מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים
מפגש תרגול 1
תרגילים למפגשים 1-5

מדעי המחשב, קורס מס' 20407

סמסטר 2020א

מנחה: איציק בייז

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה (a ו-b טבעיים):
- ODD היא שגרת עזר:

```
ODD(y)
if 2*(y/2) = y
   then return 0
   else return 1
```

```
(a, b)
x ← a
y ← b
z ← 0
while y > 0 do
    if ODD(y)
        then y ← y − 1
             z ← z + x
        else y ← y / 2
             x ← x * 2
return z
```

מה מבצעת השגרה?

האוניברסיטה הפתוחה

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה לחישוב כפל שני מספרים טבעיים:
- ODD היא שגרת עזר:

```
MULTIPLY(a,b)
x ← a
y ← b
z ← 0
while y > 0 do
    if ODD(y)
        then y ← y − 1
             z ← z + x
        else y ← y / 2
             x ← x * 2
return z
```

```
ODD(y)
if 2*(y/2) = y
    then return 0
    else return 1
```

א - הוכיחו שלכל הערכים הטבעיים של הפרמטרים a,b , השגרה מסתיימת אחרי מספר סופי של צעדים.

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה לחישוב כפל שני מספרים טבעיים:
- ODD היא שגרת עזר:

```
MULTIPLY(a, b)
x ← a
y ← b
z ← 0
while y > 0 do
    if ODD(y)
        then y ← y − 1
             z ← z + x
        else y ← y / 2
             x ← x * 2
return z
```

```
ODD(y)
if 2*(y/2) = y
    then return 0
    else return 1
```

פתרון סעיף א - המשתנה y קטן בכל איטרציה לפחות ב-1. לכן לאחר מספר סופי של איטרציות ערכו יגיע ל-0, יתקיים תנאי היציאה מהלולאה והשגרה תסתיים.

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה לחישוב כפל שני מספרים טבעיים:
- ODD היא שגרת עזר:

```
MULTIPLY(a, b)
x ← a
y ← b
z ← 0
while y > 0 do
    if ODD(y)
        then y ← y - 1
             z ← z + x
        else y ← y / 2
             x ← x * 2
return z
```

```
ODD(y)
if 2*(y/2) = y
    then return 0
    else return 1
```

ב – כתבו שמורת לולאה והוכיחו את נכונות השגרה.

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה לחישוב כפל שני מספרים טבעיים:
- ODD היא שגרת עזר:

```
MULTIPLY(a,b)
  x ← a
  y ← b
  z ← 0
  while y > 0 do
      if ODD(y)
          then y ← y - 1
               z ← z + x
          else y ← y / 2
               x ← x * 2
  return z
```

```
ODD(y)
  if 2*(y/2) = y
      then return 0
      else return 1
```

פתרון ב - שמורת הלולאה :

a*b = z + x*y

מוכיחים את נכונות השמורה ומכאן נובעת נכונות האלגוריתם כולו שכן בסיום הלולאה y=0.

תרגיל

- נתונה השגרה הבאה לחישוב כפל שני מספרים טבעיים:
- ODD היא שגרת עזר:

```
MULTIPLY(a,b)
x ← a
y ← b
z ← 0
while y > 0 do
    if ODD(y)
        then y ← y − 1
             z ← z + x
        else y ← y / 2
             x ← x * 2
return z
```

```
ODD(y)
if 2*(y/2)=y
    then return 0
    else return 1
```

ג - מהו זמן הריצה של השגרה כפונקציה של מספר הספרות בייצוג הבינרי של a ו- b? הוכיחו את טענתכם.

תרגיל

- יהא A מערך בגודל n. במקומות $A[1 .. m]$ נמצאים ערכים שונים זה מזה הממוינים בסדר עולה, כאשר ***m* איננו ידוע מראש** (יתכן ש-m קטן מאד ביחס ל-n). שאר התאים ב-A מכילים את הערך "אינסוף" (גדול מכל שאר הערכים).
- כתבו אלגוריתם המקבל ערך k, ומחזיר את האינדקס של k במערך, או -1 אם k לא נמצא במערך. זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $\Theta(\lg m)$.
(כלומר, זמן הריצה צריך להיות לוגריתמי ב-m ולא בגודל המערך!)
- **רמז:** נסו בשלב ראשון להגביל את התחום במערך שבו יש לחפש את k.

תרגיל

- נתון מערך ממוין A המכיל n מספרים ממשיים ונתון מספר נוסף z. כתבו אלגוריתם יעיל, המוצא שני איברים x, y במערך שסכומם שווה ל-z.
- נתחו את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבתם והוכיחו את נכונותו.

