

Algoritmica per il web

Francesco Tomaselli

11 febbraio 2022

Indice

1	Crawling	3
1.1	Principi di base	3
1.2	Strutture dati	3
1.2.1	Esempio strutture dati	4
1.3	Crivelli	5
1.3.1	Filtri di Bloom	5
1.3.2	LMS tree	7
1.3.3	Crivello offline	8
1.4	Quasi duplicati	8
1.5	Politeness	9
1.6	Concorrenza	10
1.6.1	Componenti di un crawler	10
1.6.2	Strutture concorrenti	11
1.7	Gestione parallela degli url	11
2	Retrieval	14
2.1	Codici istantanei	14
2.1.1	Disuguaglianza di Kraft-Mcmillan	15
2.2	Esempi di codici	16
2.2.1	Codici binari	16
2.2.2	Elias	16
2.2.3	Golomb	17
2.2.4	Codici a blocchi a lunghezza variabile	17
2.2.5	Distribuzione intesa	17
2.2.6	PFOR-DELTA	18
2.2.7	Asymmetric Numeral System	18
2.3	Liste di affissioni, rango	19
2.3.1	Riassunto processo di crawling	19
2.3.2	Rango lessicografico efficiente	20
2.4	Risoluzione di interrogazioni	21
3	Ranking	23
3.1	Ranking basati su distanze	23
3.1.1	Closeness centrality	24
3.1.2	Harmonic centrality	24
3.1.3	Betweenness	24
3.2	Ranking spettrali	25
3.2.1	Eigenvector centrality	25
3.2.2	Catena di Markov	26
3.2.3	PageRank	26
3.3	Metodi computazionali	26

1 Crawling

1.1 Principi di base

Insiemi di nodi in una visita All'interno di un processo di crawling, si distinguono tre insiemi di nodi

- U : nodi sconosciuti
- F : frontiera, ovvero nodi che sono conosciuti ma non ancora visitati
- V : nodi visitati

Una visita del web opera scegliendo un nodo della frontiera, aggiungendolo ai visitati, e aggiungendo i siti raggiungibili da esso alla frontiera.

In una visita di un grafo classica, gli insiemi U e F coincidono nel secondo.

Osservazione 1. *Teoricamente una visita potrebbe esaurire la frontiera, praticamente non finisce mai, a parte in rari casi.*

Inizializzazione frontiera La frontiera va inizializzata, tipicamente si scelgono siti web popolari, per esempio giornali etc. In generale si considerano *semi* di inizializzazione, ovvero un insieme di siti web scelti da umani, che sono promettenti.

La scelta del seme governa l'esplorazione della frontiera, verranno scelti infatti prima siti più vicini ai siti di inizializzazione.

Un'altra strada per la frontiera è scegliere a priori un insieme di siti web, e considerarla direttamente come frontiera, tralasciando i siti raggiungibili da essi.

1.2 Strutture dati

Strutture in memoria Sono cruciali le strutture usate per memorizzare i nodi visitati e la frontiera.

Mantenere i visitati in una hashtable è ragionevole, non lo è per la frontiera, tipicamente di ordini di grandezza più grande dell'insieme V .

Limitare la grandezza della frontiera è cruciale, si potrebbe preferire i link iniziali in una pagina piuttosto che quelli a fondo. Oppure limitare il numero massimo di pagine estratte da un singolo dominio o considerare un limite alla profondità all'interno di un singolo sito web.

Scelta del prossimo nodo Ciò che determina il comportamento una visita di crawling è la scelta del prossimo nodo della frontiera. Una scelta ragionevole potrebbe essere una visita in ampiezza a partire dalla frontiera iniziale. L'assunzione è che pagine di qualità puntino ad altre pagine di qualità.

Operare in profondità non funziona, significherebbe continuare a scendere all'infinito, al contrario di una classica DFS che termina e si *torna indietro* con la ricorsione. Questo perchè i siti non visitati sono praticamente infiniti.

Criteri più sofisticati possono associare una sorta di priorità alle pagine. Tali criteri sono legati ai contenuti delle pagine, alla struttura dell'url, alcuni esempi sono:

- Url corti, con l'assunzione che i livelli siano separati da un backslash;
- Url fuori dal sito corrente;
- Parole chiave di interesse all'interno dell'url;
- Utilizzo il contenuto della pagina corrente per avere informazioni sulla pagina successiva.

In questo caso si utilizza una coda a priorità, con qualche valore di priorità associato ad ogni nodo.

Osservazione 2. *In questo paragrafo si sta assumendo un contesto single thread, ovviamente nella realtà si utilizzerà un approccio multithread, e molti fattori, quali latenza, tempi di risposta, race condition, influenzano sull'ordine di visita effettivo.*

1.2.1 Esempio strutture dati

Visti hashati Una prima idea per mantenere l'insieme V è non memorizzare url completi ma una certa firma digitale di essi.

Consideriamo ad esempio una funzione di hash:

$$f : URL \longrightarrow 2^{64} = \{0, \dots, 2^{64}-1\}$$

È possibile che due url collidano, creando errori sui positivi, ovvero un url non davvero visitato viene visto come già esplorato.

Solitamente le collisioni non importano, ma, dati k elementi contenuti nella struttura, data una funzione di hash buona, tipicamente il numero di collisioni è dell'ordine di $\frac{k^2}{2n}$, dove n è la grandezza del codominio.

Nella pratica quindi, funzioni di hash come f , non creano un numero spiacevole di collisioni.

Osservazione 3. *Una tabella di firme è molto più efficiente di mantenere i dati effettivi, basti pensare a problemi di allocazione di memoria inefficiente, frammentazione etc. Pagare il prezzo dei conflitti, implica risparmiare molti problemi e spazio.*

Mantenere una tabella di firme significa di fatto mantenere in memoria strutture più piccole dell'information theoretical lower bound, pagando il prezzo delle collisioni.

Database NoSQL Sono database che memorizzano entry chiave valore, un esempio è *RocksDB*. Se ordinati sono implementazioni efficienti di B-Tree, altrimenti di dizionari classici, in parte memorizzati su disco.

Si utilizzano anche LSM-Tree, alberi che dividono per livelli le chiavi e mantengono chiavi utilizzate di frequente all'inizio, spostando chiavi poco frequenti nei livelli più bassi.

1.3 Crivelli

Un crivello è una struttura dati che accetta le seguenti primitive:

- *add(u)*: aggiunge un url alla struttura;
- *get()*: preleva un elemento dalla struttura.

Un crivello ha un aspetto insiemistico, ovvero ricorda cosa è stato inserito o no, gestisce anche l'ordine in cui restituisce i dati, tipicamente si considera una visita in ampiezza.

Un' implementazione base è un' hashtable in memoria, per i già visti, ovvero $V \cup F$, e una coda in memoria per gestire l'ordine di visita, BFS nel caso di una coda classica.

Osservazione 4. *È necessario comunque del processing degli url estratti dal crivello, ad esempio, potremmo ordinarli per dominio, in modo da raggruppare richieste allo stesso sito.*

Implementazione È già stata accennata la possibilità di avere una hashtable più una coda. L'hashtable potrebbe, come introdotto a sottosezione precedente, solo le firme degli url, in modo da ridurre lo spazio in memoria necessario.

