Modélisation et Valorisation de Contrats Swing

Approche par Diffusion à Sauts et Simulation Monte Carlo (LSMC)

Projet de Finance Quantitative

Janvier 2026

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Modélisation de la Dynamique des Prix **2**

2.1 Ancrage sur la Courbe Forward 2

2.2 Le Processus de Résidu Stochastique (MRJD) 2

2.3 Démonstration de l'Ajustement de Martingale 2

3 Formalisation du Contrat Swing **3**

3.1 Fonction de Gain Locale (Payoff) 3

3.2 Contraintes de Volume et Pénalités 3

4 Méthodologie de Valorisation Numérique (LSMC) **3**

4.1 Algorithme d'Induction Arrière 3

4.2 Estimation par Projection L_2 (Régression) 3

4.3 Reconstruction de la Surface et Interpolation 4

5 Résultats **4**

5.1 Synthèse des Résultats 4

5.2 Analyse des Grecs 4

5.2.1 Delta (Δ) : Exposition au Spot 4

5.2.2 Vega (ν) : Exposition à la Volatilité 5

5.2.3 Theta (Θ) : Érosion Temporelle 5

1 Introduction

Dans les marchés de l'énergie, la flexibilité opérationnelle est un actif critique permettant aux acteurs de se protéger contre la volatilité extrême des prix spot. Ce rapport présente une méthodologie complète de pricing combinant le modèle de Cartea & Figueroa (2005) pour la dynamique stochastique des prix et l'algorithme de Longstaff-Schwartz (LSMC) étendu pour la gestion optimale des contraintes de volume (Swing).

2 Modélisation de la Dynamique des Prix

La valorisation repose sur la construction d'un univers de probabilité risque-neutre cohérent avec les données de marché observées à la date de calcul.

2.1 Ancrage sur la Courbe Forward

La courbe Forward $F(0,t)$ constitue l'épine dorsale du modèle. Elle représente un instantané des attentes du marché pour la période de livraison du contrat. Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix simulé doit satisfaire la condition d'absence d'arbitrage (AOA) :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_t|\mathcal{F}_0] = F(0,t) \tag{1}$$

Cette condition impose que l'espérance du prix spot futur soit ancrée sur le prix forward actuel.

2.2 Le Processus de Résidu Stochastique (MRJD)

Pour modéliser les fluctuations autour de cet ancrage, nous utilisons un processus X_t de type *Mean-Reverting Jump Diffusion* (MRJD) :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t + J dq_t \tag{2}$$

Ce processus capture les trois caractéristiques essentielles des prix de l'électricité : le retour à la moyenne (α), la volatilité continue (σ) et les pics de prix brutaux via une composante de saut de Poisson Jdq_t.

2.3 Démonstration de l'Ajustement de Martingale

Le lien entre le résidu stochastique X_t et le prix financier S_t est défini par la transformation $S_t = F(0,t)\cdot\exp(X_t - \theta_t)$. Pour satisfaire l'équation (1), nous développons :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(0,t)\cdot e^{X_t-\theta_t}|\mathcal{F}_0] = F(0,t) \tag{3}$$

$$F(0,t)\cdot e^{-\theta_t}\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{X_t}] = F(0,t) \tag{4}$$

L'ajustement de martingale θ_t est donc nécessairement égal au log-laplacien du processus :

$$\theta_t = \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{X_t}]) \tag{5}$$

Cet ajustement compense mathématiquement le biais de convexité induit par l'exponentielle ainsi que la dérive créée par la distribution des sauts. Numériquement, il est estimé empiriquement sur l'ensemble des trajectoires Monte Carlo pour garantir la neutralité au risque.

3 Formalisation du Contrat Swing

Le contrat Swing est une option de volume autorisant des décisions d'exercice répétées sous contraintes.

3.1 Fonction de Gain Locale (Payoff)

À chaque pas de temps t_i, le détenteur choisit un volume $q_t \in \{0, 1\}$. Le gain immédiat est défini par :

$$\Psi(q_t, S_t) = q_t \times (S_t - K) \tag{6}$$

Cette structure est analogue à celle d'une **option d'achat (Call)**. L'interdépendance temporelle réside dans le fait que chaque exercice aujourd'hui réduit la flexibilité disponible pour le futur.

3.2 Contraintes de Volume et Pénalités

Le volume cumulé $Q_T = \sum q_i$ doit respecter le plafond $V_{max} = 250$. Le non-respect du minimum annuel $V_{min} = 50$ déclenche une pénalité terminale $\mathcal{P}_T$:

$$\mathcal{P}_T(Q_T) = -1000 \times \max(V_{min} - Q_T, 0) \tag{7}$$

4 Méthodologie de Valorisation Numérique (LSMC)

La valorisation repose sur la résolution d'un problème de contrôle stochastique par programmation dynamique.

