הגדרה:

② $\geq$

אם $f(n)=\Omega(g(n))$ וגם

② $<$ גדול

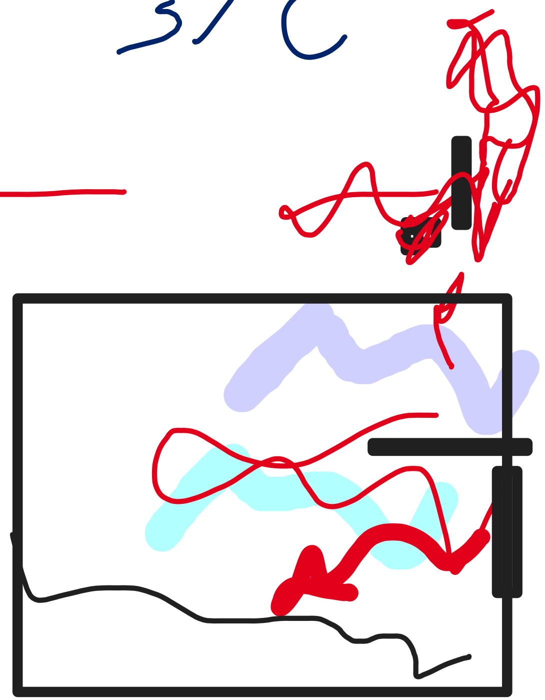
$f(n) \neq O(g(n))$

אז $f(n)=\Theta(g(n))$

קטן גדול , c

① $f(n) \leq c \cdot g(n)$

② קיים c גדול מ- $f(n) \geq c \cdot g(n)$



$$2^n = O(n!) = O(n^n)$$

$$f(n)$$

g הפעלת

$$\downarrow$$

$$g(f(n))$$

הפעולה ההפוכה

$$\downarrow f$$

$$2^{g(f(n))} = f(n)$$

$$g(n)$$

$$\downarrow$$

$$g(g(n))$$

$$\downarrow$$

$$2^{g(g(n))} = g(n)$$

$n, \quad n^2$

$\lg n \qquad \lg n^2 = 2\lg n = \Theta(\lg n)$

$f(n)$ $g(n)$ Log

Log

$\log f(n) = O\left(\log(g(n))\right)$

$\log f(n) < \log(g(n)) + c$

$f(n) < 2^{\log g(n) + c} = 2^{c} \cdot g(n)$

$$(n!)^{\frac{1}{n}}$$

$$n! < n^n$$

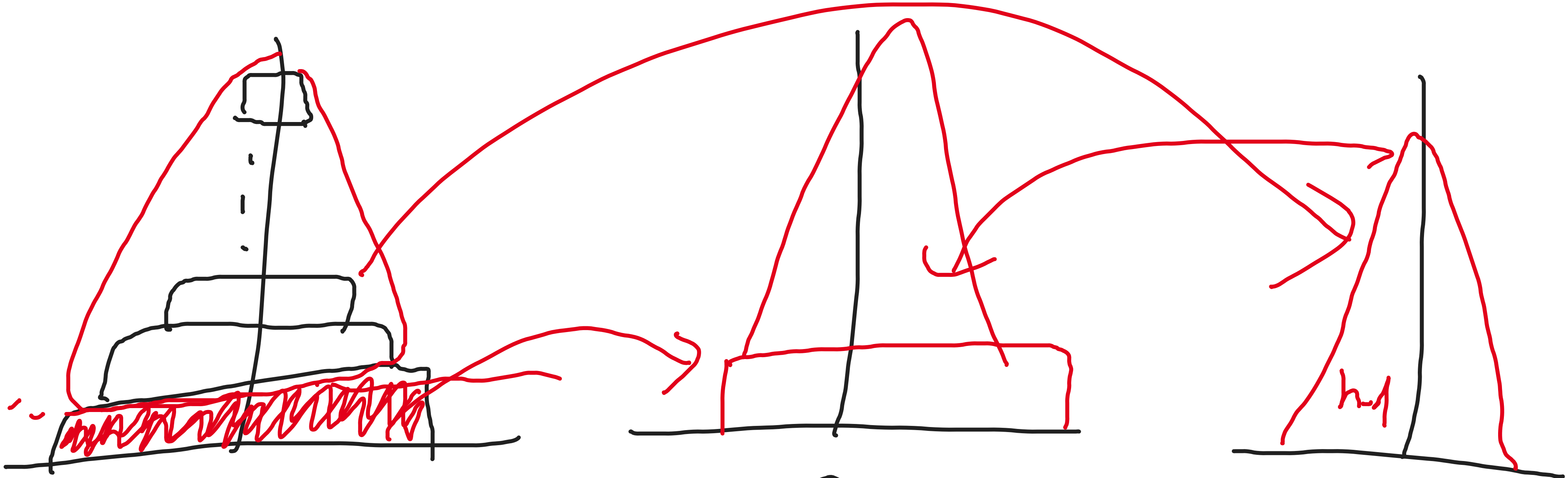
$$(n!)^{\frac{1}{n}} < (n^n)^{\frac{1}{n}} = n$$

$$\frac{1}{n}\Theta(n\log n) = \Theta(\log n)$$

$$= O(n\log n)$$

$$g(n) = o\left((n!)^{\frac{1}{n}}\right) = o(n\log n)$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$$



Source Dest Temp

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$2^8 = 256$$

$$2^{16} \simeq 65{,}000$$

1) $T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2[2T(n-2)+1] + 1 = 4T(n-2) + 3$