Graceful degradation È importante garantire il *graceful degradation*, ovvero, il sovraccarico della struttura ne peggiora le performance ma non fa crollare l'intero processo. Una struttura dati classica, come una hashtable, non garantisce questa proprietà, al termine della memoria essa fallisce.

1.3.1 Filtri di Bloom

Un filtro di Bloom è un dizionario approssimato, che garantisce una certa probabilità di errore positivo assumendo un certo upper bound al numero di chiavi inserite.

L'impronta in memoria di un filtro di questo tipo è costante, non varia quindi al variare del carico della struttura.

Funzionamento Sia b un vettore di m bit, sia d il parametro che regola la precisione del filtro, e $f_i : U \rightarrow m, 0 < i < d$ funzioni di hash che mappano un elemento dell'universo in un indice del vettore.

Le primitive disponibili sono, dato $x \in U$:

- $add(x)$: imposto ad uno le posizioni date dalle funzioni di hash, ovvero $f_0(x), \dots, f_{d-1}(x)$;
- $contains(x)$: restituisco l'and logico delle posizioni $b[f_i(x)]$.

L'operazione $contains$ restituisce zero se e solo se x non è stato inserito nel filtro. Un risultato positivo però può significare che x sia stato inserito oppure che inserimenti precedenti abbiano settato ad uno tutte le celle relative agli hash di x .

Probabilità di falsi positivi Se fissiamo d ad uno non si sta guadagnando rispetto ad una classica tabella di hash. Più d è grande, più sono improbabili i falsi positivi, ma più uni si vanno ad aggiungere, quindi i falsi positivi aumentano.

Bisogna quindi trovare un tradeoff tra m e d per minimizzare la probabilità di falsi positivi. Si considera ora un n , ovvero il numero di chiavi inserite.

Si ottiene che la probabilità di un falso positivo equivale a $\frac{1}{2}^d$ e la dimensione $m = 1.44dn$. Questo implica che fissata una precisione e il numero di chiavi massimo, si può ottenere lo spazio necessario, similmente, fissato m e n si può ottenere la precisione ottenuta.

Osservazione 5. *La struttura ha degrado grazioso, infatti, eccedendo n l'analisi di precisione non vale più e i falsi positivi aumentano. Si nota anche che sotto la soglia n la probabilità di falsi positivi diminuisce. La struttura non fallisce, peggiora in precisione fino a che è satura, restituendo sempre positivo.*

Osservazione 6. *Gli accessi in cache sono pessimi per quanto riguarda un filtro di bloom, dovendo controllare celle di memoria non correlate e sostanzialmente casuali, quindi con poca probabilità di essere in cache.*

Osservazione 7. *I risultati negativi in media accedono a solo due celle.*

Blocked Bloom filter Si può pensare di dividere un filtro di Bloom in due filtri più piccoli di dimensione $1.44d\frac{n}{2}$ ciascuno. Una funzione g sceglie quale filtro scegliere, poi, si inserisce l'elemento nel filtro selezionato.

La divisione permette di mantenere i filtri in cache e velocizzare il tutto. Un'analisi avanzata individua un degrado di precisione. Questo perché alcuni filtri mantengono poche chiavi, ed altri saranno più sovraccarichi.

Calcolo funzioni di hash Supponendo di avere due funzioni di hash $h(x)$ e $g(x)$, siano $a = h(x)$ e $b = g(x)$, considerando l' i -esima funzione di hash come $ai + b$, l'analisi sulla precisione di falsi positivi rimane valida.

Osservazione 8. *Il calcolo fatto in questo modo è estremamente più efficiente di calcolare le funzioni separate.*

1.3.2 LMS tree

Un *Log-Structure-Merge tree* memorizza file di log in cui si scrive solo in append.

A differenza di un classico *B-tree*, i registri non cambiano. Questi alberi funzionano molto bene quando si scrive molto e legge poco.

Livelli L'idea di base di un *LMS tree* è avere un certo numero di livelli nella struttura dati. Idealmente i vari livelli possono essere mantenuti in mezzi di memorizzazione differenti. Si assume ora che il primo livello sia in memoria, in una struttura classica come un *B-tree* e i successivi su disco come registri di coppie chiave-valore ordinate.

Ogni livello ha memorizzate un certo numero di coppie chiave-valore, ed ogni livello successivo occupa dieci volte più del precedente.

Ricerca Per trovare una chiave, si cerca nei livelli in maniera sequenziale, una volta individuata, al livello più alto possibile¹, si restituisce. Visto che le chiavi sono ordinate, si potrebbe effettuare una ricerca dicotomica².

Inserimento L'aggiunta all'albero inserisce la chiave al livello zero. Se la chiave non è presente il *B-tree* sale di dimensione, se eccede la dimensione massima: si considera un segmento contiguo di chiavi e si fondono con il livello uno³. Si procede fino a che non si trova un livello che riesce a mantenere le chiavi. Se si raggiunge l'ultimo livello, se ne crea uno nuovo.

Il principio di base è che le fusioni dei livelli, che sono molto costose, avvengono sempre più raramente allo scendere nell'albero.

Rimozione La rimozione consiste nella ricerca della chiave e nella sostituzione del suo valore con una *tombstone*. Una ricerca successiva troverà questo valore e capirà che la chiave è stata rimossa.

Frammentazione livelli Ogni livello nella pratica è frammentato in tanti file piccoli. Questo offre molti vantaggi, ad esempio operazioni di merge parallele. Inoltre, favorisce l'evitare collisioni di concorrenza.

La ricerca poi è più veloce, poiché è possibile mantenere un indice sparso, con un sottoinsieme di chiavi, con puntatori ai frammenti relativi alla chiave. Ogni

¹Potrebbe comparire anche in livelli successivi, visto che si ammettono duplicati

²Bisogna stare attenti al tipo di memoria, a volte accessi sequenziali sono molto più veloci di accessi aleatori, un esempio è nel nastro.

³La fusione è molto veloce essendo le due strutture ordinate

livello ha poi un filtro di Bloom. La ricerca quindi testa il filtro e se la risposta è negativa si procede al livello successivo, altrimenti, si controlla l'indice sparso in ricerca dicotomica, e si procede sequenzialmente dalla maggior chiave minore uguale di quella ricercata.

1.3.3 Crivello offline

Si mantengono solo file su disco e non strutture in memoria. I file vengono ordinati e fusi spesso. In particolare, si hanno a disposizione:

- Z : url già visti, $V \cup F$
- F : frontiera, ovvero gli url da visitare
- A : file che accumula gli url incontrati durante la visita

All'inizio Z ed F sono inizializzati con il seme ed A è vuoto. Durante la visita si estrae con qualche criterio da F , accumulando in A , quando si esaurisce il primo o il secondo è pieno:

1. A viene ordinato e deduplicato, diventa A' ;
2. Z diventa Z' pari all'unione di A' e Z : durante la fusione gli url che compaiono in A' ma non in Z vengono aggiunti ad F .

