שאלה 1 – סעיף א'

נוסיף לכללי הסמנטיקה של ביטויים אריתמטיים, כללים עבור הפעולות bit-shift-left,bit-and , bit-shift-right.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![n]\!]s &= \mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}[\![x]\!]s &= s\ x \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!]s &= \mathcal{A}[\![a_1]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 \star a_2]\!]s &= \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \star \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!]s &= \mathcal{A}[\![a_1]\!]s - \mathcal{A}[\![a_2]\!]s
\end{aligned}
$$

$$A[a\ bitAnd\ b]s = A[a]s\ \&\ A[b]s$$
$$A[a\ bitShiftLeft\ b]s = A[a]s \ll A[b]s$$
$$A[a\ bitShiftRight\ b]s = A[a]s \gg A[b]s$$

2. טע': $(S1;S2);S3 \sim S1;(S2;S3)$

נניח שקיימים S, S''' כך ש- $\langle (S1;S2);S_3, S\rangle \to S'''$

לפי עץ גזירה של NOS מתקיים:

$$\text{comp}\ \underline{\langle (S_1;S_2);S_3, S\rangle \to S'''}$$

$$\text{comp}\ \underline{\langle (S_1;S_2), S\rangle \to S''}\ ,\ \underline{\langle S_3, S''\rangle \to S'''}_{\,T_3}$$

$$\underline{\langle S_1, S\rangle \to S'}_{\,T_1}\ ,\ \underline{\langle S_2, S'\rangle \to S''}_{\,T_2}$$

כעת, נראה ש- $\langle S_1;(S_2;S_3), S\rangle \to S'''$

נניח $\langle S_1;(S_2;S_3), S\rangle \to V'''$ ונראה $V''' \equiv S'''$

$$\text{comp}\ \underline{\langle S_1;(S_2;S_3), S\rangle \to V'''}$$

$$\underline{\langle S_1, S\rangle \to V'}_{\,T_1}\ ,\ \underline{\langle S_2;S_3, V'\rangle \to V'''}\ \text{comp}$$

$$\underline{\langle S_2, V'\rangle \to V''}_{\,T_2}\ ,\ \underline{\langle S_3, V''\rangle \to V'''}_{\,T_3}$$

T_1 גזר את $\langle S_1, S\rangle \to V'$ ולכן (מההנחה) $V' = S'$.

מכאן ש- T_2 גוזר את $\langle S_2, S'\rangle \to V''$ ולכן $V'' = S''$

ובאותו אופן $V''' = S'''$ כנדרש. וכעת הכיוון השני

של ההוכחה מתבצע באופן שקול. ולכן הביטויים שקולים.

<u>שאלה 3:</u>

א. נגדיר את ה- Natural Operational Semantics של פקודת repeat:

$$[repeat_{ns}^{tt}]\frac{\langle S,s\rangle \to s'}{\langle repeat\ S\ until\ b,s\rangle \to s'} if\mathcal{B}[\![b]\!]s = \boldsymbol{tt}$$

$$[repeat_{ns}^{ff}]\frac{\langle S,s\rangle \to s', \langle repeat\ S\ until\ b,s'\rangle \to s''}{\langle repeat\ S\ until\ b,s\rangle \to s''} if\mathcal{B}[\![b]\!]s = \boldsymbol{ff}$$

ב. נוכיח את השקילות (**repeat** S **until** b ~ S ; **if** b **then** skip **else** (**repeat** S **until** b:

ראשית נניח כי קיים עץ גזירה עבור $\langle repeat\ S\ until\ b,s\rangle \to s'$, ונוכיח כי קיים אחד עבור $\langle S; if\ \ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s\rangle \to s'$.

a. נחלק למקרים ע"פ $\mathcal{B}[\![b]\!]$ ו-s' שהתקבל מההרצה הראשונה של S על s:

i. אם $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = tt$, זאת אומרת שבצעד הראשון של בניית העץ עבור *repeat*, השתמשנו בחוק הראשון של *repeat* - *skip*, וזה אומר כי $\langle S,s\rangle \to s'$, וסיימנו את החישוב כי התנאי b מתקיים, ועפ"י הגדרה עלינו לבצע עכשיו *Skip*. מכיוון שמתקיים $\langle skip,s\rangle \to s$ לכל s, בפרט מתקיים כי $\langle skip,s'\rangle \to s'$ ולכן התוצאה הסופית היא s'.
לכן נקבל את עץ הגזירה הבא:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \frac{\langle skip,s'\rangle \to s'}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s'\rangle \to s'}\mathcal{B}[\![b]\!]s' = tt}{\langle S; if\ \ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s\rangle \to s'}$$

ii. אם $\mathcal{B}[\![b]\!]s'' = ff$, אז בצעד האחרון של בניית העץ, השתמשנו בכלל השני של *repeat*, והוא הכלל של החזרה. לכן אני יודעים כי $\langle S,s\rangle \to s''$ וגם $\langle repeat\ S\ until\ b,s''\rangle \to s'$. כעת נוכל לבנות את העץ באופן הבא:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s'', \frac{\langle repeat\ S\ until\ b,s''\rangle \to s'}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s''\rangle \to s'}\mathcal{B}[\![b]\!]s'' = ff}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s\rangle \to s'}$$

b. כעת נניח בכיוון ההפוך כי קיים עץ גזירה עבור $\langle S; if\ \ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s\rangle \to s'$ אז נראה כי קיים עץ עבור $\langle repeat\ S\ until\ b,s\rangle \to s'$

