**תרגיל בית מעשי 1: חלק תיאורטי**

תומר מילדוורט | mildworth | 316081355 | Tomer Mildworth  
ליאור בודנר | 207702861 | liorbodner | Lior Bodner

**תיעוד חיצוני**

בבניית התרגיל, השתדלנו לחלק את האחריויות של כל מחלקה באופן הגיוני ומופרד ובמחשבה על שימוש הגיוני על ידי לקוח שזר לתרגיל. את מימוש העץ חילקנו ל-2 מחלקות כפי שניתנו בקובץ השלד: *ו-*. בכתיבת הקוד, נסינו להקפיד על כתיבה אבסטרקטית וקריאה ככל הניתן: כתיבת מתודות כלליות ופירוקן למספר פונקציות עזר, בחירת שמות משתנים ברורים ובהירים והצמדות לחומר הנלמד בכיתה ובתרגולים.

נתחיל בניתוח המחלקה .

**– איבר ערמה**

מאפייני המחלקה

* – מפתח לצומת. ערך מספרי שלם שייחודי לכל צומת בעץ. ערך דיפולטי .
* – מצביע לצומת המחזיקה את איבר הערמה. ערך דיפולטי None.
* – מידע השמור באיבר הערמה. מוגדר להיות שרשרת. ערך דיפולטי שרשרת ריקה.

המחלקה מיועדת לשמירת המידע המבוקש במבנה הנתונים והתאמתו למיקום בתור העדיפויות של המשתמש. למעשה איבר הערמה איננו חלק מהמימוש הטכני של מבנה הנתונים, אלא רק מכיל מצביע (דו כיווני) לאיבר בערמה לצורך קריאה וכתיבה דרך הצומת המתאימה.

מתודות

**מטרה**: בנאים של המחלקה

**שיטת פעולה**: אתחול המחלקה לפי הקלטים הנ״ל או בערכיהם הדיפולטיים כפי שמתואר מעלה.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע: -**

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**- צומת**

מאפייני המחלקה

* *– איבר הערמה של הצומת.*
* – *הבן של הצומת הנוכחית, מוגדר להיות הצומת האחרון שהתווסף לצומת. מצביע לצומת.*
* – הצומת הבא ברשימת ה״אחים״ של הצומת, או של כלל השורשים במבנה במידה והצומת היא שורש של עץ. מצביע לצומת.
* – ההורה של הצומת. מצביע הפוך ל- *גם אם צומת איננו הבן (מוגדר להיות* ) של הצומת.
* – דרגת הצומת. דרגה של צומת מוגדרת להיות מספר הילדים שלו.

מתודות

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**–ערמה**

מאפייני המחלקה

* – מספר האיברים בערימה. ערך דיפולטי .
* – מצביע לשורש העץ בעל הדרגה הגבוהה ביותר במערך. ערך דיפולטי .
* – מצביע לשורש בעל המפתח הנמוך ביותר בערמה כולה.
* – כמות העצים בערמה.

המחלקה מיועדת לשמירת המידע המבוקש במבנה הנתונים והתאמתו למיקום בתור העדיפויות של המשתמש. למעשה איבר הערמה איננו חלק מהמימוש הטכני של מבנה הנתונים, אלא רק מכיל מצביע (דו כיווני) לאיבר בערמה לצורך קריאה וכתיבה דרך הצומת המתאימה.

**מטרה**: בנאי למחלקה

**שיטת פעולה**: השמת הערכים הנתונים במאפייני הערמה.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** השמת ערך ידוע למשתנה

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**מטרה**: קבלת שורש העץ

**שיטת פעולה**: קריאה למאפיין של העץ הנוכחי

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע: -**

**מטרה**: הכנסת מידע חדש עם ערך קדימות לערמה

**שיטת פעולה**: ראשית, ניצור איבר ערמה וצומת חדשים ונחבר ביניהם. לאחר מכן, אם בערמה כמות זוגית של איברים, נוכל להוסיף את הצומת החדש לערמה בזמן קבוע: הוספתו כעץ מדרגה ע״י שינוי מצביעים ידועים. אחרת, נייצר מהצומת ערמה חדשה ונבצע קריאה ל-. *נחזיר את איבר הערמה שהוכנס.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** כאמור, כל הכנסה שנייה תתבצע ב- (שינוי מצביעים). אחרת, נבצע איחוד ערמות ולכן ייתכנו במקרה הגרוע קריאות ל- *שפועלת בזמן קבוע. לכן, במקרה הגרוע סיבוכיות הזמן תהיה .*

**מטרה**: ריקון הערמה מאיברים

**שיטת פעולה**: ניתוק המצביעים מאיברי הערמה הקיימים ואיפוס המונים השונים

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** תמיד שינוי מצביעים קבוע.

