**תרגיל בית מעשי 2: חלק תיאורטי**

תומר מילדוורט | mildworth | 316081355 | Tomer Mildworth  
ליאור בודנר | 207702861 | liorbodner | Lior Bodner

**תיעוד חיצוני**

בבניית התרגיל, השתדלנו לחלק את האחריויות של כל מחלקה באופן הגיוני ומופרד ובמחשבה על שימוש הגיוני על ידי לקוח שזר לתרגיל. בכתיבת הקוד, נסינו להקפיד על כתיבה אבסטרקטית וקריאה ככל הניתן: כתיבת מתודות כלליות ופירוקן למספר פונקציות עזר, בחירת שמות משתנים ברורים ובהירים והצמדות לחומר הנלמד בכיתה ובתרגולים.

נתחיל בניתוח המחלקה .

**– איבר ערמה**

מאפייני המחלקה

* – מפתח לצומת. ערך מספרי שלם שייחודי לכל צומת בעץ. ערך דיפולטי .
* – מצביע לצומת המחזיקה את איבר הערמה. ערך דיפולטי None.
* – מידע השמור באיבר הערמה. מוגדר להיות שרשרת. ערך דיפולטי שרשרת ריקה.

המחלקה מיועדת לשמירת המידע המבוקש במבנה הנתונים והתאמתו למיקום בתור העדיפויות של המשתמש. למעשה איבר הערמה איננו חלק מהמימוש הטכני של מבנה הנתונים, אלא רק מכיל מצביע (דו כיווני) לאיבר בערמה לצורך קריאה וכתיבה דרך הצומת המתאימה.

מתודות

**מטרה**: בנאים של המחלקה

**שיטת פעולה**: אתחול המחלקה לפי הקלטים הנ״ל או בערכיהם הדיפולטיים כפי שמתואר מעלה.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע: -**

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**- צומת**

מאפייני המחלקה

* *– איבר הערמה של הצומת.*
* – *הבן של הצומת הנוכחית, מוגדר להיות הצומת האחרון שהתווסף לצומת. מצביע לצומת.*
* – הצומת הבא ברשימת ה״אחים״ של הצומת, או של כלל השורשים במבנה במידה והצומת היא שורש של עץ. מצביע לצומת.
* – ההורה של הצומת. מצביע הפוך ל- *גם אם צומת איננו הבן (מוגדר להיות* ) של הצומת.
* – דרגת הצומת. דרגה של צומת מוגדרת להיות מספר הילדים שלו.

מתודות

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**–ערמה**

מאפייני המחלקה

* – מספר האיברים בערימה. ערך דיפולטי .
* – מצביע לשורש העץ בעל הדרגה הגבוהה ביותר במערך. ערך דיפולטי .
* – מצביע לשורש בעל המפתח הנמוך ביותר בערמה כולה.
* – כמות העצים בערמה.

המחלקה מיועדת לשמירת המידע המבוקש במבנה הנתונים והתאמתו למיקום בתור העדיפויות של המשתמש. למעשה איבר הערמה איננו חלק מהמימוש הטכני של מבנה הנתונים, אלא רק מכיל מצביע (דו כיווני) לאיבר בערמה לצורך קריאה וכתיבה דרך הצומת המתאימה.

**מטרה**: בנאי למחלקה

**שיטת פעולה**: השמת הערכים הנתונים במאפייני הערמה.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** השמת ערך ידוע למשתנה

**מטרה**: הדפסה ברורה של המחלקה

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**מטרה**: קבלת שורש העץ

**שיטת פעולה**: קריאה למאפיין של העץ הנוכחי

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע: -**

**מטרה**: הכנסת מידע חדש עם ערך קדימות לערמה

**שיטת פעולה**: ראשית, ניצור איבר ערמה וצומת חדשים ונחבר ביניהם. לאחר מכן, אם בערמה כמות זוגית של איברים, נוכל להוסיף את הצומת החדש לערמה בזמן קבוע: הוספתו כעץ מדרגה ע״י שינוי מצביעים ידועים. אחרת, נייצר מהצומת ערמה חדשה ונבצע קריאה ל-. *נחזיר את איבר הערמה שהוכנס.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** כאמור, כל הכנסה שנייה תתבצע ב- (שינוי מצביעים). אחרת, נבצע איחוד ערמות ולכן ייתכנו במקרה הגרוע קריאות ל- *שפועלת בזמן קבוע. לכן, במקרה הגרוע סיבוכיות הזמן תהיה .*

