## Optymalizacja – programowanie dynamiczne

**Programowanie dynamiczne** jest metodą służącą do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. Charakteryzuje się tym, że chcąc uzyskać rozwiązanie głównego problemu, wykonujemy mniejsze zadania. Nie wiedząc, który z wyników będzie potrzebny w danym momencie, przygotowuje się wszystkie możliwe rozwiązania podproblemów. W metodzie dynamicznej wykorzystywana jest **zasada optymalności Bellmana**. Według niej, podejmując kolejne decyzje, należy wybierać rozwiązanie najlepsze w danym momencie z jednoczesnym uwzględnieniem efektów poprzednich działań.

Analizę tej metody przeprowadzimy na przykładzie poznanego na ostatnich zajęciach **problemu plecakowego**. W tym celu będziemy uwzględniali coraz mniejszą liczbę przedmiotów, spośród których możemy dokonywać wyboru, jak również mniejszą pojemność plecaka. Metoda ta nie wymaga ponadto porządkowania przedmiotów, które będziemy pakować do plecaka. Realizację algorytmu plecakowego w wersji dynamicznej podzielimy na dwa etapy:

- wypełnianie tablic zawierających wszystkie możliwe wyniki,
- odczytywanie wyników z przygotowanych w pierwszej fazie tablic.

Rozwiązanie dynamiczne problemu plecakowego wymaga zastosowania dwóch dodatkowych tablic:

1. `Wartosci[1...n][1...waga]` – tablica wartości, w której `Wartosci[i][j]` to wartość optymalnego zapakowania plecaka o pojemności `j` przedmiotami, których numery zawarte są w przedziale `[1; i]`.
2. `Numery[1...n][1...waga]` – tablica przedmiotów, zawierająca numery przedmiotów dołożonych w ostatnim dopakowaniu plecaka.

Elementy tych tablic wyznaczane są wierszami. W każdym kolejnym kroku należy dokonywać takiego wyboru, który jest najlepszy, z uwzględnieniem wcześniejszych decyzji.

**Przykład P0.**
W poniższej tabeli wyszczególniono dostępne przedmioty, który możemy spakować do plecaka o maksymalnej pojemności `11` jednostek. Liczba każdej z tych rzeczy jest nieograniczona.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$<br>(numer przedmiotu) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $W[i]$<br>(wartość przedmiotu o numerze $i$) | 8 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| $C[i]$<br>(waga przedmiotu o numerze $i$) | 4 | 2 | 1 | 3 | 7 |

Na tej podstawie konstruujemy najpierw tablicę wartości `Wartosci[1...5][1...11]`, a następnie tablicę przedmiotów `Numery[1...5][1...11]`.

Zaczynamy od przedmiotu nr `1`, który waży `4` jednostki i ma wartość równą `8`, więc pola o indeksach `j` od `1` do `3` (oznaczających wagę plecaka) muszą mieć wartość zerową, aż do indeksu `j` równego `4`, bo dopiero dla takiej dopuszczalnej wagi plecaka możemy dołożyć do niego jeden przedmiot numer `1`. Począwszy od indeksu `j` równego `8` możemy włożyć do plecaka dwa przedmioty nr `1`, więc jego wartość wzrośnie do `16` i do końca pierwszego wiersza nie zmieni się, bo maksymalna waga plecaka wynosi tylko `11`.

W drugim wierszu zajmujemy się już dwoma przedmiotami, tj. pierwszym i drugim, a ponieważ drugi przedmiot ma wagę równą `2`, więc pole z indeksem `j` równym `1` musi mieć wartość zerową. W kolejnych dwóch polach drugiego wiersza wkładamy do plecaka tylko jedną sztukę przedmiotu nr `2`, który ma wartość `3`. Natomiast w polu o indeksie równym `4` moglibyśmy teoretycznie włożyć dwa przedmioty nr `2` o sumarycznej wadze równej `4`, ale ich łączna wartość wyniosłaby w takim wypadku `6`, więc lepiej włożyć do plecaka jeden przedmiot nr `1`, który również ma wagę równą `4`, ale wartość równą `8`. Dla wagi równej `6` możemy sobie pozwolić na włożenie do plecaka jednego przedmiotu nr `1` oraz jednego przedmiotu nr `2`, dzięki czemu w tym momencie wartość plecaka wyniesie `11`. Takie rozumowanie musimy przeprowadzić w kolejnych wierszach do końca tej tabeli. Zwróćmy uwagę, że dzięki takiemu postępowaniu akurat w tym zadaniu w ogóle nie będziemy wykorzystywali przedmiotów nr `4` i nr `5`.

`Wartosci[1...n][1...waga]`

| ***i*** \ ***j*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***10*** | ***11*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | 0 | 0 | 0 | 8 | 8 | 8 | 8 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| ***2*** | 0 | 3 | 3 | 8 | 8 | 11 | 11 | 16 | 16 | 19 | 19 |
| ***3*** | 1 | 3 | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 | 16 | 17 | 19 | 20 |
| ***4*** | 1 | 3 | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 | 16 | 17 | 19 | 20 |
| ***5*** | 1 | 3 | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 | 16 | 17 | 19 | 20 |

