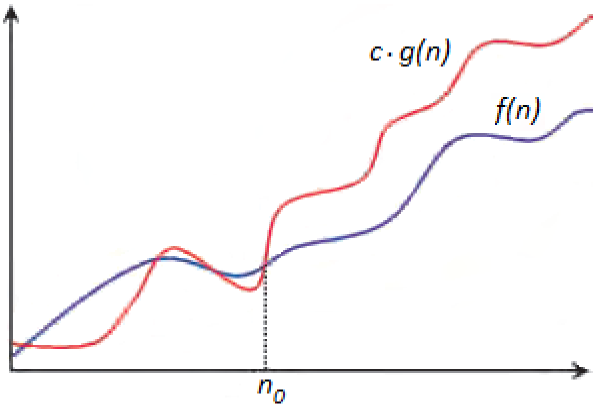
Analiza algorytmów – informacje uzupełniające oraz zadania obliczeniowe

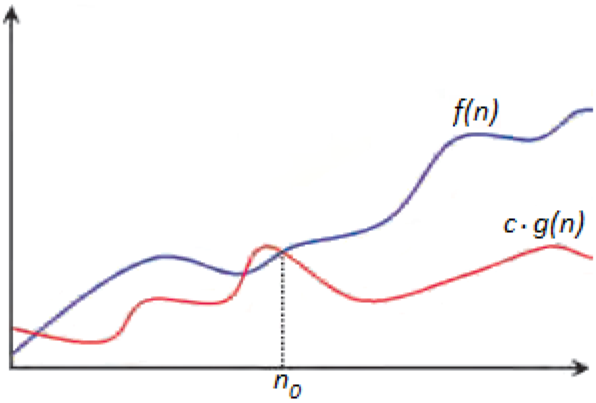
Najczęściej do szczegółowej analizy algorytmów używana jest notacja $O(n)$, zwana również asymptotyczną granicą górną, którą można zdefiniować następująco:

Funkcja f jest co najwyżej rzędu g (rysunek poniżej), co oznaczamy jako $f(n) = O(g(n))$ lub $f = O(g)$, jeżeli istnieją stała rzeczywista $c > 0$ i stała naturalna n_0 takie, że nierówności $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ zachodzą dla każdego $n \geq n_0$.



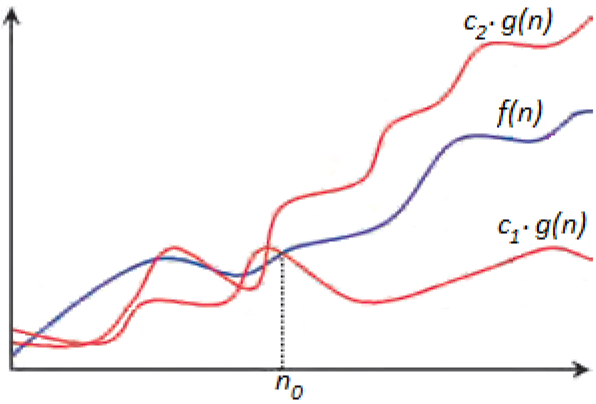
Oprócz $O(n)$ stosowane są też inne notacje. Notacja $\Omega(n)$, zwana także asymptotyczną granicą dolną, definiowana jest następująco:

Funkcja f jest co najmniej rzędu g (rysunek poniżej), co oznaczamy jako $f(n) = \Omega(g(n))$ lub $f = \Omega(g)$, jeżeli istnieją stała rzeczywista $c > 0$ i stała naturalna n_0 takie, że nierówności $c \cdot g(n) \geq f(n) \geq 0$ zachodzą dla każdego $n \geq n_0$.



Trzecią notacją, która jest najdokładniejsza, jest notacja $\Theta(n)$, a jej definicja jest następująca:

Funkcje f oraz g są dokładnie tego samego rzędu (rysunek poniżej), co oznaczamy jako $f(n) = \Theta(g(n))$ lub $f = \Theta(g)$, jeżeli istnieją stałe rzeczywiste $c_1, c_2 > 0$ oraz stała naturalna n_0 takie, że dla każdego $n \geq n_0$ zachodzą nierówności $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$.



Na tej podstawie można sformułować twierdzenie, że dla dwóch dowolnych funkcji $f(n)$ i $g(n)$ zachodzi równość $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) = O\big(g(n)\big)$ i $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$.

Ze wstępnych informacji o złożoności obliczeniowej wiadomo, że $1 \prec loglogn \prec logn \prec nlogn \prec n^{\varepsilon} \prec n^{c} \prec n^{logn} \prec c^{n} \prec n! \prec n^{n}$. W związku z tym możemy zapisać, że dla dwóch dowolnych funkcji $f(n)$ i $g(n)$ mamy $f(n) = O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow g(n) = \Omega\big(f(n)\big)$.

