

Schemat Hornera

Efektywne programowanie opiera się na maksymalnym wykorzystaniu możliwości procesora oraz unikaniu operacji czasochłonnych i zasobochłonnych.

Weźmy pod uwagę wielomian stopnia drugiego

$$w_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Sprawdźmy, ile mnożeń i dodawań należy wykonać, by obliczyć wartość wielomianu dla konkretnej wartości:

$$w_2(x) = a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$$

Mamy więc trzy mnożenia i dwa dodawania. Spróbujmy zapisać ten wielomian inaczej, za pomocą tzw. schematu Hornera

$$w_2(x) = (a \cdot x + b) \cdot x + c$$

Przy takim zapisie udało się zaoszczędzić czas na jednej operacji mnożenia. Zysk wydaje się niewielki, ale im wyższy stopień wielomianu, tym staje się coraz bardziej widoczny. Sprawdźmy to na przykładzie wielomianu stopnia trzeciego

$$w_3(x) = a \cdot x \cdot x \cdot x + b \cdot x \cdot x + c \cdot x + d$$

Postępując standardowo mamy sześć mnożeń i trzy dodawania. Stosując natomiast schemat Hornera

$$w_3(x) = ((a \cdot x + b) \cdot x + c) \cdot x + d$$

wykonujemy trzy mnożenia i trzy dodawania. Zysk jest coraz większy. W wielomianie stopnia czwartego standardowo mamy 10 mnożeń i 4 dodawania, a w schemacie Hornera 4 mnożenia i 4 dodawania. I tak dalej.

Przykład

Oblicz wartość wielomianu $w_3(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ dla $x = 3$.

Podstawiając wprost do wzoru uzyskujemy wartość

$$w_3(3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 7 = 88$$

Ten sam wynik uzyskamy ze schematu Hornera

$$w_3(3) = ((2 \cdot 3 + 4) \cdot 3 - 3) \cdot 3 + 7 = 88$$

Ogólnie w wielomianie stopnia n schemat Hornera wymaga n mnożeń i n dodawań, zatem działa on w czasie liniowym $O(n)$, natomiast do obliczenia wartości wielomianu za pomocą standardowego zapisu niezbędnych jest $\frac{n(n+1)}{2}$ oraz n dodawań, czyli taki algorytm działa w czasie kwadratowym $O(n^2)$. Zysk jest więc ewidentny. Schemat Hornera ma dość szerokie zastosowanie w informatyce. Jest wykorzystywany m.in. szybkiego podnoszenia do potęgi, zamiany liczb z dowolnego systemu liczbowego na system dziesiętny itp.

Wzór wielomianu stopnia n -tego, zapisany w postaci schematu Hornera, ma postać następującą

$$w_n(x) = (\dots ((a_0x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n$$

Łatwo zauważyć, że wyznaczając wartość wielomianu za pomocą powyższego wzoru, należy wykonać kolejne operacje:

$$w = a_0$$

$$w = wx + a_1$$

$$w = wx + a_2$$

...

$$w = wx + a_{n-1}$$

$$w = wx + a_n$$

Na tej podstawie możemy zdefiniować wzór (algorytm) iteracyjny schematu Hornera:

$$w_n(x) = \begin{cases} a_0 & \text{dla } n = 0 \\ wx + a_i & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia w specyfikacji algorytmu:

n – stopień wielomianu ($n \geq 0$), liczba naturalna,

$a[0 \dots n]$ – współczynniki wielomianu (liczby rzeczywiste), wypełniające $(n + 1)$ –elementową tablicę,

x – wartość argumentu (liczba rzeczywista).

Ogólny wzór wielomianu n -tego stopnia może też posłużyć do skonstruowania algorytmu rekurencyjnego

$$w_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1})x + a_n = w_{n-1}(x) + a_n$$

$$w_n(x) = \begin{cases} a_0 & \text{dla } n = 0 \\ w_{n-1}(x) + a_n & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

Zadanie 1. (obowiązkowe)

Na podstawie powyższych rozważań sporządź schemat blokowy oraz pseudokod (preferowany język angielski) realizujący schemat Hornera w sposób iteracyjny. Dodatkowo (nadobowiązkowo) napisz program (C#, Python, Java, C++) porównujący działanie schematu Hornera iteracyjnego i rekurencyjnego.

Zadanie 2. (nadobowiązkowe)

Wykorzystując schemat Hornera napisz program (C#, Python, Java, C++) służący do przeliczania liczby w zapisie binarnym na liczbę dziesiętną. Wyjaśnij działanie programu w formie obszernych komentarzy w kodzie lub poza nim. Do napisania programu możesz wykorzystać kod z **Zadania 1**.

Uwaga:

Rozwiązania wyłącznie w postaci elektronicznej, zawierające plik w formacie PDF oraz ewentualnie dodatkowo pliki programu komputerowego (**tylko i wyłącznie kod źródłowy**) należy przesłać w nieprzekraczalnym terminie do dnia 30 grudnia 2022 r. (do północy) na adres: ks.master@o2.pl. W nazwach plików należy umieścić datę otrzymania zadania, czyli w tym wypadku 11.12.2022 oraz swoje nazwisko (ewentualnie imię).