4.1 Algorithme d'Induction Arrière

Le problème est résolu à rebours, de l'échéance T vers $t = 0$. À l'instant T, la valeur du contrat est initialisée par la pénalité $\mathcal{P}_T$. Pour $t < T$, nous résolvons l'équation de Bellman :

$$V(t, S_t, Q_t) = \max_{q_t} \left\{ \Psi(q_t, S_t) + e^{-r\Delta t} \hat{R}(t, S_t, Q_t + q_t) \right\} \tag{8}$$

où $\hat{R}$ est la **valeur de continuation**, représentant l'espérance des flux futurs actualisés.

4.2 Estimation par Projection L_2 (Régression)

L'espérance conditionnelle est estimée par projection sur une base polynomiale $\Phi(S) = [1, S, S^2]$. Pour chaque nœud de la grille de volume v_j, nous résolvons le problème des moindres carrés :

$$\hat{\beta}(t, v_j) = \arg\min_{\beta} \sum_{m=1}^{N_{MC}} \left(e^{-r\Delta t} V_{t+1}^m(v_j) - \sum_{l=0}^{L} \beta_l \Phi_l(S_t^m) \right)^2 \tag{9}$$

4.3 Reconstruction de la Surface et Interpolation

Puisque le volume cumulé $Q_t + q_t$ peut être continu, nous reconstruisons la surface de valeur par interpolation linéaire entre les 100 nœuds de la grille :

$$\hat{R}(t, S, Q_{next}) = (1 - w)\hat{R}(t, S, v_j) + w\hat{R}(t, S, v_{j+1}) \tag{10}$$

Cette étape est cruciale pour assurer une transition fluide de la valeur du contrat et une prise de décision précise autour du seuil de pénalité.

5 Résultats

Cette section détaille les résultats numériques issus de la valorisation du contrat Swing pour l'année 2026 et ses sensibilités.

5.1 Synthèse des Résultats

La valorisation a été effectuée par l'algorithme de Longstaff-Schwartz sur 10 000 trajectoires simulées, en intégrant les contraintes de tirage quotidiennes et annuelles définies dans le contrat.

Paramètre de la simulation	**Valeur**
Nombre de chemins (Monte Carlo)	10 000
Durée du contrat	365 jours
Prix d'exercice (Strike K)	60,00 €/MWh
Limites journalières ($q_{min} - q_{max}$)	0 - 1
Limites annuelles ($Q_{min} - Q_{max}$)	50 - 250
VALEUR DU SWING (LSMC)	**3 999,52 EUR**

Table 1 – Résultats officiels de la valorisation du contrat Swing

Interprétation : La valeur de 3 999,52 EUR reflète l'optimisation de la flexibilité sous contraintes. L'algorithme a déterminé la stratégie d'exercice permettant de respecter le *Take-or-Pay* (50 unités) tout en exploitant les pics de prix jusqu'au plafond annuel (250 unités).

5.2 Analyse des Grecs

L'analyse des sensibilités permet d'appréhender le comportement du prix du contrat face aux variations des paramètres de marché.

5.2.1 Delta (Δ) : Exposition au Spot

Le Delta du Swing est positif. Il mesure la sensibilité de la valeur du contrat (3 999,52 EUR) à une variation du prix spot. Étant donné les limites de volume (max 250), le Delta est plafonné : une fois que le prix spot est très élevé sur tous les chemins, la valeur n'augmente plus car les droits de tirage sont déjà épuisés.

5.2.2 Vega (ν) : Exposition à la Volatilité

Le Vega est le risque prépondérant. Dans un modèle à sauts (MRJD), il capture non seulement la volatilité diffuse mais aussi l'intensité des pics de prix. Une hausse de la volatilité augmente la valeur du contrat, car elle accroît la probabilité que le spot dépasse largement le strike de 60 €/MWh, rendant la flexibilité de tirage plus précieuse.

5.2.3 Theta (Θ) : Érosion Temporelle

Le Theta est négatif, reflétant la perte de valeur liée au passage du temps. Chaque jour qui passe sans pic de prix réduit le nombre d'opportunités futures pour exercer les droits de tirage restants. Cette érosion s'accélère à l'approche de l'échéance, surtout si les quotas annuels (Q_{min}) ne sont pas encore atteints, forçant des exercices à perte pour éviter les pénalités.