**מטרה**: ניתוק השורשים מהוריהם

**שיטת פעולה**: החל מהצומת האחרון של הערמה, נעבור על כלל השורשים וננתק את המצביע להורה

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** אנו יודעים שבכל רגע נתון כמות השורשים בערמה חסום ע״י לכן נבצע קריאות לפעולה בסיבוכיות לכן סה״כ .

**מטרה**: מחיקת האיבר בעל המפתח המינימלי

**שיטת פעולה**: ראשית נבדוק האם הערמה ריקה או מכילה עץ יחיד. אם הערמה ריקה נסיים את ריצת המתודה. אם בערמה עץ יחיד:  
אם הוא מדרגה , משמע יש בה איבר יחיד, ננקה אותה ע״י *בסיבוכיות קבועה. אחרת, נקבע את הבן האחרון של העץ להיות העץ האחרון החדש של הערמה וננתק את אחיו מההורה שלהם ע״י* . לאחר מכן נחפש את המינימום החדש ע״י  *ונקטין את כמות האיברים בערמה.   
אם יש יותר מעץ יחיד בערמה:  
נרצה לייצא לערמה חדשה את בניו של השורש שהיה המינימום בעת הקריאה לפונקציה, ולאחד אותו עם הערמה הנוכחית ע״י* . **עצרתי פה 28/6/23 10:02**

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** *במקרה הגרוע יש לנו יותר מעץ אחד, כך שהמינימום הוא שורש העץ בעל הדרגה הגבוהה ביותר כאשר דרגתו היא . מכאן, במקרה הגרוע המינימום החדש לפני ה יהיה שורש העץ שנמצא משמאל לשורש אותו אנו מוחקים כך שעדכון מצביע ועדכון המינימום ירוצו כל אחד בסיבוכיות זמן ריצה (כי עליהם יהיה לעבור על צמתים). בנוסף, הערימה החדשה הנוצרת מהבנים של המינימום הנמחק תכיל במקרה הגרוע עצים, כך שיצירתה ועדכון המינימום שלה במקרה הגרוע ירוץ בסיבוכיות . כעת, נותר לבצע בין שתי ערימות בעלות עצים, דבר השקול לחיבור שני מספרים בינאריים באורך , כלומר סיבוכיות זמן ריצה של סה"כ .*

**מטרה**: מציאת האיבר המינימלי בערימה.

**שיטת פעולה**: אם הרשימה ריקה, נחזיר . אחרת, נאתחל מצביע להיות ה הנוכחי (אם הערימה לא ריקה יש בה לפחות עץ אחד, משמע מצביע לא ( ונעבור על כל שורשי העצים. לכל שורש עץ, אם ערך המפתח שלו קטן/שווה מערך המצביע הנוכחי, נעדכן את המצביע לשורש עץ זה. בסוף האיטרציה נחזיר את ה של המצביע.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע ישנם  *עצים בערימה, ונצטרך לעבור על כולם. שאר הפעולות מתרחשות בסיבוכיות קבועה.*

**מטרה**: פעפוע של צומת במעלה העץ במידה והמפתח שלה הופחת כתוצאה מהרצת כך שמופר כלל הערימה.

**שיטת פעולה**: נחזיק מצביע לאב של הצומת. נתקדם במעלה העץ ובכל פעם נבצע השוואה בין מפתח האב למפתח הצומת הנוכחית. אם כלל הערימה מופר (מפתח צומת האב>=מפתח הצומת הנוכחית) נבצע בין אובייקטי ה שלהם. נעצור את התהליך במידה והצומת הנוכחית היא שורש העץ או אם צומת האב והצומת הנוכחית מקיימות את כלל הערימה ביניהן. נעדכן את המינימום במידת הצורך.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** לכל היותר נבצע פעפועים במעלה העץ כלומר כגובה העץ הגרוע ביותר. שאר הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה. במקרה הגרוע נעדכן את המינימום *בסיבוכיות זמן ריצה . סה"כ .*