Il punto due ha complessità lineare, visto che i due file sono ordinati, l'ordinamento di A' disordina gli url per quanto riguarda l'ordine di accodamento, per ovviare al problema si potrebbe mantenere nel file oltre che l'url, la posizione originale di accodamento, in modo da riordinarli una volta accodati ad F .

Z potrebbe contenere firme al posto di url, in questo caso A , che contiene url, va ordinato indirettamente per firma.

Al crescere della frontiera il crivello diventa lento ma non si blocca, ha perciò graceful degradation.

LRU cache Può essere una buona idea anteporre al crivello una cache LRU, questo rimuove molti duplicati, infatti se un url è all'interno della cache è già stato inserito all'interno del crivello.

Ogni tanto un url verrà inserito più volte, perché finito fuori dalla cache.

1.4 Quasi duplicati

Per molteplici ragioni, è possibile incontrare spesso le stesse pagine, per esempio, la stessa pagina con http e https, pagine che differiscono per una sola data, etc. È necessario un sistema che decida se due pagine sono quasi identiche.

Digest Si può generare un digest dalla pagina web, buttando via alcuni elementi, per esempio i tag html, le maiuscole, etc. Si può anche campionare la pagina in qualche intervallo e memorizzare solo i campionamenti. Una volta generati questi digest saranno inseriti in un filtro di Bloom.

SimHash L'idea di base è generare hash simili per testi simili. La distanza tra due testi si misura in distanza di Hamming. Si risolvono problemi come ad esempio il considerare due pagine diverse per un singolo errore ortografico.

A partire dal testo si ottengono delle feature da esso. Un esempio potrebbe essere estrarre le parole, oppure considerare tre-gram da esso, ovvero sotto-sequenze di tre caratteri o magari tre parole alla volta, etc. N-gram corti implicano il non considerare troppo importanti errori di ortografia.

Siano ora $s \in S$ le feature estratte e $h : \text{Stringhe} \rightarrow 2^b$ funzione di hash. Consideriamo ora il valore di hash per ogni feature, $h(s)$, l'hash finale del documento si ottiene contando la maggioranza per ogni bit degli hash delle feature, per esempio:

- $s_0 : 1, 0, 1, 1, 0;$
- $s_1 : 0, 1, 0, 0, 1;$
- $s_2 : 0, 1, 0, 1, 1;$

L'hash finale del documento sarà: 0, 1, 0, 1, 1

Il calcolo effettuato in questo modo sistema i casi di poche differenze tra i testi, dipende ovviamente dalle feature che si considerano, ma è auspicabile che poche feature differenti tra due documenti non modifichino i voti di maggioranza, oppure, che influiscano su pochi bit.

1.5 Politeness

Dal punto di vista etico, una persona che mette una pagina sul web deve accettare che sarà visitata, da umani. La visita e l'indicizzazione automatica tramite crawler non dovrebbe continuare per periodi troppo prolungati.

Politeness assoluta Intervallare di un certo numero di secondi le richieste consecutive ad un sito, oppure allo stesso ip. Esempio, faccio 10 richieste, pausa di qualche secondo, altre 10 richieste.

Politeness relativa Per un certo intervallo di tempo scarico tutto quello che posso. Poi mi adatto in base a come la pagina ha risposto, ad esempio, scarico per un secondo tutto quello che riesco, ma la pagina impiega 10 secondi a rispondere, aspetto quindi 30 secondi prima di effettuare una nuova richiesta.

Potrei usare HTTP 1.1, per mantenere aperta la connessione.

Osservazione 9. *È necessaria un'architettura multiflusso per raccogliere dati da molti siti contemporaneamente, altrimenti si aspetterebbe molto per ragioni di politeness e si diventerebbe troppo dipendenti dall'ordine della coda dei siti da visitare, infatti, dovrei aspettare se il prossimo sito fosse nello stesso dominio di quello attuale, no altrimenti.*

Robots.txt File che deve comparire nella radice di un sito web dove si possono escludere parti di sito da visitare. Se uno ignorasse i contenuti del file probabilmente sarebbe bannato.

1.6 Concorrenza

Ogni host estratto dal crivello ha una coda con gli url relativi ad esso. Bisogna quindi ora capire quale host considerare e visitarne gli url associati.

Visite ad host diversi possono essere fatte in concorrenza, per capire quale host è disponibile, secondo le regole di politeness, si utilizza una priority queue.

1.6.1 Componenti di un crawler

Coda di host Si considera una coda di host, ordinati per tempo da aspettare prima di poter scaricare dal sito.

Se il sito in testa ha tempo minore uguale a quello attuale esso si estrae, si scaricano tutti i siti che si riescono da quell'host, poi si reinserisce in coda con timestamp uguale al tempo attuale più intervallo di politeness.

La coda è gestita da un semaforo per permettere concorrenza.

Osservazione 10. *Considerando una dimensione massima per la coda potrei dover escludere dei siti se il timer crescesse troppo. Sta a chi progetta il crawler decidere se potare la coda nel caso in cui cresca troppo in memoria.*

Coda di ip Il discorso si complica nel caso si considerino gli ip. Si considera una coda di ip con un timestamp,⁴ ogni ip ha una coda di host come quella presentata in precedenza. Il timestamp dell'ip equivale al massimo tra il timestamp suo e quello della testa della sua coda di host.

Una volta individuato l'ip da estrarre si estrae dalla coda e si procede come in precedenza. Questo garantisce di rispettare la politeness anche verso ip con molti host associati.

Fetching e parsing threads Nella pratica ci sono fetching thread che scaricano secondo le policy descritte negli ultimi due paragrafi, che scrivono anche su disco.

⁴Si può assumere un timer di politeness di 10 secondi.

I parsing thread poi, molto minori rispetto a quelli di fetching, si occupano di processare i dati scaricati. Quello che fanno è scrivere da qualche parte i dati, cercare gli url nuovi e passarli al crivello.

Osservazione 11. *Si potrebbero inserire filtri tra fetching e parsing threads, per evitare di processare alcune pagine troppo lunghe, troppo corte, di lingua differente etc.*

1.6.2 Strutture concorrenti

Non è auspicabile utilizzare strutture bloccanti basate su semafori poichè i thread paralleli sono troppi, quindi moltissimi sarebbero costretti ad aspettare lo sblocco della struttura condivisa.

CAS L'istruzione compare and swap, $\text{cas}(p,a,b)$, assegna il valore b al puntatore p se il suo contenuto è a . È atomica ed utilizzata per implementare concorrenza.

Linked list lock-free L'inserimento in una linked list lock-free cerca la posizione dove si vuole inserire, e si inserisce con compare and swap. L'algoritmo ripete l'assegnamento quando due thread stanno modificando in maniera concorrente lo stesso nodo, infatti la cas di uno dei due fallisce.

Non si possono prevedere quante iterazioni del ciclo ci vorranno, ma ad ogni iterazione si ha del progresso verso la fine delle operazioni, visto che se il thread attuale fallisce è perché un'altro ha avuto accesso alla struttura.

