שאלה 1

א. נתחיל בחישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

לכל $y > 0$ מתקיים: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{8X \le y\} = P\{X \le \frac{y}{8}\} = F_X(\frac{y}{8})$

נגזור לפי y, ונקבל את פונקציית הצפיפות של Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\tfrac{y}{8}) = \tfrac{1}{8} f_X(\tfrac{y}{8}) = \boxed{\tfrac{\lambda}{8} e^{-\frac{\lambda}{8} y} \qquad , \qquad y > 0}$$

כלומר, למשתנה המקרי Y יש התפלגות **מעריכית עם הפרמטר** $\frac{\lambda}{8}$.

ב. נפשט את השוויון הנתון: $P\{X \le c\} = 4P\{X > c\} = 4[1 - P\{X \le c\}] = 4 - 4P\{X \le c\}$

ומכאן:

$$P\{X \le c\} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{c-20}{8}\right) = 0.8 \quad \Rightarrow \Phi\left(\tfrac{c-20}{8}\right) = \Phi(0.842) \Rightarrow \quad c = 20 + 8 \cdot 0.842 = \boxed{26.736}$$

ג. מכיוון ש- $(X-10)^2$ גם הוא משתנה מקרי, נקבל מהנוסחה החלופית של השונות (בעמוד 159 בספר) ומתכונות התוחלת והשונות (בעמודים 157 ו-159 בספר), את השוויון הבא:

$$E[(X-10)^2] = \text{Var}(X-10) + (E[X-10])^2 = \text{Var}(X) + (E[X]-10)^2$$

כמו כן נתון ש- $X \sim NB(4, 0.2)$. לכן:

$$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.2} = 20 \quad Var(X) = \frac{r(1-P)}{p^2} = \frac{4 \cdot 0.8}{0.2^2} = 80$$

נציב ונקבל:

$$E[(X-10)^2] = \text{Var}(X) + (E[X]-10)^2 = 80 + (20-10)^2 = \boxed{180}$$

שאלה 2

א. נסמן את המאורעות A - תאכל אפרופו, B - תאכל תפוצ'יפס ו C - תאכל דובונים.

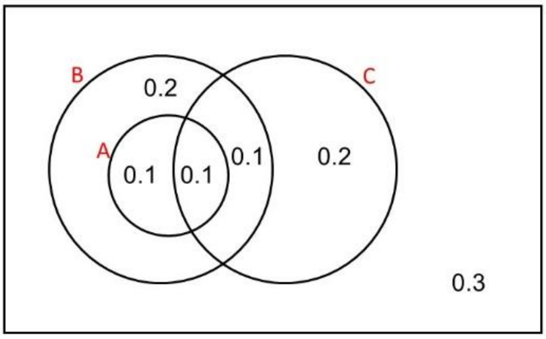
לפי הנתונים $A \subseteq B$, המאורעות B ו- C בלתי-תלויים ולכן

$P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$.

כמו כן נתון ש:

$P(A \cap B \cap C) = 0.1$.

נצייר דיאגרמת וון:



נסמן ב X את מספר החטיפים שדורית תאכל. לפי הדיאגרמה:

$$\boxed{\begin{aligned} &P\{X=0\} = 0.3 \\ &P\{X=1\} = 0.2+0.2=0.4 \\ &P\{X=2\} = 0.1+0.1=0.2 \\ &P\{X=3\} = 0.1 \end{aligned}}$$

ב. $P(C \mid A^C) = \dfrac{P(C \cap A^C)}{P(A^C)} = \dfrac{0.3}{1-0.2} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$

ג. 1. כיוון שהימים בלתי-תלויים. לפי הנתונים $X \sim B(10,0.2)$, $Y \sim B(10,0.5)$. כמו כן, $Y-X$ הם מספר הימים שבהם דורית תאכל תפוצ'יפס ולא תאכל אפרופו. כיוון שהסיכוי ליום כזה הוא $0.5-0.2=0.3$ מתקיים ש $Y-X \sim B(10,0.3)$.

2. לפי שונות ההתפלגות הבינומית מתקיים:

$V(X) = 10 \cdot 0.2(1-0.8) = 1.6 \qquad V(Y) = 10 \cdot 0.5(1-0.5) = 2.5$

$V(Y-X) = 10 \cdot 0.3(1-0.3) = 2.1$

כמו כן $V(Y-X) = V(X)+V(Y)-2COV(X,Y)$.

