Wycena opcji w modelu dwumianowym

Tomasz Gładki, Kacper Olczak

May 2024

1 Wprowadzenie

Projekt opiera się na wycenie opcji europejskich i amerykańskich w modelu dwumianowym. Żeby zabrać się za wycenianie musimy zrozumieć czym są i czym charakteryzują się omawiane opcje.

1.1 Czym jest opcja

Opcją nazywamy pochodny instrument finansowy polegający na tym, że jedna ze stron ma prawo wyboru do zakupu lub sprzedaży innego instrumentu finansowego, zwanego instrumentem bazowym po ustalonej wcześniej cenie. Różni się np. od kontraktów forward tym, że jedna ze stron może nie wykonywać opcji, podczas gdy w kontrakcie forward jest zmuszona kupić lub sprzedać instrument bazowy (lub najczęściej jego równowartość w walucie).

1.2 Opcja CALL i PUT

Opcja CALL to tzw. opcja kupna, to znaczy, że posiadacz ma prawo do kupna instrumentu bazowego po wcześniejszej ustalonej cenie K, podczas gdy posiadacz opcji PUT ma prawo do jej sprzedania

1.3 Opcja europejska a opcja amerykańska

Opcja europjeska to taka, w której posiadacz ma prawo do wykonania opcji tylko w ustalonym wcześniej czasie wykonania T. Opcję amerykańską można wykonać w dowolnym momencie do ustalonego czasu T.

1.4 Model dwumianowy

Omawiany przez nas model jest dosyć prosty. Zakładamy w nim, że w każdym kroku (oznaczanym przez nas Δt) aktywo bazowe może zmienić cenę tylko na dwa sposoby:

- pójść w górę o u
- pójść w dół o d

W tym modelu możemy dobrać sobię liczbę kroków i model rynku, który uznajemy za prawdziwy. Dokładniej opiszemy to przy wycenie opcji w dalszym punkcie.

1.5 Parytet PUT-CALL

Przydatnym narzędziem do wyceniania opcji jest niżej wymieniony parytet:

$$C_E + Ke^{-rT} = P_E + S_0$$

gdzie C_E i P_E to odpowiednio cena opcji europejskiej CALL i PUT. Dzięki niemu znając cenę opcji PUT możemy od razu wycenić cenę CALL i vice versa. Nie będziemy wykorzystywać go stricte przy wycenianiu opcji z zadania, ale możemy weryfikować nim poprawność wyniku.
Warto też dodać, że ten wzrór jak generalnie cały model zakłada brak arbitrażu, czyli brak możliwości zarobku poprzez kupowanie i sprzedawanie dowolnych instrumentów dostępnych na rynku bez ryzyka. Strategie arbitrażowe pokazujemy konstruując odpowiedni portfel.

1.6 Dodatkowe uwagi

Opcje europejskie można wycenić metodą inną niż rekurencyjną, którą będziemy stosować w następnym punkcie. Jednak do rysowania drzewa jak i wyceniania opcji amerykańskich nie przydaje się już ona, więc wzór (który swoją drogą jest dość intuicyjnie jasny i polega na liczeniu wszystkich ścieżek w drzewie i wyliczanie prawdopodobieństwa dojścia nimi do końca, używając risk-free probability) zaprezentujemy tylko jako dodatek:

$$P = e^{n\Delta t}\left[\sum_{k=0}^{n} S_{u^k d^{n-k}}(1-p)^{n-k}p^k\right]$$

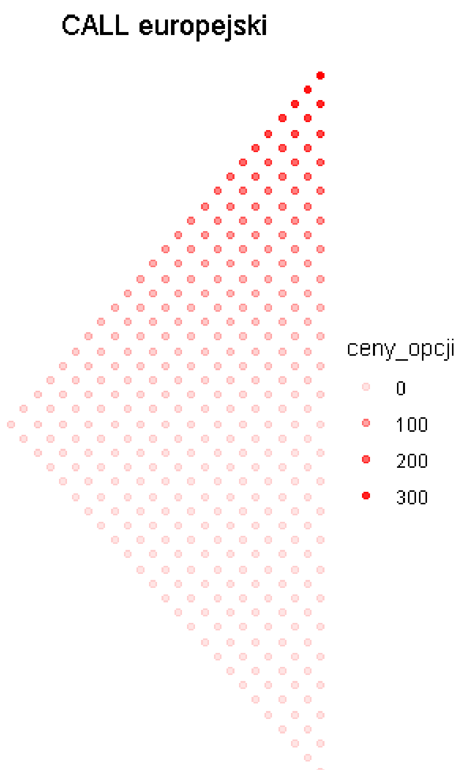
gdzie n to liczba podokresów zakładana w naszym modelu, a $S_{u^i d^j}$ to cena aktywa po przejściu i razy w górę i j razy w dół.

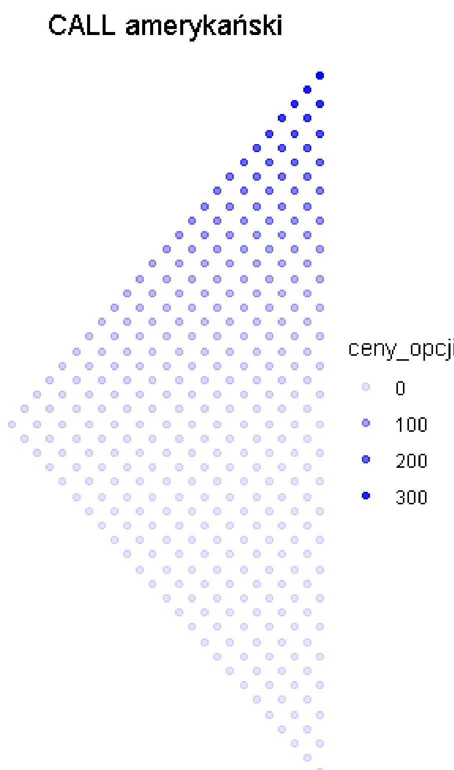
2 Wycena opcji dla podanych parametrów

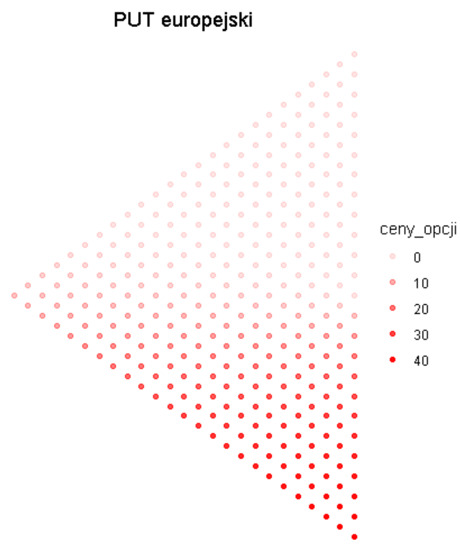
W tym podpunkcie wycenimy i porównamy ze sobą opcję amerykańskie i europejskie dla podanych parametrów oraz zaprezentujemy je graficznie. Będziemy na wykresach oznaczać opcje europejskie kolorem czerwonym, a amerykańskie niebieskim. Nasze dane to:

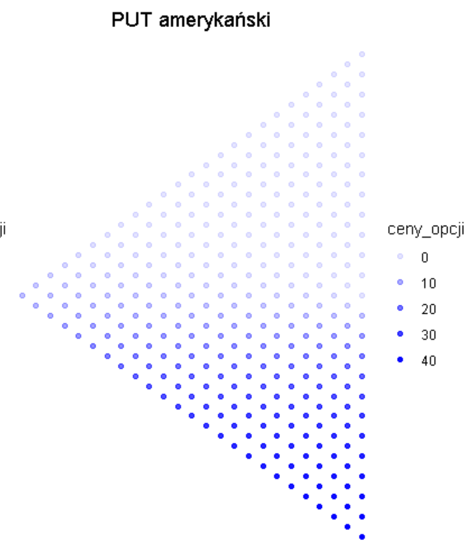
- czas jednego kroku w drzewie - $\Delta t = 1/12$
- zmienność ceny aktywa bazowego - $\sigma = 0.3$
- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- cena aktywa bazowego - $S_0 = 50$
- stopa procentowa - $r = 0.02$
- strike, czyli cena wykonania opcji - $K = 48$
- zapadalność $T = 2$