Non si sta avendo né deadlock né starvation, infatti la struttura sta facendo progresso. È un concetto leggermente diverso dal busy waiting, poiché sebbene si stia facendo polling, la struttura sta evolvendo e non è ferma.

Osservazione 12. *Una coda lock-free potrebbe essere inserita tra fetching threads e la coda di host, che regola l'ordine di visita attuale. Questa coda potrebbe influenzare l'ordine di visita regolato dalla coda a priorità di host.*

1.7 Gestione parallela degli url

Coordinazione agenti È auspicabile avere più agenti che fanno attività di crawling in parallelo, bisogna pensare a come distribuire il carico, un'esempio potrebbe essere quello di dividere per host.

Fare ciò non è molto efficiente, si può ricorrere a qualcosa di centralizzato. Ogni agente chiede al coordinatore se tocca a lui occuparsi di un determinato host. Ovviamente è un single point of failure, si può pensare quindi di avere una distribuzione del coordinatore⁵. Non si affronterà un algoritmo del genere, si vede ora un altro approccio.

⁵Un algoritmo possibile è PAXOS, una delle sue implementazioni è ZOOKEEPER

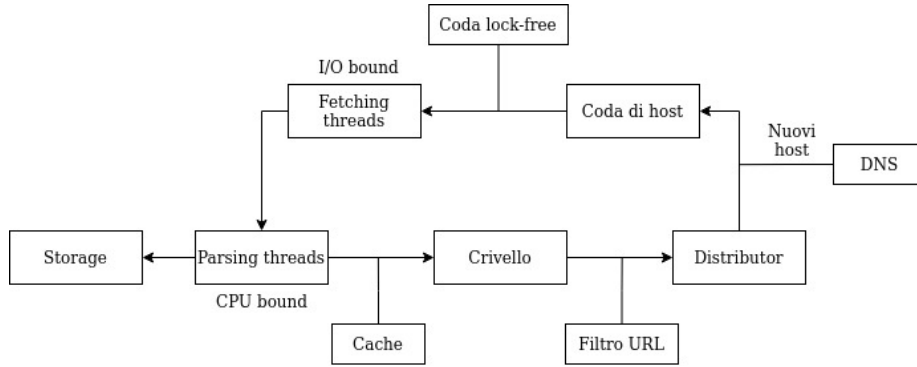


Figura 1: Componenti di un crawler

Gestione statica Tolta la condizione di rottura degli agenti, quindi assumendo staticità, assegnare un url ad un agente richiede calcolare una funzione di hash modulo n , oppure sfruttare un approccio round robin.

Il problema di questo approccio è che non funziona bene se gli agenti cambiano nel tempo.

Requisiti di gestione dinamica La gestione dinamica deve rispettare alcune proprietà, in particolare, si considerano P agenti, di cui A agenti vivi.

La funzione di assegnamento $\delta_A : U \rightarrow A$:

- $\delta_A(u) \in A$: assegna ogni url ad un agente vivo;
- $\delta_A^{-1}(a) \approx \frac{|U|}{|A|}$: il carico di ogni agente è circa uguale;
- $A \subset B \implies \delta_B^{-1}(a) \subset \delta_A^{-1}(a) \forall a \in A$: aggiungendo nuovi agenti, quelli vecchi non si vedono assegnare più cose.

Knuth-FisherYates shuffle Arrivato un url, creo un generatore di numeri casuali con seed pari a u . Permutò l'insieme P di agenti e scorro finché non trovo un agente attivo $a \in A$.

Se si aggiunge un nuovo agente, gli unici url che cambiano assegnamento sono quelli che hanno nella lista degli agenti generata per essi, hanno un nuovo agente che precede quello attivo selezionato precedentemente. Quindi, gli url che cambiano posto vanno solo ad agenti nuovi.

Parto da un array lungo n . Scorro l'array, all' i -esimo passo, seleziono una posizione $k \in [i, n - 1]$ e scambio l'elemento k e i .

Sono possibili $n!$ scelte, l'algoritmo genera in modo equiprobabile una permutazione possibile.

Si nota che, una volta individuato un elemento di A posso fermarmi, tanto sarà lui a gestire l'url. In media quindi effettuo $\frac{|A|}{|P|}$ scambi.

Min-hash Sia u un url e A l'insieme degli agenti, h una funzione di hash. Un url viene assegnato all'agente $a = \operatorname{argmin}_{a \in A} h(u, a)$.

Una collisione si risolve in maniera deterministica. Questo e l'approccio precedente sono molto simili.

Hashing coerente Un'interpretazione geometrica è la seguente: si considera una circonferenza, per ogni agente si inseriscono C punti casuali sulla circonferenza. Ogni agente inizializza un seed con l'identificativo degli altri, generando casualmente i loro punti, quindi ogni agente ha la stessa circonferenza con C punti per ogni $a \in A$.

Per capire dove va un url u , si parte dal punto definito da $h(u)$, si procede in senso orario finché non si incontra un agente. Le repliche servono a rendere più bilanciati gli assegnamenti.

Osservazione 13. *È possibile in generale capire chi si occupava dell'url prima dell'arrivo di un nuovo agente, l'approccio cambia a seconda della tecnica di hashing utilizzata, nello shuffle basta procedere con l'estrazione, nel min-hashing si può mantenere una finestra di k minimi. Nell'ultimo caso si può procedere nello scan della circonferenza.*

2 Retrieval

L'attenzione passa ora alle pagine scaricate. Ogni documento è numerato e contiene una certa quantità di caratteri, l'obiettivo ora è indicizzarli.

Osservazione 14. *Tipicamente bisogna fare guessing per capire la codifica del testo, esistono tabelle dedicate a questo in ogni browser.*

Segmentazione dei documenti Partendo da un documento si ottengono sequenze di token, in qualche modo, per esempio spezzando il testo agli spazi, rimuovendo le stop-words etc. Tipicamente si applicano operazioni di normalizzazione, come troncamento, lemmatizzazione, etc.

Matrice termini-documenti Ordinando la totalità dei termini nei documenti si può ottenere una rappresentazione matriciale con documenti sulle colonne e termini per righe. Una cella indica la presenza o meno di una certa parola nel testo di un documento.

Quello che si fa poi è creare la trasposta ordinata, ovvero una matrice che per ogni token ha una lista di interi che rappresentano i documenti in cui esso è contenuto.

2.1 Codici istantanei

Un codice è un sottoinsieme di parole binarie: $C \subseteq 2^* = \{0,1\}^*$.

Definizione 1. *Si dice che x è un prefisso di y , $x \preceq y$ se $\exists z \in 2^*$ t.c. $xz = y$, ovvero se concatenato ad un'altra parola binaria ottengo y .*

Definizione 2. *Due parole x e y sono confrontabili se $x \preceq y$ oppure $y \preceq x$.*

Definizione 3. *Un codice C si dice istantaneo se $\forall x, y \in C$, x e y sono inconfrontabili, ovvero privo di prefissi.*

Definizione 4. *Un codice C si dice completo se ogni parola binaria è confrontabile con una parola $x \in C$. Ovvero, aggiungendo una qualsiasi parola binaria, il codice non è più istantaneo.*

Motivazioni Memorizzare sequenze di interi ordinate in maniera crescente può essere fatto in maniera efficiente memorizzando gli scarti, differenze, tra due interi consecutivi.

$$1, 6, 7, 10, 12 \longrightarrow 1, 5, 1, 3, 2$$

Queste liste potrebbero essere le righe della matrice termini-documenti.