$T(n-1) = 2T(n-2) + 1$

$= 4[2T(n-3)+1] + 3 = 8T(n-3) + 7$

$T(n-2) = 2T(n-3) + 1$

$= 8[2T(n-4)+1] + 7 = 16T(n-4) + 15$

$T(n-3) = 2T(n-4) + 1$

$\vdots$

$n-1 \to k$ $\quad$ $\dots$

$= 32T(n-5) + 31$

$\vdots$

$T(1) = 1$

$2^{n-1} \cdot T(1) + 2^{n-1} - 1$

$i \to k$

$= 2^{i}\, T(n-i) + (2^{i} - 1)$

$n - i = 1$

$\boxed{i = n-1}$

$= 2^{n} - 1 = \Theta(2^{n})$

מקרה 1 – $n^{\log_b a}$ מנצח בפולינום

" 2 – $f(n)$ – ! – $n^{\log_b a}$ שוויון מדויק

" 3 – $f(n)$ מנצחת בפולינום עם הרגולריות

---

1 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2 $T(n)=\Theta(f(n)\cdot \log n)$

3 $T(n)=\Theta(f(n))$

$\lg n \quad n^{\varepsilon}$

$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n \lg n$

$n \lg n \quad n \cdot n^{\varepsilon}$

$n^{\log_b a} = n$

$n \lg n \quad n^{1+\varepsilon}$

$f(n) \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$

$n^{\log_b a + \varepsilon}$

?

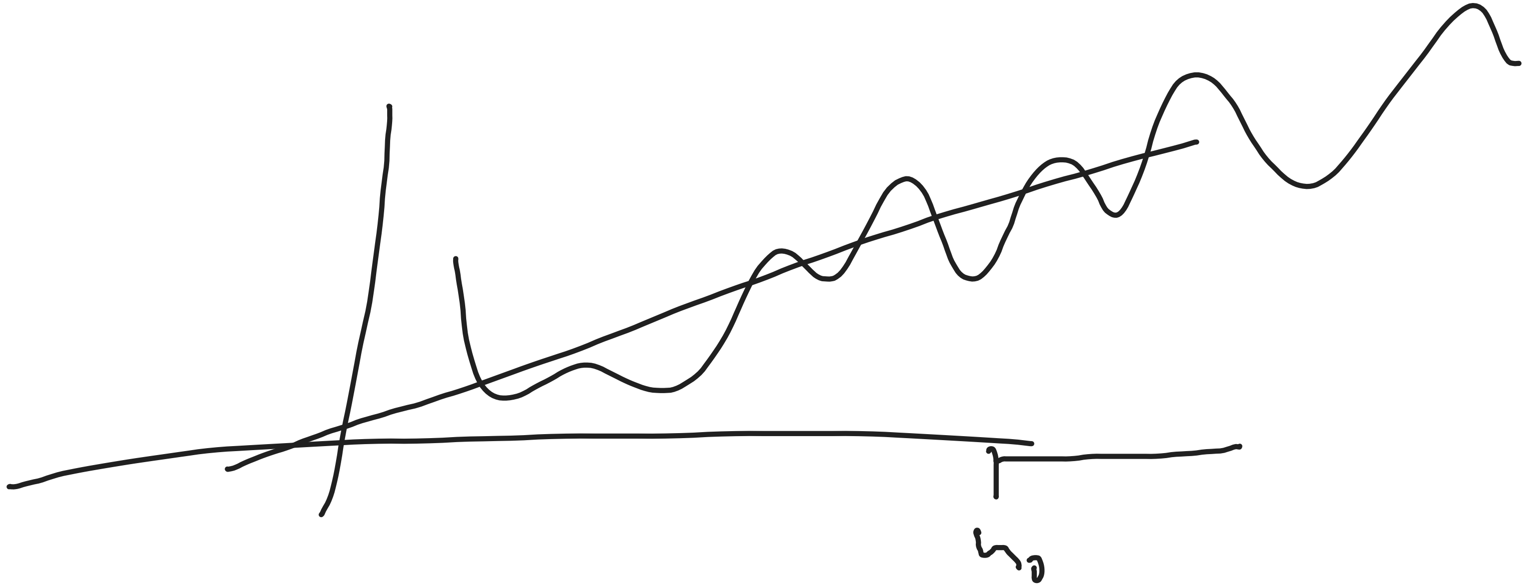
$$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$$

שלא הולך, מקרה 2 המורחב

$$n^{\log_b a} = n^1 \qquad f(n) = n\log n$$

$$T(n) = \Theta(f(n)\cdot\log n) = \cancel{n\log n}\ \Theta(n\log^2 n)$$

לכן בהכרח מתקיים שאחד מן היחסים
האסימפטוטיים לכל בלג פונק'.



$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + n$$

$$a = 1, \quad b = \frac{10}{9}, \quad f(n) = n$$

נוכיח רגולריות:

1. הפונק' f היא פולינומית ולכן מקיימת את תנאי הרגולריות (מוכח כמה רק הלמידה).

2. $$af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n), \quad \frac{9}{10}n \le c \cdot n, \quad \boxed{c = \frac{9}{10}}$$

$$T(n) = T(n^{\frac{1}{2}}) + 1 = T(n^{1/4}) + 2 = T(n^{1/8}) + 3 = \dots$$

$$T(n^{\frac{1}{2}}) = T(n^{\frac{1}{4}}) + 1$$

$$T(n^{\frac{1}{4}}) = T(n^{\frac{1}{8}}) + 1$$

$$\vdots$$

$$T(2) = 1$$

$$\dots = T\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + i$$

$$\vdots$$

$$= T(2) + \lg\lg n = \Theta(\lg\lg n)$$

$$n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \;\Big|\; \Rightarrow 2^{\frac{1}{2^i}\cdot \lg n} = 1 \;\Big|\; 2^i = \lg n \Rightarrow i = \lg\lg n$$