Drzewo dwumianowe dla opcji kolejno CALL i PUT wyglądają nasteująco:







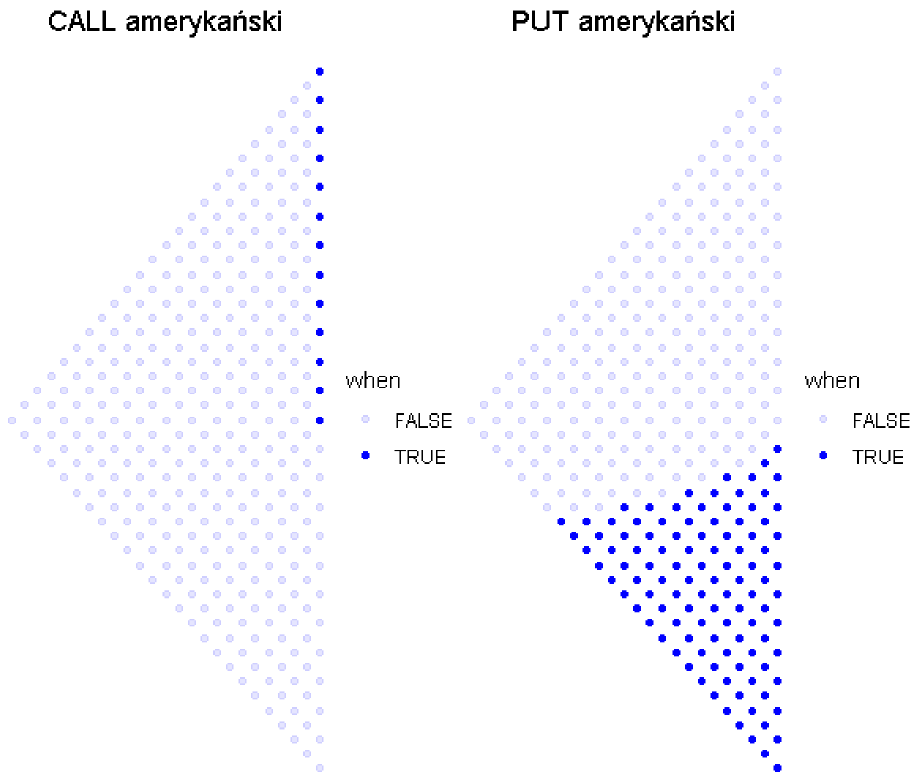


Jak widać na górnym obrazku opcje amerykańskie CALL nie różnią się niczym od opcji europejskich, to znaczy, że nie opłaca ich się wykonywać w trakcie ich trwania w żadnym momencie i mają tę samą wartość - **10.19**.
Wynika to z parytetu PUT-CALL:

$$C_t \geqslant S_t - Ke^{-r(T-t)} > S_t - K.$$

Oznacza to, że cena opcji europejskiej w każdej chwili $0 < t < T$ jest większa niż jej payoff w danym momencie.
Z kolei cena tych dwóch opcji różni się dla wariantu PUT. Dla europejskiej jest to **6.31**, a amerykańskiej **6.47**. Możemy podstawić ceny europejskie do parytetu i otrzymamy równość.

Różnicę w cenie widać na drzewie, które obrazuje momenty wykonania opcji amerykańskich.