**מטרה**: הפחתת ערך המפתח של צומת במספר אי שלילי ומתקן את הערימה לאחר מכן.

**שיטת פעולה**: נחסיר מערך המפתח של הצומת את הערך המבוקש. נקרא ל *שתדאג לתיקון הערימה.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** עדכון ערך המפתח מתבצע בסיבוכיות קבועה. סיבוכיות הפונקציה במקרה הגרוע נקבעת ע"י סיבוכיות זמן הריצה של *במקרה הגרוע. לכן .*

**מטרה**: מחיקה של צומת מבוקשת מהערמה.

**שיטת פעולה**: הפחתה של ערך מפתח הצומת ל-0 באמצעות . *המפתח המינימלי האפשרי לצומת בערימה הוא 0. כעת המינימום של הערימה מצביע לצומת זו, לכן נריץ* ונסיים.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** סיבוכיות זמן הריצה נקבעת באופן אבסולוטי לפי פונקציות *(לא קיימות פעולות נוספות בפונקציה). מכיוון שסיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע של פונקציות אלה היא , סיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע תהיה .*

**מטרה**: ביצוע ומניית פעולות איזון בעץ לשמירה על מאפייני עץ AVL

**שיטת פעולה**: שיטת פעולה Bottom-Up: החל מצומת הנתון, נבדוק האם יש צורך בעדכון גובה העץ ע״י קריאה למתודת של ונחשב את הערך המוחלט של ה-BF של הצומת ע״י קריאה ל-. כעת, כפי שנלמד בכיתה אנחנו יודעים שה-BF הוא בין 2- ל-2, לכן נקבל מספר בין 0 ל-2. בהצלבה עם בדיקת שינוי הגובה, נפצל ל-3 מקרים:

1. BF קטן ממש מ-2 ובוצע שינוי גובה: נעדכן גודל, נקדם את המצביע להורה ונוסיף פעולת איזון.
2. BF קטן ממש מ-2 ולא בוצע שינוי גובה: נעדכן גודל ונחזיר את מספר פעולות האיזון שנצבר.
3. BF שווה 2: נבצע גלגול ע״י קריאה למתודת על המצביע הנוכחי ונצבור את פעולות האיזון שהמתודה מחזירה. נחזיר את פעולות האיזון שהצטברו

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** נשים לב שלכל היותר בכל מקרה נבצע פעולות של *:* שינוי מצביע, חישוב מאפיין ע״י הבנים בזמן קבוע (size) או ביצוע שכאמור היא . במקרה הגרוע נתחיל בעלה העמוק ביותר ונקדם את המצביע עד שנגיע לשורש, כאשר בכל קידום נבצע לכל היותר פעולות, לכן הסיבוכיות לינארית בגובה העץ, משמע .

**מטרה**: חיבור שני עצים מאותה דרגה.

**שיטת פעולה**: ראשית, אם שני העצים נמצאים באותה ערימה והם עצים עוקבים, ננתק אותם אחד מהשני. שנית, נשווה בין מפתחות העצים כך שהעץ בעל המפתח הקטן יותר יהיה "למעלה" יותר, והשני יתחבר אליו. מכאן נבצע את החיבור בין העצים כפי שנלמד בכיתה, עם התייחסות למקרים פרטיים במידת הצורך (למשל, כאשר לעץ שנמצא "מעל" אין ילדים). בסיום נגדיל את דרגת העץ שנמצא "למעלה" ב-1.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** כל הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה. (שינויי מצביעים, ערכי משתנים, ותנאים).

**מטרה**: עדכון של אובייקט הערימה לפי מערך המכיל מצביעים לעצים בינומיים. כל אינדקס במערך מייצג דרגה של עץ, כך שבמידה וקיים עץ מדרגה זו בערמה, התא יחזיק מצביע לשורש העץ. אחרת, ערך התא יהיה .

**שיטת פעולה**: המערך שקול לייצוג של ערימה בינומית תקינה. נרצה לעדכן את אובייקט הרשימה שלנו על פי מערך זה. נבחין כי קיימת לכל עץ במערך נוכל לחשב את גודלו, את ערך מפתח השורש שלו ונדע את הדרגה שלו. מתוך כך, העץ שנמצא בתא בעל האינדקס הגבוה ביותר במערך מייצג את העץ בעל הדרגה המקסימלית בערמה (). בנוסף, מצביע ה של כל עץ במערך יהיה העץ שמימינו (והעץ האחרון יצביע על הראשון). מכאן, נעבור על כל התאים במערך ונחזיק מצביעים לכל 2 תאים עוקבים במערך, כך שנוכל לעדכן את ערך ה לכל עץ. בנוסף, נסכום את מספר הצמתים של כל העצים במערך (מספר הצמתים בעץ הוא באינדקס הוא ) ואת מספר העצים (שקול למספר העצים הכולל בערימה). לבסוף נעדכן את ערכי שדות הערימה לפי הערכים שחישבנו במהלך האיטרציה, ונריץ *לעדכון המינימום של הערימה התקינה.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** אורך המערך הוא **#עצרתי פה 29.6**