Drugą tabelę, która ma identyczną strukturę wierszy i kolumn wypełniamy w taki sposób, że w kolejne pola wpisujemy numery przedmiotów, które w danym momencie wkładamy do plecaka. W wierszu pierwszym, dotyczącym przedmiotu nr `1`, może wystąpić tylko ten przedmiot. W wierszu drugim bierzemy pod uwagę przedmioty nr `1` oraz nr `2`, w wierszu trzecim przedmioty nr `1`, `2` i `3` itd. Dla przykładu w polu `Numery[2][8]` mamy wartość równą 1, bo ostatnim włożonym do plecaka przedmiotem był przedmiot nr `1`. Oczywiście wcześniej, czyli w polu `Numery[2][7]`, w plecaku był jeden przedmiot nr `1` i jeden przedmiot numer `2`, o łącznej wadze `6` i łącznej wartości `11`, ale ponieważ uznaliśmy, że – w celu maksymalizacji wartości plecaka – dla dopuszczalnej wagi równej `8` lepiej wyjąć z plecaka przedmiot numer `2` i włożyć w jego miejsce drugi przedmiot nr `1`, więc w tabeli znalazła się właśnie wartość `1`.

`Numery[1...n][1...waga]`

| *j* / *i* | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **3** | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| **4** | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| **5** | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |

Po wypełnieniu obu tablic przechodzimy do odczytywania wyników. Najpierw w tablicy `Wartosci[1...5][1...11]` wyszukujemy maksymalną wartość plecaka. W tym przykładzie jest to to pole `Wartosci[5][11]`, gdzie indeks `5` określa liczbę dostępnych przedmiotów, natomiast `11` to maksymalna waga plecaka. Maksymalna wartość zapakowanych do plecaka rzeczy wynosi więc `20`.

Przedmioty, które zostały zapakowane do plecaka, odczytujemy z tablicy `Numery[1...5][1...11]`. Zaczynamy od pola o tych samych indeksach, co dla maksymalnej liczby w tabeli `Wartosci`, zatem w tym wypadku będzie to `Numery[5][11]`, gdzie znajdujemy liczbę `3`, (czyli przedmiot nr `3` o wadze równej `1`), która określa numer rzeczy dołożonej do plecaka jako ostatnia.

W celu ustalenia numeru przedostatnio włożonej do plecaka rzeczy od maksymalnej wagi plecaka, czyli `11`, odejmujemy wagę ostatnio włożonego przedmiotu, czyli `1`. Dzięki temu uzyskamy wartość `10`, która określa wagę plecaka przed włożeniem tego przedmiotu. Następnie odnajdujemy pole `Numery[5][10]`, w którym odczytujemy numer kolejnego przedmiotu zapakowanego do plecaka, czyli rzeczy nr `2`, o wadze równej `2`. Zatem kolejnym polem będzie `Numery[5][8]`, z którego wynika, że poprzednio dołożonym przedmiotem była rzecz nr `1`, o wadze `4`. I tak kontynuujemy opisane działania, aż do wyczerpania pojemności plecaka. W tym zadaniu polem kończącym będzie pole `Numery[5][4]` (bo pole `Numery[5][0]` nie istnieje), z którego wynika, że pierwszym włożonym do plecaka przedmiotem była rzecz nr `1`, o wadze `4` i wartości `8`. Faktycznie, aby uzyskać maksymalną wartość plecaka, kolejność rzeczy wkładanych do plecaka musiała być następująca: przedmiot nr `1`, potem drugi przedmiot nr `1`, następnie przedmiot nr `2` i na końcu przedmiot nr `3`. W warunkach tego zadania nie było lepszego sposobu zapakowania plecaka. Zwróć też uwagę, że maksymalna wartość plecaka, czyli liczba `20`, powtarza się w trzech ostatnich wierszach ostatniej kolumny. Stało się tak dlatego, że akurat w tym zadaniu nie wykorzystaliśmy ani jednej sztuki przedmiotów nr `4` i nr `5`. Cała analiza byłaby więc poprawna także wtedy, gdybyśmy zaczęli ją przeprowadzać od pola `Numery[3][11]`, bo wiersze `3`, `4` i `5` są identyczne. Możesz też sprawdzić, że gdybyśmy zmienili numerację przedmiotów, to ostateczny wynik byłby taki sam.

Na podstawie powyższego opisu można skonstruować listę kroków algorytmu, a następnie zakodować go w postaci programu komputerowego.

**K0.** Wczytaj wartości danych `n`, `W[1...n]`, `C[1...n]`, `waga`.

**K1.** Przypisz elementom zawartym w kolumnie numer `0` i w wierszu numer `0` w tablicach `Wartosci[0...n][0...waga]` i `Numery[0...n][0...waga]` wartość `0`.

**K2.** Dla kolejnych wartości `i: 1, 2,..., n` wykonuj krok 3.

**K3.** Dla kolejnych wartości `j: 1, 2,..., n` wykonuj krok 4.

**K4.** Jeśli `j > C[i]` i `Wartosci[i-1][j] < Wartosci[i][j-C[i]] + W[i]`, to przypisz `Wartosci[i][j] = Wartosci[i][j-C[i]] + W[i]`, `Numery[i][j] = i`. W przeciwnym wypadku przypisz `Wartosci[i][j] = Wartosci[i-1][j]`, `Numery[i][j] = Numery[i-1][j]`.

**K5.** Wypisz maksymalną wartość zapakowanego plecaka z tablicy `Wartosci[1...n][1...waga]` i przedmioty zapakowane do plecaka z tablicy `Numery[1...n][1...waga]`.