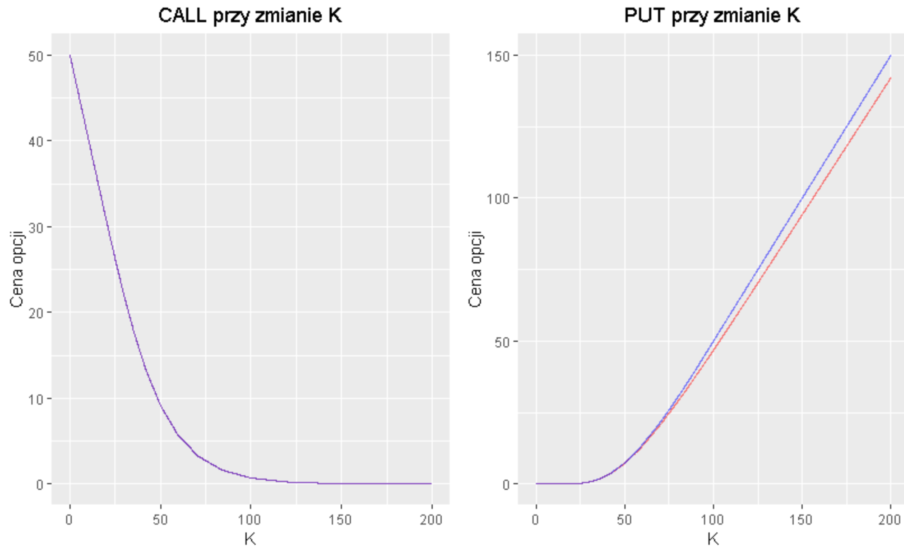


Oczywiście momenty wykonania dla amerykańskiego calla są tylko na końcu, tam gdzie wykonalibyśmy również opcję europejską.

3 Zmiana ceny opcji w zależności od zmian parametrów

Ten punkt będzie podzielony na podpunkty skupiające się na pokazaniu zależności między zmianą jednego konkretenego parametru a ceną opcji.

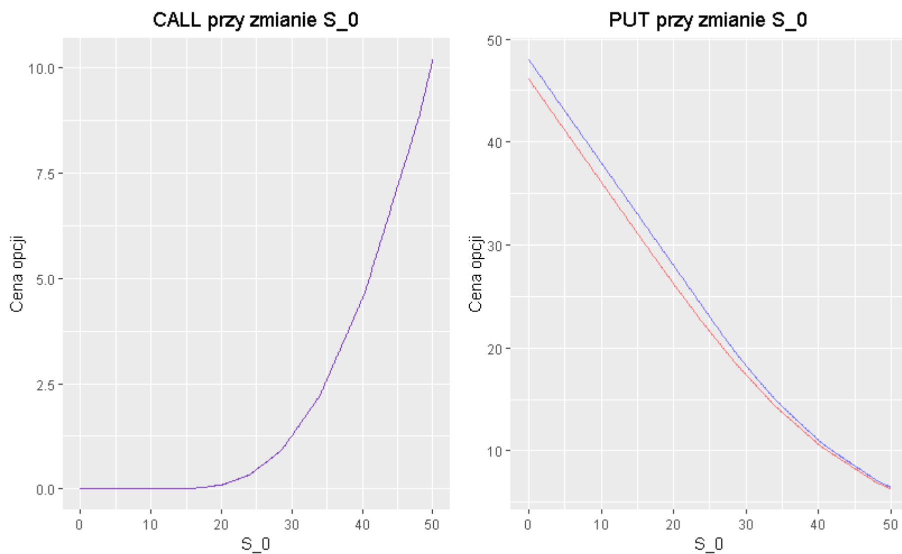
3.1 Strike - K



Widzimy, że im mniejszy strike tym opcja CALL staje się dużo bardziej wartościowa i na początku jest to mniej więcej liniowy spadek, bo wykonujemy każdy liść naszego drzewa, jednak cena zaczyna się łamać i zbliża się do zera wraz z pojawianiem się co to nowych zer na liściach drzewa zaczynając od jego dołu. Dla wystarczająco dużego striku nie będzie opłacało nam się tej opcji wykonać nigdy.