**מטרה**: מוצאת את הצומת עם המפתח הבא/הקודם בגודלו בעץ, אם קיים

**שיטת פעולה**: ראשית, המתודה בודקת האם הצומת הנתון הוא המקסימלי/מינימלי או שהעץ ריק (קריאה ל-), במקרה כזה אין לו צומת עוקב/קודם והמתודה תחזיר None. אחרת, אם לצומת קיים בן ימני/שמאלי (קריאה ל- של ), נקדם את המצביע אליו. כעת, נרד בכיוון הנגדי עד כמה שניתן ונחזיר את הצומת האחרון שהצבענו עליו. אם לצומת אין בן ימני/שמאלי, נעלה למעלה בעץ בכיוון המתאים עד כמה שניתן ונחזיר את הצומת הבאה בכיוון ההפוך, הכל כפי שנלמד בכיתה

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע נעלה או נרד בכל העץ ונבצע פעולות בזמן קבוע בכל איטרציה, לכן הסיבוכיות לינארית לגובה העץ. מכיוון שמובטח לנו עץ AVL, גובה העץ חסום ע״י ובסך הכל נקבל *.*

**מטרה**: הכנסת צומת חדש למיקום של צומת נתון

**שיטת פעולה**: תחילה נבדוק את המיקום היחסי של הצומת המקורי ע״י קריאה ל- של , ולאחר מכן נבצע החלפת מצביעים עם עבור הבנים של הצומת המקורי, וחיבור במיקום המתאים של הצומת החדש עם ההורה של הצומת המקורי

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** החלפת משתנים וקריאה למתודה של .

**מטרה**: מחיקת צומת מהעץ לפי אלגוריתם מחיקה של עץ חיפוש בינארי קלאסי וסימון הצומת ממנו נבצע איזון מעלה

**שיטת פעולה**: המתודה מפרידה בין שלושת המקרים האפשריים למחיקה:

1. הצומת הוא עלה
2. לצומת בן אחד
3. לצומת 2 בנים

נבדיל בין מקרים 1 ו-2 ל-3 ע״י בדיקה האם לצומת יש בן דמה (קריאה ל- של ) מכיוון שאם יש לו, אז אנחנו לא במקרה 3. כעת, נבדוק האם אנחנו במקרה 1 או 2, נמחק את הצומת, נחליפו בדמה ונקשר את הבנים הרלוונטיים להורה של הצומת המחוק. נחזיר את ההורה. במקרה 3, כפי שלמדנו בכיתה, נרצה להחליף את הצומת המיועד למחיקה עם העוקב שלו. לשם כך, ראשית נבצע קריאת למציאת העוקב, לאחר מכן נבצע קריאה רקורסיבית ל- עם הצומת העוקב בכדי לנתקו מן העץ. לבסוף נבצע החלפה של הצומת המקורי עם העוקב שלו ע״י קריאה למתודה . נחזיר את הצומת העוקב במקומו החדש

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** נשים לב שמקרים 1 ו-2 פועלים בזמן קבוע שכן מתבצעות שם כמות קבועה של שינוי מצביעים, משמע . לגבי מקרה 3: מובטח לנו שבאופן בו מימשנו את מתודת לאחר קריאה אחת נקבל צומת שאין לה בן שמאלי. עובדה זו נטועה בכך שהאלגוריתם למציאת עוקב עוצר כאשר לא ניתן להמשיך לרדת בעץ עם היצמדות שמאלה. כפי שראינו, סיבוכיות היא . כעת, בקריאה הרקורסיבית בהכרח נעמוד בתנאי מקרה 1 או 2, לכן הקריאה תיעצר בעומק רקורסיה 1 ותבצע פעולות בסיבוכיות של . מתודת החלפת הצמתים פועלת ב- כפי שראינו. לכן, מקרה 3 במקרה הגרוע הוא . לסיכום, במקרה הגרוע בעת מחיקה ניכנס למקרה 3 ולכן סיבוכיות המתודה הכללית היא .