**K6.** Zakończ algorytm.

Ciekawie wypada porównanie metody zachłannej z metodą dynamiczną. Weźmy pod uwagę przykład innego, bardziej skomplikowanego plecaka, o dopuszczalnym ciężarze całkowitym 23, do którego możemy zapakować 6 różnych przedmiotów.

| $i$ (numer przedmiotu) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $C$ (ciężar całkowity) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W[i]$ (wartość przedmiotu o numerze $i$) | 6 | 4 | 5 | 7 | 10 | 2 | |
| $C[i]$ (waga przedmiotu o numerze $i$) | 6 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 23 |

Korzystając z metody zachłannej budujemy nierosnące proporcje wartości do wagi, czyli: $\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{6}{6}$, co wynika z wzięcia pod uwagę kolejno przedmiotów o numerach 4, 5, 2, 6, 3, 1.

Z istoty tej metody wynika wniosek, że do plecaka należy zapakować 11 przedmiotów o numerze 4 i łącznej wadze 22 oraz jeden przedmiot numer 6 o wadze 1. Dzięki takiemu postępowaniu plecak wypełnimy dokładnie cały plecak $11 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 23$, który uzyska wartość $11 \cdot 7 + 1 \cdot 2 = 79$. Czy jest to najlepsze (optymalne) rozwiązanie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zastosować metodę dynamiczną, opartą o zasadę optymalności Bellmana. Najpierw zbudujmy tablicę wartości.

| ***j***<br>***i*** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| **2** | 0 | 4 | 4 | 8 | 8 | 12 | 12 | 16 | 16 | 20 | 20 | 24 | 24 | 28 | 28 | 32 | 32 | 36 | 36 | 40 | 40 | 44 | 44 |
| **3** | 0 | 4 | 5 | 8 | 9 | 12 | 13 | 16 | 17 | 20 | 21 | 24 | 25 | 28 | 29 | 32 | 33 | 36 | 37 | 40 | 41 | 44 | 45 |
| **4** | 0 | 7 | 7 | 14 | 14 | 21 | 21 | 28 | 28 | 35 | 35 | 42 | 42 | 49 | 49 | 56 | 56 | 63 | 63 | 70 | 70 | 77 | 77 |
| **5** | 0 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 45 | 49 | 52 | 56 | 59 | 63 | 66 | 70 | 73 | 77 | 80 |
| **6** | 2 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 45 | 49 | 52 | 56 | 59 | 63 | 66 | 70 | 73 | 77 | 80 |

Już w tym momencie widać, że dzięki metodzie dynamicznej udało się uzyskać większą wartość plecaka, tj. 80 zamiast wcześniejszej wartości 79. Aby dowiedzieć się, jak to jest możliwe, budujemy tablicę numerów przedmiotów, które trzeba zapakować do plecaka.

| ***j***<br>***i*** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **3** | 0 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| **4** | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **5** | 0 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| **6** | 6 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |

Odczytując dane z tabeli numerów przedmiotów wyciągamy wniosek, że przedmiot nr 5 powinien być ostatni zapakowany do plecaka. Poza tym przedmiotem plecak należy wypełnić samymi przedmiotami nr 4, których powinno być 10. Postępując w ten sposób wypełnimy dokładnie cały plecak $10 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 23$, a jego wartość wyniesie $10 \cdot 7 + 1 \cdot 10 = 80$. Z porównania obu metod wynika więc wniosek, że metoda dynamiczna – mimo że bardziej pracochłonna – może prowadzić do lepszego rezultatu końcowego niż metoda zachłanna.

**Optymalizacja – narzędzie *Solver***

MS Excel oferuje użytkownikom potężne narzędzie o nazwie *Solver* (jest to dodatek i nie znajdzie się go po standardowej instalacji). Nadaje się on do rozwiązywania różnych problemów, w tym optymalizacyjnych, zwłaszcza poszukiwania tzw. funkcji celu. *Solver* posiada następujące możliwości:

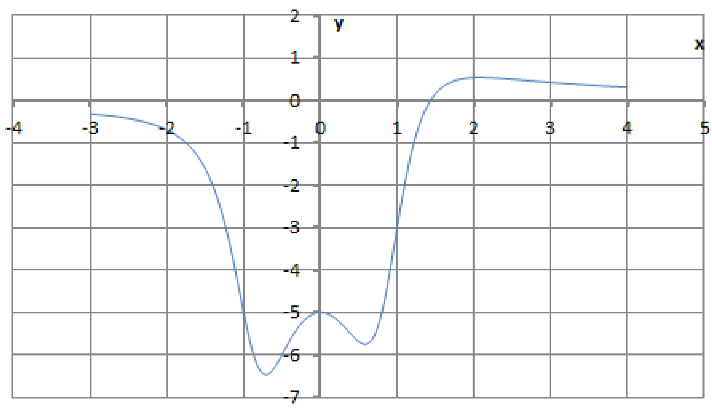
- dopuszcza określenie większej liczby zmieniających się komórek wejściowych;
- ogranicza problem dodatkowymi założeniami odnoszącymi się do sposobu zmian komórek wejściowych;
- generuje rozwiązania znajdujące maksimum lub minimum określonej komórki arkusza;
- znajduje wiele rozwiązań danego zadania.

**Przykład P1.**
W przedziale $[-3, 4]$ sporządź wykres oraz znajdź wszystkie ekstrema i miejsca zerowe funkcji korzystając z narzędzia *Solver* arkusza kalkulacyjnego MS Excel.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^4 - x^2 + 1}$$

Przed zbadaniem funkcji najlepiej utworzyć jej przybliżony wykres. W związku z tym najpierw utwórz tabelę, w której znajdą się argumenty i wartości funkcji zmieniające się co 0,1 i na jej podstawie utwórz wykres. Powinieneś uzyskać efekt podobny do poniższego.

