Algorytmy numeryczne – pierwiastek kwadratowy

Zadanie 1. (obowiązkowe)
Opracuj pseudokod (mile widziany język angielski) i/lub program w Magicznych bloczkach (albo w SBWINPro – do wyboru) algorytmu wyznaczającego pierwiastek kwadratowy z danej liczby P sposobem Herona (ok. $10 - 70$ n.e.). Dodatkowo (**nieobowiązkowo**) zakoduj ten algorytm w wybranym języku programowania i/lub rozwiąż opisane zadanie za pomocą arkusza kalkulacyjnego MS Excel. Rozwiązania wyłącznie w postaci elektronicznej, zawierające odpowiednie pliki programu, należy przesłać w nieprzekraczalnym terminie do dnia 26 stycznia 2023 r. (do północy) na adres: **ks.master@o2.pl**. W nazwach plików należy umieścić datę otrzymania zadania, czyli w tym wypadku 15.01.2023 oraz swoje nazwisko (ewentualnie imię).

Opis sposobu Herona
Sposób ten polega na poszukiwaniu boku kwadratu, gdy dana jest jego powierzchnia P. W pierwszym kroku zakładamy, że bok kwadratu P, wynosi po prostu $a_1 = \frac{P}{2}$. Jeśli $a_1 < \sqrt{P}$, to $\frac{P}{a_1} > \sqrt{P}$ i na odwrót.

Zatem dokładna wartość pierwiastka leży między wartościami a_1 i $\frac{P}{a_1}$, czyli kolejne przybliżenie pierwiastka może być wzięte jako średnia arytmetyczna obu krańców przedziału: $a_2 = \frac{a_1+\frac{P}{a_1}}{2}$. Zaś następne przybliżenia można opisać ogólnym wzorem $a_{n+1} = \frac{a_n+\frac{P}{a_n}}{2}$. W obliczeniach numerycznych konieczne jest określenie dokładności obliczeń, np. $\varepsilon = 10^{-3}$. Zatem po każdym kroku należy sprawdzić, czy zadana dokładność jest już osiągnięta poprzez spełnienie warunku $\left|a_1 - \frac{P}{a_1}\right| < \varepsilon$.

Przykład
Korzystając z algorytmu oblicz $\sqrt{5}$ z dokładnością co najmniej $0{,}001$. Pierwszy bok

$$a_1 = \frac{P}{2} = \frac{5}{2}$$

Wartość drugiego boku wyznaczamy zauważając, że zawsze musi być spełniona zależność $bok1 \cdot bok2 = P$. Zatem drugi bok wynosi

$$\frac{P}{a_1} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$$

Sprawdzamy, czy warunek zakończenia obliczeń (dokładność) jest spełniony

$$\left|a_1 - \frac{P}{a_1}\right| = \frac{1}{2} > 0{,}001$$

Liczymy więc dalej, wyznaczając nową wartość pierwszego boku kwadratu

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{P}{a_1}}{2} = \frac{\frac{5}{2} + 2}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Drugi bok kwadratu

$$\frac{P}{a_2} = \frac{5}{\frac{9}{4}} = \frac{20}{9} \approx 2{,}222$$

Dokładność

$$\left|a_2 - \frac{P}{a_2}\right| = \left|\frac{9}{4} - \frac{20}{9}\right| = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 > 0{,}001$$

Ponawiamy wszystkie obliczenia

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{P}{a_2}}{2} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{20}{9}}{2} = \frac{161}{72} \approx 2{,}23611$$

$$\frac{P}{a_3} = \frac{5}{\frac{161}{72}} = \frac{360}{161} \approx 2{,}23602$$

$$\left|a_3 - \frac{P}{a_3}\right| = \left|\frac{161}{72} - \frac{360}{161}\right| = \frac{1}{11592} \approx 0{,}000086 < 0{,}001$$

Zatem poszukiwana wartość $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.