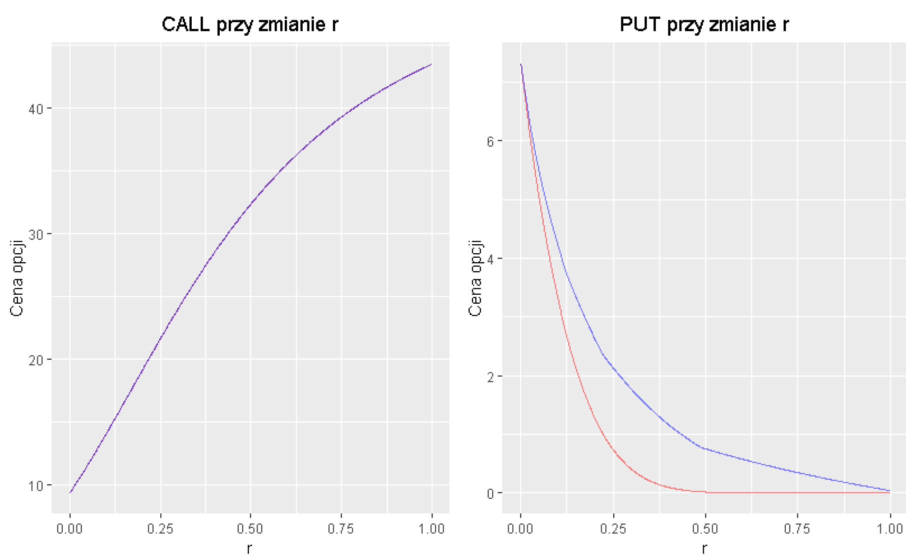
Przeciwnie jest dla opcji PUT, gdzie im większy strike tym większy payoff i analogicznie im większy tym więcej będziemy wykonywać liści, a w przypadku opcji amerykańskiej będziemy też wykonywać niektóre węzły niebędące liśćmi, stąd większa cena tej opcji i szybszy wzrost ceny (bo węzły w środku drzewa również bardziej rosną).

3.2 Cena aktywa bazowego - S_0



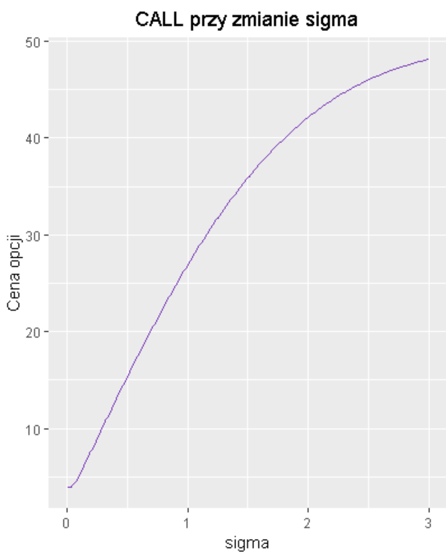
Porównując te wykresy z tymi z poprzedniego punktu można zauważyć, że są one mniej więcej lustrzanymi odbiciami i ma to sens, bo payoffy opcji CALL i PUT tak wyglądają. Wnioski są takie same jak wcześniej tylko trzeba je przypiąć do odwrotnych opcji niż wyżej.

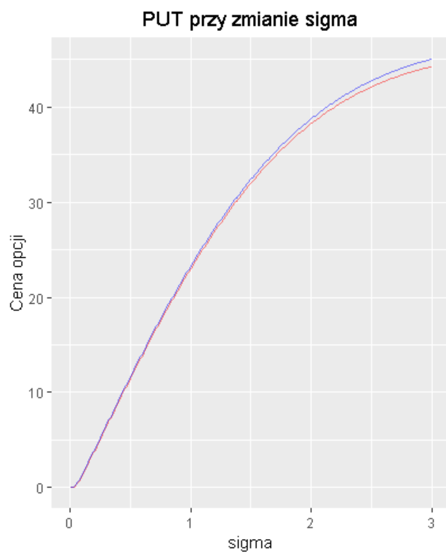
3.3 Stopa procentowa - r



Widać, że dla opcji CALL większa stopa procentowa to większa cena aż do mniej więcej $r = 1$, wtedy nasze risk-free probability zbliża się do 1, a z definicji nie może go przekroczyć. Im większe r tym większe p więc wyższa cena CALLa, bo wyższe listki drzewa są częściej osiągalne. Odwrotnie dla PUTa, gdzie im mniejsze r tym mniejsze p, więc cena jest mniejsza. Możemy przyjąć ujemne stopy procentowe, wtedy wykresy będą zachowywać się odwrotnie, tzn. dopóki r jest w dziedzinie (do około -1) CALL będzie drastycznie maleć a PUT rosnąć. Jest to związane z tym samym faktem co wyżej - p dąży wtedy do 0, a 1-p do 1.