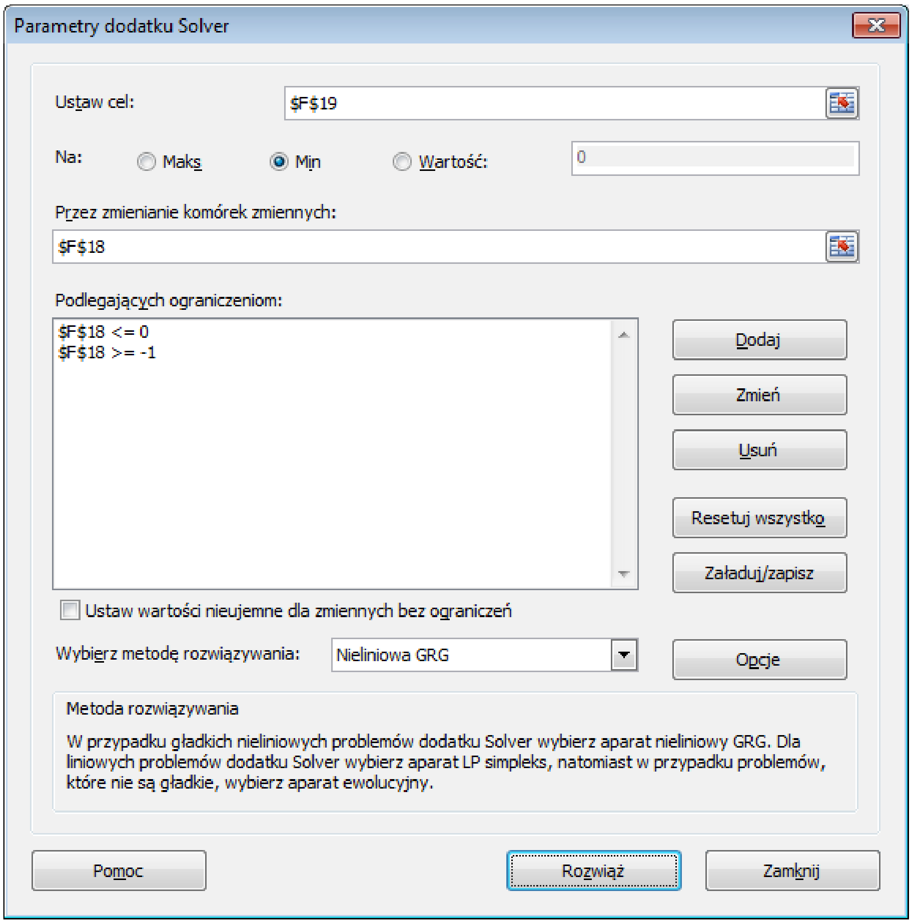
| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | **x** | **f(x)** |
| 2 | -3 | -0,31507 |
| 3 | -2,9 | -0,33133 |
| 4 | -2,8 | -0,34987 |
| 5 | -2,7 | -0,37122 |
| 6 | -2,6 | -0,39602 |
| 7 | -2,5 | -0,42514 |
| 8 | -2,4 | -0,45972 |
| 9 | -2,3 | -0,50126 |
| 10 | -2,2 | -0,55183 |
| 11 | -2,1 | -0,61422 |
| 12 | -2 | -0,69231 |
| 13 | -1,9 | -0,79149 |
| 14 | -1,8 | -0,9194 |
| 15 | -1,7 | -1,0868 |
| 16 | -1,6 | -1,30888 |
| 17 | -1,5 | -1,60656 |
| 18 | -1,4 | -2,00722 |
| 19 | -1,3 | -2,54236 |
| 20 | -1,2 | -3,23702 |
| 21 | -1,1 | -4,08341 |
| 22 | -1 | -5 |




Jak widać badana funkcja ma w zadanym przedziale dwa minima i dwa maksima oraz jedno miejsce zerowe. Najpierw zajmijmy się minimami. W tym celu przygotuj w arkuszu miejsce dla pierwszego minimum.

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 17 | Minimum funkcji w przedziale od -1 do 0 | | | |
| 18 | x | | | |
| 19 | f(x) | | | |
| 20 | | | | |

Komórkę `F18` pozostaw na razie pustą (tutaj *Solver* wpisze swoje rozwiązanie). Natomiast do komórki `F19` wpisz formułę: `=(F18^3+F18^2-5)/(F18^4-F18^2+1)`. Teraz przejdź do karty *Dane* i uruchom *Solver*. Wypełnij kartę *Solvera* w poniższy sposób:




Po kliknięciu na przycisk *Rozwiąż*, na ekranie powinno pojawić się rozwiązanie.

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 17 | Minimum funkcji w przedziale od -1 do 0 | | | |
| 18 | x | -0,71071 | | |
| 19 | f(x) | -6,47161 | | |
| 20 | | | | |

W komórce `F18` pojawiło się rozwiązanie, czyli wartość argumentu $x$, dla którego badana funkcja osiąga swoje pierwsze minimum lokalne, a w komórce `F19` wartość tego minimum. Proces poszukiwania kolejnego minimum oraz dwóch maksimów wygląda bardzo podobnie.

