**תרגיל בית 4**

מגיש: תומר מילדוורט | 316081355

**שאלה 1**

**א.**

**הוכחה**

מכיוון שלפי הגדרת ישנם איברים לסדר ב- מקומות (אינדקסים) שונים ללא חזרות, ניתן לומר כי:

*לכן:*

**ב.**

**הוכחה**

נראה כי:

נוכיח באינדוקציה על :

בסיס האינדוקציה

נניח כי ולכן:

כנדרש.

צעד האינדוקציה

נניח את נכונות הטענה עבור ונוכיח עבור :

*כדי לקבל את זמן הריצה הארוך ביותר עלינו להפעיל את על האיבר המקסימלי או המינימלי, לכן, בכדי לקבל את עלינו להוסיף אופציה נוספת, ולפי עקרון הכפל עלינו לכפול את ב-:*

*כנדרש.*

***ג.***

*ידוע כי:*

*,*

לכן נפעיל את מבחן המנה:

ונקבל כי הסדרה שואפת ל-.

לכן, ניתן להסיק שככל ש- גדל (וכך גם גדל) הסיכוי לקבל את זמן הריצה הגרוע ביותר קטן.

**שאלה 2**

**א1.**

**עץ הרקורסיה:**

**א2.**

סיבוכיות הזמן של הפונקציה היא .

אורך הרשימה כקלט התלוי ב- מצטמצם פי 2 בכל איטרציה, ולכן חסום ע״י . בנוסף, בכל קריאה רקורסיבית מתבצע חיתוך של הרשימה פי 2 בערך שלם תחתון. פעולה זו חסומה ע״י . לכן, סך כל סיבוכיות הזמן הינה: .

**ב.**התקלה בקוד היא שבמידה וערך ה- נמצא ב-ֹֹ הפונקציה תחזיר ערך בעוד היא אמורה להחזיר את ערך ה-.

דוגמת הרצה מייצגת:

נניח כי

.

לכן, בהכנסת הנתונים לפונקציה נקבל:

*כעת, מכיוון שאנו לא עומדים באף אחד מהתנאים, נכנס לבלוק ה- ונקרא רקורסיבית לפונקציה עם הנתונים:*

*ֹ*

*כעת, בקריאה הנוכחית:*

לכן, נכנס בשנית לתנאי האחרון ונקרא רקורסיבית שוב לפונקציה עם הנתונים:

*כעת, נראה כי:*

*ומכיוון שכעת מתקיים נכנס לתנאי הראשון והפונקציה תחזיר את הערך במעלה עץ הרקורסיה עד לקריאה האחרונה, למרות שבמצב תקין הייתה אמורה להחזיר .*

***שאלה 3***

***א.***

*נוכיח באינדוקציה על כי במטריצה כל שורה מלבד השורה העליונה מכילה מספר שווה של אפסים ואחדות:*

*נסמן:*

*לכן, צ״ל:*

*בסיס האינדוקציה*

*נראה עבור .*

*נתון כי . קל לראות כי*

*צעד האינדוקציה*

*נניח את נכונות הטענה עבור ונוכיח עבור .*

*לפי הגדרת מטריצת עבור מתקיים כי*

*לכן ניתן לומר כי:*

*לפי הנחת האינדוקציה, עבור מתקיים , לכן, בשורות בהן לא מתבצע חילוף מתקיים עבור :*

*במידה ומתבצע חילוף ( הופך ל- ולהיפך), נאמר כי:*

*כנדרש.*

***ג.***

*סיבוכיות זמן הריצה של היא . נתחיל בניתוח פונקציות העזר:*

*ֹ*

* *תחילה, הפעולות המובנות של פייתון הן בסיבוכיות של .*
* *לאחר מכן, לולאת ה- מבצעת איטרציות בסיבוכיות של .*
* *פעולת ה- גם היא מתבצעת בסיבוכיות של .*

*הפונקציה נקראת פעמיים (אחת לכל אינדקס) וסיבוכיות הזמן היא .*

* *תחילה, הפעולות המובנות של פייתון הן בסיבוכיות של .*
* *השוואת המספר ל- דורשת ביטים ולכן סיבוכיות הזמן היא .*
* *פעולת החיסור על שומרת את בזיכרון בכל פעם, לכן מהווה חסם עליון לכמות הביטים של , לכן סיבוכיות הזמן היא .*