תרגיל

- נתונים סדרת קטעים סגורים $[a_i, b_i]$, $1 \le i \le n$.
  - תארו אלגוריתם יעיל, המוצא נקודה שמוכלת במספר מקסימלי של קטעים.
    - ניתן להתעלם ממקרים מנוונים (קצוות קטע חופפים וכדומה)

תרגיל

- נתונה מטריצה מלבנית M בגודל n x m, וערך נוסף *z* (כל הערכים ממשיים). נניח שכל השורות של המטריצה ממוינות בסדר לא יורד וגם כל העמודות שלה ממוינות בסדר לא יורד.
- כתבו אלגוריתם למציאת הערך *z* במטריצה *M*. במקרה של הצלחה, האלגוריתם יחזיר זוג אינדקסים *(i,j)*; במקרה של כישלון הוא יחזיר NULL.
- זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם: $\Theta(n+m)$
- הוכיחו את נכונות האלגוריתם שכתבתם.

תרגיל

- נתון מערך A[1..n]. ידוע ש-(n-√n) האיברים הראשונים ממוינים, אך לא ידוע דבר על √n האיברים האחרונים.
- הסבירו איך אפשר למיין את כל המערך בזמן לינארי במקרה הגרוע
- מצאו פונקציה f(n) גדולה ביותר (אסימפטוטית) המקיימת את התנאים הבאים:
  - $f(n) = \omega(\sqrt{n})$
  - אפשר למיין את המערך בזמן לינארי אם ידוע ש (n-f(n)) האיברים הראשונים שלו ממוינים.

תרגיל

- נתונים שני מערכים של מספרים A,B כאשר A בגודל n ו-B בגודל m.
נתון ש- $n=o(m)$.
- הציעו אלגוריתם למציאת כל המספרים המופיעים גם ב-A וגם ב-B בזמן $\Theta(m\log n)$ במקרה הגרוע.

תרגיל

- פתרו את נוסחת הנסיגה:

$$T(n)=T(n-1)+n^2\lg n+n^2$$

תרגיל

- פתרו את נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = T(n-1) + n^2 \lg n + n^2$$

- פתרון:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n^2 \lg n + n^2 \\ &= T(n-2) + (n-1)^2 \lg(n-1) + n \lg n + (n-1)^2 + n^2 \\ &= \ldots\ldots \\ &= T(0) + \sum_{i=1}^{n} i^2 \lg i + \sum_{i=1}^{n} i^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \lg i = O(n^2 \sum_{i=1}^{n} \lg i) = O(n^2 \lg(n!)) = O(n^3 \lg n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \lg i = \Omega(\sum_{i=n/2+1}^{n} i^2 \lg i) = \Omega(\frac{n}{2} \cdot (n/2)^2 \cdot \lg(n/2)) = \Omega(n^3 \lg n)$$

$$T(n) = T(0) + \Theta(n^3 \lg n) + n(n+1)(2n+1)/6 = \Theta(n^3 \lg n)$$

תרגיל

נתון מערך $A[1..n]$ של מספרים טבעיים. נגדיר "איבר רוב" ב-A כאיבר המופיע יותר מ- $(n/2)$ פעמים.

להלן מופיע תאור לא פורמלי של אלגוריתם למציאת איבר רוב (אם לא קיים איבר רוב, יוחזר ערך מיוחד).

האלגוריתם משתמש במערך נוסף B, שגודלו לפחות חצי מזה של A.

משווים את $n/2$ הזוגות $(A[2i-1], A[2i])$, $i=1,...,n/2$; בכל פעם שמתקיים $A[2i-1] = A[2i]$

מעתיקים את ערכם המשותף ל-B .

אם n אי-זוגי, בודקים אם $A[n]$ הוא איבר רוב ב-A ; אם כן, מעתיקים גם את $A[n]$ ל-B.

אם המערך B ריק, אז אין איבר רוב ב-A.

אם המערך B מכיל יותר מאיבר אחד, חוזרים על סדרת הפעולות במערך B (באופן רקורסיבי).

אם המערך B מכיל בדיוק איבר אחד, איבר זה הוא **מועמד** להיות איבר רוב ; כדי לבדוק אם הוא אכן איבר רוב, מבצעים חיפוש ליניארי במערך A **המקורי**.

א. מהו זמן הריצה של האלגוריתם ?

ב. הוכיחו שהאלגוריתם נכון (כלומר, הוא מוצא את איבר הרוב, אם הוא קיים).

תרגיל

- תארו אלג' יעיל ($O(n\log k)$) למיזוג k רשימות ממוינות לרשימה ממוינת אחת בת n איברים.

תרגילים נוספים

- StoogeSort פלוס ואריאציות
- מיקום צינור נפט