Bardzo podobnie przebiega również proces poszukiwania miejsca zerowego. W rezultacie powinieneś otrzymać wartości podobne do poniższych, przy czym wartość `2,16E-11`, która w zapisie matematycznym ma postać $2{,}16 \cdot 10^{-11}$ może zostać przybliżona w arkuszu do `0`.

| | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Minimum funkcji w przedziale od -1 do 0 | | | | |
| 18 | x | -0,71071 | | | |
| 19 | f(x) | -6,47161 | | | |
| 20 | | | | | |
| 21 | | | | | |
| 22 | Minimum funkcji w przedziale od 0 do 1 | | | | |
| 23 | x | 0,580827 | | | |
| 24 | f(x) | -5,7527 | | | |
| 25 | | | | | |
| 26 | | | | | |
| 27 | Maksimum funkcji w przedziale od -0,5 do 0,5 | | | | |
| 28 | x | 2,16E-11 | | | |
| 29 | f(x) | -5 | | | |
| 30 | | | | | |
| 31 | | | | | |
| 32 | Maksimum funkcji w przedziale od 1 do 3 | | | | |
| 33 | x | 2,073452 | | | |
| 34 | f(x) | 0,540926 | | | |
| 35 | | | | | |
| 36 | | | | | |
| 37 | Miejsce zerowe funkcji w przedziale od 0 do 2 | | | | |
| 38 | x | 1,433428 | | | |
| 39 | f(x) | 3,16E-07 | | | |

Uwaga! Przy wpisywaniu przedziałów niecałkowitych (jak przy pierwszym maksimum) może zajść konieczność wpisania w karcie *Solvera* zakresu z kropką dziesiętną, a nie z przecinkiem, czyli -0.5 do 0.5. (w zależności od wersji Excela).

**Przykład P2.**
Za pomocą narzędzia *Solver* rozwiąż układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 0{,}5x + y + 4z = 4{,}5 \\ 5x + 0{,}25y - 7z = 2{,}75 \end{cases}$$

Aby skorzystać z narzędzia *Solver* najpierw trzeba przekształcić układ równań do takiej postaci, w której po prawej stronie będą zera.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 9 = 0 \\ 0{,}5x + y + 4z - 4{,}5 = 0 \\ 5x + 0{,}25y - 7z - 2{,}75 = 0 \end{cases}$$

Teraz przygotujmy arkusz do pracy, przy czym formuły będziemy wpisywali do kolumny D, a rozwiązania pojawią się w kolumnie B.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | |
| 2 | y | | | |
| 3 | z | | | |
| 4 | | | | |

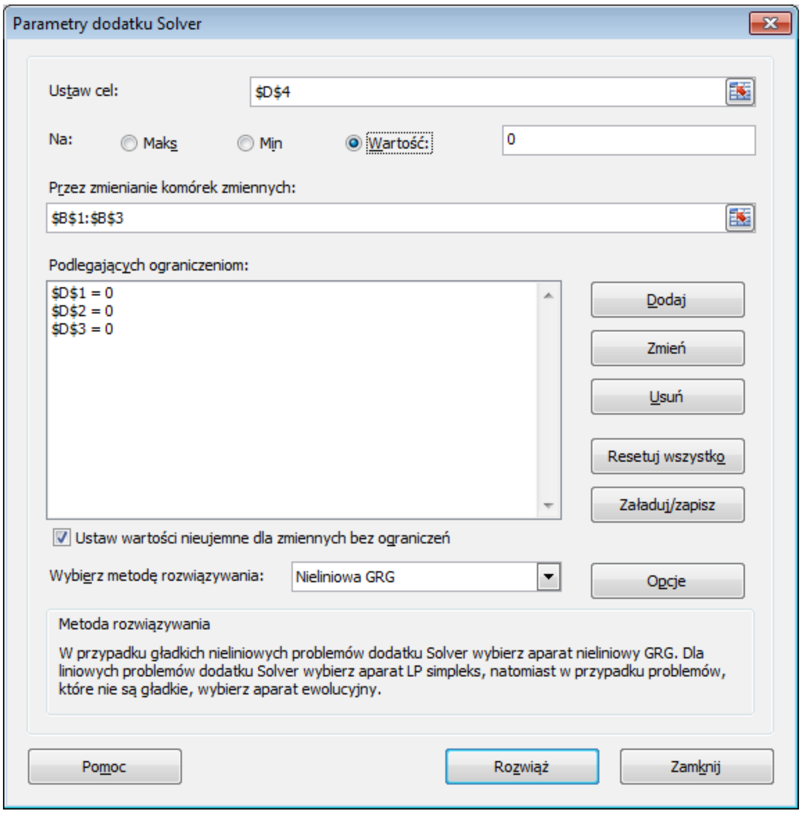
Do komórki D1 wpisz formułę: =2*B1-3*B2+B3+9 będącą implementacją pierwszego równania, a do D2 i D3 wpisz formuły reprezentujące drugie i trzecie równanie.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | 9 |
| 2 | y | | | -4,5 |
| 3 | z | | | -2,75 |
| 4 | | | | |

Rozwiązanie będzie polegało na doborze takich wartości $x$, $y$ i $z$, aby suma lewych stron równań była równa sumie ich prawych stron. Dlatego do komórki D4 wstaw funkcję SUMA (nigdy nie wolno wpisywać wyników ręcznie!).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | | 9 |
| 2 | y | | | -4,5 |
| 3 | z | | | -2,75 |
| 4 | | | | 1,75 |

Uruchom narzędzie *Solver* i spowoduje, by jego karta wyglądała następująco:




Po kliknięciu przycisku *Rozwiąż*, na ekranie powinno pojawić się rozwiązanie podobne do poniższego.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 0,625171 | | -4,2E-13 |
| 2 | y | 3,47606 | | 3,29E-14 |
| 3 | z | 0,177839 | | 1,74E-13 |
| 4 | | | | -2,2E-13 |

Liczby znajdujące się w kolumnie `D` stanowią dostateczne przybliżenie liczby `0`.

