
מספר תעודת זהות
יש לרשום את כל תשע הספרות

יש להדביק כאן את
מדבקת הנבחן

האוניברסיטה הפתוחה

כ' באלול תשפ"ד

23
בספטמבר 2024

מס' שאלון - 453

סמסטר 2024ג

מס' מועד 82

20425 / 4

שאלון בחינת גמר

20425 - הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **8** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

עליכם לענות על ארבע שאלות מתוכן.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם חשבו את התוצאה הסופית. כמובן, במידת האפשר.

לבחינה מצורפת טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות .

חומר עזר:
מותר מחשבון שאינו אוצר מידע. כל חומר עזר אחר אסור.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים
להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה

שאלה 1 (25 נקודות)

(9 נק׳) א. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ ויהי $Y = 8X$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של Y וזהו את התפלגותו.

(8 נק׳) ב. נתון משתנה מקרי X המתפלג נורמלית עם תוחלת 20 וסטיית תקן 8.
נניח שמתקיים השוויון $P\{X < c\} = 4P\{X > c\}$. מהו ערכו של c?

(8 נק׳) ג. יהי X משתנה מקרי המתפלג בינומי שלילי עם הפרמטרים: $r = 4$ $p = 0.2$. חשבו את התוחלת של $(X-10)^2$.

שאלה 2 (25 נקודות)

דורית אוהבת לאכול חטיפים. בכל יום ובאופן בלתי תלוי בכל יום אחר:

- בהסתברות 0.2 תאכל אפרופו.
- בהסתברות 0.5 תאכל תפוצ׳יפס.
- בהסתברות 0.4 תאכל דובונים.

כמו כן ידוע ש:

- אם היא תאכל ביום מסוים אפרופו, אז היא בהכרח גם תאכל באותו היום תפוצ׳יפס.
- המאורעות ׳תאכל תפוצ׳יפס׳ ו׳תאכל דובונים׳ ביום כלשהו הם מאורעות בלתי-תלויים.
- בהסתברות 0.1 תאכל את כל 3 החטיפים ביום.

(10 נק׳) א. מצאו את התפלגות מספר החטיפים שדורית תאכל מחר.

(5 נק׳) ב. אם ביום מסויים דורית לא תאכל אפרופו, מה ההסתברות שבאותו היום היא תאכל דובונים?

(10 נק׳) ג. נתבונן בחטיפים שדורית תאכל במשך 10 ימים. נסמן ב- X את מספר הימים בהם תאכל אפרופו וב- Y את מספר הימים בהם תאכל תפוצ׳יפס.

1. נתבונן במשתנה המקרי $Y-X$. הסבירו במילים מה המשתנה הזה מייצג בהקשר של נתוני הבעיה. מהי ההתפלגות של משתנה מקרי זה?
2. מצאו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 3 (25 נקודות)

לאסי יש בארון במטבח שתי מגירות.

במגירה הראשונה יש 10 חבילות במבה ו-10 חבילות ביסלי.

במגירה השנייה יש 5 חבילות במבה ו- k חבילות ביסלי. שימו לב, כל סעיף עומד בפני עצמו.

(9 נק׳) א. אסי בוחר את אחת מהמגירות באקראי ומוציא ממנה 2 חבילות באקראי

נסמן את המאורעות:

A - החבילה הראשונה היא חבילת במבה.

B - החבילה השנייה היא חבילת במבה.

הניחו שההוצאה מתבצעת עם החזרה. האם יש ערך של k עבורו המאורעות A ו- B בלתי-תלויים? אם כן, מצאו ערך זה. אם לא הוכיחו שאין כזה.

(8 נק׳) ב. אסי מוציא עם החזרה 6 חבילות חטיפים מהמגירה הראשונה. המשקל של חבילת במבה הוא 100 גרם והמשקל של חבילת ביסלי הוא 120 גרם. מצאו את התוחלת והשונות של סך משקל חבילות החטיפים שאסי הוציא מהמגירה הראשונה.