Un'altra proprietà interessante di un codice istantaneo è l'univocità di decodifica scorrendo una sequenza di parole concatenate. Infatti, visto che nessuna parola è prefisso di un'altra, ho un solo modo di decodificare una sequenza di zeri e uni.

Ordinamento nei codici istantanei Due esempi di codici istantanei sono:

- $k = 0^k 1$
- $k = 1^k 0$

Il secondo codice mantiene l'ordine, il secondo no.

Importanza della completezza Se un codice è istantaneo e completo si può decodificare ogni stringa binaria casuale in modo univoco, altrimenti no.

2.1.1 Disuguaglianza di Kraft-McMillan

Definizione 5. Sia C un codice istantaneo, vale:

$$\sum_{w \in C} \frac{1}{2^{|w|}} \leq 1$$

Se C istantaneo, C è anche completo sse $\sum_{w \in C} \frac{1}{2^{|w|}} = 1$. Nell'interpretazione geometrica⁶ non sarebbe libero nessun intervallo.

Osservazione 15. Il fatto che la sommatoria dia un valore piccolo non dice nulla su un linguaggio qualsiasi, non è vera quindi l'implicazione inversa.

Teorema interi Siano $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ interi, se vale:

$$\sum_{i \in N} \frac{1}{2^{t_i}} \leq 1$$

Allora esiste un codice istantaneo con n , dove la parola i -esima ha lunghezza t_i .

Questo fatto rende possibile un'eventuale correzione, infatti, se avessi un codice con quelle lunghezze ma non fosse istantaneo, so che potrei sistemarlo.

Visione probabilistica La quantità $\frac{1}{2^{|w|}}$ si può vedere come una probabilità, visto che nel caso in cui un codice sia istantaneo tutte quelle quantità si sommano ad uno.

Potrei pensare di codificare probabilità maggiori a parole più corte. La disuguaglianza di prima, e l'algoritmo greedy associato⁷ genera il codice ottimo per una distribuzione di probabilità del tipo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^k}$.

⁶Vedi dimostrazione

⁷Non presentato qui, ma simile a Huffman

2.2 Esempi di codici

2.2.1 Codici binari

Notazione binaria ridotta Codice binario in cui si rimuove il primo 1. Per esempio:

$$1001010 \rightarrow 001010$$

Codice binario minimale Sia $s = \lceil \log k \rceil$, se $x < 2^s - k$, esso è codificato dall' x -esima parola binaria di lunghezza $s - 1$, altrimenti tramite la $(x - k + 2^s)$ -esima parola binaria di lunghezza s .

2.2.2 Elias

Codice γ Ogni numero è scritto in notazione binaria ridotta, ovvero in binario senza il primo uno, preceduto dalla sua rappresentazione unaria.

Numero	Codifica γ	Unario
1	1	1
2	010	01
3	011	001
4	00100	0001
5	00101	00001
6	00110	000001
...

La lunghezza di x nella codifica γ è $2\lambda(x) + 1$, dove λ è $\lfloor \log_2 x \rfloor$. In binario invece spenderei $\lambda(x)$, ma non è istantaneo. In unario invece spendo una quantità pari a x , che in casi in cui i numeri siano piccoli va bene, altrimenti no.

Codice δ Molto simile al precedente, invece che usare l'unario, scrivo davanti alla rappresentazione binaria ridotta la lunghezza del codice γ associato all' x -esimo numero.

Confrontando i codici visti fin'ora:

Codifica	Lunghezza
Unario	$x + 1 = O(x)$
Elias γ	$2\lambda(x + 1) + 1$
Elias δ	$2\lambda(\lambda(x + 1) + 1) + 1 + \lambda(x + 1)$

Il codice δ sui dice asintoticamente ottimo, visto che utilizza un numero logaritmico di bit più qualcosa di più piccolo. Nel lungo termine risparmia rispetto agli altri due codici.

2.2.3 Golomb

Si fissa un parametro b che si dice modulo del codice. Preso un $x > 0$ si codifica in unario la quantità $\lfloor x/b \rfloor$, seguito dalla binaria minimale di $x \bmod b$.

Dato un codice, posso tornare al numero con $b\lfloor x/b \rfloor + x \bmod b$.

Fissato $b = 3$, il codice diventa

Numero	Codifica Golomb
0	10
1	110
2	111
3	010
4	0110
5	0111
...	...

Osservazione 16. *Golomb con $b = 1$ la prima parte del codice equivale all'unario. Inoltre, questo codice ha problemi simili all'unario, la prima parte infatti cresce asintoticamente come x , nella pratica è minore, ma comunque occupa molto spazio.*

2.2.4 Codici a blocchi a lunghezza variabile

Quello che si fa è memorizzare tanti blocchi per un singolo numero. Il primo bit di ogni byte contiene il fatto che il codice è terminato oppure no. Nel caso in cui non sia terminato bisogna leggere uno o più altri byte per completarlo.

Un miglioramento è mettere tutti i bit *di continuazione* nel primo byte, per capire fin da subito quanto proseguire.

Sio può pensare dal punto di vista logico ad una lista concatenata che contiene pezzi di un numero, la decodifica consiste nello scorrere la lista e concatenare i valori in ogni nodo.

2.2.5 Distribuzione intesa

Ogni codice crea implicitamente una distribuzione intesa, ovvero parole più corte hanno probabilità maggiore, quindi, si può studiare come varia questa probabilità in relazione alla lunghezza che assumono le parole nei vari codici.⁸

Conoscendo la distribuzione di probabilità dei dati si può utilizzare

⁸Vedi appunti, distribuzioni intese.

2.2.6 PFOR-DELTA

Compressione che funziona molto bene quando numeri piccoli compaiono molto più frequentemente di quelli grandi.

Si fissa una dimensione di blocco $B \approx 256$, la compressione avviene per blocchi di B elementi alla volta. Quello che si fa è scorrere gli elementi di un blocco e scegliere un numero di bit b che rappresenti almeno una percentuale $\alpha \approx 90\%$ della totalità dei numeri del blocco.

Compressione A questo punto scorro la lista, se un numero è rappresentabile in b bit lo scrivo, altrimenti scrivo un codice di escape, per esempio tutti uni o zeri.⁹ Accodo alla fine i numeri non rappresentabili, tutti a lunghezza a , la minima per rappresentarli tutti. All'inizio della lista inserisco il numero b e il valore a .

Decompressione La decompressione della lista è lineare, bastano due puntatori, uno all'inizio e uno che parte prima dei numeri accodati. Si ottiene una buona compressione, b viene molto piccolo se tanti valori sono piccoli, inoltre nell'*alpha*-per cento dei casi non devo accedere alla memoria accodata alla lista, che è la parte più costosa della decompressione.