ולכן $\boxed{COV(X,Y)} = \dfrac{V(X)+V(Y)-V(Y-X)}{2} = \dfrac{1.6+2.5-2.1}{2} = \boxed{1}$.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1.6 \cdot 2.5}} = \boxed{0.5}$$

שאלה 3

א. בשאלה זו כדאי לבנות עץ הסתברויות. מהעץ נקבל ש :

$$P(A)=P(B)=0.5\cdot\frac{10}{20}+0.5\cdot\frac{5}{5+k}=0.25+\frac{5}{2(5+k)}$$

$$P(A\cap B)=0.5\cdot\left(\frac{10}{20}\right)^2+0.5\cdot\left(\frac{5}{5+k}\right)^2=0.125+\frac{25}{2(5+k)^2}$$

כדי שהמאורעות יהיו בלתי-תלויים צריך להתקיים ש $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

כלומר,

$$0.125+\frac{25}{2(5+k)^2}=\left(0.25+\frac{5}{2(5+k)}\right)^2$$

נסמן $t=k+5$ ונקבל:

$$0.125+\frac{25}{2t^2}=0.0625+\frac{1.25}{t}+\frac{25}{4t^2}$$

משוואה זו שקולה למשוואה $0.5t^2+50=0.25t^2+5t+25$, ששקולה ל $0.25t^2-5t+25=0$. הפתרון של משוואה זו הוא $t=10$ ולכן עבור $\boxed{k=5}$ המאורעות בלתי-תלויים.

ב. נסמן ב- U את מספר חבילות הבמבה שיוציא , ב W את מספר חבילות הביסלי שיוציא וב- T את משקל החבילות שיוציא מהמגירה.

לפי הנתונים $T=100U+120W$. כיוון שסך הכל הוציא 6 חבילות מתקיים ש $W=6-U$ ולכן $T=100U+120(6-U)=720-20U$.

כיוון שאסי מוציא את החבילות עם החזרה נקבל ש $U\sim B(6,0.5)$. ולכן $E(U)=6\cdot0.5=3$ ו- $V(U)=6\cdot0.5(1-0.5)=1.5$.

מכאן נובע ש :

$$\boxed{E(T)}=E(720-20U)=720-20E(U)=720-20\cdot3=\boxed{660}$$

$$\boxed{V(T)}=V(720-20U)=20^2V(U)=20^2\cdot1.5=\boxed{600}$$

(התוחלת היא בגרמים והשונות בגרמים בריבוע)

ג. נסמן ב R את מספר החבילות שיוציא. המשתנה מקבל את הערכים $2,3,\ldots$ כיוון שצריך להוציא לפחות 2 חבילות.

R מקבל את הערך k אם אסי הוציא $k-1$ חבילות של במבה ואז (סוף סוף) חבילת ביסלי, או אם הוציא $k-1$ חבילות ביסלי ואז חבילת במבה.

לכן

$$\boxed{P(R=k)}=0.5^{k-1}\cdot0.5+0.5^{k-1}\cdot0.5=\boxed{0.5^{k-1}}\qquad k\in\{2,3,\ldots\}$$

שאלה 4

א. נסמן ב- X את אורך חיי המדף של החטיף בימים. מתקיים ש- $X \sim U(320,400)$.

נחשב את ההסתברות שאם אורך חיי מדף נמוך מ- 350 , אז הוא יהיה גבוה מ- 340 :

$$P\{X>340 \mid X<350\}=\frac{P\{X>340 \cap X<350\}}{P\{X<350\}}=\frac{F_X(350)-F_X(340)}{F_X(350)}=$$

$$\frac{\frac{350-320}{400-320}-\frac{340-320}{400-320}}{\frac{350-320}{400-320}}=\frac{1}{3}$$

כיוון שידוע שיש 10 חטיפים בלתי תלויים שאורך חייהם נמוך מ- 350 גרם. מספר החטיפים שאורך חייהם גבוה מ- 340 - W מתפלג בינומית. ולכן $W \sim B\left(10,\frac{1}{3}\right)$:

$$E[W]=10\cdot\frac{1}{3}=\boxed{3\frac{1}{3}}$$

$$Var(W)=10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{2\frac{2}{9}}$$

ב. נחשב את ההסתברות שאורך חיי החטיף גבוה מ- 390 ימים .

$$P\{X>390\}=1-P\{X\le 390\}=1-F_X(390)=1-\frac{390-320}{400-320}=\frac{1}{8}$$

נסמן ב- W את מספר החטיפים שיידגמו עד קבלת חטיף שאורך חיו גבוה מ- 390 ימים. מתקיים ש-

$$W \sim G\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$P\{W\ge 10\}=P\{W>9\}=\left(\frac{7}{8}\right)^9=\boxed{0.30066}$$