**מטרה**: ריקון הערמה מאיברים

**שיטת פעולה**: ניתוק המצביעים מאיברי הערמה הקיימים ואיפוס המונים השונים

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** תמיד שינוי מצביעים קבוע.

**מטרה**: ניתוק השורשים מהוריהם

**שיטת פעולה**: החל מהצומת האחרון של הערמה, נעבור על כלל השורשים וננתק את המצביע להורה

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** אנו יודעים שבכל רגע נתון כמות השורשים בערמה חסום ע״י לכן נבצע קריאות לפעולה בסיבוכיות לכן סה״כ .

**מטרה**: מחיקת האיבר בעל המפתח המינימלי

**שיטת פעולה**: ראשית נבדוק האם הערמה ריקה או מכילה עץ יחיד. אם הערמה ריקה נסיים את ריצת המתודה. אם בערמה עץ יחיד:  
אם הוא מדרגה , משמע יש בה איבר יחיד, ננקה אותה ע״י *בסיבוכיות קבועה. אחרת, נקבע את הבן האחרון של העץ להיות העץ האחרון החדש של הערמה וננתק את אחיו מההורה שלהם ע״י* . לאחר מכן נחפש את המינימום החדש ע״י  *ונקטין את כמות האיברים בערמה.   
אם יש יותר מעץ יחיד בערמה:  
נרצה לייצא לערמה חדשה את בניו של השורש שהיה המינימום בעת הקריאה לפונקציה, ולאחד אותו עם הערמה הנוכחית ע״י* .

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** *במקרה הגרוע יש לנו יותר מעץ אחד, כך שהמינימום הוא שורש העץ בעל הדרגה הגבוהה ביותר כאשר דרגתו היא . מכאן, במקרה הגרוע המינימום החדש לפני ה יהיה שורש העץ שנמצא משמאל לשורש אותו אנו מוחקים כך שעדכון מצביע ועדכון המינימום ירוצו כל אחד בסיבוכיות זמן ריצה (כי עליהם יהיה לעבור על צמתים). בנוסף, הערימה החדשה הנוצרת מהבנים של המינימום הנמחק תכיל במקרה הגרוע עצים, כך שיצירתה ועדכון המינימום שלה במקרה הגרוע ירוץ בסיבוכיות . כעת, נותר לבצע בין שתי ערימות בעלות עצים, דבר השקול לחיבור שני מספרים בינאריים באורך , כלומר סיבוכיות זמן ריצה של סה"כ .*

**מטרה**: מציאת האיבר המינימלי בערימה.

**שיטת פעולה**: אם הרשימה ריקה, נחזיר . אחרת, נאתחל מצביע להיות ה הנוכחי (אם הערימה לא ריקה יש בה לפחות עץ אחד, משמע מצביע לא ( ונעבור על כל שורשי העצים. לכל שורש עץ, אם ערך המפתח שלו קטן/שווה מערך המצביע הנוכחי, נעדכן את המצביע לשורש עץ זה. בסוף האיטרציה נחזיר את ה של המצביע.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע ישנם  *עצים בערימה, ונצטרך לעבור על כולם. שאר הפעולות מתרחשות בסיבוכיות קבועה.*