*הפונקציה נקראת פעמים, לכן סיבוכיות הזמן בסך הכל היא .*

*כאמור, הפונקציה מבצעת את פעמיים, ומחזירה את הקריאה הרקורסיבית . לכן, סיבוכיות הזמן הכוללת של הפונקציה היא*

***שאלה 4***

***ב.***

*נניח והמטריצה מסדר .*

*נראה כי הסיבוכיות היא . מכיוון שבמקרה הגרוע נקבל מטריצה מסדר שכולה אפסים, נראה כי לכל כיוון (״מימין-לשמאל״ או ״מלמעלה-למטה״) ישנן אפשרויות כ״א, נכפיל את שתי האפשרויות ונקבל:*

*נניח והמטריצה מסדר .*

*במקרה זה נראה כי הסיבוכיות היא . לפי הגדרת סיבוכיות הזמן, קיים כלשהו עבורו סיבוכיות הזמן שווה ל-. נתבונן ב- ולכן מתקיים:*

***שאלה 5***

***א.***

*סיבוכיות הזמן של הקוד שכתבתי היא אקספוננציאלית, משמע קיים כך שסיבוכיות הזמן של הפונקציה היא .*

*נניח כי אורך הרשימה הוא . נתבונן במקרה הגרוע בה הפונקציה נכנסת ללולאה האחרונה פעמים, שכן בלולאה זו נוצרות 2 קריאות רקורסיביות שונות: ו- . אורך הרשימה בכל אחת מקריאות אלו הוא . כל קריאה כזו תכנס גם היא ללולאה האחרונה בקוד, ולכן כמות הקריאות הרקורסיביות תוכפל פי 2 בכל שלב בעץ הרקורסיה. הכפלה זו תקרה פעמים (לפי ההנחה) כעומק עץ הרקורסיה: . בנוסף, הלולאה מבצעת 2 פעולות נוספות: האחת היא פעולה אריתמטית של חיבור (שלפי הנתון אורכת זמן קבוע) והשנייה היא פונקציית של פייתון לשני איברים שאורכת . סיבוכיות זמן זו זניחה ולכן נתעלם ממנה כשנחשב את סיבוכיות הזמן של הפונקציה כולה. לכן, סיבוכיות הזמן של הפונקציה חסומה ע״י .*

***ד.***

*הפונקציה לאחר ממואיזציה חסומה ע״י . במקרה הגרוע, הפונקציה תעבור על כל הרשימה באורך כמות של פעמים.*

***שאלה 6***

***ב.***

*הסיבוכיות היא אקספוננציאלית. נראה כי הפונקציה תבצע 3 קריאות רקורסיביות בכל איטרציה במקרה הגרוע ביותר. לכן, נחשוב על מצב בו באורך כל אחת בהתאמה, שונות בכל תו במחרוזות שלהן, או במילים אחרות, קוראות ל-3 קריאות רקורסיביות בכל איטרציה. לכן, בהתעלם מהפעולות האריתמטיות שאורכן קבוע, סיבוכיות הפונקציה תהיה קבוע כלשהו בחזקת המחרוזת הארוכה מבין שלצורך הדוגמה יהיה , ותהיה שווה ל-.*

***ד.***

*ראשית, בכדי ליצור את המטריצה, נקרא לפונקציה אשר מבצעת 2 קריאות רקורסיביות התלויות באורך המחרוזת שנמסמנה ב- ולכן הן חסומות ע״י . נסמן את אורך המחרוזת ב-. נשים לב כי ל- נוספים שני מרווחים בתחילת המחרוזת, ול- מרווח אחד בכדי לייצר מטריצה מתאימה.*

*לאחר מכן, נוצרת מטריצה מסדר אך למעשה הקריאות הרקורסיביות של פונקציית העזר נקראות על מטריצה מסדר ולכן נקראות פעמים. בפרט, בלי הגבלת הכלליות, נאמר שהפונקציה חסומה ע״י .*

*לכן, בסיכום כלל הקריאות, נראה כי סיבוכיות הזמן של פונקציית היא:*