**Przykład P3.**
Dana jest lista studentów i średnich ocen uzyskanych przez nich na koniec poprzedniego semestru nauki. Dana jest również miesięczna pula pieniędzy, którą trzeba w miarę możliwości w pełni wykorzystać na wypłatę stypendiów dla tych studentów, którzy w ostatnim semestrze uzyskali średnią ocen co najmniej 4,0.

Z regulaminu przyznawania stypendiów naukowych wynika, że należy utworzyć cztery progi stypendialne uzależnione od wysokości średniej ocen. Progi te mają się zmieniać co 0,25 oceny. Należy tak ustalić wysokość stypendium dla poszczególnych progów, aby jego kwota dla wybranego progu była o 20% większa od kwoty dla progu poprzedniego. Wielkość stypendiów należy ustalić z dokładnością do pełnych złotych. Dodatkowo należy sprawdzić, ilu studentów jest uprawnionych do otrzymania stypendium. Skorzystaj z fikcyjnej bazy studentów znajdującej się w pliku *stypendia.xlsx*.

Tutaj znowu skorzystamy z narzędzia *Solver*, ale także z innych funkcji wbudowanych w MS Excel. Najpierw do komórki `A53` wpisz tekst *Miesięczna pula pieniędzy do rozdysponowania na stypendia*. Do komórki `A54` wpisz kwotę 10000. Nadaj tej komórce format walutowy, a do komórki `A53` wpisz tekst *Liczba studentów uprawnionych do otrzymania stypendium*.

Do obliczenia ilości studentów uprawnionych do otrzymania stypendium (czyli tych, których średnia ocen z ostatniego semestru wynosi co najmniej 4,0) użyj funkcji `LICZ.JEŻELI`, wpisując do komórki `A57` formułę następującej postaci: `=LICZ.JEŻELI(C2:C51;">=4")`, co spowoduje następujący efekt na ekranie.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 53 | Miesięczna pula pieniędzy do rozdysponowania na stypendia | | | |
| 54 | 10 000,00 zł | | | |
| 55 | | | | |
| 56 | Liczba studentów uprawnionych do otrzymania stypendium | | | |
| 57 | 28 | | | |

Teraz przygotuj tabelę, w której znajdą się nasze rozwiązania.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | Ustalenie liczby osób kwalifikujących się do otrzymania stypendium z określonego progu | | | | | |
| 60 | Średnia ocen | | | | | |
| 61 | od | do | Liczba studentów | Wysokość stypendium | Wartość | |
| 62 | 5 | 4,75 | | | | |
| 63 | 4,75 | 4,5 | | | | |
| 64 | 4,5 | 4,25 | | | | |
| 65 | 4,25 | 4 | | | | |

Do komórki `C62` wpisz formułę:
`=SUMA.ILOCZYNÓW(($C$2:$C$51<=A62)*($C$2:$C$51>B62))`.

Formuła ta posłuży do obliczenia liczby studentów, których średnia ocen mieści się w przedziale od `5` włącznie do `4,75`. Funkcja `SUMA.ILOCZYNÓW` służy do obliczenia liczby przypadków spełniających warunki podane jako argument tej funkcji. Zauważ, że argumentem jest iloczyn dwóch warunków zapisanych w nawiasach. Znak gwiazdki oznacza konieczność jednoczesnego spełniania każdego z warunków zapisanych w nawiasach.

Formułę z komórki `C62` przeciągnij w dół aż do komórki `C65`. Upewnij się, że część formuły w komórce `C62` odnosząca się do zakresu z danymi została zapisana w postaci adresów bezwzględnych. Jest to niezbędne, by przeciągając tę formułę, „nie zgubić" którejś średniej podczas zliczania, bo Excel nie zauważy takiego błędu i poda błędne rozwiązanie problemu.

Teraz przejdź do komórki `C65` i wyedytuj formułę skopiowaną z powyższych komórek (przejść do trybu edycji można dwuklikiem, bądź wciskając przycisk `F2`). Zmodyfikuj tę formułę tak, aby uwzględnić również średnią ocen równą `4` (stypendia przyznawane są bowiem już od takiej właśnie średniej). Formuła
przyjmie zatem postać: `=SUMA.ILOCZYNÓW(($C$2:$C$51<=A65)*($C$2:$C$51>=B65))`. W efekcie na ekranie powinny pojawić się następujące wyniki.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | Ustalenie liczby osób kwalifikujących się do otrzymania stypendium z określonego progu | | | | | |
| 60 | Średnia ocen | | | | | |
| 61 | od | do | Liczba studentów | Wysokość stypendium | Wartość | |
| 62 | 5 | 4,75 | 13 | | | |
| 63 | 4,75 | 4,5 | 5 | | | |
| 64 | 4,5 | 4,25 | 4 | | | |
| 65 | 4,25 | 4 | 6 | | | |