2.2.7 Asymmetric Numeral System

Sono sistemi in cui cifre diverse sono scritte con numero diverso di bit, il che permette di scrivere numeri dove alcune cifre costano tanto, altre di meno.

Premessa Vorremmo che, dato un messaggio x , l'aggiunta di un simbolo che compare con probabilità p , crei un messaggio $x' \approx \frac{x}{p}$.

Quindi, $\log(x') \approx \log(x) + \log(\frac{1}{p})$. Ovvero, vorrei che, aggiungendo ad un messaggio un simbolo che compare frequentemente, tale messaggio si allunghi di molto poco.

La codifica binaria risponde alla richiesta precedente, dove i simboli sono equiprobabili. Dato un messaggio infatti, l'aggiunta di un simbolo corrisponde a raddoppiare il valore precedente e aggiungerne uno, ovvero aumentare di un fattore $x/\frac{1}{2}$.

Codificando ad esempio il numero 0100110 in decimale, quello che sto facendo sono operazioni del tipo $x' = 2x + p$, dove p è 0 oppure 1. Ciò è coerente con la premessa, sto aggiungendo simboli che sono equiprobabili.

Caso asimmetrico Il caso binario è semplice, codifica e decodifica si fanno mettendo e spostando caratteri, bisogna ora capire come fare una cosa simile quando la probabilità dei simboli cambia.

⁹Necessito quindi di un valore libero per questo codice nei b bit.

Siano $0, 1, \dots, n-1$ simboli con una relativa probabilità associata p_i .

Rappresento in maniera discreta le probabilità, considerando 2^d blocchi, divisi in segmenti in base alle probabilità. Vorrei che per ogni segmento, che ha lunghezza f_i , valga $f_i/2^d \approx p_i$.

Calcolo l'inizio di ogni segmento in maniera cumulativa e lo chiamo c_i , semplicemente sommo gli $f_j, j \leq i$.

Ogni simbolo quindi ha associato un segmento di dimensione f_i , lungo in maniera proporzionale alla sua probabilità associata.

Esempio Considero tre simboli con probabilità:

$$\frac{9}{10}, \frac{1}{30}, \frac{2}{30}$$

Fisso d a 10, ottengo tre blocchi lunghi f_i rispettivamente:

$$\frac{922}{1024}, \frac{34}{1024}, \frac{68}{1024}$$

Calcolo ora i c_i , ottengo rispettivamente:

$$0, 922, 956$$

Osservazione 17. Se estraggo a caso da 1024, usando i c_i per capire in che segmento sono finito, ottengo ogni valore quasi con le probabilità iniziali.

Primitive Definiamo ora le primitive *push*, *sym* e *pop*:

$$push(x, s) = (\lfloor x/f_s \rfloor \ll d) + c_s + (x \bmod f_s)$$

Quindi, eseguo uno shift e metto nei bit più bassi quella quantità.

$$sym(x) = s \mid c_s \leq x \leq c_{s+1}$$

L'ultimo simbolo è quello associato agli ultimi d bit.

$$pop(x) = \langle (x \gg d) \cdot f_s + (x \bmod 2^d) - c_s, s \rangle$$

La decodifica riporta la x a prima dell'inserimento.

2.3 Liste di affissioni, rango

2.3.1 Riassunto processo di crawling

Possiamo riassumere il processo di crawling come:

1. *Crawling*: raccolta di pagine dal web e salvataggio

2. *Parsing*: processing dei testi, come tokenizzazione, normalizzazione etc..
 Ogni documento diventa quindi una sequenza di token numerati. In pratica si ottiene un flusso di unità da analizzare della forma

$$\langle token, doc, posizione \rangle$$

Il tutto viene memorizzato in maniera intelligente, tramite codici istantanei per ridurre lo spazio in memoria. Quando la memoria si riempie, scarico tutti i documenti indicizzati su disco. Ottengo quindi indici inversi funzionanti per una certa sequenza di documenti. Inoltre su disco memorizzo:

- Liste dei termini ordinata lessicograficamente;
- Liste di affissioni;
- Lista di puntatori alle liste di affissione.

Successivamente fondo gli indici, che sono ordinati, con una fusione multipla, per ottenere l'indice totale.

2.3.2 Rango lessicografico efficiente

Sono necessarie strutture efficaci per il rango lessicografico, ovvero per sapere l'ordine delle parole.

Si fa leva sulle strutture statiche, ovvero strutture che una volta costruite non si cambiano. L'obiettivo è avere per ogni termine associato il rango, per esempio:

$$a \longrightarrow 0, b \longrightarrow 1, c \longrightarrow 2, d \longrightarrow 3$$

Consideriamo ora U l'insieme delle stringhe, $X \subseteq U$, i termini, ed $f : X \longrightarrow 2^b$ la funzione che associa ad un termine il suo rango. Un dizionario classico, risponde un valore se la chiave è contenuta, altrimenti un valore di default. Il che significa che mantiene in qualche modo tutte le chiavi possibili. Il che significa che un dizionario classico occupa almeno

$$\log \left(\frac{|U|}{|X|} \right) + |X|b = \log(2^b)^{|X|}$$

Il primo termine per le chiavi, il secondo per il valore delle chiavi.

A noi interessa solo rispondere a chiavi in X , potremmo pensare quindi a come risparmiare spazio, occupandone solo $|X|b$, mantenendo accesso costante.

Idea Creo un sistema lineare aleatorio, lo risolviamo. Consideriamo $m = c|X|$ numero di variabili del sistema, dove $c > 1$. Siano ora $g, h : U \longrightarrow m$ funzioni di hash.

Per ogni chiave x , aggiungiamo al sistema l'equazione:

$$V_{g(x)} \oplus V_{h(x)} = f(x)$$

Supponiamo ora di avere una soluzione del sistema, ovvero un vettore lungo $|X|$, che occupa b bit per ogni variabile, posso computare $f(x)$ per qualsiasi x , computando $V_{g(x)} \oplus V_{h(x)}$. Occupo quindi uno spazio pari a $mb = c|X|b$ più lo spazio per mantenere le funzioni di hash, che sono definite da qualche parametro, irrisorio rispetto al resto.

Risoluzione del sistema Costruisco un grafo dove sui nodi ho le variabili e sugli archi la variabile associata all'equazione.

Iterativamente efoliamo il grafo, ovvero, trovo una foglia (nodo con grado 1), sia essa per esempio V_2 , collegata al nodo V_3 . Trovo che $V_2 = f(x) \oplus V_3$. Stacco V_2 , trovo un'altra foglia, proseguo così. Metto da parte quindi tante equazioni di quel tipo.

Prima o poi svuoto il grafo, parto dall'ultima equazione e risolvo all'indietro.