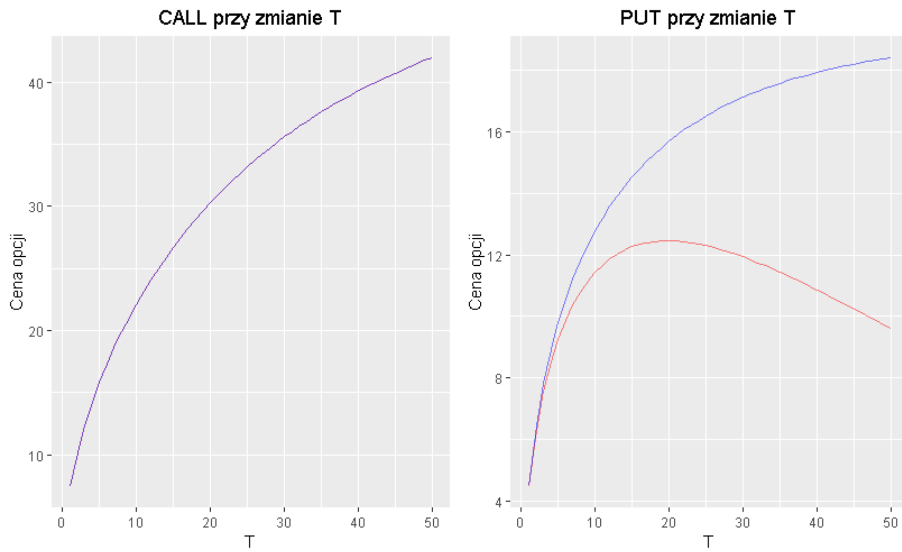
3.4 Zmienność rynkowa - σ





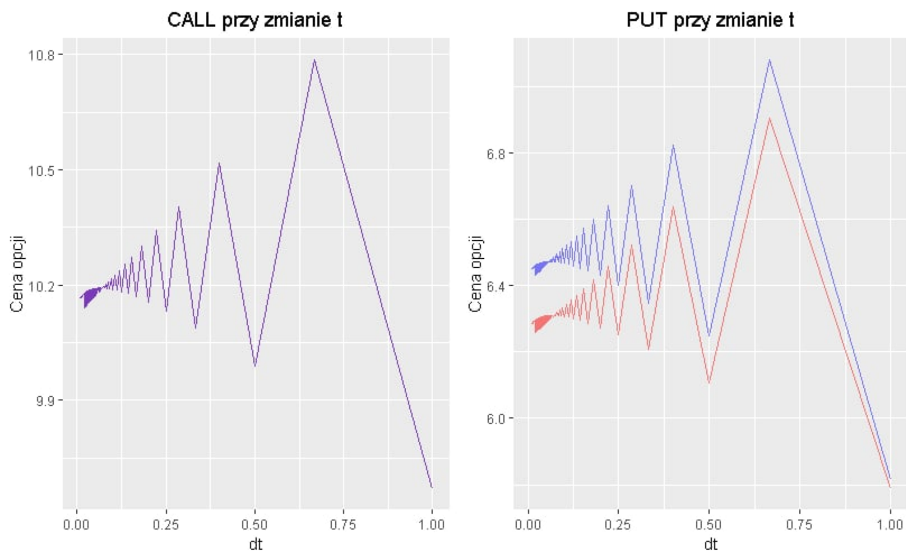
Tutaj nie ma zaskoczeń, im większe wahania na rynku tym cena jest większa. Dzieje się to przez nasz model rynku, który zakłada, że zwiększenie parametru σ zwiększa u i zmniejsza d co powoduje większy rozstrzał cen w momencie T więc coraz większe payoffy w coraz bardziej skrajnych listkach drzewa, co wpływa na cenę zarówno CALLA jak i PUTA.