ג. מתקיים ש- $X \sim U(320,400)$:

$$E[X]=\frac{320+400}{2}=360$$

$$Var(X)=\frac{(400-320)^2}{12}=533.\overline{3}$$

לפי משפט הגבול המרכזי $\bar{X}_{45}$ מתפלג בקירוב נורמלית כאשר :

$$E[\bar{X}]=E[X]=360$$

$$Var(\bar{X})=\frac{Var(X)}{45}=11.85\overline{185}$$

$$P(\bar{X}<355)=\Phi\left(\frac{355-360}{\sqrt{11.85}}\right)=\Phi(-1.45)=1-\Phi(1.45)=1-0.9265=\boxed{0.0735}$$

שאלה 5

א. מרחב המדגם הוא $3^6 = 729$, כיוון שלכל קינוח יש 3 אפשריות לאיזה חבר הוא ילך.

המשתנה X מקבל את הערכים $1,2,3$.

- X מקבל את הערך 1 אם כל הקינוחים הלכו לאותו חבר, יש 3 אפשריות לבחור את החבר שמקבל את הקינוחים ולכן

$$P(X=1)=\frac{3}{3^6}=\frac{1}{243}.$$

- X מקבל את הערך 2 אם כל הקינוחים הלכו ל-2 חברים. יש $\binom{3}{2}$ אפשרויות לבחור את 2 החברים.

עבור כל בחירה של החברים יש לקינוחים 2^6 אפשרויות חלוקה. מתוך אפשרויות אלו צריך להוריד את 2 האפשרויות שבהן כל הקינוחים הלכו לאותו חבר. לכן

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\left(2^6-2\right)}{3^6}=\frac{62}{243}$$

- את ההסתברות האחרונה בהתפלגות נחשב לפי משלים:

$$P(X=3)=1-\left[P(X=1)+P(X=2)\right]=1-\left(\frac{1}{243}+\frac{62}{243}\right)=\frac{180}{243}$$

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{62}{243}$	$\frac{180}{243}$

ב. נחשב את ההסתברות של המאורע $X=3, Y=1$. מאורע זה מתרחש אם יש חבר שמקבל 4 קינוחים, וכל אחד משני החברים האחרים מקבל קינוח אחד. יש 3 אפשרויות לבחור את החבר שמקבל 4 קינוחים. יש $\binom{6}{4}$ לבחור לו איזה 4 קינוחים הוא יקבל, ו- $2!$ אפשרויות לחלק 2 קינוחם ל-2 חברים נותרים. אחד לכל חבר. לכן

$$P(X=3,Y=1)=\frac{3\binom{6}{4}\cdot 2!}{3^6}=\boxed{\frac{30}{243}}$$

ג. נכתוב את הטבלה, נוסיף את השולית של X ואפסים:

נחשב את ההסתברות של המאורע $X=2,Y=1$ מאורע זה בעצם אומר שחבר אחד כלשהו קיבל קינוח אחד וחבר שני כלשהו קיבל 5 קינוחים. לכן

$$P(X=2,Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{6}{5}\cdot\binom{2}{1}}{3^6}=\frac{12}{243}$$

נחשב את ההסתברות של המאורע $X=3,Y=3$ מאורע זה בעצם אומר שכל חבר קיבל בדיוק 2 קינוחים. לכן

$$P(X=3,Y=3)=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{3^6}=\frac{30}{243}$$

את שאר ההסתברויות בטבלה נחשב לפי משלים.

		Y			P_X
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{243}$	0	0	$\frac{1}{243}$
	2	$\frac{12}{243}$	$\frac{50}{243}$	0	$\frac{62}{243}$
	3	$\frac{30}{243}$	$\frac{120}{243}$	$\frac{30}{243}$	$\frac{180}{243}$
	P_Y	$\frac{43}{243}$	$\frac{170}{243}$	$\frac{30}{243}$	

ד. מהטבלה נקבל ש:

$$P(X\cdot Y=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{243}$$

$$P(X\cdot Y=2)=P(X=2,Y=1)=\frac{12}{243}$$

$$P(X\cdot Y=3)=P(X=3,Y=1)=\frac{30}{243}$$

$$P(X\cdot Y=4)=P(X=2,Y=2)=\frac{50}{243}$$

$$P(X\cdot Y=6)=P(X=3,Y=2)=\frac{120}{243}$$

$$P(X\cdot Y=9)=P(X=3,Y=3)=\frac{30}{243}$$

$X\cdot Y$	1	2	3	4	6	9
$P(X\cdot Y)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{12}{243}$	$\frac{30}{243}$	$\frac{50}{243}$	$\frac{120}{243}$	$\frac{30}{243}$

$$E[XY]=1\cdot\frac{1}{243}+2\cdot\frac{12}{243}+3\cdot\frac{30}{243}\cdots=\boxed{5.37}$$