Osservazione 18. *Questo funziona solo se il grafo è aciclico.*

Teorema 1. *Sia m il numero di nodi di un grafo, n il numero di archi, se vale $m \geq 2.09n$ la probabilità che un grafo aleatorio sia aciclico tende a 1.*

Il teorema precedente vale anche con un numero di nodi non troppo alto. Ho ottenuto quindi un modo di ottenere un grafo aciclico per far andare l'algoritmo risolutivo, basta usare una costante $c \geq 2.09$, fissare due funzioni e ottenere un grafo del sistema. Se esso presenta cicli, cambio le funzioni di hash.

Complicazioni Esistono versioni con più funzioni di hash. Se ne usassi 3, otterrei un multigrafo, dove gli archi coinvolgono 3 vertici. Per quel caso la costante c equivale a 1.23.

Ammettere cicli Se si ammettono cicli bisogna ricorrere alla riduzione Gaussiana del sistema, cubica nel numero di variabili. Per pensare di applicarla bisogna partizionare le chiavi e risolvere sottosistemi.

Dire se una chiave fa parte o no di X Siano $S : U \rightarrow 2^b$, $S' : X \rightarrow 2^b$. Creo la funzione \bar{S}' con la tecnica del sistema, occupando $\approx 1.23|X|b$.

Se vale $S(x) = \bar{S}'(x)$ allora $x \in X$, a meno di collisioni.

2.4 Risoluzione di interrogazioni

L'attenzione ora passa alla risoluzione di interrogazioni a un insieme di documenti indicizzato.

Siano ora Q le query, D l'insieme di documenti, vogliamo computare la seguente funzione:

$$Q \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

che associa ad ogni documento, data una query, un punteggio.

Tra le tipologie di query posso avere ricerche ad un singolo termine, dove il risultato è la semantica di esso, ovvero, l'insieme dei documenti in cui il termine compare, oppure posso avere cose come unione, intersezione e negazione di query.

Query di unione Date più query, il risultato singolo sono insiemi di documenti, uso una fusione multivia¹⁰ per unire i risultati. È molto facile durante la fusione tenere traccia di quali interrogazioni hanno dato come risultato un certo documento, utile per effettuare ranking.

Abbiamo quindi un insieme di liste di affissione per ogni query, uso un'approccio pigro, ovvero, leggo il documento attuale da ogni lista, poi leggo l'elemento next del minimo, etc. Questo approccio è pigro se le liste sono implementate come puntatori al prossimo.

Non si può fare meglio di così, ovvero, serve un numero lineare di accessi al next, visto che l'output contiene l'unione di tutte le liste.

Query di intersezione Consideriamo ora due query di intersezione, l'intersezione delle liste si può fare in tempo lineare, ma si può fare di meglio. Per esempio, se una fosse molto più piccola dell'altra, potrei effettuare ricerca binaria degli elementi della piccola nella grande.

Un'altro approccio usa ricerca esponenziale, procedo ad intervalli sempre più grandi, appena scavalco torno all'intervallo precedente e ricomincio. Questo approccio è vantaggioso, perché si assume che l'elemento successivo sia abbastanza vicino a quello corrente, cosa che capita se gli elementi della corta sono ben disposti in quella lunga.

Nel nostro caso non si usano questi approcci, consideriamo ora la lista corta che inizia con 5, quella lunga con 0, è facile capire che gli elementi della lunga fino a quando non si incontra un 5 sono irrilevanti. Pensiamo ora alla possibilità di utilizzare un iteratore che non solo ha un'operazione di next, ma una di skip-to, che salta al maggiorante di un certo valore, in questo caso si può andare in tempo sub-lineare.

Nel caso in cui si abbiano k liste da intersecare, si utilizza un min-heap per decidere la lista su cui effettuare lo skip-to, infatti, conviene far avanzare la lista più indietro, fino al massimo valore corrente. Se il minimo e massimo coincidono significa che esiste un'intersezione.

Purtroppo nella pratica funziona meglio questo approccio: cerco un allineamento tra le prime due, se lo trovo allineo la terza, se non lo trovo, riallineo le prime due etc. Quando trovo un allineamento tra le prime tre, cerco nella quarta e così via. Il tutto funziona perché, se si ordinano gli elementi per frequenza, trovare un match per termini poco frequenti, ovvero match per le prime liste, farà avanzare le ultime di moltissimo.

¹⁰Simile al merge, ma uso un min-heap per ottenere il minimo di k liste in tempo logaritmico.

Query di not Scorro la lista dei documenti, ogni volta che si incontra un buco tra gli elementi si emettono tutti quelli in mezzo.

Implementazione dello skip-to Mantengo in memoria un campione ogni tot elementi della lista, da decidere. Quando richiedo uno skip-to, ricerco in dicotomica i puntatori, poi procedo linearmente da quello che trovo.

Albero di operazioni Nella pratica si possono combinare unioni intersezioni e negazioni in maniera molto complessa, quello che si fa è, mentre si chiama next della query composta, tutte le sotto-query avanzano in maniera indipendente per dare in output il risultato complessivo.

Early termination In realtà non si completerà mai del tutto un'interrogazione, ma tramite la struttura pigra si estraggono quanti risultati di cui ho bisogno.

Operatore frasale La query è una frase, si cercano i documenti che presentano i termini nell'ordine specificato nell'interrogazione. L'operazione sottostante è l'intersezione, cerco quindi documenti che hanno almeno tutti i termini della frase, però devo considerare anche la posizione dei token. L'idea su cui si basa l'algoritmo è raccogliere le posizioni dei termini in un documento. Si ottengono quindi k liste, se sottraggo alle posizioni delle liste 0, 1, 2, etc. devo risolvere una semplice intersezione.

Si osserva comunque che l'operatore frasale potrebbe fare molto lavoro per nulla, poichè tipicamente query frasali hanno meno risultati.

Operatore finestra La richiesta ora è trovare termini all'interno di una finestra lunga k , in qualsiasi ordine. Si utilizza un min-heap per tenere conto della posizione dei termini in un documento.

3 Ranking

3.1 Ranking basati su distanze

L'idea di base è quella di avere un grafo orientato di qualche tipo e associare un valore di importanza ai vertici osservando la sola struttura della rete. Ogni arco è considerato un *endorsement* dalla sorgente per la destinazione.

Tecnica banale Una delle tecniche base per misurare l'importanza di un vertice in un grafo è contare l'in-degree del nodo. Questa tecnica è altamente influenzabile nel mondo attuale, basti pensare a comprare follower, voti etc.

3.1.1 Closeness centrality

L'idea è considerare la somma dei cammini verso gli altri, e considerarla come misura di perifericità p . Chiaramente un nodo alla periferia di un grafo ha tantissime distanze grandi. La centralità c è l'inverso della perifericità.

$$p(x) = \sum_{y \in N} d(x, y), \quad c(x) = \frac{1}{\sum_{y \in N} d(x, y)}$$

Esiste anche la nozione negativa, che è diversa su un grafo orientato, più interessante perché meno influenzabile:

$$c(x) = \frac{1}{\sum_{y \in N} d(y, x)}$$

3.1.2 Harmonic centrality

È necessario gestire le distanze infinite, ovvero le coppie per cui non esiste un cammino. Una pezza potrebbe essere considerare le sole distanze finite nella sommatoria, però idealmente non è corretto, inoltre potrei avere casi in cui la centralità diminuisce all'aumentare di collegamenti entranti, che non ha senso.