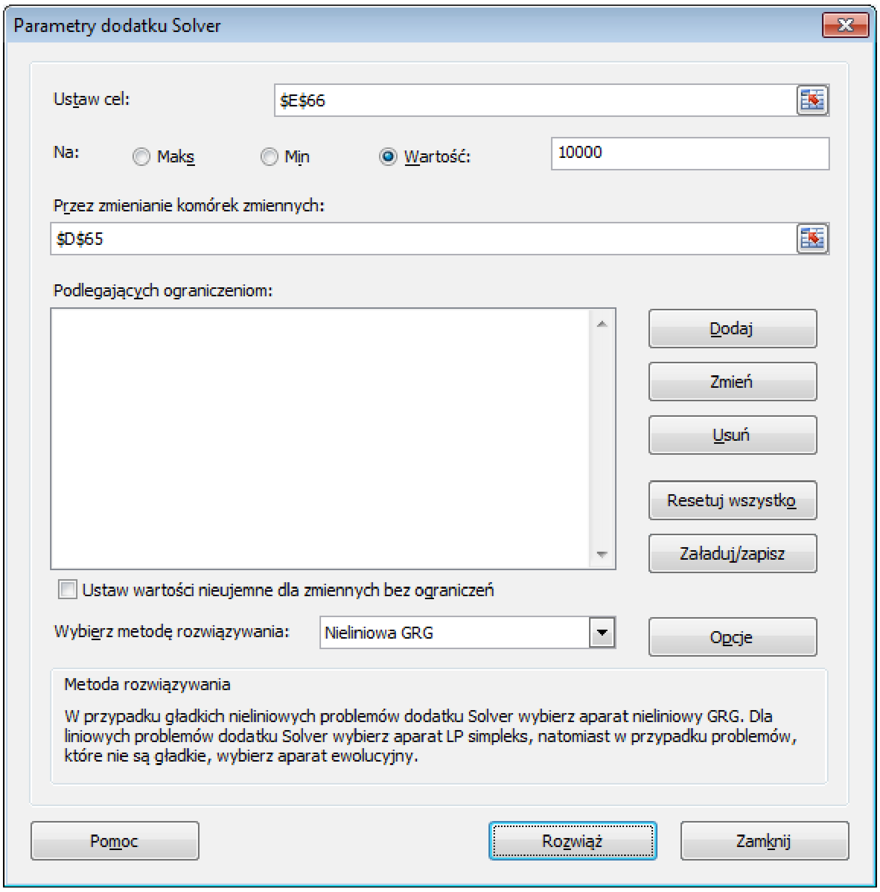
W ten sposób wiesz już, ilu studentów otrzyma stypendium z określonego progu. Do komórki `C66` wstaw funkcję `SUMA`, podając jako argument zakres komórek `C62:C65`, by obliczyć łączną liczbę studentów uprawnionych do otrzymania stypendium.

Do rozdysponowania jest określona pula pieniędzy i należy ją rozdysponować w taki sposób, aby wysokość stypendium w każdym kolejnym progu była o `20%` większa niż w poprzednim, dlatego do komórki `D64` wpisz formułę: `=ZAOKR.DÓŁ(D65+0,2*D65;0)` i przeciągnij ją do góry aż do komórki `D62`. Użyta funkcja `ZAOKR.DÓŁ` pozwoli ustalić wysokość stypendium z dokładnością do pełnych złotych. Chwilowo pusta pozostała komórka `D65`, gdyż nieznana jest jeszcze wartość najniższego stypendium. Wartość ta zostanie wyznaczona za pomocą narzędzia *Solver*.

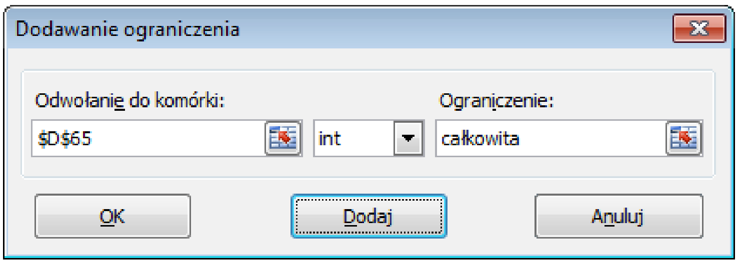
Komórkom `D62:D65` nadaj format *walutowy*. Do komórki `E62` wpisz formułę: `=C62*D62` i przeciągnij ją w dół aż do komórki `E65`. W ten sposób obliczone zostaną wartości stypendium przydzielone do określonych progów. W komórce `E66` oblicz całkowitą wartość rozdysponowanych stypendiów, używając formuły: `=SUMA(E62:E65)`. Powinieneś otrzymać efekt podobny do poniższego.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | Ustalenie liczby osób kwalifikujących się do otrzymania stypendium z określonego progu | | | | | |
| 60 | Średnia ocen | | | | | |
| 61 | od | do | Liczba studentów | Wysokość stypendium | Wartość | |
| 62 | 5 | 4,75 | 13 | - zł | - zł | |
| 63 | 4,75 | 4,5 | 5 | - zł | - zł | |
| 64 | 4,5 | 4,25 | 4 | - zł | - zł | |
| 65 | 4,25 | 4 | 6 | | - zł | |
| 66 | | | 28 | | - zł | |

Teraz nadszedł czas na narzędzie *Solver*. Po wpisaniu pierwszych danych karta *Solvera* wygląda następująco.