**מטרה**: מחיקת צומת מן העץ והחזרת מספר פעולות האיזון שבוצעו

**שיטת פעולה**: ראשית נבדוק האם הצומת הוא המינימום/מקסימום ונעדכן את המאפיין בעץ לפי העוקב/קודם של הצומת. לאחר מכן נבצע מחיקת עץ חיפוש בינארי קלאסית ע״י קריאה ל- ונשמור את הצומת המוחזר. אם אכן התבצעה מחיקה, החל מהצומת המוחזר נתחיל לבצע תיקונים Bottom-Up לשמירת מאפייני עץ AVL ע״י קריאה ל- שבתורה תחזיר את מספר פעולות האיזון שהתבצעו, אותן נחזיר. אם לא התבצעה מחיקה נחזיר 0.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** פעולת או אחת: . קריאה אחת ל-: . קריאה ל-: . הפעולות נקראות אחת אחרי השנייה לכן סה״כ: .

**מטרה**: קבלת גודל העץ

**שיטת פעולה**: קריאה ל- של על שורש העץ

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** שינוי מצביעים

**מטרה**: הגדרת עץ אחר כעץ המקורי

**שיטת פעולה**: העתקת מצביעי השורש, המינימום והמקסימום של העץ המקורי לעץ החדש

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** שינוי מצביעים

**מטרה**: קבלת שורש של תת עץ בגובה רצוי בכיוון יחיד מהשורש

**שיטת פעולה**: החל מהשורש, נרד על הדופן השמאלית או הימנית של העץ בהתאם לקלט direction, עד שנגיע לצומת בגובה קטן או שווה לקלט . נחזיר את הצומת שנצביע עליה

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע נרצה תת עץ בגובה 0, משמע עלה, לכן נבצע הליכה על כל גובה העץ, מכאן שהסיבוכיות לינארית לגובה העץ שהיא .

**מטרה**: ביצוע איחוד של עץ ריק ועץ לא ריק

**שיטת פעולה**: נבדוק מי מהעצים לא ריק ע״י קריאה ל-, ונבצע פעולת הכנסה של צומת הציר לעץ זה. נקרא למתודה במידת הצורך כדי לוודא שהעץ עליו נקראת המתודה יהיה העץ שאינו ריק

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** בדיקת עץ ריק עולה , הכנסת צומת במקרה הגרוע היא כפי שראינו, והחלפת עצים ע״י עולה גם היא לכן בסה״כ נקבל סיבוכיות של *.*

**מטרה**: איחוד מצידו השמאלי של העץ הנוכחי

**שיטת פעולה**: ראשית נחשב את הבדל הגבהים בין העץ הנוכחי לעץ האחר. כעת, בהתאם להבדל הגבהים, המתודה תבצע אחת מ-3 אפשרויות:

1. איחוד פשוט: הבדל הגבהים קטן או שווה 1 לכן נוכל לבצע חיבור של שורשי העצים כבנים של צומת הציר והגדרת צומת הציר כשורש החדש.
2. הנוכחי גבוה מהאחר: נקרא למתודה עם כיוון שמאל ובגובה של העץ האחר. כעת נחבר את צומת הציר עם השורש של העץ האחר והשורש של תת העץ שמצאנו ונחליף את שורש תת העץ עם צומת הציר.
3. האחר גבוה מהנוכחי: נבצע פעולה סימטרית למקרה (2) כאשר נחליף בין העץ הנוכחי לאחר ובין כיוון שמאל לימין. נגדיר את השורש של העץ הנוכחי להיות השורש של העץ האחר כדי לוודא שהעץ המאוחד הוא זה שנקראה עליו המתודה.

המתודה תחזיר ערך מוחלט של הפרש הגבהים ועוד 1 כנדרש.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה של איחוד פשוט נבצע שינוי קבוע של משתנים ולכן הסיבוכיות תהיה . במקרים 2 ו-3 נבצע קריאה למתודה אך נשים לב שכמות הצעדים מהשורש שהמתודה תבצע חסומה ע״י הבדל הגבהים בין העצים, שכן אנו רוצים לייצר תת עץ השווב בגובהו לעץ אחר. לכן, במקרה זה סיבוכיות המתודה תהיה  
 . נוסף על הקריאה למתודה נבצע כמו קבועה של שינוי משתנים. לכן, ניתן לכתוב בהכללה את הסיבוכיות של 3 הפעולות יחד כ- *.*

**מטרה**: איחוד מצידו הימני של העץ הנוכחי

**שיטת פעולה**: סימטרית למתודה *, כאשר כאן העץ הנוכחי הוא השמאלי ביותר*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** זהה לניתוח ב-.