Quello che si fa è considerare la media armonica, ovvero il totale fratto la somma dei reciproci delle misurazioni.

$$c(x) = \frac{1}{\sum_{y \in N} \frac{1}{d(y, x)}} \rightarrow \sum_{y \in N, x \neq y} \frac{1}{d(y, x)}$$

L'idea della formula è considerare con peso uno i vicini immediati, con peso $\frac{1}{2}$ quelli con distanza 2, etc. Esistono varianti che considerano al posto dell'1 al numeratore un valore di peso per ogni vertice, oppure una qualche informazione esterna, per esempio la correlazione di un nodo verso un'altro.

3.1.3 Betweenness

L'idea è quella che un nodo è importante se sta in mezzo a molti cammini minimi. Siano ora σ_{yz} il numero di cammini minimi da y a z e $\sigma_{yz}(x)$ il numero di cammini minimi da y a z che passano per x .

La betweenness di x si calcola sommando i rapporti:

$$b(x) = \sum_{y, z \in N, y \neq z} \frac{\sigma_{yz}(x)}{\sigma_{yz}}$$

Questa misura funziona molto male in alcuni casi, per esempio in un grafo con un nodo che fa da bridge tra due componenti, ovvero che ha un arco verso l'una e uno verso l'altra, la betweenness di quel nodo sarebbe enorme, ma basterebbe un singolo arco tra le due componenti ad azzerarla. Una variante per risolvere un caso del genere è quella di considerare passeggiate aleatorie tra due nodi piuttosto che cammini minimi.

3.2 Ranking spettrali

Si parte dalla matrice di incidenza del grafo e un vettore di pesi per ogni vertice. Se si moltiplica il vettore per la matrice ottengo un vettore in cui il valore di un nodo corrisponde alla somma del peso dei predecessori.

Posso pensare di iterare il processo all'infinito, la tecnica stimerà l'autovettore dominante della matrice.

Cammini lunghi k con moltiplicazione Se ho una matrice dove sulle righe ho gli archi uscenti e sulle colonne quelli entranti, se moltiplico la matrice per se stessa ottengo in una componente $x y$ il numero di cammini di lunghezza 2 da x a y .

Questo perché, se sulla riga x ho un'uno in posizione k , significa che posso raggiungere k da x . Nella colonna y invece, un'uno in posizione k implica che k raggiunge y . Sommare il prodotto delle componenti significa calcolare il numero di cammini del tipo $x \rightarrow k \rightarrow y$.

Se quindi elevo la matrice alla k , ottengo il numero di cammini lunghi k per ogni coppia di nodi.

Numero di cammini entranti Se moltiplico il vettore unario per la matrice A^k ottengo il numero di cammini lunghi k entranti in ogni nodo, se inverto la moltiplicazione ottengo quelli uscenti.

Esempio Siano gli indici della matrice A giocatori di scacchi, se i ha battuto j si troverà un 1 in posizione $A[i][j]$ e uno zero in posizione $A[j][i]$, $\frac{1}{2}$ in entrambi in caso di patta.

Per capire chi ha vinto basta moltiplicare la matrice per il vettore unario trasposto, per avere un concetto di importanza, basta eseguire moltiplicazioni del tipo

$$A(A(\dots A \cdot 1^T))$$

L'ordine però cambia sempre, dobbiamo quindi trovare un vettore p per cui vale

$$\lambda p = T p$$

dove T è la matrice del torneo. Semplicemente p è un autovettore della matrice T , con autovettore λ .

3.2.1 Eigenvector centrality

Considerando l'autovettore dominante di una matrice che rappresenta un grafo, possiamo considerare la componente di valore massimo come il nodo più centrale del grafo. La computazione di basa sul *power method*, e il senso è quello di considerare come punteggio di un nodo la somma dei punteggi di chi lo punta, e continuare a raffinare questo punteggio continuando a ricalcolare.

Teorema 2. *Sia A una matrice con tutte le componenti non negative e il grafo definito da A fortemente connesso, $\forall i, j \exists k \text{ t.c. } (A)_{ij}^k > 0$. Per una matrice di questo tipo esiste un solo autovalore dominante reale positivo, con autovettore associato maggiore di zero.*

3.2.2 Catena di Markov

Si considera un grafo orientato pesato. I pesi sugli archi rappresentano la probabilità di transizione da una sorgente a una destinazione, la somma dei pesi degli archi uscenti da ogni nodo è uno. Possiamo al solito rappresentare il grafo con una matrice, dove la somma di ogni riga è uno.

Per calcolare la probabilità di esser in un nodo si sommando le probabilità di essere in uno dei predecessori, moltiplicata per il peso dell'arco verso il nodo stesso. Il processo appena descritto corrisponde al moltiplicare la probabilità attuale per la matrice del grafo.

La distribuzione stabile si calcola quindi iterando la moltiplicazione della matrice per una distribuzione iniziale. La distribuzione stabile contiene la probabilità, interrompendo una camminata casuale sul grafo, di trovarsi un determinato nodo.

Esistono casi strani, per esempio due nodi connessi tra loro, in tal caso la massa di probabilità fa ping-pong tra i due nodi, non portando a un risultato utile.

3.2.3 PageRank

L'idea è quella di avere un random surfer nel web, ad ogni passo si tira una moneta di peso α e se esce testa si visita una pagina casuale, altrimenti si procede nel grafo del web. Si procede quindi come una catena di Markov classica ma ogni tanto si salta. In realtà, si può anche fare qualcosa di più fine riguardo al saltare casualmente, ovvero, potrei muovermi verso siti che trattano lo stesso argomento di quello attuale.

Al solito, quello che si vuole trovare è il vettore stabile di questa catena, che è l'autovettore dominante. L'introduzione del salto casuale corrisponde di fatto ad aggiungere tutti gli archi mancanti al grafo, rendendolo una cricca.

3.3 Metodi computazionali

Calcolo autovettore Per calcolare un autovettore si parte da un array iniziale r_0 , quello unitario per esempio, oppure nel caso di PageRank tutto a $\frac{1}{n}$. moltiplico per la matrice M , fino a che due risultati consecutivi differiscono, in qualche norma, di una quantità minore di ϵ , ovvero $\|r_i - r_{i-1}\| < \epsilon$.

La matrice M non è in memoria ma memorizzata in memoria in qualche modo, per esempio triplette $(i, j, M[i][j])$ ordinate.

Assumendo che la matrice arrivi colonna per colonna, quello che si fa è moltiplicare il vettore r_i attuale per la colonna, volendo in multiprocessing, assumendo che la variabile che mantiene il risultato sia incrementabile atomicamente. È necessario però avere il grado dei predecessori, per esempio per PageRank, si deve mantenere quindi il grado per ogni riga in memoria.

Se la matrice arrivasse per riga, dovrei calcolare il prodotto riga colonna a pezzi, mantenendo i risultati parziali in un vettore.