**מטרה**: פעפוע של צומת במעלה העץ במידה והמפתח שלה הופחת כתוצאה מהרצת כך שמופר כלל הערימה.

**שיטת פעולה**: נחזיק מצביע לאב של הצומת. נתקדם במעלה העץ ובכל פעם נבצע השוואה בין מפתח האב למפתח הצומת הנוכחית. אם כלל הערימה מופר (מפתח צומת האב>=מפתח הצומת הנוכחית) נבצע בין אובייקטי ה שלהם. נעצור את התהליך במידה והצומת הנוכחית היא שורש העץ או אם צומת האב והצומת הנוכחית מקיימות את כלל הערימה ביניהן. נעדכן את המינימום במידת הצורך.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** לכל היותר נבצע פעפועים במעלה העץ כלומר כגובה העץ הגרוע ביותר. שאר הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה. במקרה הגרוע נעדכן את המינימום *בסיבוכיות זמן ריצה . סה"כ .*

**מטרה**: הפחתת ערך המפתח של צומת במספר אי שלילי ומתקן את הערימה לאחר מכן.

**שיטת פעולה**: נחסיר מערך המפתח של הצומת את הערך המבוקש. נקרא ל *שתדאג לתיקון הערימה.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** עדכון ערך המפתח מתבצע בסיבוכיות קבועה. סיבוכיות הפונקציה במקרה הגרוע נקבעת ע"י סיבוכיות זמן הריצה של *במקרה הגרוע. לכן .*

**מטרה**: מחיקה של צומת מבוקשת מהערמה.

**שיטת פעולה**: הפחתה של ערך מפתח הצומת ל-0 באמצעות . *המפתח המינימלי האפשרי לצומת בערימה הוא 0. כעת המינימום של הערימה מצביע לצומת זו, לכן נריץ* ונסיים.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** סיבוכיות זמן הריצה נקבעת באופן אבסולוטי לפי פונקציות *(לא קיימות פעולות נוספות בפונקציה). מכיוון שסיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע של פונקציות אלה היא , סיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע תהיה .*

**מטרה**: ביצוע של כל החיבורים הנגררים מחיבור של שני עצים מאותה דרגה.

**שיטת פעולה**: הפונקציה מקבלת מערך המתאר ערימה תקינה, ועץ שצריך להתחבר לעץ מאותה דרגה הקיים בערימה. נניח שהדרגה של היא , ניגש לתא באינדקס זה במערך ונבצע בין העץ הקיים בתא זה ולבין העץ שקיבלנו. כעת קיבלנו כתוצאה מהחיבור עץ בדרגה , אז ניגש לתא באינדקס זה במערך. אם הוא ריק נעצור את התהליך, אחרת נמשיך בתהליך דומה עד שנגיע לתא ריק. הדבר שקול ל שנוצר כתוצאה מחיבור מספרים בינאריים.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** במקרה הגרוע חיבור של שני עצים בגודל עשוי לייצר *, כלומר*  *איטרציות. נכונות הדבר מתוך השקילות של חיבור מספריים בינאריים, ומספר החיבורים שקול למספר ה שנגרר כתוצאה מכך. מספר ה עבור שני מספרים באורך במקרה הגרוע הוא . שאר הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה. סה"כ .*

**מטרה**: חיבור שני עצים מאותה דרגה.

**שיטת פעולה**: ראשית, אם שני העצים נמצאים באותה ערימה והם עצים עוקבים, ננתק אותם אחד מהשני. שנית, נשווה בין מפתחות העצים כך שהעץ בעל המפתח הקטן יותר יהיה "למעלה" יותר, והשני יתחבר אליו. מכאן נבצע את החיבור בין העצים כפי שנלמד בכיתה, עם התייחסות למקרים פרטיים במידת הצורך (למשל, כאשר לעץ שנמצא "מעל" אין ילדים). בסיום נגדיל את דרגת העץ שנמצא "למעלה" ב-1.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** כל הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה. (שינויי מצביעים, ערכי משתנים, ותנאים).

**מטרה**: עדכון של אובייקט הערימה לפי מערך המכיל מצביעים לעצים בינומיים. כל אינדקס במערך מייצג דרגה של עץ, כך שבמידה וקיים עץ מדרגה זו בערמה, התא יחזיק מצביע לשורש העץ. אחרת, ערך התא יהיה .