**מטרה**: איחוד שני עצי AVL

**שיטת פעולה**: ראשית נבנה צומת ציר מ- ו- הנתונים. שנית, נבדוק האם אחד העצים ריק ע״י קריאה ל-. אם כן, נחשב את הפרש הגבהים, נבצע איחוד ע״י ונחזיר את ההפרש שחישבנו. אחרת, נמקם את העץ הנוכחי ביחס לעץ האחר ע״י השוואת המפתח של שורש העץ הנוכחי עם המפתח של צומת הציר (מובטח לנו שמפתח צומת הציר נמצא בין כל מפתחות עץ אחד לכל מפתחות העץ האחר). בהנתן המיקום, נקרא למתודת האיחוד המתאימה ונשמור את הפרש הגבהים שהיא מחזירה. לאחר מכן נעדכן את המינימום/מקסימום של העץ הנוכחי בהתאם לכיוון האיחוד ונבצע איזון של העץ החל מצומת הציר מעלה כנדרש ע״י קריאה ל-. נחזיר את הפרש הגבהים בערך מוחלט ועוד 1 כנדרש

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** נשים לב שבכל מקרה נקרא לאחת מתוך 3 מתודות העזר הנ״ל, לכן במקרה הגרוע נקבל סיבוכיות של . לאחר מכן נקרא ל- אך בדומה לחסם העליון של במתודות , גם כאן הסיבוכיות חסומה ע״י הפרש הגבהים, לכן הסיבוכיות של במקרה זה היא . נקבל כי בסה״כ סיבוכיות האיחוד תהיה .

**מטרה**: פיצול עץ AVL לשני עצים מצומת בעץ

**שיטת פעולה**: נבצע פיצול ע״י איחודים כפי שנלמד בשיעור. נאתחל 2 עצים, ימני ושמאלי, שיהיו העצים המפוצלים בסוף הריצה. נאתחל את העצים עם שורשים שהם בניו של הצומת המפצל. כעת, החל מההורה של צומת הפיצול, נתחיל לעלות בעץ עד שנגיע לשורש. בכל איטרציה נגדיר עץ וצומת זמניים חדשים ונבדוק את הכיוון היחסי של ההורה של הצומת להורה שלו (בדיקת היחס בין אבא של הצומת לסבא של הצומת) ע״י קריאה ל- של . כעת נגדיר את הצומת הזמני כצומת הנוכחית ע״י של , ונגדיר את השורש של העץ הזמני להיות הצומת הזמנית. נאתחל מינימום ומקסימום ע״י קריאה ל- ולבסוף נבצע איחוד של העץ הזמני עם העץ המתאים לכיוון היחסי ע״י קריאה ל- כאשר ההורה של הצומת הנוכחית משמש כצומת הציר. לאחר שנסיים לעלות בכל העץ, נתחזק את המינימום והמקסימום של העצים המפוצלים ע״י קריאות על צומת הפיצול והחלפת מצביעים עם המינימום והמקסימום של העץ המתפצל. לבסוף נחזיר רשימה של שני העצים המפוצלים, הראשון יהיה השמאלי (מפתחות קטנים יותר ממפתח הפיצול) והשני יהיה הימני (מפתחות גדולים מצומת הפיצול)

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** נתמקד ראשית במתודות העזר. עולה*,* עולה גם היא ובמקרה הגרוע קריאות ל- ול- עולות כ״א. פרט לפעולות אלה, ראינו בכיתה שבמקרה הגרוע נבצע קריאות ל-, לכן הסיבוכיות הכוללת של הפעולות הללו תובע ע״י טור טלסקופי סופי שמסתכם ל-, לכן הסיבוכיות הכוללת של המתודה כולה הוא .

**מטרה**: קבלת הדרגה של צומת בעץ

**שיטת פעולה**: נאתחל משתנה לערך ה- של הבן השמאלי של הצומת ועוד 1. כעת, החל מהצומת הנתונה, אם הצומת הוא בן ימני (נבדק ע״י קריאה ל-) נוסיף למשתנה את ערך ה- של אחיו השמאלי ועוד 1 ונמשיך לעלות בעץ עד שנגיע לשורש. נחזיר את המשתנה

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** מכיוון שאנו מתחזקים מאפיין לצמתים, ומכיוון שמשתנה זה עומד ב-2 התנאים המספיקים שנלמדו בכיתה (חישובו תלוי רק בילדיו וזמן החישוב שלו קבוע) ראינו שניתן לקבל את ערכו במקרה הגרוע ב-, למעשה נבצע פעולות של *.*

