{n}\ \overline{d}/s_d$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α aproximado
$H_A : \mu_D > \Delta_0$	$t > z_\alpha$
$H_A : \mu_D < \Delta_0$	$t < -z_\alpha$
$H_A : \mu_D \neq \Delta_0$	$t > z_{\alpha/2}$ o $t < -z_{\alpha/2}$

Práctica 7

1. Las personas que tienen síndrome de Reynaud están propensas a sufrir un deterioro de circulación sanguínea en los dedos de manos y pies. En un experimento para estudiar la magnitud de este deterioro, cada persona introdujo su dedo en agua y se midió la salida resultante de calor (cal/cm^2/min). Para 10 personas con el síndrome el promedio de la salida de calor fue $\overline{x} = 0.64$, y para 10 personas que no tienen ese padecimento el promedio de salida de calor fue $\overline{y} = 2.05$. Denotemos por μ_1 y μ_2 los verdaderos promedios de salida de calor para presonas con y sin el síndrome de Reynaud. Supongamos que las dos distribuciones son normales con $\sigma_1 = 0.2$ y $\sigma_2 = 0.4$

   (a) Pruebe $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = -1.0$ vs. $H_A : \mu_1 - \mu_2 < -1.0$ al nivel $\alpha = 0.01$ (H_A dice que la salida de calor para pacientes con esta enfermedad es más de 1 cal/cm^2/min abajo de la de quienes no la padecen)

   (b) Calcule el valor-p

2. Para uniones de espiga de dos tipos diferentes utilizados en la construcción de bastidores de madera, se determinó la fuerza de unión en plano (libras/pulgadas), teniendo el primer tipo mayor grosor de riel. Suponemos que la fuerza de unión sigue una distribución normal en ambos tipos de unión. Llamemos μ_1 y μ_2 a las respectivas medias y sean $\sigma_1 = 155$ y $\sigma_2 = 140$ las respectivas desviaciones típicas.
   Para 10 especímenes probados del primer tipo se obtuvo $\overline{x} = 1376.4$ y para 9 especímens del segundo tipo $\overline{y} = 1215.6$

   (a) Pruebe $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs. $H_A : \mu_1 - \mu_2 > 0$ con un nivel $\alpha = 0.05$

   (b) Calcule el valor-p

3. 22 animales experimentales con deficiencia de vitamina D se dividieron en dos grupos de 11. El grupo 1 recibió una dieta con contenido de vitamina D, y el 2 la dieta común. Luego se midió para cada animal el contenido de calcio en suero. Puede suponerse que el contenido de calcio en suero es una variable aleatoria con distribución normal, con la

misma varianza en ambos grupos. A continuación se listan los valores para cada grupo (en mg/100ml).

	n	$\overline{x}$	s
$G1$	11	10.95	1.25
$G2$	11	8.24	1.39

(a) Se desea determinar si la dieta rica en vitamina D aumenta el contenido de calcio en más de 2 unidades. Plantee las hipótesis pertinentes. Resuelva el problema para $\alpha = 0.05$

(b) Acote el valor-p

4. Para una muestra de 11 hombres se midieron los niveles de creatinina usando dos métodos diferentes, "A" y "B". Suponemos que los niveles de creatinina siguen una distribución normal

suj.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	7.92	8.03	6.87	7.00	7.28	6.94	8.32	7.58	7.88	7.83	10.26
B	8.04	7.71	6.54	6.96	7.62	6.95	8.25	7.46	8.17	7.84	9.79

(a) ¿Brindan estos datos evidencia suficiente para afirmar que los métodos A y B difieren?

(b) Acote el valor-p

5. Se cree que las personas infectadas por *E. canis* tienen, en promedio, un recuento de glóbulos blancos más bajo que los no infectados. Sabemos que el recuento de glóbulos blancos tiene distribución normal. Para una muestra de 15 personas infectadas, el recuento medio de glóbulos blancos es de $\overline{x} = 4767/mm^3$, y la desviación estandar es $s = 3204/mm^3$; para una muestra de 10 personas sanas estos valores son $7360/mm^3$ y $2415/mm^3$ respectivamente.

(a) ¿Brindan estos datos evidencia que confirme la hipótesis planteada?

(b) Acote el valor-p

6. Para 10 animales experimentales se registró la frecuencia cardíaca (latidos por minuto) antes y después de ser sometidos a un experimento (la distribución de la frecuencia cardíaca se supone normal); los datos son

animal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
antes	70	84	88	110	105	100	110	67	79	86
después	115	148	176	191	158	178	179	140	161	157

¿Se puede concluir que el experimento produce un aumento de la frecuencia cardíaca media?

7. La siguiente tabla compara los niveles de carboxihemoglobina de un grupo de no fumadores y un grupo de fumadores de cigarrillos. Se presentan las medias y desviaciónes típicas muestrales. Si llamamos μ_1 al nivel medio de carboxihemoglobina en los fumadores y μ_2 en los no fumadores, se pretende probar que $\mu_1 - \mu_2 > 2$

Grupo	**n**	**Carboxihemoglobina (%)**
Fumadores	65	$\overline{x}_1 = 4.4, \;\; s_1 = 2.0$
No fumadores	58	$\overline{x}_2 = 1.6, \;\; s_2 = 1.3$

   (a) Plantee las hipótesis y resuleva el prolema para un $\alpha = 0.05$

   (b) Calcule el valor-p aproximado

8. Como parte de un estudio para determianr si la exposición al DDT, está asociada con el cáncer de mama, se seleccinó una muestra de mujeres a las que se les diagnosticó cancer y un grupo testigo de mujeres sanas relacionadas a las pacientes de cáncer en lo que se refiere a varias características, como: edad, condición de fumadora, etc. A cada mujer se le tomó una muestra de sangre y se midió el nivel de DDE (un derivado del DDT en el cuerpo humano), y se calculó la diferencia de niveles de cada paciente y su control asociado. Para las 171 diferencias se obtuvo una media de $\overline{d} = 2.7ng/ml$ y una desviación típica de $s = 15.9ng/ml$. ¿Se puede inferir de estos datos que los niveles de DDE difieren en el grupo de mujeres con cáncer de mama y el grupo de mujeres sanas?