3.5 Zapadalność - T

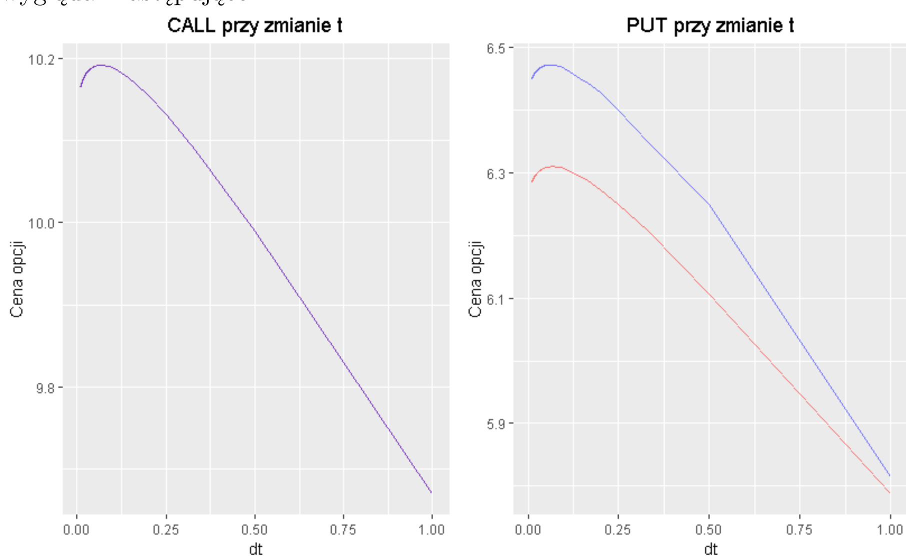


Widzimy, że cena CALLA wzrasta i wypłaszcza się wraz ze zwiększeniem T. Ma to sens, bo wraz ze zwiększeniem zapadalności zwiększa się cena aktywa bazowego w górnych liściahc drzewa co wpływa na cenę opcji. PUT amerykański cechuje to samo, a PUT europejski zachowuje się inaczej. Różnica bierze się stąd, że przy dużym T w pewnym momencie payoff PUTa europejskiego nie wzrasta prawie wcale, bo jest limitowany przez strike K, a większa zapadalność powoduje zmniejszenie ceny takiej opcji, bo podobną kwotę trzeba zdyskontować z większego T, co da nam mniej pieniędzy niż jakbyśmy dyskontowali z $T/2$ dla jakiegoś dość dużego T. PUT amerykański nie ma tego problemu, bo możemy go wykonać kiedy chcemy, więc nie ma takiego momentu, kiedy opcja zacznie tracić wartość, bo wykonamy ją przed tym momentem.

3.6 Długość podokresu - Δt



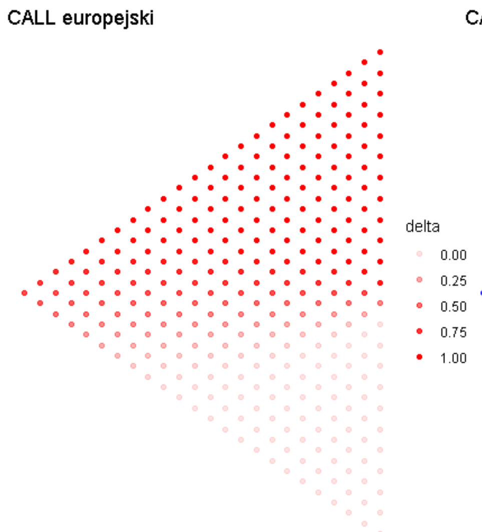
Wykres wygląda tu bardzo dziwnie. Wzięliśmy w nim coraz to mniejsze podokresy dla $T = 2$. Jeśli jednak weźmiemy tylko liczby postaci $1/n$ wykres będzie wyglądał następująco:

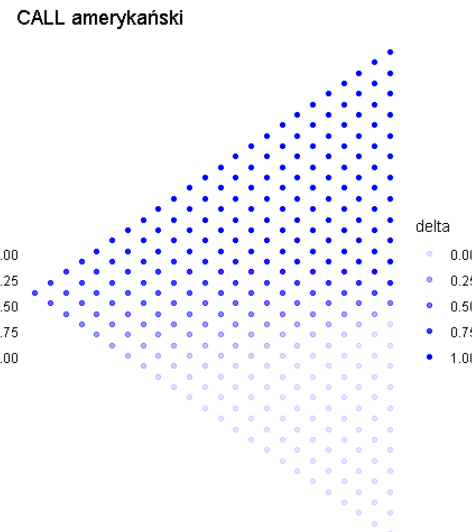


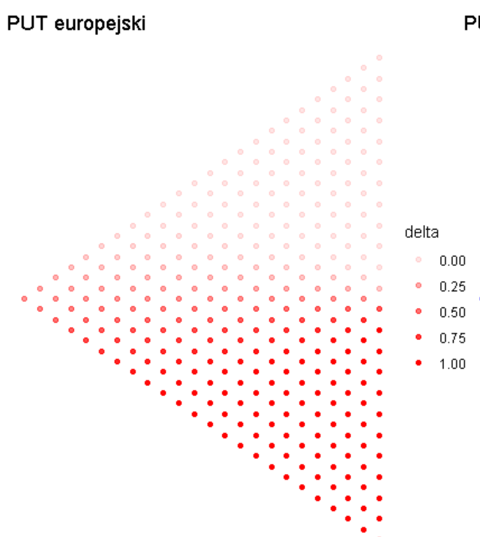
Możemy wywnioskować stąd, że cena opcji różni się mocno jeśli liczba podokresów jest wielokrotnością połowy głównego okresu od ceny jeśli nie jest.
Wykres osiąga punkt krytyczny i maleje po nim. Wiemy, że model ten zbiega do modelu Blacka-Scholesa (tj. cena przy zmniejszaniu Δt zbiega do ceny opcji w modelu Blacka-Scholesa).

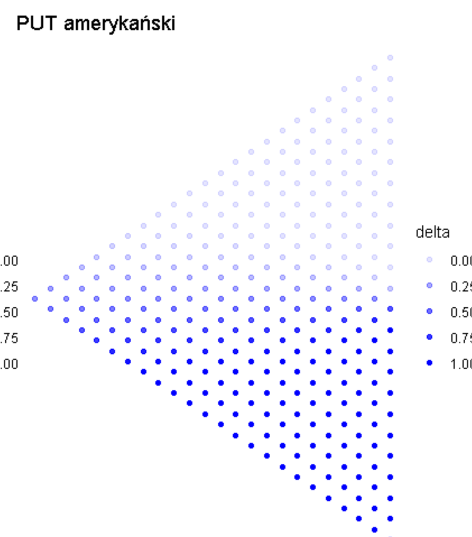
4 Portfel zabezpieczający

W każdym momencie węzła możemy stworzyć portfel zabezpieczający. Dla opcji CALL liczba Δ czyli ilość aktywa bazowego którą powinniśmy kupić jest dodatnia (bo kupujemy), a dla opcji PUT jest ujemna (bo sprzedajemy). Na wykresie jest zaprezentowana wartość bezwzględna delty. Nie bedziemy pokazywać ile kosztują ceny akcji portfela zabezpieczającego w każdym punkcie dla przejrzystości, ale jest to cena akcji w danym punkcie drzewa razy ilość delta.









Widzimy, że delta nie przekracza 1, bo możemy się zabezpieczyć na opcję która ma pod sobą jedno aktywo maksymalnie właśnie tym jednym aktywem. W rogach drzewa delta wynosi 1 (z dokładnością do wartości bezwzględnej) tam gdzie musimy się zabezpieczyć najbardziej (dla PUT jest to tam gdzie zarabiamy czyli na dole, a dla CALLa jest to na górze), a 0 tam gdzie i tak nie zarabiamy, więc nie musimy się zabezpieczać.