**מטרה**: קבלת צומת בעלת דרגה נתונה

**שיטת פעולה**: ראשית נבדוק האם הדרגה שאנו מחפשים היא דרגת השורש, ונחזירו בהתאם. אחרת, המתודה בודקת האם הצומת בעל הדרגה הנדרשת נמצא מימין לשורש או משמאלו. לאחר מכן, החל מהמקסימום/מינימום בהתאמה למיקום הצומת, המתודה תבצע או קריאות או בהתאמה עד שתגיע לצומת הנדרש ותחזיר אותו

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע נבצע קריאות . כפי שלמדנו בתרגול, הסיבוכיות של כמות פעולות אלה היא  
 *.*

**מטרה**: קבלת רשימה ממוינת (עולה) של זוגות סדורים של ערכי הצמתים והמפתח שלהם, ממוינים לפי המפתחות

**שיטת פעולה**: נאתחל רשימה ריקה. במידה והעץ לא ריק (בדיקה ע״י קריאה ל-), החל מהצומת המינימלי, נבצע פעולות ונבצע הוספה של הזוג הסדור (מפתח, ערך) לסוף הרשימה בכל איטרציה.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** בדומה לניתוח במתודת ובהתאם לנלמד בתרגול 3 (שאלה 4), ביצוע פעולות היא בסיבוכיות של *.*

**חלק ניסויי - תשובות**

1.

1. ראשית, מתוך העובדה שאנחנו מכניסים את האיברים לעץ לפי סדרם במילון, נבחין כי עבור צומת חדשה- נסמנה , מספר החילופים עבורה שקול למספר הצמתים הקיימים בעץ שערך המפתח שלהם גדול משל . (כי הצמתים הקיימים בעץ היו במיקומים במערך).

כלומר *.*

*מימשנו חישוב זה בדרך הבאה:*

*ראשית נבחין כי כל עוד , אין החלפות.*

*אם :*

*נעלה מהמקסימום במעלה העץ ונעצור בצומת כך שמיקום ההכנסה של הוא בתת עץ השמאלי של .*

*מכאן, ממשיכים מ עם חיפוש בינארי רגיל כפי שנלמד בכיתה, בתוספת קטנה, חישוב ההחלפות תוך כדי (נעשה בדומה לחישוב ). בכל איטרציה שבה נצטרך לרדת לבן השמאלי, נסכום את גודל תת העץ הימני של הצומת ממנה אנחנו יורדים + 1*

טבלת ניתוחי ניסויים:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **מספר חילופים**  **במערך ממוין-הפוך** | **עלות מיון AVL עבור מערך ממוין-הפוך** | **מספר חילופים במערך מסודר אקראית** | **עלות מיון AVL עבור מערך מסודר אקראי** | **מספר החילופים**  **במערך כמעט ממוין** | **עלות מיון AVL עבור מערך כמעט ממוין** |
| 1 | 4498500 | 67805 | 2064996 | 60740 | 448201 | 52500 |
| 2 | 17997000 | 147635 | 8482333 | 130295 | 896701 | 112606 |
| 3 | 71994000 | 319297 | 32913292 | 301246 | 1793701 | 232823 |
| 4 | 287988000 | 686623 | 134184239 | 630265 | 3587701 | 473260 |
| 5 | 1151976000 | 1469277 | 523350064 | 1375904 | 7175701 | 954137 |

1. מספר החילופים עבור מערך ממוין-הפוך בעל איברים הוא:

*. ההסבר לכך הוא נובע מכך שלכל איבר שנמצא במיקום במערך, כל האיברים שנמצאים במיקומים עד עונים על הגדרת ההחלפה, משמע ישנן החלפות.*

*עלות החיפושים:*

*הסבר כללי*

*נבחין כי עבור מערך ממוין-הפוך, האיבר המקסימלי במערך הוא האיבר הראשון בעץ. בנוסף, כל איבר חדש עם מפתח שנכנס לעץ הוא האיבר המינימלי החדש. נבחין כי ההכנסה נעשית לעץ עם איברים (כלומר גובה העץ ). נשים לב- מכיוון שהמערך ממוין הפוך, ההכנסה מתחילה מאיבר שהמפתח שלו . לכן מספר האיברים במערך הוא ונגמרת עם האיבר שהמפתח שלו*