Ponadto w analizie algorytmów bardzo użyteczne jest twierdzenie o zbieżności ciągu

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(\left(a_n \neq 0 \land \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$$

Przykład 1.
Korzystając z definicji notacji Θ udowodnij, że $0.01n^2 + 4n = \Theta(n^2)$.

Rozwiązanie:
Należy wskazać takie stałe $c_1, c_2 > 0$, aby $\underset{n\geq n_0}{\forall} c_1 n^2 \leq 0.01n^2 + 4n \leq c_2 n^2$. Ponieważ $n \in \mathbb{N}_+$ i $n_0 \geq 1$ możemy podzielić obustronnie przez n^2 uzyskując $c_1 \leq 0.01 + \frac{4}{n} \leq c_2$. Aby spełnić te nierówności wystarczy przyjąć przykładowo $c_1 = 0.009$ i $c_2 = 4.01$.

Na tej podstawie możemy jednoznacznie uznać, że $0.01n^2 + 4n = \Theta(n^2)$ zapisując odpowiednio:

$$\underset{c_{1=0.009}}{\exists} \land \underset{c_{2=4.01}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall} c_1 n^2 \leq 0.01n^2 + 4n \leq c_2 n^2$$

Przykład 2.
Zbadaj, czy $n^2 = O(2^n)$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $a_n = \frac{n^2}{2^n} \neq 0$, to $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ i konsekwentnie $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\right| = \frac{1}{2} < 1$. W związku z tym $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$ i ostatecznie $n^2 = O(2^n)$.

Przykład 3.
Zbadaj, czy $\sqrt{n} = \Theta(lgn)$.

Rozwiązanie:
Tutaj konieczne będzie zastosowanie reguły de L'Hospitala, ponieważ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{lgn}$ prowadzi do symbolu nieokreślonego $\frac{\infty}{\infty}$. Z analizy matematycznej wiadomo, że $\left(\sqrt{n}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ oraz $(log_a n)' = \frac{1}{n \cdot lna}$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $n \neq 0$. Rozumowanie to prowadzi do wniosku, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{lgn} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot ln2}{2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n} \cdot ln2}{2} = \infty$$

W związku z powyższym dochodzimy do wniosku, że $lgn = O\big(\sqrt{n}\big)$, ale $lgn \neq \Omega\big(\sqrt{n}\big)$, co byłoby konieczne do spełnienia równości $\sqrt{n} = \Theta(lgn)$. Zatem ostatecznie $\sqrt{n} \neq \Theta(lgn)$.

Przykład 4.
Zbadaj, czy $3^n = O(n!)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a_n = \frac{3^n}{n!} \neq 0$, to $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ oraz $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{n+1}\right| = 0 < 1$. Zatem $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0$ i wniosek ostateczny, że $3^n = O(n!)$.

Przykład 5.

Zbadaj, czy $n! = O(n^n)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a_n = \frac{n!}{n^n} \neq 0$, to $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ oraz $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right|$.

Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, gdzie e – podstawa logarytmów naturalnych. Stąd wynika wniosek, że $\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right| = \frac{1}{e} < 1$, więc $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ i ostatecznie $n! = O(n^n)$.

Przykład 6.

Sprawdź prawdziwość poniższych równości:

a) $lg(n!) = O(n \cdot lgn)$

b) $2^{2n} = O(2 \cdot 2^n)$

Rozwiązanie $\boldsymbol{a}$):

Weźmy pod uwagę, że:

$lg(n!) = lg(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) = lgn + lg(n-1) + \dots + lg2 + lg1$ (n dodawań)

oraz

$n \cdot lgn = lgn + lgn + \dots + lgn$ (n dodawań)

Z tego zestawienia widać wyraźnie, że $lg(n!) \leq n \cdot lgn$, a tym samym prawdą jest, że $lg(n!) = O(n \cdot lgn)$.

Rozwiązanie $\boldsymbol{b}$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n \cdot 2^n}{2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty$$

Zatem nie może być prawdą, że $2^{2n} = O(2 \cdot 2^n)$.

Zadania domowe

Zadanie 1.

Zbadaj, czy $lgn = O\left(\sqrt[3]{n}\right)$.

Zadanie 2.

Zbadaj, czy $n \cdot lgn = O(n^2)$.

Zadanie 3.

Sprawdź prawdziwość równości $lg^2 n = O(lg2^n)$