**שיטת פעולה**: המערך שקול לייצוג של ערימה בינומית תקינה. נרצה לעדכן את אובייקט הרשימה שלנו על פי מערך זה. נבחין כי עבור כל עץ במערך ערך השורש שלו ודרגתו ידועים ומכאן שנוכל לחשב גם את גודלו. מתוך כך, העץ שנמצא בתא בעל האינדקס הגבוה ביותר במערך מייצג את העץ בעל הדרגה המקסימלית בערמה (). בנוסף, מצביע ה של כל עץ במערך יהיה העץ שמימינו (והעץ האחרון יצביע על הראשון). מכאן, נעבור על כל התאים במערך ונחזיק מצביעים לכל 2 תאים עוקבים במערך, כך שנוכל לעדכן את ערך ה לכל עץ. בנוסף, נסכום את מספר הצמתים של כל העצים במערך (מספר הצמתים בעץ הוא באינדקס הוא ) ואת מספר העצים (שקול למספר העצים הכולל בערימה). לבסוף נעדכן את ערכי שדות הערימה לפי הערכים שחישבנו במהלך האיטרציה, ונריץ *לעדכון המינימום של הערימה התקינה.*

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** אורך המערך הוא שקול לדרגת העץ בעל הדרגה הגבוהה ביותר במערך+1. כלומר נבצע איטרציות. שאר הפעולות הן פעולות אריתמטיות, שינויי מצביעים, השמת ערכים למשתנים ותנאים ולכן מתבצעים בסיבוכיות קבועה. לבסוף, סיבוכיות זמן הריצה של *היא גם במקרה הגרוע ולכן סה"כ סיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע .*

**מטרה**: הפונקציה מאחדת שתי ערמות לכדי ערמה אחת תקינה.

**שיטת פעולה**: נייצר מערך בגודל הדרגה המקסימלית מבין שתי הערמות+2. ראשית נעבור על שורשי העצים בערמה, כך שלכל עץ בדרגה נשמור מצביע אליו בתא באינדקס במערך. לאחר מכן נבצע תהליך דומה עבור . אבל כעת, בכל פעם שניגש לתא במערך שמכיל כבר מצביע, נקרא ל האחראית על ביצוע חיבורים מתאימים בעת היתוך. לבסוף, נקבל מערך המייצג ערימה בינומית תקינה, ונעדכן את אובייקט הערמה שלנו לפיו עם .

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** *במקרה הגרוע נבצע* לשתי ערימות בעלות *שורשים. לכן, נבצע איטרציות. לפי הנלמד בכיתה פונקציית שקולה לחיבור שני מספרים בינאריים בגודל , ואכן מספר החיבורים שנצטרך לבצע לאורך הריצה הוא כמספר ה שיש בעת חיבור המספרים. מכאן שמספר החיבורים חסום ע"י . בנוסף במקרה הגרוע רץ בסיבוכיות זמן ריצה . שאר הפעולות מתבצעות בסיבוכיות קבועה ולכן סה"כ .*

**מטרה**: של ערכי שדות אובייקט

**שיטת פעולה**: -

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** -

**מטרה**: מחזיר האם הערמה ריקה או לא.

**שיטת פעולה**: בודק אם גודל הערמה הוא 0.

**סיבוכיות זמן**:

**ניתוח סיבוכיות במקרה הגרוע:** -

**חלק תיאורטי – תשובות**

**ניסוי 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות העצים שמחקנו |
| 1 | 28 | 723 | 5 |  |
| 2 | 25 | 2182 | 4 |  |
| 3 | 29 | 6555 | 5 |  |
| 4 | 41 | 19675 | 7 |  |
| 5 | 59 | 59040 | 8 |  |

נוכיח

:

*הקשר בין מספר החיבורים הכולל (נסמן ב) למספר העצים בסיום (נסמן ב ):*

*נבחין כי בניסוי זה לא מתבצעות מחיקות, לכן חיבורים יתבצעו בכל פעם שנכניס איבר חדש ונידרש לבצע . בגלל העובדה שאנחנו לא מבצעים מחיקות, נבחין כי מספר החיבורים הכולל שקול לסכום מספר הקשתות בכל עץ בינומי בערימה. (כלומר נחשוב שקיימת קשת בין 2 צמתים בעץ אמ״מ קיים ביניהם מצביע).*

*ואכן, מספר הקשתות הקיימות בכל עץ בעל דרגה הוא . בנוסף, גודל הערימה שווה לסכום הצמתים בכל עץ כלומר עץ בערימה מדרגה תורם צמתים.*

**ניסוי 2**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות העצים שמחקנו |
| 1 | 27 | 3234 | 5 | 2884 |
| 2 | 31 | 11412 | 4 | 10323 |
| 3 | 45 | 39937 | 5 | 36662 |
| 4 | 73 | 135244 | 7 | 125410 |
| 5 | 155 | 450864 | 8 | 421348 |

נוכיח .

*ראשית, אנחנו מבצעים הכנסות ו מחיקות. בכיתה ראינו שעבור מחיקת מינימום סיבוכיות זמן הריצה היא . כלומר, סה״כ מתקיים:*

*הקשר בין מספר החיבורים הכולל (נסמן ב) לבין מספר העצים בסיום (נסמן ב ) וסכום העצים שנמחקו (נסמן ב):*

*נבחין כי מספר החיבורים עבור הכנסות הוא ללא תלות בערכי המפתחות (נסמן ב). נסמן את מספר החיבורים עבור מחיקות ב. ומתקיים*

*נבחין כי הקשר בין מספר הדרגות שנמחקו לבין החיבורים שנוצרו כתוצאה מהמחיקות ומספר העצים בסיום מתקשר לדוגמת המונה הבינארי בראינו בתרגול. ההבדל הוא שכמו שהוספה של צומת מהווה הגדלה של המונה ב-1, מחיקה של צומת מקטינה אותו ב-1. כמות החיבורים שנצטרך לעשות בכל פעולה כזו, שקולה למספר הcarry שיהיה לנו בעת חיבור שני מספרים בינאריים כאשר אחד מהם הוא המספר הבינארי שבו הביט של העץ שממנו מחקנו הוא אפס והשני הוא המספר הבינארי שמייצג את דרגת העץ שממנה מחקנו- פחות 1. ראשית, ההכנסה של האיברים תדרוש מסבר זהה של חיבורים לכל איברים בכל סדר שהם, מכיוון שהמבנה של העץ נשמר (המונה הבינארי זהה) ורק ערכי המפתחות משתנים. שאר החיבורים נוצרים כתוצאה מהמחיקות. מכיוון שההכנסה הייתה אקראית בהתחלה נתקשה לדעת מאיזה עץ אנחנו מבצעים את המחיקה הראשונה, אבל לאחר מספר מחיקות מתחיל להתקבל יותר סדר בעץ בעקבות החיבורים.*

**ניסוי 3**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות העצים שמחקנו |
| 1 | 28 | 723 | 5 | 697 |
| 2 | 27 | 2182 | 5 | 2156 |
| 3 | 33 | 6555 | 5 | 6529 |
| 4 | 45 | 19675 | 5 | 19649 |
| 5 | 90 | 59040 | 5 | 59014 |

נוכיח .

כפי שציינו לעיל, גם בניסוי זה אנחנו מבצעים הכנסות והעבודה עבור ההכנסות לא משתנה בין הניסויים. בנוסף, נבחין שבניסוי זה אנחנו מבצעים מחיקות עד שנשארים בעץ 31 איברים, כלומר לכל אנחנו מבצעים יותר מ מחיקות, ופחות מ מחיקות. לכן מתקיים:

*הקשר בין מספר החיבורים הכולל (נסמן ב) לבין מספר העצים בסיום (נסמן ב ) וסכום העצים שנמחקו (נסמן ב):*