*.) מכאן, שבכל הכנסה נצטרך לעלות מהמקסימום עד לשורש העץ, ומהשורש לרדת עד לעלה/לאבא של עלה כלומר סה"כ חיפושים.*

*נוכיח*

*הערה: לפי ההסבר הכללי נבחין כי האיבר הראשון בסכימה מתייחס להכנסת האיבר האחרון () במערך לעץ, בעוד שסכימת האיבר האחרון () מתייחס להכנסת האיבר הראשון במערך () לעץ.*

:

*:*

1. *עבור מספר החילופים:*

*בבירור ניתן לראות כי מספר החילופים שקיבלנו בסעיף א' עבור מערך ממוין הפוך זהה למספר החילופים שקיבלנו בסעיף ב'.*

*עבור מספר החיפושים:*

*נבדוק קו מגמה באמצעות אקסל בצורה הבאה. לכל גודל מערך , עבורו קיבלנו בסעיף א' עלות מיון מסויימת , נייצר קואורדינטה חדשה המייצגת עבור אותו את העלות מסעיף א' ואת העלות מסעיף ב' () ונקבל קו מגמה בעל קואורדינטות .*

*טבלת עלויות חיפושים*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | *סעיף א'* | *סעיף ב'* |
| *1* |  |  |
| *2* |  |  |
|  |  |  |
| *3* |  |  |
| *4* |  |  |
| *5* |  |  |

2. *טבלת ניתוחי ניסויים:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | ***עלות* join *ממוצע עבור* split *אקראי*** | ***עלות* join *מקסימלי עבור* split *אקראי*** | ***עלות* join *ממוצע עבור* split *של איבר מקסימלי בתת העץ השמאלי*** | ***עלות* join *מקסימלי עבור* split *של איבר מקסימלי בתת העץ השמאלי*** |
| *1* | *2.5* | *4* | *2.4545* | *13* |
| *2* | *2.4545* | *4* | *2.8333* | *15* |
| *3* | *2.5454* | *5* | *2.9166* | *16* |
| *4* | *2.75* | *10* | *2.5* | *17* |
| *5* | *3.0909* | *9* | *2.8235* | *19* |
| *6* | *2.6875* | *7* | *2.4375* | *20* |
| *7* | *2.2352* | *8* | *2.75* | *21* |
| *8* | *2.5263* | *7* | *2.9411* | *22* |
| *9* | *3.0555* | *5* | *2.5555* | *23* |
| *10* | *2.6111* | *9* | *2.65* | *25* |

1. *נסמן את עומק צומת הפיצול ב. ראשית, נבחין כי נצטרך לבצע פעולות - לכל צומת במסלול מ לשורש.*

*בפרט, מכיוון שכל הפעולות ב הן מסיבוכיות אסימפטוטית מלבד הרצות , לצד העובדה שסיבוכיות פיצול אסימפטוטית היא , נקבע כי עלות ממוצעת של היא .*

1. *נסמן את צומת הפיצול, האיבר המקסימלי בתת העץ השמאלי של השורש ב , ואת הבן השמאלי של שורש העץ ב.*

*נבחין כי תת העץ הימני של הוא בוודאי ריק. מהגדרת איבר מקסימלי, נבחין כי במהלך פעולת הפיצול, בכל פעם שנעלה בעץ עד לצומת נצטרך לבצע (כעומק פחות 1) פעולות לתת העץ השמאלי של . נבחין כי הפרשי הגבהים בין שני העצים אותם נאחד יהיה לכל היותר 1. מכאן, כל פעולה כזו, תיקח , סה"כ*

*מכאן, הפעם הראשונה שבה נעלה שמאלה בעץ תהיה מ לשורש העץ המקורי וזו פעולת ה האחרונה שתתבצע. הפעולה תופעל על תת העץ הימני של , שכבר ציינו שהוא ריק ועל תת העץ הימני של השורש המקורי. כלומר עלות זה נקבעת לפי גובה תת העץ הימני של השורש, ועל כן היא .*

*כלומר היא עלות ה המקסימלי עבור פיצול באיבר המקסימלי של תת העץ השמאלי של השורש.*

*נראה שעלות זו עולה בקנה אחד עם התוצאות שקיבלנו בסעיף א'.*

*לכל נסמן , ואת גובה העץ המתאים לו אזי מתקיים:*

*כלומר, ההפרש שנצפה בעלות המקסימלי בניסוי השני בין עץ בגודל לבית עץ בגודל הוא בערך 1, וזה תואם את התוצאות בטבלה בסעיף א.*