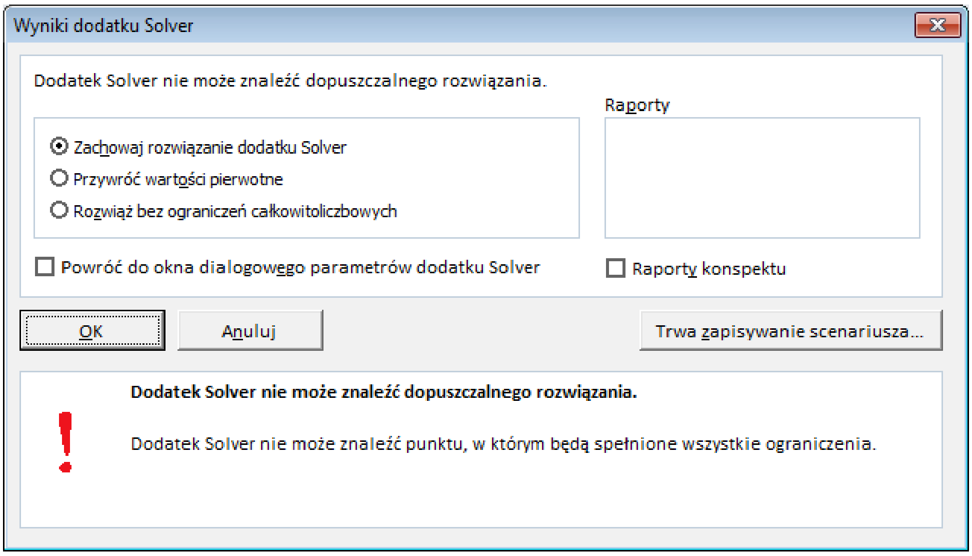

Następnie kliknij przycisk *Dodaj*, aby wywołać okienko do wprowadzenia ograniczeń dla komórki `D65`. Wartość tej komórki musi być ustalona z dokładnością do pełnych złotych, dlatego w polu *Odwołanie do komórki* wskaż komórkę `D65`, zmień sposób porównywania z domyślnego znaku nieostrej nierówności na *int* (ang. *integer*, całkowity) i potwierdź zmianę przyciskiem *OK*.




Zatwierdź wszystkie ustawienia przyciskiem *Rozwiąż*. *Solver* będzie się teraz starał tak dopasować wartość komórki `D65`, aby w miarę możliwości rozdysponować całą pulę pieniędzy przeznaczonych na stypendia. W rezultacie powinieneś otrzymać wynik, jak poniżej.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 46 | X45 | Y45 | 5,00 | | |
| 47 | X46 | Y46 | 3,28 | | |
| 48 | X47 | Y47 | 3,28 | | |
| 49 | X48 | Y48 | 4,92 | | |
| 50 | X49 | Y49 | 4,11 | | |
| 51 | X50 | Y50 | 3,21 | | |
| 52 | | | | | |
| 53 | **Miesięczna pula pieniędzy do rozdysponowania na stypendia** | | | | |
| 54 | *10 000,00 zł* | | | | |
| 55 | | | | | |
| 56 | **Liczba studentów uprawnionych do otrzymania stypendium** | | | | |
| 57 | *28* | | | | |
| 58 | | | | | |
| 59 | **Ustalenie ilości osób do otrzymania stypendium z określonego progu** | | | | |
| 60 | **Średnia ocen** | | | | |
| 61 | **od** | **do** | **Liczba studentów** | **Wysokość stypendium** | **Wartość** |
| 62 | 5 | 4,75 | 13 | 426,00 zł | 5 538,00 zł |
| 63 | 4,75 | 4,5 | 5 | 355,00 zł | 1 775,00 zł |
| 64 | 4,5 | 4,25 | 4 | 296,00 zł | 1 184,00 zł |
| 65 | 4,25 | 4 | 6 | 247,50 zł | 1 485,00 zł |
| 66 | | | 28 | | 9 982,00 zł |
| 67 | | | | | |

Uwaga! Jeśli *Solverowi* nie uda się znaleźć rozwiązania, zostanie wyświetlone okno ze stosowną informacją, które należy zatwierdzić, klikając przycisk *OK*.




## Ćwiczenie do wykonania na zajęciach

**C1.**

Mamy do dyspozycji długą papierową taśmę, na której może zmieścić się nawet 1000 liczb całkowitych z przedziału $(-100;\ 100)$. Chcielibyśmy wiedzieć, w którym miejscu (po której z kolei liczbie) można przeciąć ją tak, by różnica między sumą liczb na jednym kawałku a sumą liczb na drugim kawałku była jak najmniejsza oraz chcielibyśmy poznać wartość bezwzględną tej różnicy. Napisz program, który pozwala to ustalić.

Przykładowe wejście:

```
5              (liczba liczb)
3 1 2 4 3      (wprowadzone przez użytkownika liczby całkowite)
```

Poprawne wyjście:

3 (taśmę trzeba przeciąć po liczbie 2, która jest trzecia w kolejności)

1 ($|6-7|=1$)

## Zadania domowe (zasady bez zmian)

**Z1.**
Metodą zachłanną napisz program w języku C# (Python, C++, Java), który rozwiązuje problem plecakowy przy założeniu, że mamy do dyspozycji dokładnie albo po jednym przedmiocie, albo nieograniczoną ilość każdego przedmiotu (zgodnie z wyborem użytkownika).

**Z2.**
Napisz program, który mając do dyspozycji plik `stypendia.txt` rozwiązuje problem opisany w przykładzie P3.