(8 נק׳) ג. אסי מוציא עם החזרה חבילות חטיפים מתוך המגירה הראשונה, עד שיהיו לו לפחות חבילת במבה אחת ולפחות חבילת ביסלי אחת. מצאו את התפלגות מספר חבילות החטיפים שיוציא.

שאלה 4 (25 נקודות)

אורך חיי מדף, בימים, של חטיף מסוג צ׳יטוס מתפלג אחיד בקטע $(320,400)$. אין תלות בין אורך חיי מדף של חטיפי צ׳יטוס שונים.

(8 נק׳) א. אם ידגמו 10 חטיפי צ׳יטוס באקראי, ויתברר שאורך חיי המדף של כל אחד מהם נמוך מ- 350 ימים, מהי התוחלת ומהי השונות של מספר חטיפי הצ׳יטוס שידגמו עם אורך חיים גבוה מ- 340 ימים?

(8 נק׳) ב. רון ידגום חטיפי צ׳יטוס בזה אחר זה עד אשר יתקבל חטיף שאורך חיו גבוה מ- 390 ימים. מה ההסתברות שידגום לפחות 10 חטיפי צ׳יטוס?

(9 נק׳) ג. אם ידגמו 45 חטיפי צ׳יטוס באקראי, מה בקירוב ההסתברות שאורך חיי המדף הממוצע שלהם יהיה נמוך מ- 355 ימים?

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5 (25 נקודות)

שלושה חברים הולכים לבית קפה ומזמינים סך הכל 6 קינוחים.
המלצר המבולבל מביא את הקינוחים, אבל לא זוכר איזה חבר הזמין איזה קינוח, ולכן לכל קינוח הוא בוחר באופן אקראי, ובלתי תלוי בקינוחים האחרים, את החבר שיקבל אותו.
נסמן ב:

X - מספר החברים שכל אחד מהם מקבל לפחות קינוח אחד.

Y - מספר החברים שכל אחד מהם מקבל לפחות שני קינוחים.

למשל:

- אם כל חבר יקבל שני קינוחים אז $X=3, Y=3$.
- אם יש חבר שיקבל 5 קינוחים וחבר אחר שיקבל קינוח אחד אז $X=2, Y=1$.

(6 נק׳) א. מצאו את ההתפלגות של X.

(4 נק׳) ב. מצאו את $P\{X=3, Y=1\}$.

(9 נק׳) ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

(6 נק׳) ג. מצאו את $E[XY]$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \qquad ; \qquad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad ; \qquad Z \sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$			

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}$$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת

$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$$

שונות

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

ההתפלגות המעריכית מקיימת את תכונת חוסר הזכרון

תוחלת מותנית $E[X \mid Y=y] = \sum_x x\, p_{X|Y}(x \mid y) = \int x\, f_{X|Y}(x \mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

$M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$ כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים:

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי

$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה)

$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$

$M_{X_1+\ldots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a > 0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2 \big/ a^2 \quad , \quad a > 0 \;,\; \mu, \sigma^2 < \infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu) \big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

טורים שימושיים $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$; $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$; $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$; $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x)$, $0 < x < 1$

$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

אינטגרלים שימושיים $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$, $n \neq -1$; $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$; $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a\ln b} b^{ax}$; $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

חוקי לוגים

$\log_n a = \log_m a / \log_m n$; $\log_n(a^b) = b \cdot \log_n a$; $\log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$

רשימת טענות:

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .
- אם X_i הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n_i, p) לכל $i = 1,2,...,n$, ואם $X_1, X_2, ..., X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.
- אם X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p לכל $i = 1,2,...,n$, ואם $X_1, X_2, ..., X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים (n,p).
- אם X_i הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ_i לכל $i = 1,2,...,n$, ואם $X_1, X_2, ..., X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
- סכום של n משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים μ_i ו- σ_i^2 , הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\Sigma \mu_i$ ו- $\Sigma \sigma_i^2$.
- אם X ו- Y הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים (n_X, p) ו- (n_Y, p) , בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = n_X + n_Y$, $m = n_X$ ו- $n = n$.
- אם X ו- Y הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1 ו-λ_2, בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.