נשים לב כי בשלב האחרון של בניית העץ, נקבל את הכלל הבא:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s', \langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s'\rangle \to s''}{\langle S; if\ \ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b),s\rangle \to s''}$$

שוב נחלק למקרים עפ"י $\mathcal{B}[\![b]\!]s'$:

i. אם $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = tt$, זאת נשתמש בכלל הראשון של *repeat*, כלומר

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s'}{\langle repeat\ S\ until\ b,s\rangle \to s'} if\mathcal{B}[\![b]\!]s = \boldsymbol{tt}$$

נשים לב כי בעץ הנ"ל, מכיוון ש-$\mathcal{B}[\![b]\!]s' = tt$, זה אומר כי b מתקיים, ולכן נבצע *skip*. מכיוון

שקיבלנו בסוף s'' אבל רק ביצענו $skip$;$\langle S, s\rangle \to s'$ בעצם, זה אומר כי $\langle skip, s'\rangle \to s''$, ובעצם במקרה זה $s' == s''$, ולכן גם הכלל שלנו עבור *repeat* שהחזיר s', החזיר s''.

ii. אם $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = ff$, זה אומר כי $\langle rapeat\ S\ until\ b, s'\rangle \to s''$ התבצע. מכיוון ש-$\mathcal{B}[\![b]\!]s' = ff$, נשתמש בכלל השני עבור *repeat*:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s', \langle repeat\ S\ until\ b, s'\rangle \to s''}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s''} if \mathcal{B}[\![b]\!]s = \boldsymbol{ff}$$

כפי שאנו רואים, קיבלנו בדיוק את התוצאה.

מכיוון שהראנו שקילות בשני הכיוון, שתי ההגדרות שקולות, כנדרש.

ג. קוד

ד. נגדיר את ה- Structural Operational Semantics של פקודת repeat:

$$[repeat_{sos}]\ \langle repeat\ S\ until\ b\rangle \Rightarrow \langle S; if\ \ b\ then\ (repeat\ S\ until\ b) else\ skip, s\rangle$$

ה. קוד

4. צ"ל: אם $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$

אז $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

נוכיח באינדוקציה.

בסיס: $k=0$ - נכון באופן ריק.

$k=1$ - אז נניח $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

נבין ב- $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow \gamma$

Comp_{NOS}

$\langle S_1, s\rangle \to s''$, $\langle S_2, s''\rangle \to \gamma$

$\Updownarrow$

מההנחה כי: s' בהכרח שווה ל- s'

$\langle S_1, s\rangle \to s'$

כלומר $s' = s''$ ולכן $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$

נניח עבור $j \leq k$ ונוכיח עבור $k+1$:

נניח $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$

נראה שמתקיים $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} \langle S_2, s'\rangle$

נביט בהנחה. נסמן:

$$\langle S_1, s\rangle \xRightarrow{comp^1_{sos}} \langle S_1', s'\rangle \xRightarrow{comp^1_{sos}} \ldots \Rightarrow \langle S_1^k, s^k\rangle \xRightarrow{comp^2_{sos}} s'$$

כעת נסמן $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} \gamma$

ונרצה להוכיח $\gamma = \langle S_2, s'\rangle$.

כעת, לפי הנחה מתקיים $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$

לכן נשתמש ב- $comp^1_{sos}$ ונקבל:

$$\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1' ; S_2, s'\rangle$$

ובאותו אופן עד לשלב ה- k נקבל:

$$\langle S_1^{k-1} ; S_2, s^{k-1}\rangle \Rightarrow \langle S_1^k ; S_2, s^k\rangle$$

מתקיים $\langle S_1^k, s^k\rangle \Rightarrow s'$ (לפי הנחה)

לכן נשתמש הפעם ב- $comp^2_{sos}$ ונקבל:

$$\langle S_1^k ; S_2, s^k\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$$

כאמור $\langle S_1 ; S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k+1} \langle S_2, s'\rangle$

כנדרש. $\boxtimes$

שאלה 5 -

נפריך ע"י דוגמא נגדית שלא בהכרח מתקיים שאם

$$\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$$

אז $$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$$

נגדיר את $s := s_0$ כאשר s_0 הוא המצב שבו כל המשתנים בתוכנית שווים ל-0.

נגדיר את $S_2 :=$ while true do skip , $S_1 := x=8$

נשים לב כי S_2 הינה לולאה אינסופית.

נבחר $k=3$ ונגזור לפי כללי SOS:

$\langle x=8 ;$ while true do skip$\rangle \Rightarrow^1 \langle$while true do skip$, s_0[x\mapsto 8]\rangle \Rightarrow^2$

$\langle$while true do skip$, s_0[x\mapsto 8]\rangle \Rightarrow^3 \langle$while true do skip$, s_0[x\mapsto 8]\rangle$

נשים לב כי עבור $k=3$ מוצע המעבר הבא $\langle S_1 ; S_2, s_0\rangle \Rightarrow^3 \langle S_2, s_0[x\mapsto 8]\rangle$

כעת נבחן את $\langle S_1, s_0\rangle \Rightarrow^3 s_0[x\mapsto 8]$, נגזור:

$$\langle S_1, s_0\rangle \Rightarrow^1 s_0[x\mapsto 8] \not\Rightarrow^k$$

נשים לב כי $s_0[x\mapsto 8]$ הינו מצב סופי ולכן לא ניתן לגזור ממנו. ולכן עבור $k=3$ לא נוכל להגיע למצב סופי כי עצרנו ב-$k=1$ ולכן הטענה לא בהכרח מתקיימת.